

N° d'ordre : 03/2007-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER

En : **Mathématiques**
Spécialité : **Probabilités -Statistique**

Par : Dalila MADANI

Sujet :

*Echantillonnage dans les processus classiques, périodiques et GARCH :
Estimation spectrale*

Soutenue le : 03/ 03/ 2007, devant le Jury composé de :

Monsieur K. BOUKHETALA	USTHB	Professeur	Président
Madame H. GUERBYENNE	USTHB	Chargée de Recherche	Directrice de thèse
Monsieur K. KHALDI	U. BOUMERDES	Maître de Conférence	Examineur
Madame I. BOUCHEMAKH	USTHB	Maître de Conférence	Examinatrice
Monsieur A. AKNOUCHE	USTHB	Docteur en Mathématiques	Examineur

TABLE OF CONTENTS

LIST OF TABLES	3
LIST OF FIGURES	4
0.1 Introduction Générale	6
0.2 Apport et présentation de la thèse	
I GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCESSUS ALÉATOIRES	13
1.1 Introduction	14
1.2 Notations et Définitions	14
1.3 Processus de Poisson associé à une mesure de comptage	19
1.4 Continuité , intégration et différentiation des processus du second ordre	21
1.4.1 Hypothèses de continuité	21
1.4.2 Intégration d'un processus aléatoire	22
1.4.3 Différentiation du processus du second ordre	23
1.5 Equations différentielles stochastiques	27
1.6 Caractéristiques d'un processus stationnaire au second ordre	29
1.6.1 Analyse spectrale des processus stationnaires au second ordre	31
1.6.2 Relation entre la densité spectrale et la fonctions d'autocovariance	33
1.7 Les processus ARMA	35
1.7.1 Hypothèses et Définitions	35
1.7.2 Propriétés des processus ARMA	37
1.8 Processus périodiquement corrélés	38
1.8.1 Hypothèses et Définitions	38
1.8.2 Propriétés des processus périodiquement corrélés	40
1.9 Processus ARCH	43
1.9.1 Introduction	43
1.9.2 Hypothèses et Définitions	43
1.9.3 Propriétés des processus ARCH	44
1.10 Processus GARCH	44
1.10.1 Hypothèses et Définitions	44
1.10.2 Propriétés des processus GARCH	45

1.11	Application Numérique	46
1.12	Conclusion	48
II	ECHANTILLONNAGE ALÉATOIRE DES PROCESSUS DU SECOND ORDRE	49
2.1	Schémas d'échantillonnage aléatoire	50
2.1.1	Echantillonnage périodique avec jitter	50
2.1.2	Echantillonnage aléatoire associé à une mesure de comptage	51
2.1.3	Echantillonnage aléatoire associé à une marche aléatoire	52
2.2	Caractéristiques des processus stationnaires au second ordre échantillonnés aléatoirement	53
2.2.1	Caractéristiques des processus stationnaires échantillonnés aléatoirement	54
2.2.2	Caractéristiques des processus ARMA échantillonnés aléatoirement	55
2.2.3	Effet aliasing et reconstitution du spectre	59
2.3	Application numérique	66
III	ESTIMATION SPECTRALE DANS LES PROCESSUS PÉRIODIQUEMENT CORRÉLÉS	79
3.1	Introduction	80
3.2	Estimation avec échantillonnage continu	82
3.3	Estimation avec échantillonnage périodique	94
3.3.1	Premier cas $\frac{T}{h} = N$ est un entier positif	95
3.3.2	Second cas $\frac{T}{h}$ n'est pas un entier	98
3.4	Estimation avec échantillonnage aléatoire	100
3.4.1	Hypothèses et notations	100
3.4.2	Cas d'échantillonnage poissonnien	104
3.4.3	Estimation spectrale pour les processus périodiquement corrélés	106
3.5	Application numérique	117
IV	ECHANTILLONNAGE ALÉATOIRE POUR DES PROCESSUS ARCH135	
4.1	Définitions et notations	136
4.2	Propriétés d'un modèle GARCH(p,q)	137
4.3	Echantillonnage aléatoire sur les processus ARCH(p)	139

LIST OF TABLES

LIST OF FIGURES

Remerciements

Je remercie Madame Hafida Guerbyenne, chargée de recherche, qui a dirigé cette thèse, et m'a guidée pas à pas pour l'élaboration de ce travail, qu'elle soit chaleureusement remerciée. Je voudrais la remercier davantage de son extrême disponibilité et sa gentillesse. Je lui exprime ma gratitude pour sa patience.

Je remercie Monsieur K. Boukhetala qui m'a fait l'honneur de présider le jury; je tiens à lui exprimer mes vifs remerciements

Je remercie sincèrement Monsieur A. Aknouche qui a accepté d'être membre du jury et pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Je remercie sincèrement Monsieur K. Khaldi d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'être membre du jury.

Je remercie Madame I. Bouchemakh d'avoir accepté d'être membre du jury. Qu'elle en soit sincèrement remerciée.

Je remercie sincèrement Monsieur M. Bentarzi pour ses constants encouragements.

Je n'oublie pas de remercier tous mes collègues du Département de Probabilités statistiques qui m'ont soutenu par leur amitié.

Enfin, je remercie les nombreux amis pour leur soutien fidèle qui m'a aidé à surmonter bien des difficultés

0.1 Introduction Générale

L'analyse des séries temporelles occupe, tant dans le domaine théorique que dans les applications pratiques une place importante. Sa structure essentielle réside en une dépendance des phénomènes étudiés vis-à-vis du temps. Il est peu de disciplines qui ne soient confrontées à l'étude des phénomènes évoluant dans le temps et qu'on désire décrire, analyser, interpréter ou prévoir.

De nombreux travaux existent dans le domaine temporel depuis, en particulier, les travaux de Yule (1927). Box et Jenkins (1970) dans leur fameux ouvrage, ont popularisé la méthode qui conduit à la construction de modèles représentant le processus générateur de données. Pour ces techniques, les données sont enregistrées en temps discret, et le processus sous-jacent est généralement solution d'une équation aux différences stochastique. Les modèles classiques à coefficients constants ont été étendus à des modèles plus généraux à coefficients dépendant du temps où plus particulièrement à coefficients périodiques du temps.

D'autre part, de nombreuses séries de données sont disponibles en temps continu et se présentent sous la forme d'une courbe continue (électrocardiogramme, enregistrement de sons, sismographe, etc...). Souvent ces types de processus à temps continu, sont solution stationnaire d'une équation différentielle stochastique.

En pratique nous utilisons un nombre fini d'observations de la série, en particulier, pour la construction d'estimateurs pour un problème donné. L'idée première qui pourrait s'imposer est de choisir des données équi-espacées pour l'étude de certaines grandeurs d'intérêt ; Shannon a montré que ce choix conduit à ce qui est appelé un repliement de spectre ou effet *aliasing* sous le non respect de la condition dite de Nyquist.

Donc, comment choisir les observations les plus appropriées afin de préserver l'information contenue dans la série initialement observée et ainsi pouvoir la reconstituer ?

Ce problème général inclut à la fois la discrétisation du temps pour un processus à temps continu et le cas d'un processus à temps discret observé de manière soit irrégulière, soit régulière; souvent lorsque nous pouvons choisir un échantillon, le choix du critère

d'optimalité est très important (cf. Deniau (1989)).

Physiquement, un échantillonnage n'est jamais exactement périodique. On peut admettre par exemple que deux sortes d'accidents principaux peuvent se produire : la gigue (jitter), où les instants d'échantillonnage sont décalés de manière aléatoire et, l'effacement (skipping), où certains instants sont supprimés.

Pour parer à cela, de nombreux travaux et résultats existant sont en faveur d'autres schémas d'échantillonnage tel que l'échantillonnage poissonien qui permet la suppression de l'effet aliasing (Shapiro et Silverman (1960), Masry (1971, 1978a, 1978b, 1978c). Oppenheim (1983) donne, en particulier une condition sur la loi d'échantillonnage dans le cadre d'une marche aléatoire, pour que l'application qui, à la fonction de covariance du processus initial associe celle du processus échantillonné soit injective.

Les schémas d'échantillonnage aléatoires proposés jusqu'à présent n'étaient pas souvent utilisés. La raison est probablement due aux difficultés de simuler le hasard, d'apprécier le coût relatif de l'échantillonnage aléatoire dans le coût global de l'étude statistique, d'évaluer le gain par rapport aux procédés habituels d'échantillonnage (Oppenheim (1983)). Mais, néanmoins, l'intérêt pour ce type de schémas s'est accru durant cette dernière décennie avec les développements des moyens numériques et techniques. Les processus ponctuels stationnaires au second ordre, sont à la base des différentes procédures d'échantillonnage aléatoire des processus stochastiques. La théorie de ces processus ponctuels fut graduellement développée, en particulier, par Parzen (1965), Beutler et Leneman (1966), Delay et Vere-Jones (1972), Brillinger (1975). Les schémas d'échantillonnage, les plus communément utilisés, et qui s'appuient sur ces processus ponctuels, sont le schéma d'échantillonnage périodique, le schéma d'échantillonnage dit avec jitter et le schéma d'échantillonnage aléatoire et plus précisément poissonien (Shapiro et Silverman (1960), Beutler et Leneman (1966), Beutler (1970), Masry (1971, 1978a, 1978b), Masry et al (1978).

Les processus aléatoires stationnaires au second ordre jouent un rôle important dans la modélisation mathématique des phénomènes concrets.

Il est bien connu que l'utilité des représentations des séries dans les deux domaines fréquentiel et temporel réside essentiellement dans la recherche des périodicités cachées pour

une série d'observations (Schuster in Chattfield (1975)); mais, l'analyse spectrale telle que présentée actuellement considère l'estimation du spectre sur l'ensemble de toute la gamme de fréquences (Chattfield (1975)). Fondées sur les transformées de Fourier, des techniques, utilisant des outils mathématiques, sont largement utilisées par des chercheurs, en particulier par les ingénieurs en traitement de signal, les physiciens, météorologues, et autres.

Le concept traditionnel d'échantillonnage alias free fut introduit en premier par Shapiro et Silverman où une certaine classe de schémas d'échantillonnage aléatoires des instants possède la propriété d'être *alias free*; Beutler(1970) donne une formulation générale du problème d'échantillonnage aléatoire alias free et présente des critères pour un échantillonnage d'être alias free et, ceci, relativement à des familles de distributions spectrales. Par la suite, Masry (1971) construit des classes spécifiques de schémas d'échantillonnage et établit des propriétés pour ces schémas d'être alias free.

Au début, pour certains travaux, fut posé la question : la propriété d'être *alias free*, pour un schéma donné, implique- elle que la densité spectrale puisse être estimée de façon consistante à partir des observations $(X(t(k)))_k$?

Le pionnier en ce domaine est Masry (1978) dont l'objectif fut double. D'abord, il montra que l'ancien concept d'échantillonnage *alias free*, fondé sur une classe de densités spectrales vérifiant la propriété statistique de complétion restait néanmoins déficient dans le sens où l'estimateur de la densité spectrale n'est pas nécessairement consistant. Il proposa donc une autre définition de l'échantillonnage *alias free*, qui se résume dans la condition suivante : $\nu(u) = \frac{C_N(u)}{\alpha^2 + C_N(u)} \in L^1$ où α l'intensité moyenne du processus ponctuel- par exemple, dans le cas d'un processus de Poisson, α est le taux de la loi de probabilité de ce processus-, et C_N .est la fonction densité de covariance du processus ponctuel d'échantillonnage.

Sous certaines hypothèses de régularité du schéma d'échantillonnage, cette nouvelle définition a permis la construction d'un estimateur consistant de la densité spectrale. Ce nouveau concept d'échantillonnage Alias free fut motivé par les travaux de Brillinger sur l'analyse spectrale des fonctions stationnaires d'intervalles (1972) et les travaux de Beutler (1966).

L'inférence statistique, à partir d'une unique réalisation, est en général raisonnablement

possible dans le cas stationnaire. C'est ainsi que l'analyse spectrale des séries temporelles est souvent basée sur l'hypothèse de stationnarité de ces séries, c'est à dire celles dont les propriétés statistiques sont indépendantes de l'instant d'observation. Mais, pour de nombreuses séries d'observation, la stationnarité est physiquement inacceptable. Donc, quelle démarche faut-il adopter dans le cas de processus non stationnaires? On pourrait considérer ceux-ci comme "stationnaires par morceaux" ou quasi stationnaires de façon à conserver la méthodologie classique du cas stationnaire, en travaillant sur des fenêtres étroites. Ce procédé présente un intérêt dans le domaine temporel, mais en limite la résolution dans le domaine fréquentiel. La seconde alternative consisterait à développer une méthodologie propre au cas de non stationnarité en substituant à la transformée de Fourier une autre représentation temps -fréquence décrivant à la fois l'évolution temporelle et le contenu fréquentiel de la série non stationnaire. Ainsi, la considération d'une classe plus grande que celle des processus du second ordre, s'est avérée nécessaire .

D'autres travaux existent (Kponsou (1997)) en ce qui concerne l'estimation spectrale pour des processus à accroissements stationnaires lorsque le schéma est poissonnien.

Il s'avère que, quelque fois, cette hypothèse de stationnarité ne soit plus portée sur les séries elles mêmes, mais sur les coefficients de Fourier, lorsque le développement en série de Fourier est possible. C'est par exemple le cas des processus périodiquement corrélés qui, manifestement, ne sont pas des processus stationnaires et dont la fonction d'autocovariance est une fonction périodique du temps.

Hurd (1989) s'est intéressé à l'analyse non paramétrique dans des processus périodiquement corrélés. et à la représentation des fonctions de covariance de processus à temps continu, périodiquement corrélés à l'aide de séries de Fourier. Il montre que l'estimateur classique des covariances stationnaires, fondé sur une portion de trajectoire, peut être modifié pour fournir un estimateur, consistant en moyenne quadratique, des coefficients de la représentation en série de Fourier. Seulement, les calculs numériques des estimateurs nécessitent la discrétisation du processus considéré. La question est posée : comment effectuer cette discrétisation de façon à conserver les propriétés de l'estimateur de la densité.? Ainsi, il est préférable d'estimer les caractéristiques du processus à partir d'échantillons discrets

(périodique ou aléatoire). Monsan (1994) s'est inspiré des travaux de Hurd (1989) et de Masry (1978) pour appliquer l'échantillonnage aléatoire et l'échantillonnage périodique au cas des processus non gaussiens périodiquement corrélés. Il montre que, pour ces processus périodiquement corrélés, l'échantillonnage périodique conduit également à un effet aliasing. Pour l'échantillonnage aléatoire, il compare les qualités des deux estimateurs proposés des fonctions de densités spectrales qui sont les transformées de Fourier des coefficients de Fourier de la fonction de covariance du processus. Makagon et Steinhaus (2000a, 2000b) ont établi une caractérisation du spectre des processus périodiquement corrélés et obtenu une correspondance bi-univoque entre les processus périodiquement corrélés localement de carré intégrable et une certaine classe de processus stationnaires de dimension infinie.

Ces travaux ont été étendus au cas de processus presque périodiques (Dehay (1994), Dehay et Hurd (1994), Swift (1991), Dehay et Monsan (2002)).

Dans l'analyse spectrale classique des processus stationnaires, la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction de covariance. Il est donc naturel de vouloir l'estimer par la transformée de Fourier de la covariance empirique, nous nous intéressons principalement aux schémas d'échantillonnage poissonniens dans le cadre de l'estimation de la fonction densité spectrale, d'une part, pour les processus stationnaires et d'autre part, pour les processus périodiquement corrélés. Dans ce travail nous nous intéressons à l'estimation des ces fonctions densités spectrales et aux propriétés de consistance des estimateurs.

Il semble que les travaux de Kadi, Oppenheim et Viano (1994), Kadi et Mokaddem (1994) n'aient pas été étendus au cas de processus non linéaires et, en particulier, des processus *GARCH*. Par conséquent, nous nous sommes intéressées à en faire l'extension. Ceci fera l'objet du chapitre 4 où les cas particuliers de processus *ARCH*(1) et *ARCH*(2) seront donnés et démontrés dans le détail.

0.2 *Apport et présentation de la thèse*

Chapitre1 /Généralités sur les Processus Aléatoires

Dans le premier chapitre nous présentons les outils mathématiques fondamentaux sur les processus aléatoires aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. Nous avons présenté certains concepts relatifs aux processus *ARMA*, aux processus périodiquement corrélés et aux processus *GARCH*. Dans la dernière section de ce chapitre et, en se basant sur l'algorithme de Higham (2001), nous faisons une simulation d'un mouvement Brownien, le programme informatique étant écrit en langage Matlab.

Chapitre2 /Echantillonnage aléatoire des processus du second ordre.

Dans ce chapitre, nous avons élaboré une synthèse des travaux de Shapiro et Silverman (1960), Beutler (1966), Masry (1972,1978), Oppenheim (1983), Niemi (1984), Kadi (1994) concernant l'échantillonnage dans des processus stationnaires au second ordre à temps discrets et continus.

Une étude de simulation a été menée pour étudier les propriétés des estimateurs obtenus. Nous avons établi et précisé, en particulier, que l'estimateur obtenu à l'aide de l'échantillonnage aléatoire converge en moyenne quadratique.

Chapitre3 / Estimation spectrale sur les processus aléatoires périodiquement corrélés.

Ce chapitre s'articule autour du concept d'estimation spectrale pour les processus périodiquement corrélés. L'estimation à partir d'échantillons à temps continu, l'estimation basée sur un échantillonnage périodique, l'estimation basée sur un échantillonnage aléatoire poissonnien sont présentées. Des estimateurs des fonctions de densités spectrales associées au processus périodiquement corrélés sont définis et leurs propriétés statistiques sont données.

Une simulation intensive a été menée pour diverses tailles d'échantillons et diverses valeurs des paramètres. Le critère d'optimalité retenu est le MISE (Mean Integrated Square Error) .

Chapitre4 / Echantillonnage aléatoire des processus ARCH

Dans ce chapitre nous avons fait l'extension des travaux de Oppenheim (1984), Kadi (1994), Oppenheim, Kadi et Viano (1994) dont le cadre de recherche est le modèle *ARMA*

classique en temps discret au cas des modèles *ARCH*. nous avons établi et montré que

pour un processus *ARCH*(1) initial, le processus échantillonné est également un processus *ARCH*(1).

Pour un processus *ARCH*(2) initial, le processus échantillonné est un processus *GARCH*(1, 2).

Pour un processus *GARCH*(p, q) initial, le processus échantillonné est un processus *GARCH*($m, \max(m - 1, 0)$)

où m est le nombre d'images distinctes des pôles distincts par la loi d'échantillonnage de l'opérateur autorégressif.

CHAPTER I

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCESSUS ALÉATOIRES

Chapitre 1

Généralités sur les processus aléatoires

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de définir quelques notions essentielles sur les processus aléatoires afin d'être en mesure de les utiliser dans les chapitres suivants. Nous mettons l'accent sur quelques classes de processus particulièrement intéressantes, car basées sur des hypothèses simplificatrices relativement réalistes dans de nombreux cas pratiques (processus à accroissements indépendants, processus à accroissements stationnaires, processus gaussiens, processus de Wiener, processus ARMA, processus périodiquement corrélés, et les processus ARCH).

Dans les trois premières sections, nous mettons l'accent surtout sur les processus à temps continu, ce qui n'empêche en rien aux mêmes techniques d'être appliquées pour les processus à temps discret.

1.2 Notations et Définitions

Un processus aléatoire est un phénomène dépendant du hasard et d'un autre paramètre qui est souvent le temps (discret ou continu) ou une coordonnée spatiale ou une autre variable. Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une fonction de $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow E$ (E est l'ensemble des états)

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega),$$

- Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X(t, \omega)$.
- En revanche, pour ω fixé, c'est à dire pour une évolution particulière du système, les états successifs sont représentés par la fonction $t \rightarrow X(t, \omega)$ qu'on appelle *trajectoire*.

Nous sommes conduits à la définition suivante

Définition 1

Soit I un ensemble d'indices. On appelle processus stochastique défini sur I à valeurs dans l'espace des états mesurable (E, ε) , le quatre-uplet $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in I})$ constitué d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dit espace de base et d'une famille $(X_t)_{t \in I}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, ε) .

Remarque 2

Nous noterons par la suite le processus par $\{X(t), t \in I\}$.

Dans ce qui suit, $I \subseteq \mathbb{R}^+$ ou $I = \mathbb{Z}$, selon que le processus est à temps continu ou à temps discret.

Remarque 3

Une façon de décrire un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est de spécifier la loi de probabilité conjointe des variables aléatoires $X(t_1), \dots, X(t_n)$, $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pour spécifier la loi de probabilité conjointe des n variables aléatoires $X(t_1), \dots, X(t_n)$ nous déterminons

(a) la loi de probabilité conjointe, définie par

$$\forall t_1, \dots, t_n \in I, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

ou bien

(b) la fonction caractéristique conjointe, définie par

$$\forall u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}; \forall t_1, \dots, t_n \in I$$

$$\begin{aligned} \varphi_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(u_1, \dots, u_n) &= E[\exp i(u_1 X(t_1) + \dots + u_n X(t_n))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n) dF_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Définition 4

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est dit processus du second ordre si $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$

Définition 5

Soit $\{X(t), t \in I\}$ un processus du second ordre .

La fonction moyenne $m_X(t)$ du processus est définie par :

$$\forall t \in I \quad m_X(t) = \mathbb{E}(X(t)) \quad . \quad (1.2.1)$$

La fonction de covariance $C_X(s, t)$ est définie par : $\forall s, t \in I$

$$C_X(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = \mathbb{E}(X(s)X(t)) - \mathbb{E}(X(s)).\mathbb{E}(X(t)) \quad (1.2.2)$$

Lemme 6

$$1/ \quad \forall t, s \in I \quad \text{nous avons} \quad C_X(t, s) \leq \sqrt{|C_X(t, t)|} \sqrt{|C_X(s, s)|}$$

2/ La fonction de covariance $C_X(\cdot)$ est symétrique, définie positive.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que l'ensemble des indices I est invariant par translation.

Définition 7

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est dit *strictement stationnaire* si:

$$\forall t_1, \dots, t_k \in I, \forall h \in I, \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$P(X(t_1 + h) \leq x_1, \dots, X(t_k + h) \leq x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Définition 8

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est dit *stationnaire au second ordre* si :

- $\forall t \in I \quad \mathbb{E}[X(t)^2] < \infty,$
- $\forall t \in I \quad \mathbb{E}[X(t)] = m \quad \text{indépendante de } t,$
- $\forall t, h \in I \quad \text{Cov}[X(t), X(t+h)] = \mathbb{E}[(X(t+h) - m)(X(t) - m)] = C_X(h).$

$C_X(h)$ ne dépend que de l'écart entre les instants t et $t+h$.

Définition 9

Un processus $\{X(t), t \in I\}$ est appelé *un bruit blanc* si:

$$\begin{aligned} & \bullet \forall t \in I, \quad \mathbb{E}[X(t)] = 0, \\ & \bullet \forall t, h \in I \quad \text{Cov}[X(t), X(t+h)] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

La première condition signifie tout simplement que l'espérance du processus est indépendante du temps, et de plus qu'elle est nulle. La seconde condition implique l'indépendance de la fonction d'autocovariance par rapport au temps (stationnarité au second ordre). Mais elle implique en outre que les termes d'autocovariance (pour $h \neq 0$) sont tous nuls, seule la variance est non nulle.

En outre, nous parlerons de *bruit gaussien* lorsque la loi de probabilité du processus est elle même gaussienne .

Nous préciserons par la suite la construction de ce type de processus, bruits blancs, qui dérivent des processus de Wiener .

Définition 10

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est dit à *accroissements indépendants* si

$$\forall t_0, \dots, t_n \in I, t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

les variables aléatoires $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendantes.

Définition 11

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est dit à *accroissements stationnaires* si

$$\forall t_1, t_2 \in I, \forall h \in I,$$

les variables aléatoires $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ ont la même loi de probabilité.

(la loi de probabilité des accroissements $X(t + h) - X(t)$ est indépendante de $t, \forall h \in I$).

Dans la théorie des probabilités un des plus importants processus à accroissements indépendants et stationnaires, est le processus de Wiener, appelé également mouvement Brownien .

Définition 12

Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *processus de Wiener* si

• $\{X(t), t \geq 0\}$ est accroissements indépendants et stationnaires ,

- $\forall t > 0, X(t)$ est de loi de probabilité gaussienne ,
- $\forall t > 0, E[X(t)] = 0$.

Définition 13

Un processus aléatoire $\{X(t), t \in I\}$ est un *processus gaussien* si toute combinaison linéaire de variables aléatoires $X(t), t \in I$, est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 14

Un processus aléatoire $\{N(t), t \geq 0\}$ à *valeurs entières* est dit être un *processus de Poisson* de paramètre λ si

- $\{N(t), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants stationnaires,
- pour $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N(t) - N(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

Propriétés

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ alors nous avons :

- 1) $P[N(t) - N(s) = k] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$.
- 2) $E[N(t) - N(s)] = E[N(t - s)] = \lambda(t - s)$.
- 3) $Var[N(t) - N(s)] = Var[N(t - s)] = \lambda(t - s)$.

4) Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si et seulement si les temps d'inter-occurences suivent une loi exponentielle de paramètre λ .

1.3 Processus de Poisson associé à une mesure de comptage

Comme nous serons souvent amenés à utiliser des processus ponctuels dans les chapitres suivants, nous avons jugé nécessaire de rappeler les notions fondamentales s'y attachant.

Notations

Les instants d'occurrence d'un processus aléatoire forment une suite de variables aléatoires positives $(T_n)_{n \geq 1}$. Par définition, la trace sur $\mathbb{R}^+$ de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est un processus ponctuel.

Nous notons N sa fonction de comptage définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}.$$

Remarque 15

La connaissance de la loi du processus $(T_n)_{n \geq 1}$ entraîne celle du processus $N = (N(t))_{t \geq 0}$.

$$P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) = P(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2, \dots, N(t_n) \geq n).$$

Il est donc équivalent de se donner la loi du processus ponctuel par la loi des instants $(T_n)_{n \geq 1}$ ou celle de N .

Remarque 16

Dans ce qui suit, nous désignerons par processus de Poisson, indifféremment, le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ ou le processus des instants d'occurrence $(T_n)_{n \geq 1}$.

Proposition 17

Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ un processus de Poisson homogène de paramètre λ , et de fonction de comptage N alors:

- 1/Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $N(t)$ est de loi de Poisson de paramètre $\lambda.t$,
- 2/pour tout $n > 0$, la loi conditionnelle de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant l'événement $\{N(t) = n\}$ a pour densité

$$\frac{n!}{t^n} 1_{\{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t\}} \text{ par rapport à la mesure de Lebesgue.}$$

c'est la loi de la statistique d'ordre de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$.

1.4 Continuité , intégration et différentiation des processus du second ordre

Dans cette section nous donnons les principes fondamentaux de l'intégration et de la différentiation des processus aléatoires continus du second ordre ($I \subseteq \mathbb{R}^+$).

Dans divers traitements des processus continus du second ordre, il est bien connu que l'on suppose que leur moyenne et leur fonction de covariance sont continues et lorsque c'est nécessaire, des hypothèses concernant la continuité de ces processus eux mêmes sont ajoutées.

1.4.1 Hypothèses de continuité

1.4.1.1 Continuité de la fonctions moyenne et de la fonction de covariance

Soit $\{X(t), t \in I\}$ un processus continu, où I est un intervalle.

Nous supposons dans cette section que

- (i) $m(t)$, est une fonction continue en t , $\forall t \in I$
- et
- (ii) $C_X(s, t)$, est continue en s et t $\forall s, t \in I$

1.4.1.2 Continuité des fonctions réalisations

Pour chaque ω fixé dans Ω , $X(t, \omega)$ est une fonction réalisation.

Nous faisons, de plus, les hypothèses suivantes afin de pouvoir définir les notions qui vont suivre.

- (iii) $X(t, \omega)$, $t \in I$, fonction continue en t
- (iv) $X(s, \omega)$ a une limite finie quand $s \rightarrow t$ à gauche.
- (v) $X(s, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ quand $s \rightarrow t$ à droite, i.e., $X(s, \omega)$ est une fonction continue à droite en s .
- (vi) $X(t, \omega), t \in I$, admet un nombre fini de points de discontinuité dans tout sous intervalle borné de I .

Remarque 18

Sous les deux hypothèses (i) et (ii), le processus $\{X(t), t \in I\}$ est continu en moyenne quadratique

$$i.e \quad \lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}(X(s) - X(t))^2 = 0, \quad t \in I \quad .$$

1.4.2 Intégration d'un processus aléatoire

Une illustration simple où l'intégration d'un processus aléatoire paraît naturelle est lorsque nous considérons $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stationnaire au second ordre, ayant une moyenne m_X constante mais inconnue ;

Si on observe le processus sur une portion $a \leq t \leq b$, un estimateur naturel de cette moyenne sera donné par

$$\hat{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b X(t) dt. \quad (1.4.1)$$

Soit $\{X(t), t \in I\}$ un processus du second ordre, continu, vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iv) et (vi) définies dans la section précédente. Soit $f(t)$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. En utilisant le théorème de la mesure, l'intégrale suivante définie comme fonction de ω

$$\int_a^b f(t) X(t, \omega) dt \quad \text{est bien une variable aléatoire .}$$

Dans la proposition suivante nous donnons quelques propriétés de cette intégrale aléatoire, qui nous seront utiles dans les chapitres suivants .

Proposition 19

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus du second ordre , de moyenne m_X et de fonction de covariance C_X

1/ Si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) X(t, \omega) dt \right] = \int_a^b f(t) m_X dt \quad (1.4.2)$$

2/ Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement, alors

$$Cov \left[\int_a^b f(t) X(t, \omega) dt, \int_c^d g(t) X(t, \omega) dt \right] = \int_a^b f(s) \left(\int_c^d g(t) C_X(s, t) dt \right) ds \quad (1.4.3)$$

En application de cette dernière relation aux processus de Wiener, nous obtenons le résultat résumé dans le lemme suivant

Lemme 20

Soit $W(t), t \in \mathbb{R}$ un processus de Wiener de paramètre σ^2

Soient f et g deux fonctions continuellement différentiables sur l'intervalle borné $[a, b]$

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f'(t) (W(t) - W(a)) dt \int_a^b g'(t) (W(t) - W(a)) dt \right] = \sigma^2 \int_a^b (f(t) - f(b))(g(t) - g(b)) dt. \quad (1.4.4)$$

(cf. Hoel *et al* (1972)).

1.4.3 Différentiation du processus du second ordre

Soit $\{X(t), t \in I\}$ un processus du second ordre, continu, vérifiant les hypothèses (i), (ii);

Il est dit processus différentiable s'il existe un processus $\{Y(t), t \in I\}$, vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iv) et (vi) de la section (1.4.1) et tel que pour $t_0 \in I$ on a :

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t Y(s) ds \quad t \in I. \quad (1.4.5)$$

Le processus $\{Y(t), t \in I\}$ est dit dérivé du processus $\{X(t), t \in I\}$ et noté par $X'(t), t \in I$. D'où

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t X'(s) ds \quad t \in I. \quad (1.4.6)$$

A partir de cette dernière relation, le processus $X(t)$ est continu et, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}X(t) = X'(t) \quad (1.4.7)$$

relation vraie à l'exception des points de discontinuité du processus dérivé $X'(t)$.

Nous avons également :

$$m_X(t) - m_X(t_0) = \int_{t_0}^t m_{X'}(s) ds \quad (1.4.8)$$

où

$$m_{X'}(t) = \frac{d}{dt}m_X(t), \quad t \in I \quad (1.4.9)$$

La proposition suivante donne la relation importante entre la fonction de covariance du processus dérivé $X'(t)$ et la fonction de covariance du processus $X(t)$.

Proposition 21

Soit $X(t), t \in I$, un processus du second ordre, différentiable alors

$$C_{X'}(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C_X(s, t), \quad s, t \in I \quad (1.4.10)$$

Dans le cas stationnaire nous avons

Proposition 22

Soit $X(t), t \in \mathbb{R}$, un processus stationnaire au second ordre, et différentiable alors

1/

$$m_{X'}(t) = 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.4.11)$$

et

$$C_{X'}(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C_X(t - s) = -C_X''(t - s). \quad (1.4.12)$$

Ce qui veut dire que le processus dérivé est aussi stationnaire au second ordre et

$$C_{X'}(t) = -\frac{d^2}{dt^2} C_X(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

(la fonction de covariance $C_X(t), t \in \mathbb{R}$, est deux fois différentiable)

2/ le processus $\{X(t), t \in I\}$ et le processus dérivé $\{X'(t), t \in I\}$ ne sont pas corrélés .

Proposition 23

Soit $\{X(t), t \in I\}$ un processus du second ordre , différentiable alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right)^2 = 0, \forall t \in I \quad (1.4.13)$$

i.e : les variables aléatoires $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ convergent en moyenne quadratique vers $X'(t)$.

Remarque 24

Nous faisons remarquer que les processus de Wiener ne sont pas différentiables du fait que :

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} - W'(t) \right)^2 = 0 \\ \text{alors} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right)^2 = \mathbb{E}(W'(t))^2 \\ \text{or} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right)^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{|h|} = \infty. \end{aligned}$$

Soit $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus de Wiener de paramètre σ^2 , et f une fonction continuellement différentiable sur un intervalle borné $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Puisque le processus de Wiener n'est pas différentiable, l'intégrale

$$\int_a^b f(t)W'(t)dt \quad \text{qui s'écrit encore} \quad \int_a^b f(t)dW(t) \quad \text{n'existe pas au sens usuel.}$$

Cependant, il est possible de donner un sens à cette intégrale de la façon suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \left(\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \right) dt \quad \text{quand elle existe, où}$$

$$\int_a^b f(t) \left(\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \right) dt = \left[f(t) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} W(s) ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} W(s) ds \right) dt$$

qui converge vers $\left[f(t)W(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt$ et donc

$$\int_a^b f(t)dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)dt. \quad (1.4.14)$$

ainsi la dérivée du processus de Wiener est appelée *bruit blanc*.

La notion de bruit blanc est utilisée afin de définir certaines équations différentielles stochastiques, qui sont souvent utilisées dans les sciences physiques et certaines branches d'*engineering*.

Proposition 25

Soit $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus de Wiener de paramètre σ^2 .

Soient f et g deux fonctions continuellement différentiables sur le même intervalle borné $[a, b]$ alors :

1/

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dW(t) \int_a^b g(t)dW(t) \right] = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (1.4.15)$$

2/

$$\text{Var} \left[\int_a^b f(t)dW(t) \right] = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)dt. \quad (1.4.16)$$

Proposition 26

Soit $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus de Wiener de paramètre σ^2 .

1/Si f et g sont deux fonctions continuellement différentiables sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement où $a \leq b \leq c \leq d$ alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW(t) \int_c^d g(t) dW(t) \right] = 0 \quad (1.4.17)$$

1/ Si f et g sont deux fonctions continuellement différentiables sur $[a, b]$ et $[a, c]$ respectivement où $a \leq b \leq c$ alors

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW(t) \int_a^c g(t) dW(t) \right] = \sigma^2 \int_a^b f(t) g(t) dt. \quad (1.4.18)$$

1.5 Equations différentielles stochastiques

Les processus de Wiener ont été introduits comme modèle pour les mouvements de particules sujets à un bombardement de molécules. Cependant, l'utilisation des équations différentielles stochastiques peut aussi nous donner d'autres modèles pour des processus physiques tels que, par exemple :

$X(t)$ représentant la position à l'instant t d'une particule qui se déplace le long d'une ligne, $X'(t)$ la vitesse et $X''(t)$ l'accélération de la particule à l'instant t . Soit m la masse de la particule, $F(t)$ la force d'action sur cette particule.

La loi de Newton nous donne $F(t) = mX''(t)$,

et en considérant trois types de forces

-) une force de frottement $-fX'(t)$ due à la viscosité, proportionnelle à la vitesse et de direction opposée.
-) une force de repos $-KX(t)$ (tel le ressort ou balancier) proportionnelle à la distance et dirigée vers l'origine.
-) une force extérieure $\zeta(t)$ indépendante du mouvement de la particule

ainsi

$$F(t) = -fX'(t) - KX(t) + \zeta(t) \quad \text{et donc} \quad mX''(t) + fX'(t) + KX(t) = \zeta(t)$$

si $\zeta(t)$ est un processus aléatoire ,

l'équation représente donc une équation différentielle stochastique du second ordre .

Equation différentielle du premier ordre

L'équation différentielle du premier ordre est donnée par

$$a_0X'(t) + a_1X(t) = W'(t) \quad (1.5.1)$$

où $a_0 \in \mathbb{R}^*$, $a_1 \in \mathbb{R}$ et $W'(t)$ est un bruit blanc de paramètre σ^2 ;

En posant $\alpha = -\frac{a_1}{a_0}$,

l'équation (1.5.1) admet comme solution le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ tel que :

$$X(t) = X(t_0) + \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^t \exp(\alpha(t-s)) dW(s) \quad (1.5.2)$$

Proposition 27

Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ donné par

$X(t) = X(t_0) + \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^t \exp(\alpha(t-s)) dW(s)$ solution de l'équation différentielle (1.5.1) est

1/ Un processus gaussien

2/ Sa moyenne est $m_X(t) = X(t_0) \exp(\alpha t)$.

3/ Sa fonction d'autocovariance $C_X(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a_0a_1} (\exp(\alpha|t-s|) - \exp(\alpha(s+t)))$.

en particulier sa variance $VarX(t) = \frac{\sigma^2}{2a_0a_1} (1 - \exp(2\alpha t))$.

Equations différentielles d'ordre n

L'équation différentielle d'ordre n est de type

$$a_0 X^{(n)}(t) + a_1 X^{(n-1)}(t) + \dots + a_n X(t) = W'(t). \quad (1.5.3)$$

où $a_0 \in \mathbb{R}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $W'(t)$ est un bruit blanc de paramètre σ^2 .

Theorème 28

Le processus $\{X(t), t \geq t_0\}$ défini par :

$$X(t) = \int_{t_0}^t h(t-s) dW(s) \quad \text{pour } t \geq t_0, \quad (1.5.4)$$

est solution de l'équation différentielle (1.5.3) satisfaisant les conditions initiales

$$X(t_0) = X'(t_0) = \dots = X^{(n-1)}(t_0).$$

où $h(t)$ est la fonction de réponse impulsionnelle, solution de l'équation différentielle homogène associée.

1.6 Caractéristiques d'un processus stationnaire au second ordre

Le premier résultat de cette section est essentiel en ce sens qu'il fournit une nouvelle caractérisation des fonctions hermitiennes de type positif.

Lemme 29

Soit $b : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b(n)| < \infty$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq m, n \leq N} b(n-m). \quad (1.6.1)$$

Preuve. ■

Partons de l'identité

$$\sum_{1 \leq m, n \leq N} b(n-m) = \sum_{|k| \leq N-1} b(k)(N-|k|)$$

D'où l'on déduit que

$$\Phi_N = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq m, n \leq N} b(n-m) \text{ s'écrit } \Phi_N = \int_{\mathbb{Z}} \Psi_N(x) \theta(dx),$$

où $\Psi_N(x) = 1 - \frac{|x|}{N}$, $x \leq N-1$, et où θ est la mesure complexe bornée sur $\mathbb{Z}$ définie par $\theta(x) = b(x)$. Sachant que $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(x) = 1$, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N = \int_{\mathbb{Z}} \theta(dx) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} b(x).$$

Proposition 30 (Herglotz)

Soit g une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit hermitienne de type positif est qu'il existe sur $U = [-\pi, +\pi[$, une mesure positive bornée μ telle que :

$$g(n) = \int_U e^{in\lambda} \mu(d\lambda) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.6.2)$$

la fonction g détermine μ de manière unique.

Preuve. ■

i) Si μ est une mesure positive bornée sur U , sa transformée de Fourier g définie en (1.6.2) vérifie $g(n) = \overline{g(-n)}$

et pour $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$

$$\sum_{l,m} x_l \overline{x_m} g(l-m) = \int_U \left| \sum_l x_l \exp(il\lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) \geq 0$$

ainsi g est hermitienne définie positive.

Démontrons la Réciproque lorsque $\sum_n |g(n)| < \infty$. Considérons $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \exp(-in\lambda),$$

h est bien définie et continue (comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues).

Appliquons le lemme 29 à la fonction $b(n) = g(n) \exp(-in\lambda)$,

$$2\pi h(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq m, n \leq N} b(n-m),$$

sachant que g est hermitienne de type positif, si l'on pose $x_n = \exp(-in\lambda)$,

$$\sum_{1 \leq m, n \leq N} b(n-m) = \sum_{1 \leq m, n \leq N} g(n-m) x_n \overline{x_m} \geq 0,$$

donc $h(\lambda)$ est réelle positive sur U .

Notons μ la mesure positive bornée sur U définie par $\mu(d\lambda) = h(\lambda)d\lambda$

$$\int_U \exp(ik\lambda) \mu(d\lambda) = \int_U \exp(ik\lambda) h(\lambda) d\lambda = \int_U \exp(ik\lambda) \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{|l| \leq N} g(l) \exp(-il\lambda) \right] \right) d\lambda,$$

le théorème de convergence dominée montre alors que

$$\int_U \exp(ik\lambda) \mu(d\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_U \exp(ik\lambda) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{|l| \leq N} g(l) \exp(-il\lambda) \right) d\lambda,$$

ce qui donne

$$\int_U \exp(ik\lambda) \mu(d\lambda) = g(k),$$

$$\text{car } \int_U \exp(i(k-l)\lambda) d\lambda = 2\pi \delta_k^l.$$

ii) Pour l'unicité, si μ_1 et μ_2 sont deux mesures bornées sur U telle que

$$\int_U \exp(in\lambda) \mu_1(d\lambda) = \int_U \exp(in\lambda) \mu_2(d\lambda) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

en utilisant le fait que les polynôme trigonométriques ($P(\lambda) = \sum_k c_k \exp(ik\lambda)$) permettent d'approcher uniformément les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $f(\pi) = f(-\pi)$

et par passage à la limite dans L^1 :

$$\int_U f(\lambda) \mu_1(d\lambda) = \int_U f(\lambda) \mu_2(d\lambda), \quad \forall f \in C_{\mathbb{R}}(U),$$

alors $\mu_1 = \mu_2$.

où $C_{\mathbb{R}}(U)$ désignant l'espace des fonctions réelles continue définies sur U .

1.6.1 Analyse spectrale des processus stationnaires au second ordre

En exploitant la transformation de Fourier, Wiener et Khintchine ont développé les bases théoriques pour le traitement des processus aléatoires. Ils ont démontré que la densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire au second ordre est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation, ce qui est résumé souvent dans une propriété d'injectivité où il sera dit équivalent de connaître la fonction d'autocovariance ou la densité spectrale.

Les procédures d'estimation fondées sur l'examen de la fonction d'autocovariance empirique seront associées à un travail dans le domaine temps, elles peuvent être fondées sur l'examen de la densité spectrale dans ce cas là on dira que l'on travaille dans le domaine

frequentiel .

Les processus aléatoires sont aussi des dits des signaux à puissance moyenne non nulle et par conséquent ils ne sont pas intégrables. Ils ne possèdent donc pas de transformées de Fourier plusieurs approches ont été établis pour construire la densité spectrale.

La densité spectrale d'un processus stationnaire peut être obtenue par l'approche suivante , considérons une réalisation $X(t)$ d'un processus réel $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$. Pour obtenir la densité spectrale de puissance , en passant par la transformée de Fourier , nous utiliserons une version tronquée de cette réalisation $X_A(t)$, définie par :

$$X_A(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } |t| \leq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi, $X(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} X_A(t)$.

cette version tronquée est définie et satisfait la condition :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_A(t)| dt < \infty.$$

La transformée de Fourier de $X_A(t)$ existe et est donnée par

$$G_A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_A(t) \exp(i\lambda t) dt$$

$$G_A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A X(t) \exp(i\lambda t) dt. \quad (1.6.3)$$

et sa densité spectrale est obtenue en utilisant le théorème de parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_A(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_A(\lambda)|^2 d\lambda \quad (1.6.4)$$

REMARQUES

1/ Pour une réalisation tronquée du processus aléatoire $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, la quantité suivante

$$P_A = \int_{-\infty}^{\infty} X_A(t)^2 dt = \int_{-A}^A X(t)^2 dt \quad \text{n'est pas en général une constante et constitue une}$$

variable aléatoire.

2/ L'énergie du processus aléatoire tronquée $X_A(t)$ est égale à la moyenne effectuée sur l'ensemble des réalisations tronquées, cette moyenne est donc donnée par :

$$E(P_A) = \int_{-A}^A E[X(t)^2] dt \quad (1.6.5)$$

qui est un terme constant .

3/ La puissance du processus aléatoire est :

$$\begin{aligned} E(P) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} E(P_A) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A E[X(t)^2] dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A E[|G_A(\lambda)|^2] d\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} E[|G_A(\lambda)|^2]$ est appelée la densité spectrale de puissance du processus aléatoire et sera

$$\phi(\lambda) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} E[|G_A(\lambda)|^2] \quad (1.6.6)$$

1.6.2 Relation entre la densité spectrale et la fonctions d'autocovariance

La relation entre la densité spectrale et les fonctions d'autocovariance et de d'auccorrélation d'un processus stationnaire est donnée par le théorème de Wiener -Khintchine.

Lemme 31

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions réelles ,de transformées de Fourier respectivement $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\lambda) f(t) dt \text{ et } G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\lambda) g(t) dt,$$

alors

$$F(\lambda)G^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\lambda) k(t) dt \quad (1.6.7)$$

$$\text{où } k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(u-t)du.$$

Preuve. (Priestly). ■

Theorème 32 (Wiener -Khintchine)

Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stationnaire, centré, réel, de fonction d'autocovariance R et $\phi(\lambda)$ sa densité spectrale qui existe pour tout λ . Alors $\phi(\lambda)$ est la transformée de Fourier de $R(\tau)$,

i.e.,

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda\tau) R(\tau) d\tau. \quad (1.6.8)$$

Preuve. ■

Nous avons

$$G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A X(t) \exp(i\lambda t) dt.$$

le lemme 31 appliqué à la fonction $G(\lambda)$, nous obtenons :

$$|G(\lambda)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{\sqrt{2\pi}} \frac{X(u-\tau)}{\sqrt{2\pi}} du \right\} d\tau. \quad (1.6.9)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{|G(\lambda)|^2}{2A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau\lambda) \widehat{R}_A(\tau) d\tau, \quad \text{où}$$

$$\widehat{R}_A(\tau) = \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) X(u-\tau) du. \quad (1.6.10)$$

donc

$$\phi(\lambda) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[E \left\{ \frac{|G(\lambda)|^2}{2A} \right\} \right] = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau\lambda) E \left[\widehat{R}_A(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

à partir de la définition de $X_A(t)$ nous avons :

$$\widehat{R}_A(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2A} \int_{-(A-|\tau|)}^A X(u) X(u-|\tau|) du & |\tau| \leq 2A \\ 0 & |\tau| \geq 2A \end{cases} \quad (1.6.11)$$

Pour $|\tau| \leq 2A$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{R}_A(\tau) \right] &= \frac{1}{2A} \int_{-(A-|\tau|)}^A E [X(u) X(u-|\tau|)] du \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-(A-|\tau|)}^A R(\tau) du = R(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2A}\right), \end{aligned}$$

et pour $|\tau| \geq 2A$

$$E \left[\widehat{R}_A(\tau) \right] = 0.$$

ainsi:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|\tau|}{2A}\right) \cdot \exp(-i\tau\lambda) R(\tau) d\tau \right\} \text{ existe} \\ \phi(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau\lambda) R(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 33

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) \text{ existe } \forall \lambda & \quad \text{si } \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty. \\ \text{si on pose } g_A(\tau) &= \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{2A} & \text{si } |\tau| \leq 2A \\ 0 & \text{si } |\tau| \geq 2A \end{cases} \end{aligned}$$

alors $0 \leq g_A(\tau) \leq 1, \forall \tau, \forall A$, et pour τ fixé $\lim_{A \rightarrow \infty} g_A(\tau) = 1$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|\tau|}{2A}\right) \cdot \exp(-i\tau\lambda) R(\tau) d\tau \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g_A(\tau) |R(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty, \end{aligned}$$

ainsi la limite existe pour $A \rightarrow \infty$ et par le théorème de la convergence dominée, nous

avons

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_A(\tau) R(\tau) \exp(-i\tau\lambda) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{A \rightarrow \infty} g_A(\tau) \right) R(\tau) \exp(-i\tau\lambda) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-i\tau\lambda) d\tau. \end{aligned}$$

1.7 Les processus ARMA

1.7.1 Hypothèses et Définitions

Parmi les représentations les plus utilisées pour les processus temporels figurent les représentations *ARMA* (Autoregressive Moving Average). Cette représentation consiste en une composante autoregressive d'ordre fini (*AR*) et une composante moyenne mobile d'ordre fini (*MA*).

Définition 34

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit processus $ARMA(p, q)$ si

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est solution d'une équation aux différences stochastique

$$X_t + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, t \in \mathbb{Z} \quad (1.7.1)$$

où le processus $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc de moyenne nulle et variance σ^2 .

($\theta_0 = \phi_0 = 1$, $\theta_j = 0$ pour $j > q$ et $\phi_i = 0$ pour $i > p$)

Remarque 35

L'équation (1.7.1) peut être écrite sous forme plus compacte :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (1.7.2)$$

où Φ et Θ sont deux polynômes de degré p et q respectivement ,

$$\Phi(z) = \sum_{i=0}^p \phi_i z^{p-i} \quad , \quad \Theta(z) = \sum_{i=0}^q \theta_i z^{q-i}, \quad \text{et } \theta_0 = 1, \phi_0 = 1$$

B est l'opérateur retard défini par $B^j X_t = X_{t-j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Notons que les racines du polynôme Φ sont dites les pôles du modèle $ARMA$, et les racines de Θ sont dites les zéros du modèle $ARMA$.

Définition 36

Soit un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ $ARMA(p, q)$ défini par l'équation (1.7.1)

On dit que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est causal si les racines de $\Phi(z)$ sont toutes strictement à l'intérieur du disque unité

Définition 37

Soit un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ $ARMA(p, q)$ défini par l'équation (1.7.1)

On dit que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est inversible si les racines de $\Theta(z)$ sont toutes strictement à l'intérieur du disque unité.

Définition 38

1/ Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit processus moyenne mobile pur d'ordre q , noté $MA(q)$ si $\Phi(z) \equiv 1$ alors

$$X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (1.7.3)$$

2/ Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit processus autorégressif pur d'ordre p , noté $AR(p)$ si $\Theta(z) \equiv 1$ alors

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t \quad (1.7.4)$$

1.7.2 Propriétés des processus ARMA

Proposition 39

1/ La densité spectrale du processus $ARMA(p, q)$ est donnée par :

$$\phi(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\Theta(\exp(i\lambda))|^2}{2\pi |\Phi(\exp(i\lambda))|^2} \quad (1.7.5)$$

2/ Pour un bruit blanc $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ processus centré tel que $\mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_m) = \sigma^2 \delta_m^n$ sa densité spectrale est

$$\phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (1.7.6)$$

(la densité spectrale d'un bruit blanc est une constante par rapport à λ).

Preuve. (cf. Gouriéroux et Monfort). ■

Proposition 40

La densité spectrale d'un processus autorégressif d'ordre p est donnée par :

$$\phi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi |\Phi(\exp(i\lambda))|^2} \quad (1.7.9)$$

où σ^2 est la variance du processus bruit blanc ε , et le polynôme Φ ne peut donc posséder de zéros de module 1.

Réciproquement, si un processus centré stationnaire au second ordre X possède une densité spectrale de la forme (1.7.9) pour un nombre réel $\sigma > 0$ et un polynôme unitaire Φ de degré p (nécessairement sans zéros de module 1) ce processus est autorégressif d'ordre p .

Preuve. (Gourieroux et Monfort). ■

1.8 *Processus périodiquement corrélés*

1.8.1 Hypothèses et Définitions

Les processus périodiquement corrélés sont non stationnaires; cependant, ils exhibent plusieurs propriétés des processus stationnaires. La nature périodique de la non stationnarité a conduit à d'autres appellations : processus cyclostationnaires, processus périodiquement corrélés, processus périodiquement stationnaires et processus stationnairement périodiques (Bennet (1958), Gardner (1975)) et processus à structure périodique (Brelsford et Jones (1967)).

Définition 41

Un processus réel du second ordre $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit périodiquement corrélé de période T ($T \in \mathbb{R}_+^*$) si

1)

$$E(X(t+T)) = E(X(t)) = m(t), \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.8.1)$$

2)

$$E(X(s+T)X(t+T)) = E(X(s)X(t)) = R(s, t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad (1.8.2)$$

Définition 42

Un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ ayant des moments d'ordre p finis, est dit périodiquement corrélé à l'ordre p de période T si :

$$E[X(t_1+T)^{p_1} \dots X(t_n+T)^{p_n}] = E[X(t_1)^{p_1} \dots X(t_n)^{p_n}]. \quad (1.8.3)$$

$$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^n p_i \leq p.$$

Remarque 43

Nous remarquons que si $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé à l'ordre p alors le processus est également périodiquement corrélé à l'ordre $q \leq p$.

Lemme 44

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé alors, la fonction d'autocovariance

$$B(t, u) = R(t+u, t) \quad (1.8.4)$$

du processus est également périodique en t de période T

Preuve. ■

$$\begin{aligned} B(t, u) &= E[(X(t) - m(t))(X(t+u) - m(t+u))] \\ &= E[X(t)X(t+u)] - m(t).m(t+u) \\ &= R(t+u, t) - m(t).m(t+u) \end{aligned}$$

d'autre part

$$B(t+T, u) = R(t+T+u, t+T) - m(t+T).m(t+u+T)$$

$$\begin{aligned}
&= R(t+u, t) - m(t).m(t+u) \\
&= B(t, u).
\end{aligned}$$

1.8.2 Propriétés des processus périodiquement corrélés

P1) Pour u fixé, nous supposons que la fonction $B(., u)$ est telle que

$$B(., u) \in L^1[0, T] \quad , \quad \int_0^T |B(t, u)| \mu(dt) = \int_0^T |E[X(t)X(t+u)]| \mu(dt) < +\infty \quad (1.8.5)$$

Comme c'est une fonction périodique du temps, elle admet la représentation en série de Fourier suivante :

$$B(t, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} kt) \quad (1.8.6)$$

et les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$B_k(u) = \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (1.8.7)$$

P2) Si nous supposons que les coefficients $B_k(.) \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$g_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(-i\omega u) du \quad (1.8.8)$$

existent pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et les fonctions $g_k(\omega)$ sont appelées les fonctions densités spectrales du processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas stationnaire, puisqu'il est périodiquement corrélé. Nous le voyons, en particulier, dans la fonction d'autocovariance $B(t, u)$ qui n'est pas indépendante du temps, puisqu'elle est périodique. Mais, nous récupérons cette stationnarité dans les coefficients de Fourier $B_k(u)$. Ainsi, l'analyse classique qui est impossible dans le

cas d'un processus non stationnaire puisque les fonctions d'autovariance ne sont pas constantes par rapport au temps, se trouve possible si l'intérêt est orienté sur les coefficients de Fourier eux-mêmes.

Dans la proposition qui suit, nous établissons les propriétés de symétrie des fonctions $B_k(\cdot)$ et $g_k(\cdot)$ qui nous seront utiles dans les démonstrations suivantes.

Proposition 45

Les fonctions B_k et $g_k, k \in \mathbb{Z}$, vérifient les propriétés suivantes :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $u, \omega \in \mathbb{R}$,

1)

$$B_k(-u) = \exp(-i\frac{2\pi}{T}ku)B_k(u), \quad (1.8.9)$$

2)

$$g_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\exp(-i\omega u) + \exp(i(\omega - \frac{2\pi}{T}k)u) \right] B_k(u) du, \quad (1.8.10)$$

3)

$$g_k(\omega) = g_k(\frac{2\pi}{T}k - \omega). \quad (1.8.11)$$

4)

$$g_k(\omega) = g_{-k}(-\omega) \quad (1.8.12)$$

Preuve. ■

1) Nous avons $B(t, -u) = R(t - u, t) = E[X(t - u)X(t)]$

$$= E[X(y)X(y + u)]$$

$$= B(y, u) \quad \text{où} \quad y = t - u$$

$$\begin{aligned} B_k(-u) &= \frac{1}{T} \int_0^T B(t, -u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-u}^{T-u} B(y, u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}(y + u)k) dy \\ &= \exp(-i\frac{2\pi ku}{T}) \left(\frac{1}{T} \int_{-u}^{T-u} B(y, u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}ky) dy \right) \\ &= \exp(-i\frac{2\pi ku}{T}) \cdot B_k(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad g_k(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 B_k(u) \exp(-i\omega u) du + \int_0^{\infty} B_k(u) \exp(-i\omega u) du \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} B_k(-u) \exp(+i\omega u) du + \int_0^{\infty} B_k(u) \exp(-i\omega u) du \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} B_k(u) \left[\exp\left(-i\frac{2\pi k u}{T}\right) \exp(+i\omega u) + \exp(-i\omega u) \right] du \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-i\omega u) + \exp\left(i\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)u\right) B_k(u) du \\
3) \quad g_k\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \exp(-i\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right)u) + \exp\left(i\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega - \frac{2\pi k}{T}\right)u\right) B_k(u) du \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp(-i\omega u) + \exp\left(i\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)u\right) \right] B_k(u) du \\
&= g_k(\omega) \\
4) \quad \overline{g_k(\omega)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{B_k(u)} \exp(-i(-\omega u)) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{-k}(u) \exp(-i(-\omega u)) du \text{ car } \overline{B_k(u)} = \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}(-k)t) dt \\
&= B_{-k}(u) \\
&= g_{-k}(-\omega)
\end{aligned}$$

En supposant que le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé à l'ordre 4 de période T , les fonctions ν et K sont également périodiques de période T où :

$$\nu(t, u_1, u_2, u_3) = E[X(t)X(t+u_1)X(t+u_2)X(t+u_3)] \quad (1.8.13)$$

et

$$\begin{aligned}
K(t, u_1, u_2, u_3) &= \nu(t, u_1, u_2, u_3) - B(t, u_1)B(t+u_2, u_3-u_2) - \\
&\quad B(t, u_2)B(t+u_3, u_1-u_3) - B(t, u_3)B(t+u_1, u_2-u_1) \quad (1)
\end{aligned}$$

La fonction K est dite fonction cumulant d'ordre 4.

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus gaussien, alors la fonction K est identiquement nulle.

Preuve. (Parzen(1962)) ■

1.9 Processus ARCH

1.9.1 Introduction

Le modèle *ARCH* a été introduit par Engle(1982). L'intérêt de l'approche réside dans le fait qu'il est souvent difficile d'identifier les variables explicatives entrant dans la variance du processus d'innovations. Le modèle considéré par Engle (1982) est en fait un modèle où la variance dépend d'une certaine fonction des valeurs passées du processus.

L'intérêt pour le modèle ARCH en économétrie et dans le domaine de la finance ne cesse de grandir. Du point de vue statistique, ce modèle constitue une classe spécifique de modèle non linéaire dont l'étude est maintenant bien connue. Au niveau de l'application et en particulier de la théorie financière, la mise en oeuvre de modèles, où la dépendance temporelle de la volatilité mesurée à partir de la variance joue un rôle fondamental.

Dans cette section nous donnons les définitions principales des processus *ARCH*(p). Nous préciserons des propriétés fondamentales des processus *ARCH*(p) dans le chapitre 4.

1.9.2 Hypothèses et Définitions

Définition 46 (*Engle 1982*)

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit un processus *ARCH*(p) s'il est de la forme

$$X_t = \sigma_t \eta_t \quad (1.9.1)$$

où $(\eta_t)_t$ est un bruit blanc gaussien, centré, de variance 1. $\eta_t \sim i.i.d$
 $N(0, 1)$.

et

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (1.9.2)$$

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

Notation 47

Nous notons :

I_{t-1} , l'information contenue dans $\{X_u, u \leq t-1\}$ et représentée par la σ -algèbre

$$I_{t-1} = \sigma(X_u, u \leq t-1) = \sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \quad (1.9.3)$$

1.9.3 Propriétés des processus ARCH

Proposition 48

1/ $E[X_t | I_{t-1}] = 0$ car σ_t est I_{t-1} mesurable.

$$E[X_t] = E[E[X_t | I_{t-1}]] = 0.$$

2/ $VAR[X_t | I_{t-1}] = E[X_t^2 | I_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i E[X_{t-i}^2 | I_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 = \sigma_t^2$
 or pour $E[X_t^2]$ constante alors

$$VAR[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \quad (1.9.4)$$

3/ La condition de stationnarité du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par : $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$.

4/ $COV(X_{t+h}, X_t) = E[E[X_{t+h} X_t | I_{t-1}]] = 0$.

mais $\{X_t\}$ n'est pas *i.i.d.*

Souvent la strcture *ARCH* se révèle insuffisante, comme l'a été la structure autorégressive. Tout comme la modélisation *ARMA* a été une extension de la modélisation *AR*, la modélisation *GARCH* se veut une amélioration de la modélisation *ARCH* du fait, en particulier, qu'elle prend en compte la mémoire longue susceptible d'être observée dans certains travaux empiriques à travers une structure de retards dans la variance conditionnelle.

1.10 Processus GARCH

1.10.1 Hypothèses et Définitions

Définition 49 (*Bollerslev 1986*)

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $GARCH(q, p)$ s'il est de la forme

$$X_t = \sigma_t \eta_t \quad (1.10.1)$$

où $(\eta_t)_t$ est un bruit blanc gaussien, centré, de variance 1. $\eta_t \sim i.i.d N(0, 1)$.

et

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (1.10.2)$$

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Remarque 50

si $q = 0$, on retrouve un $ARCH(p)$.

1.10.2 Propriétés des processus GARCH

Proposition 51

1/ $E[X_t | I_{t-1}] = 0$ car σ_t est I_{t-1} mesurable.

$$E[X_t] = E[E[X_t | I_{t-1}]] = 0. \quad (1.10.3)$$

2/ $VAR[X_t | I_{t-1}] = E[X_t^2 | I_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i E[X_{t-i}^2 | I_{t-1}] + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2$
 $= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \sigma_t^2$
 or pour $E[X_t^2]$ constante alors

$$VAR[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{i=1}^q \beta_i} \quad (1.10.4)$$

3/ La condition de stationnarité du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i < 1$$

4/ $COV(X_{t+h}, X_t) = E[E[X_{t+h} X_t | I_{t-1}]] = 0$.

mais $\{X_t\}$ n'est pas *i.i.d.*

1.11 Application Numérique

Afin d'illustrer un exemple de processus aléatoire, nous présentons une simulation de processus de Wiener $W = \{W(t), t \in [0, A]\}$ basé sur l'algorithme suivant

1/ Algorithme

N est nombre entier positif

$\delta t = \frac{A}{N}$ et les t_j sont tels que : $t_j = j \delta t$

$W_0 = 0$

$dW_j \sim \sqrt{\delta t} N(0, 1)$

$W_j = W_{j-1} + dW_j$.

2/ programme pour le mouvement brownien

```
% bpath1 brownian path simulation
```

```
clear all
```

```
%set the state of randn
```

```
randn('state',100)
```

```
N=500
```

```
A=1;
```

```
dt=A/N;
```

```
dw=zeros(1,N);
```

```
w=zeros(1,N);
```

```
dw(1)=sqrt(dt)*randn;
```

```
w(1)=dw(1);
```

```
for j=2:N
```

```
dw(j)=sqrt(dt)*randn;
```

```
w(j)=w(j-1)+dw(j);
```

```
end
```

```
plot([0:dt:A],[0,w], 'r-')
```

```
xlabel('t', 'FontSize', 16)
```

```
ylabel('w(t)', 'FontSize', 16, 'rotation', 0).
```


1.12 Conclusion

Les caractéristiques des processus stationnaires ou des processus non stationnaires sont souvent des paramètres inconnus que l'on cherche à estimer sur la base d'une trajectoire du processus.

Nous nous sommes intéressés, dans le chapitre suivant, à l'estimation de la densité spectrale dans le cadre des processus stationnaires au second ordre. Le calcul numérique des estimateurs nécessite une discrétisation du processus; le problème se pose donc sur le choix du modèle des instants d'échantillonnage.

CHAPTER II

ECHANTILLONNAGE ALÉATOIRE DES PROCESSUS DU SECOND ORDRE

Chapitre 2

Echantillonnage Aléatoire des Processus du Second Ordre

2.1 Schémas d'échantillonnage aléatoire

Les processus ponctuels stationnaires au second ordre modélisant un grand nombre de phénomènes aléatoires sont à la base des différentes procédures d'échantillonnage aléatoire des processus stochastiques.

La théorie de ces processus ponctuels fut graduellement développée par Beutler et Lenneman(1966), Shapiro et Silverman(1970) Delay et Veres Jones(1972), Brillinger(1978).

Parmi les processus ponctuels, certains sont construits afin d'éliminer le repliement de spectre des séries d'observation; D'autres sont utilisés dans des problèmes d'estimation et d'optimalité.

Nous distinguons parmi les plus fréquents, les processus ponctuels avec jitter, processus ponctuels liés à une mesure de comptage, processus ponctuels liés à une marche aléatoire.

C'est ainsi que le schéma d'échantillonnage constitue un processus ponctuel ordonné stationnaire au second ordre, et indépendant en probabilité du processus initial d'observation $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$. Dans cette première section nous donnons une description succincte de quelques schémas des instants d'échantillonnage.

2.1.1 Echantillonnage périodique avec jitter

Nous citons

1/ un premier modèle (Shapiro et Silverman(1960)) des instants d'échantillonnage pour lequel

nous supposons que l'ensemble $\mathbb{R}$ est subdivisé en intervalles équiésespacés $(nI), n \in \mathbb{Z}$, centrés aux points c_n , les points d'échantillonnage sont tels que :

$$t_n = c_n + \varepsilon_n \quad \text{où } \varepsilon_n \text{ sont des variables aléatoires i.i.d } N(0, \sigma^2)$$

2/ Puis un second schéma introduit par Leneman et Balakrishman

Pour ce type d'échantillonnage les instants t_n sont affectés de variation aléatoire (ou encore sauts) tels que :

$$t_n = n.T + \delta_n \quad \text{où } T > 0, n \in \mathbb{Z}$$

et $(\delta_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité.

A partir du processus initial X que l'on échantillonne on obtient le processus échantillonné noté par :

$$\tilde{X}(n) = X(t_n)$$

Cependant ce type d'échantillonnage n'a pas permis l'élimination de l'effet aliasing ou repliement du spectre de la serie $X(t)$ et les perturbations $(\delta_n)_{n \geq 0}$ induisent des biais significatifs et des erreurs appréciables.

2.1.2 Echantillonnage aléatoire associé à une mesure de comptage

Pour ce type d'échantillonnage la suite des instants $\{t_n\}$ est indépendante du processus d'observation initial X . Cette suite $\{t_n\}$ constitue un processus ponctuel, ordonné, stationnaire au second ordre sur la droite réelle. Si $N(\cdot)$ est la mesure de comptage associée à $\{t_n\}$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble des boreliens de $\mathbb{R}$, nous supposons les hypothèses suivantes :

i) Pour tout $n > 0$, et toute suite $\{B_1, \dots, B_n\}$ de boreliens dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

la loi de probabilité conjointe des variables aléatoires $\{N(B_1 + \tau), \dots, N(B_n + \tau)\}$ est indépendante de τ .

ii) $P[N([0, h]) \geq 2] = o(h)$ quand $h \rightarrow 0$.

iii) $E[N^2(B)] < \infty$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Si $\beta = E[N([0, 1])]$ alors

$$E[N([t, t + dt])] = \beta dt$$

$$COV[N([t, t + dt]), N([t + u, t + u + du])] = c(du)dt.$$

où c représente la mesure de covariance réduite de $N(t)$.

c est une mesure finie sur l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

Le processus échantillonné de $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ sera défini par

$$\tilde{X}(B) = \sum_{t_i \in B} X(t_i), \quad B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

ou encore par l'écriture différentielle

$$\tilde{X}(dt) = X(t).N(dt).$$

Le processus échantillonné $\tilde{X}$ dépend en premier de toutes les caractéristiques des processus ponctuels $N(t)$ associés.

2.1.3 Echantillonnage aléatoire associé à une marche aléatoire

Pour ce schéma d'échantillonnage, les instants sont tels que $M = \{t_n\}$ correspond à une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ caractérisée par:

$$h1/ \quad t_0 = 0.$$

h2/ $\{t_n\}$ et le processus X sont indépendants en probabilité (i.e les instants d'échantillonnage sont indépendants des observations).

h3/ $(t_{n+1} - t_n)_{n \geq 1} = (\delta_n)_{n \geq 1}$ représente une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité L , i.e., que le processus $\{t_n, n \in N\}$ est à accroissements indépendants.

L sera aussi dite la loi des écarts entre les instants successifs d'observations.

Nous convenons de préciser les notations suivantes

Pour le cas discret

L est à support dans N^*

$$L_j = P(t_{n+1} - t_n = j) \quad \text{pour } j \in N^*.$$

$$L_j = 0 \quad \text{pour } j \notin N^*.$$

$\widehat{L}(Z) = \sum_{j=l}^{\infty} L_j Z^j$ représente la fonction génératrice lorsqu'elle existe ou encore la transformée en Z de L .

Pour le cas continu

L est à support dans $\mathbb{R}_+^*$

$$L(R_-) = 0$$

$\widehat{L}(Z) = \int_0^{\infty} e^{tZ} L(dt)$ représente la transformée de Laplace de L lorsqu'elle existe.

L^{*k} = la convolution de L avec elle même k fois ou encore la loi de probabilité de $(t_{k+n} - t_n)$.

Le processus échantillonné noté par

$$\widetilde{X} = \{X(t_n), n \in N\} \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{X}(n) = X(t_n).$$

Soit $\mathcal{E}_L$ l'opérateur linéaire de transition qui au processus X on associe le processus échantillonné $\widetilde{X}$

Avec le schéma d'échantillonnage $\{t_n\}$, nous donnons des caractéristiques du processus échantillonné $\widetilde{X}$ à partir du processus initial X , en précisant les relations entre les fonctions de covariances associées.

Et sous certaines hypothèses sur la loi d'échantillonnage L , le processus échantillonné $\widetilde{X}$ possède des propriétés particulières, entre autre l'échantillonnage mène à des processus échantillonnés qui seront eux également stationnaires au second ordre.

2.2 Caractéristiques des processus stationnaires au second ordre échantillonnés aléatoirement

Dans cette section nous donnons les caractéristiques des processus aléatoires stationnaires au second ordre échantillonnés selon les schémas d'échantillonnage décrits précédemment nous résumons les propriétés des processus échantillonnés, et nous donnons l'expression de la densité spectrale du processus échantillonné $\widetilde{X}$ en fonction de celle du processus initial $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ et réciproquement.

2.2.1 Caractéristiques des processus stationnaires échantillonnés aléatoirement

Dans cette section nous donnons les théorèmes fondamentaux donnant les caractéristiques du second ordre du processus échantillonné.

Théorème 52 (*Masry(1978)*)

Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus réel, centré, stationnaire au second ordre, tel que $C_X(t)$ est sa fonction de covariance et $\phi_X(\lambda)$ la densité spectrale associée.

Soit $N(t)$ processus ponctuel stationnaire associé aux instants d'échantillonnage $\{t_n\}$ tel que $E[N(t)] = \beta t$

Alors

Le processus échantillonné $\tilde{X}$ selon ce schéma, est également stationnaire au second ordre avec:

$$E(\tilde{X}(dt)) = 0 \quad (2.2.1)$$

et

$$C_{\tilde{X}}(dt) = C_X(t) \{ \beta^2 dt + C_N(dt) \} \quad (2.2.2)$$

Si de plus $C_X(t) \in L_1$ alors la densité spectrale du processus échantillonné est :

$$\phi_{\tilde{X}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} C_{\tilde{X}}(dt) \quad (2.2.3)$$

Preuve. (Masry 1978) ■

Théorème 53 (*Oppenheim et Deniau(1983)*)

Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire au second ordre, de moyenne m et de fonction d'autocovariance C_X .

Soit M une marche aléatoire vérifiant les hypothèses h1/,h2/ et h3/ de (2.1.3) .

Soit l'ensemble $C_a = \{Z \in \mathbb{C}; |Z| \in]a, \frac{1}{a}[\text{ et } 0 < a < 1\}$ (i.e. la couronne de centre 0)

Alors

a/ Le processus échantillonné $\tilde{X} = \{X(t_n), n \in N\}$ de X selon la marche aléatoire M est également stationnaire au second ordre avec

$$E(\tilde{X}_n) = E(X_n) = m \quad (2.2.4)$$

et

$$C_{\tilde{X}}(h) = \sum_{j=h}^{\infty} C_X(h) L^{*h}(j) = \int_{-\pi}^{+\pi} [\hat{L}(e^{i\lambda})]^h \phi_X(\lambda) d\lambda \quad (2.2.5)$$

(pour le cas discret).

$$C_{\tilde{X}}(h) = \int_0^{\infty} C_X(t) L^{*h}(dt) \quad (2.2.6)$$

(pour le cas continu).

b) Si $\hat{C}_X(Z)$, la transformée en Z de C_X existe dans C_a alors la transformée en Z de $C_{\tilde{X}}$ est telle que :

$$\hat{C}_{\tilde{X}}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \left[\frac{\hat{C}_X(x)}{1 - Z\hat{L}(x)} + \frac{\hat{C}_X(x)}{1 - \frac{\hat{L}(x)}{Z}} \right] \frac{dx}{x} - C_X(0) \quad (2.2.7)$$

où $r \in a, \min\left(1, |Z|, \frac{1}{|Z|}\right)$

Preuve. (voir annexe1) ■

2.2.2 Caractéristiques des processus ARMA échantillonnés aléatoirement

Nous présentons dans ce qui suit les principaux résultats donnant l'effet de l'échantillonnage aléatoire basé sur une marche aléatoire des processus *ARMA*.

Ces résultats furent établis en premier pour le cas continu par Robinson puis pour le cas discret par Oppenheim(1983) et repris par Kadi(1994) donnant des caractéristiques spectrales plus améliorées permettant d'identifier aisément le processus échantillonné $\tilde{X}$.

Nous convenons d'introduire les notations et définitions suivantes:

2.2.2.1 Notations et définitions.

Soit $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc centré, réel et de variance σ_ε^2 .

Notons par $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus univarié centré stationnaire au second ordre de spectre rationnel.

$$\phi(Z) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(Z)}{\Phi(Z)} \right|^2, \quad \forall Z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |Z| = 1.$$

Les racines du polynôme $\Phi(Z) = \sum_{j=0}^p \phi_j Z^{p-j}$ sont à l'intérieur du cercle unité

et celle du polynôme $\Theta(Z) = \sum_{j=0}^q \theta_j Z^{q-j}$ sont à l'intérieur ou sur le cercle unité, avec

$$\phi_0 = \theta_0 = 1$$

Ainsi le processus $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait l'équation d'un modèle $ARMA(p, q)$.

$$\sum_{j=0}^p \phi_j X_{t-j} = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.8)$$

$\Phi(Z) = \sum_{j=0}^p \phi_j Z^{p-j}$ est le polynôme caractéristique de la partie AR

$\Theta(Z) = \sum_{j=0}^q \theta_j Z^{q-j}$ est le polynôme caractéristique de la partie MA

$$\phi_0 = \theta_0 = 1;$$

ϕ' le vecteur transposé des coefficients i.e., $\phi' = (1, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$.

θ' le vecteur transposé des coefficients i.e., $\theta' = (1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$.

Φ et Θ n'ont pas de racines communes.

$r_j = j$ ième racine de $\Phi(Z)$ ou pôle du processus X , $j = 1, \dots, p$.

$d_j = j$ ième racine de $\Theta(Z)$ ou zéro du processus X , $j = 1, \dots, q$.

$$C_X(h) = E(X_{t-h} X_t)$$

$$\widehat{C}_X(Z) = \sigma_\varepsilon^2 \left| \frac{\Theta(Z)}{\Phi(Z)} \right|^2.$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_X(Z) &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} C_X(h) Z^{-h} \text{ transformée en } Z \text{ de } C_X(h). \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left| \frac{\Theta(Z)}{\Phi(Z)} \right|^2 \end{aligned}$$

On définit J la matrice de Jordan par

$$J = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \\ . & 1 & 0 & . & . \\ . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{l'ordre de la matrice } J \text{ sera précisé dans chaque cas.}$$

et la matrice J^j est définie par :

$$J^j = \begin{bmatrix} o_j & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où o_j est le vecteur $j \times 1$ nul.

Les matrices J^j sont des matrices carrées d'ordre $(q+1)$ et nilpotente

Notons également pour les séries échantillonnées $\tilde{X}$

$\tilde{\theta}' = (1, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_q)$ = coefficients de la partie MA du processus échantillonné $\tilde{X}$.

$\tilde{\phi}' = (1, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_p)$ = coefficients de la partie AR du processus échantillonné $\tilde{X}$.

$\tilde{\Phi}(Z) = \sum_{i=0}^p \tilde{\phi}_i Z^{p-i}$ = polynôme caractéristique de la partie AR du processus échantil-

lonné $\tilde{X}$.

$$\tilde{\Phi}^{(j)}(Z) = \prod_{h \neq j} (Z - \hat{L}(r_h)) = \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\phi}_i^{(j)} Z^{p-1-i}$$

et $\tilde{\phi}_0^{(j)} = 1$, pour $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$R_j = \frac{r_j^{-1} \tilde{\theta}(r_j) \tilde{\theta}(r_j^{-1})}{\tilde{\phi}^{(j)}(r_j) \tilde{\phi}^{(j)}(r_j^{-1})}$$

et $R = (R_1, R_2, \dots, R_p)'$

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_0^{(1)} & \tilde{\phi}_0^{(2)} & . & . & \tilde{\phi}_0^{(p)} \\ \tilde{\phi}_1^{(1)} & \tilde{\phi}_1^{(2)} & . & . & \tilde{\phi}_1^{(p)} \\ . & . & . & . & . \\ \tilde{\phi}_{p-1}^{(1)} & \tilde{\phi}_{p-1}^{(2)} & . & . & \tilde{\phi}_{p-1}^{(p)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A \text{ de dimension } (p+1) \times p$$

Proposition 54

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $MA(q)$ tel que

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{où } (\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}} \text{ est un bruit blanc}$$

et M une marche aléatoire vérifiant les hypothèses h1/, h2/ et h3/ de (2.1.3)

a) En échantillonnant une moyenne mobile d'ordre q selon L , nous obtenons une moyenne mobile d'ordre au plus égal à $\left[\frac{q}{l}\right]$ où l désigne le plus petit entier chargé par la loi L .

($[\cdot]$ représente la partie entière)

b) Si la matrice J de Jordan est d'ordre $(q+1) \times (q+1)$ alors

$$C_X(j) = \sigma_\varepsilon^2 \theta' J^j \theta.$$

$$\text{et} \quad \widehat{C}_{\tilde{X}}(Z) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-n}^n \tilde{\theta}_j(0, \theta, L) Z^j.$$

où n est le plus grand entier tel que $n \times l \leq q$.

$$\tilde{\theta}_j(0, \theta, L) = \theta' \Delta_L^j \theta \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\Delta_L^j = \sum_{j=l}^q L_j J^j.$$

Proposition 55

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $AR(p)$ vérifiant

$$\sum_{j=0}^p \phi_j X_{t-j} = \varepsilon_t \quad \text{où } (\varepsilon_t)_t \text{ un bruit blanc.}$$

Nous supposons que les pôles associés sont simples *i.e.*, $\Phi(x) = \prod_{j=1}^p (x - r_j)$.

Soit M une marche aléatoire vérifiant les hypothèses h1/, h2/ et h3/ de (2.1.3)

a) En échantillonnant le processus $AR(p)$ suivant une loi L associée à M

On obtient un processus $ARMA(p, q')$ où $q' \leq m - \left[\frac{l}{q}\right]$.

(m désigne le nombre des $\widehat{L}(r_j)$ distincts non nuls.)

(Oppenheim (1983))

b) Si $\tilde{\Phi}(Z) = \sum_{i=1}^p \tilde{\phi}_i Z^{p-i}$ alors nous avons :

$\tilde{r}_j = \widehat{L}(r_j)$, le pôle de l'échantillonnée $\tilde{X}$

est égal à la transformée en Z de la loi L au point r_j pôle du processus initial

X .

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_i &= (-1)^i \sum_{1 < j_1 < \dots < j_i \leq p} \hat{L}(r_{j_1}) \hat{L}(r_{j_2}) \dots \hat{L}(r_{j_i}) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ \tilde{\phi}_0 &= 1.\end{aligned}$$

$$c) \quad \hat{C}(Z) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum_{j=-(p-1)}^{p-1} \tilde{\phi}_J(\phi, 0, L) Z^j}{\prod_{j=1}^p (1 - Z \hat{L}(r_j)) \left(1 - \frac{\hat{L}(r_j)}{Z}\right)} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, p\}$$

avec:

$$\tilde{\theta}_j(\phi, 0, L) = R^t A^t \left(J^j + J^{tj} \right) \tilde{\phi} - \left(\sum_{j=1}^p R_j \right) \tilde{\phi}^t J^j \tilde{\phi}, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

(Kadi (1994)).

2.2.3 Effet aliasing et reconstitution du spectre

2.2.3.1 Estimation classique de la densité spectrale

Définition 56

Soit $X = \{X(t), t \in I\}$ stationnaire au second ordre, $X(t), t \in I_0$ une réalisation du processus où l'ensemble $I_0 = \{t_k, k = 1, \dots, N\}$. on appelle périodogramme la statistique définie par :

$$S_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t \in I_0} X(t) \exp(i\lambda t) \right|^2.$$

Pour les processus à temps continue, le périodogramme est défini par:

$S_{[a,b]}(\lambda) = \frac{1}{2\pi(b-a)} \left| \int_a^b X(t) \exp(i\lambda t) dt \right|^2$ où $X(t), t \in [a, b]$ est la trajectoire du processus étudié.

Proposition 57

1) Le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale du processus:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(S_N(\lambda)) = \phi(\lambda).$$

2) Cependant ce n'est pas un estimateur convergent en probabilité pour la densité spectrale :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} COV(S_N(\lambda_1), S_N(\lambda_2)) = \begin{cases} 2\phi^2(0), & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \phi^2(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ 0 & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Remarque 58

Pour un estimateur ponctuel de la densité spectrale $\phi(\lambda)$ du processus stationnaire $\{X(t), t \in I\}$ sur la base des observations $\{X(t_k), k = 1, \dots, N\}$ on choisit la statistique :

$$\hat{\phi}_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \mu) S_N(\lambda) d\mu,$$

où $S_N(\lambda)$ est le périodogramme,

et les fonctions $W_N(\lambda)$, dites fenêtres spectrales, sont choisies telles que :

a) $W_N(\lambda)$ admette un maximum strict en 0;

b) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda) d\lambda = 1$.

c) $VAR(\hat{\phi}_N(\lambda)) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

Remarque 59

Dans l'ensemble des fonctions poids $W_N(\lambda)$ il existe une classe qui est le plus souvent utilisée dans les applications pratiques, c'est à dire la classe des fonctions admettant la representation

$$W_N(\lambda) = 2 \sum_{l=-N+1}^{N-1} K_N(l) \exp(-i\lambda l),$$

où $K_N(l) = K(\frac{l}{M_N})$

où M_N est une suite croissante d'entiers positifs telle que $\frac{M_N}{N} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ et,

$K(x)$ est une fonction paire bornée telle que $K(0) = 1$, $|K(x)| < 1$ pour $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x) dx < \infty$.

Définition 60

Un générateur de fenêtres est une fonction réelle continue h , vérifiant:

i) $h(x) = 0$ si $x \leq -1$ ou $x \geq 1$

ii) $h(0) = 1$

iii) h est paire , et décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$

Remarque 61

Des fois pour améliorer l'estimateur de la densité spectrale , on peut ne conserver que les covariances estimées dont l'indice n est assez petit ($|n| \leq M_N$) et les pondérer en utilisant le générateur de fenêtre h .

On obtient un estimateur de la forme :

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\omega; M_N, h) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M_N}^{M_N} h\left(\frac{n}{M_N}\right) \widehat{C}(n) \exp(-i\omega n). \\ \widehat{\phi}(\omega; M_N, h) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{C}(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{M_N} h\left(\frac{n}{M_N}\right) \widehat{C}(n) \cos(\omega n).\end{aligned}$$

Remarque 62

l'expression $\widehat{\phi}(\omega; M_N, h)$ peut être considérée comme une moyenne pondérée des valeurs de $\widehat{\phi}$ calculée pour plusieurs fréquences.

Définition 63

on appelle fenêtre associée au générateur de fenêtre h

$$W(\omega; M_N, h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M_N}^{M_N} h\left(\frac{n}{M_N}\right) \exp(-i\omega n).$$

(transformée de Fourier de h) .

Proposition 64

$$\widehat{\phi}(\omega; M_N, h) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\phi}(\omega - \theta) W(\theta; M_N, h) d\theta.$$

Preuve. ■

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\phi}(\omega - \theta) W(\theta; M_N, h) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \widehat{C}(n) \exp(-i(\omega - \theta)n) \right) \times \\ &\quad \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M_N}^{M_N} h\left(\frac{k}{M_N}\right) \exp(-i\theta k) \right) d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \sum_{k=-M_N}^{M_N} \widehat{C}(n) h\left(\frac{k}{M_N}\right) \exp(-i\omega n) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\theta(k-n)) d\theta \\
\text{or } \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\theta(k-n)) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases} \\
\text{donc } \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\phi}(\omega - \theta) W(\theta; M_N, h) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-K_T}^{M_N} \widehat{C}(n) h\left(\frac{n}{M_N}\right) \exp(-i\omega n) \\
&= \widehat{\phi}(\omega; M_N, h).
\end{aligned}$$

(car $M_N \leq N - 1$)

Remarque 65

Le nouvel estimateur $\widehat{\phi}(\omega; M_N, h)$ est donc obtenu à partir du premier $\widehat{\phi}(\omega)$ par convolution au moyen de

$$W(\omega; M_N, h).$$

Remarque 66

Dans le cas particulier d'un bruit blanc de variance σ^2 on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\theta, M_N, h) d\theta = 1.$$

Exemples de fenêtres spectrales utilisées

1) Fenêtre de Tukey-Hanning

Le générateur de fenêtre est défini par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x)) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc la fenêtre qui lui est associée est:

$$W(\omega; K_T, h) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin(2K_T+1)\frac{\omega}{2}}{\sin(\frac{\omega}{2})} + \frac{1}{4} \frac{\sin(2K_T+1)(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2K_T})}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2K_T})} + \frac{1}{4} \frac{\sin(2K_T+1)(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2K_T})}{\sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2K_T})} \right].$$

si K_T est très grand cette fenêtre est équivalente à

$$W(\omega; K_T, h) = \frac{2}{\pi^2 - (K_T \omega)^2} \frac{\sin(K_T \omega)}{\omega}.$$

2) Fenêtre de Parzen

Le générateur de fenêtre est défini par

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6|x|^3 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |x|^3) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq |x| \end{cases}$$

la fenêtre associée est donnée par

$$W(\omega; K_T, h) = \frac{3}{4\pi(\frac{K_T}{2})^3} \left(\frac{\sin(\frac{K_T\omega}{4})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^4 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\frac{\omega}{2}) \right).$$

2.2.3.2 Phénomène aliasing

Pour estimer la densité spectrale d'un processus stationnaire continu, du second ordre, de fonction de covariance C_X et de densité spectrale $\phi_X(\lambda)$ de carré intégrable, nous pensons à utiliser un échantillonnage qui semble naturel et qui est l'échantillonnage périodique donné par:

$$t_n = np \quad n \in \mathbb{Z} \text{ et } p > 0.$$

Le processus stationnaire discret $\{X(t_n), n \in \mathbb{N}\}$ qui en résulte a pour fonction de covariance ρ_p et pour densité spectrale ϕ_p . Nous déduisons simultanément

$$\begin{aligned} \rho_p(n) &= C(np) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda np) \phi(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi r}^{(2k+1)\pi r} \exp(i\lambda np) \phi(\lambda) d\lambda \quad \text{où } r = \frac{1}{p} \\ &= \int_{-\pi r}^{\pi r} \exp(i\lambda np) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(\lambda + 2k\pi r) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda n) r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(\lambda r + 2k\pi r) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda n) \phi_p(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \phi_p(\lambda) = r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(\lambda r + 2k\pi r)$$

Shapiro et Silverman (1960) ont montré que l'application qui a $\phi \rightarrow \phi_p$ n'est pas injective.

Plusieurs fonctions ϕ peuvent conduire à la même densité spectrale observée ϕ_p . (i.e de

l'échantillonnée on ne peut reconstituer l'initial). Ce qui constitue le phénomène aliasing .

2.2.3.3 Reconstitution du spectre avec échantillonnage aléatoire

Pour pallier à ces inconvénients Shapiro et Silverman(1960) ont introduit un nouveau concept d'échantillonnage aléatoire sans repliement de spectre et qui est associé à une certaine classe de schémas des instants $\{t_n\}$.

Par la suite Beutler(1970) donne une formulation un plus générale du problème d'échantillonnage sans repliement de spectre en présentant les critères relatifs à un ensemble de famille de distributions spectrales.

Theorème 67 (Beutler(1970))

Soit S l'ensemble des distributions spectrales ϕ où $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ϕ est absolument continue.

$L^{*k}(t)$ représente la densité de probabilité de l'intervalle $(t_{n+k} - t_n)$.

alors

Le schéma d'échantillonnage $\{t_n\}$ est dit *alias free* ou sans repliement par rapport à la famille S

si et seulement si la suite de fonctions $(L^{*k}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ est complète dans $L^2(\mathbb{R}_+)$

Theorème 68 (Masry(1978))

Une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma d'échantillonnage $\{t_n\}$ soit *alias free* par rapport à la famille des densités spectrales est que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à la mesure μ_N (du processus ponctuel $N(t)$ associé au schéma d'échantillonnage) définie par

$$\mu_N(B) = \int_B (\beta^2 dx + c(dx)) \text{ où } B \in \mathcal{B}(R)$$

$\beta = E[N([0, 1])]$ l'intensité moyenne du processus ponctuel $\{t_n\}$.

Preuve. (Masry(1978)) ■

2.2.3.4 Suppression de l'effet aliasing

Dans le cas d'échantillonnage poissonnien , l'effet aliasing est supprimé:

·Les instants d'échantillonnage $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$ sont obtenus grâce à un processus ponctuel de Poisson sur $[0, \infty[$, et sont indépendants du processus d'observation X . Ces instants sont définis par

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_k &= t_{k-1} + \alpha_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

où les $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même distribution F_0 donnée par

$$F_0(x) = 1 - \exp(-\beta x), \quad \text{avec } \beta > 0, \quad x > 0.$$

·Si le processus observé discret $\{X(t_k), k \in \mathbb{N}\}$ est de moyenne m et de covariance ρ_n on a

$$\begin{aligned} \rho_n &= E \{ (X(t_{k+n}) - m)(X(t_k) - m) \} \\ &= \int_0^\infty f_n(t) C(t) dt \quad \text{où} \\ f_n(t) &= \text{la fonction densité des écarts } t_{n+k} - t_k \quad (\text{indépendante de } k) \\ f_n(t) &= \beta \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\beta t) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(t) \quad (\text{loi gamma d'ordre } n \text{ de paramètre } \beta). \end{aligned}$$

· S'il y avait "aliasing" dans ce cas , cela se traduirait par l'existence de deux fonctions de covariances C_1 et C_2 de carré intégrable et non égales avec

$$\rho_n = \int_0^\infty f_n(t) C_1(t) dt = \int_0^\infty f_n(t) C_2(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

donc en supposant qu'il existe deux fonctions C_1 et C_2 de carré intégrable vérifiant les égalités (1), nous obtenons

$$\int_0^\infty f_n(t) (C_1(t) - C_2(t)) dt = 0 \quad (2)$$

et ceci pour tout entier n non nul, avec $C_1 - C_2$ fonction de carré intégrable,

comme $\{f_n(t), n \geq 1\}$ forment un système complet sur l'espace $L^2([0, \infty[)$, il existe un système de fonctions $\{g_n(t), n \geq 1\}$ complet, orthonormé associé à $\{f_n(t), n \geq 1\}$, donc

$$\begin{aligned} (C_1 - C_2)(t) &= \sum_{n=1}^\infty e_n g_n(t) \\ \text{où } e_n &= \int_0^\infty (C_1 - C_2)(t) g_n(t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

g_n étant une combinaison linéaire de f_n , nous obtenons par (2) que :

pour tout entier n entier non nul, $e_n = 0$.

Nous concluons par (3) que : $C_1 = C_2$ et donc il n'y a pas d'effet aliasing.

2.3 Application numérique

En s'appuyant sur des travaux d'estimation de la densité spectrale pour les processus stationnaire au second ordre, dans cette section, nous avons élaboré des programmes de simulations pour le calcul d'estimateurs de la densité spectrale basées sur des schémas d'échantillonnage.

1/ Pour un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ particulier, de densité spectrale théorique donnée par

$$\phi_X(\lambda) = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \quad \text{où } \lambda \in [-\pi\rho, +\pi\rho] \quad \rho \text{ étant un paramètre.}$$

2/ En choisissant une fenêtre spectrale de Parzen $h(t)$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} 1 - 6t^2 + 6|t|^3 & \text{si } |t| < 0.5 \\ 2(1 - |t|)^3 & \text{si } 0.5 < |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < |t| \end{cases}$$

3/ Nous obtenons les estimateurs de la densité spectrale $\phi_X(\lambda)$ selon les différents schémas.

Schéma1 :

Pour un schéma périodique les instants t_k sont tels que:

$$t_k = \frac{k}{\rho} \quad k = 1, \dots, N \quad \text{où } \rho \text{ est le taux}$$

d'échantillonnage.

les observations sont générées par:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(t_{k+1}) &= X\left(\frac{k+1}{\rho}\right) = e^{\frac{-1}{\rho}} X(t_k) + \left[1 - e^{\frac{-2}{\rho}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma_{k+1} \end{aligned}$$

où $(\gamma_k)_k$ suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites..

et l'expression de l'estimateur $\hat{\psi}_N(\lambda)$ de $\phi(\lambda)$ est telle que

$$\hat{\psi}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N\rho} \left[\sum_{k=1}^N X^2\left(\frac{k}{\rho}\right) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} h\left(\frac{n}{M_N}\right) \cos \frac{n\lambda}{\rho} \left(\sum_{k=1}^{N-n} X\left(\frac{k+n}{\rho}\right) X\left(\frac{k}{\rho}\right) \right) \right]$$

Nous avons fait varier les paramètres

$$\lambda \in [-\pi\rho, +\pi\rho] \quad , \rho = \frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \dots; \quad M_N = 5, 7, \dots$$

Schéma2

Schéma d'échantillonnage aléatoire cas poissonnien les instants sont tels que

$$t_0 = 0$$

$$t_k = t_{k-1} + \alpha_k$$

où $\alpha_k = \frac{-1}{\beta} \log \theta_k$ et $(\theta_k)_k$ suite de v.a de loi uniforme sur $[0, 1]$

Les observations $X(t_k)$ simulées sont données par

$$X(t_0) = 0$$

$$X(t_{k+1}) = e^{-(t_{k+1}-t_k)} . X(t_k) + [1 - e^{-2.(t_{k+1}-t_k)}]^{\frac{1}{2}} . \gamma_{k+1}$$

où $(\gamma_k)_k$ suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites.

L'estimateur $\widehat{\phi}_N(\lambda)$ de $\phi(\lambda)$ sera donné par l'expression suivante

$$\widehat{\phi}_N(\lambda) = \frac{1}{2.\pi.\beta.N} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-n} X(t_{k+n}) X(t_k) . h\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{M_N}\right) \cos \lambda(t_{k+1} - t_k) \right].$$

Nous avons fait varier les valeurs des paramètres N, β, M_N .

Schéma3

Un autre schéma d'échantillonnage aléatoire cas alternatif poissonnien,

où les instants d'observations sont tels que

$$t_0 = 0$$

$$t_k = t_{k-1} + \xi_k$$

où $(\xi_k)_k$ sont des variables aléatoires de densité $a(t) = (2.\beta)^2 . t . e^{-2.\beta.t}$

Nous supposons que les observations $X(t_k)$ sont également données par la même expression que précédemment

$$X(t_0) = 0$$

$$X(t_{k+1}) = e^{-(t_{k+1}-t_k)} . X(t_k) + [1 - e^{-2.(t_{k+1}-t_k)}]^{\frac{1}{2}} . \gamma_{k+1}$$

où $(\gamma_k)_k$ suite de v.a gaussiennes centrées réduites

De même pour l'estimateur $\widehat{\phi}_N(\lambda)$ de la densité spectrale $\phi(\lambda)$ sera

$$\hat{\phi}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-n} X(t_{k+n}) X(t_k) \cdot h\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{M_N}\right) \cos \lambda(t_{k+1} - t_k) \right]$$

4/ Nous donnons les graphes des moyennes des estimateurs $\hat{\phi}_X(\lambda)$ pour plusieurs simulations comparés au graphe de la densité spectrale théorique $\phi_X(\lambda)$, ces graphes sont tracés pour les différentes valeurs de $(\beta, N, \rho, \sigma, M_N, \dots)$

pour $\lambda_i = 0$ à 7 par pas de 0.001

$\phi(\lambda_i) \longrightarrow$ densité spectrale théorique.

$\hat{\phi}(\lambda_i) \longrightarrow$ densité spectrale estimée.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\phi(\lambda_i) - \hat{\phi}(\lambda_i) \right]^2 = ER(k) \quad \text{pour } k = 1, \dots, nbs \quad (\text{nombre de simulations}).$$

Calcul de la moyenne des écarts donnée par $\overline{ER(k)} = \frac{\sum_{k=1}^{nbs} ER(k)}{nbs}$.

· Les calculs de ces deux estimateurs sont calculés et les résultats figurent dans les graphes 2.1.a, 2.2.a, 2.3.a, 2.1.b, 2.2.b, 2.3.b

· la performance des estimateurs est mesurée par le faible écart

nous avons utilisé un critère de comparaison des performances des 2 estimateurs Mise tel que:

Pour

Pour k=1: nombre de simulation = nbs

Nous calculons

$$ISE(k) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\phi(\lambda_i) - \hat{\phi}(\lambda_i))^2 \quad \overline{ISE} = \frac{\sum_{k=1}^{nbs} ISE(k)}{nbs} \quad MISE = \frac{\sum_{k=1}^{nbs} (ISE(k) - \overline{ISE})^2}{nbs-1}$$

Pour les deux types d'échantillonnage et nous avons obtenu le tableau 2.4

5/ les programmes avec matlab

(nous donnons le cas de schéma poissonien)

· % calcul de la fenetre spectrale de parzen h(t):

function [calcul]=h(t)

if (abs(t)<=0.5) ,calcul= 1.-6.*t.^2+6.*abs(t).^3;

,elseif ((abs(t)>0.5), & (abs(t)<1.)) calcul=2.*(1.-abs(t)).^3;

,else calcul=0. ;end;

·function t=obst(beta,N)..

```

u=rand(N,1);
t(1)=0;
for k=2:N;
alpha(k)=-1./beta*log(u(k));
end
for k=2:N;
t(k)=t(k-1).+alpha(k);
end
·function X=obsX(t,N)
gamma=randn(N,1);
X(1)=0;
for k=2:N;
X(k)=exp(-(t(k)-t(k-1)))*X(k-1)+(1.-exp(-2.*(t(k)-t(k-1))))^.5*gamma(k);
end
·function reseat = estimat(lambda,X)
global N beta MN t
s2=0;
for n=1:N-1;
%calcul de la somme interne
s1=0.;
for k=1:N-n;
s1=s1+X(k+n)*X(k)*h((t(k+n)-t(k))/MN)*cos(lambda*(t(k+n)-t(k)));
end
s2=s2+s1;
end
reseat=s2./(1.*pi.*beta*N);
end;

```


PERSPECTIVES POUR LE CHAPITRE 2

Nous tenterons dans l'avenir proche un autre type de schéma aléatoire généré par le processus de renouvellement retardé décrit par :

$$t_0 = 0 \quad t_{k+1} = t_k + n_k \quad \text{où} \quad n_k = \frac{-(1-\beta)}{\alpha} \log(\theta_k) - 2\beta\sqrt{2\theta_k} \log(2\theta_k)$$

Où θ_k suite de v.a.i uniforme sur $[0,1]$.

(Ce schéma vérifie la condition de alias free de Masry)

pour lequel nous l'appliquerons sur un autre type de processus d'observation X.

CHAPTER III

ESTIMATION SPECTRALE DANS LES PROCESSUS PÉRIODIQUEMENT CORRÉLÉS

Chapitre 3

Estimation Spectrale dans les Processus Périodiquement Corrélés

3.1 Introduction

Monsan (1994) étudie les problèmes d'estimation pour les processus non gaussien périodiquement corrélés. Il s'intéresse à l'estimation des fonctions de corrélation et des fonctions de densités spectrales à partir d'échantillons à temps continu puis, à partir d'échantillons à temps aléatoire. Il propose deux types d'estimateurs pour les densités spectrales et étudie leur consistance. Les processus que nous rencontrons dans les applications sont souvent supposés être stationnaires au sens large. Divers problèmes relatifs à ces processus ont été étudiés. Cependant, en pratique, l'hypothèse de la stationnarité n'est pas toujours vérifiée car ces processus répondent à des structures de corrélation plus complexes. Ils sont dits non stationnaires.

Dans tout ce qui suit nous allons nous intéresser à un type particulier de processus non stationnaires : les processus périodiquement corrélés.

Hurd (1989) a proposé des estimateurs pour les caractéristiques des processus périodiquement corrélés échantillonnés en temps continu, en particulier les coefficients de Fourier des fonctions d'autocovariance qui sont des fonctions périodiques, et montré la consistance de ces estimateurs sous l'hypothèse que le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien.

Dans les travaux de Monsan (1994) auxquels nous nous sommes intéressés, la consistance de tels estimateurs a été établie sous certaines conditions sur la fonction cumulant d'ordre 4, le processus n'étant pas supposé gaussien. L'objectif de ce chapitre est d'approfondir

les démonstrations des résultats donnés par Monsan (1994). Une étude de simulation intensive nous permet d'étudier les propriétés des estimateurs obtenus et de comparer leur performance.

Cependant, le calcul numérique de ces estimateurs nécessite une discrétisation du processus; ainsi il est préférable d'estimer les caractéristiques à partir d'échantillons en temps discret (périodique ou aléatoire).

Nous rappelons brièvement :

Définition 69

Un processus réel du second ordre $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit périodiquement corrélé de période T ($T \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$E(X(t+T)) = E(X(t)) = m(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$E(X(s+T)X(t+T)) = E(X(s)X(t)) = R(s, t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

$$1/ B(t, u) = R(t+u, t)$$

2/ La fonction d'autocovariance $B(t, u)$ est une fonction périodique du temps,

elle admet la représentation en série de Fourier suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} B(t, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} kt) \\ \text{et les coefficients de Fourier associés sont} \\ B_k(u) = \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{array} \right.$$

4/Si nous supposons que les coefficients $B_k(.) \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors leur transformées de Fourier

$$g_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(-i\omega u) du$$

existent pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et les fonctions $g_k(\omega)$ sont dites les fonctions densités spectrales du processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Estimation avec échantillonnage continu

Hurd (1989) a proposé, dans le cadre d'un échantillonnage à temps continu, un estimateur des coefficients de Fourier de la fonction d'autocovariance périodique et des fonctions densités spectrales correspondantes, à partir d'une portion de trajectoire du processus initial $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$. Si, de plus, le processus est gaussien, l'auteur détermine le taux de convergence des estimateurs des fonctions densités spectrales $g_k(\omega)$.

Monsan (1994), occultant l'hypothèse que le processus est gaussien et introduisant une condition sur les moments d'ordre 4 détermine le taux de convergence des estimateurs proposés par Hurd (1989).

Sous les hypothèses suivantes :

$H_1)$ $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus périodiquement corrélé à l'ordre 4.

$H_2)$ $E(X(t)^4) \leq M, \forall t \in \mathbb{R}$, c'est à dire que $X(t)$ admet un moment d'ordre 4 uniformément borné.

$H_3)$ $m(t) = 0$, c'est à dire que le processus est supposé centré.

et, fondés sur une portion de trajectoire du processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, pour $0 \leq t \leq A$, les estimateurs de $B_k(u)$ et $g_k(\omega)$ peuvent être respectivement définis par :

$$\widehat{B}_k(A, u) = \begin{cases} \frac{1}{A} \int_0^{A-u} X(t)X(t+u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt) dt. & \text{si } u \geq 0 \\ \frac{1}{A} \int_{-u}^A X(t)X(t+u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt) dt & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

pour ce qui est des coefficients de Fourier de la fonction d'autocovariance et,

$$\widehat{g}_k(A, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A h(B_A v) \widehat{B}_k(A, v) \exp(-iv\lambda) dv, \quad (3.2.2)$$

$$g_k(A, u) = \frac{1}{2\pi A} I_A(u) \overline{I_A(u - \frac{2\pi}{T}k)}, \quad (3.2.3)$$

où

$$I_A(u) = \int_0^A X(t) \exp(-iut) dt \quad (3.2.4)$$

pour ce qui est des fonctions densités spectrales $g_k(\omega)$.

L'expression (3.2.4) définissant le périodogramme. On montrera ci-dessous qu'il s'agit de la transformée de Fourier des $\widehat{B}_k(A, v)$, que c'est un estimateur asymptotiquement sans biais mais non consistant. Et afin d'obtenir un estimateur consistant nous procédons à un lissage classique.

Dans l'expression (3.2.2), B_A est une fonction de A , positive et $\lim_{A \rightarrow \infty} B_A = 0$,

h est une fonction paire, intégrable, telle que

$$|h(t)| \leq M, \forall t \in \mathbb{R}, h(0) = 1, \text{ et } H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Nous donnons dans le lemme suivant, pour l'estimateur $\widehat{g}_k$, une autre expression équivalente que nous utilisons par la suite dans les propositions.

Lemme 70

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 et les expressions (3.2.1) et (3.2.2), les estimateurs des fonctions densités spectrales fondés sur une portion de trajectoire sont donnés par :

$$\widehat{g}_k(A, \lambda) = \frac{1}{B_A} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{u-\lambda}{B_A}\right) g_k(A, u) du, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.5)$$

Preuve. ■

$$\begin{aligned} \widehat{g}_k(A, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \exp(i\omega B_A v) d\omega \right] \widehat{B}_k(A, v) \exp(-iv\lambda) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-A}^A H(\omega) \exp(-i(\lambda - \omega B_A) v) \widehat{B}_k(A, v) d\omega dv \\ &= \frac{1}{B_A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A H\left(\frac{\lambda-u}{B_A}\right) \exp(-iuv) \widehat{B}_k(A, v) du dv \\ &= \frac{1}{B_A} \int_{-\infty}^{+\infty} H\left(\frac{\lambda-u}{B_A}\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{B}_k(A, v) \exp(-iuv) dv \right] du \\ &= \frac{1}{B_A} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{u-\lambda}{B_A}\right) g_k(A, u) du \end{aligned}$$

$$\text{où } g_k(A, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{B}_k(A, v) \exp(-iuv) dv$$

en effet d'après (3.4.3) et (3.4.4),

$$\begin{aligned} g_k(A, \lambda) &= \frac{1}{2\pi A} I_A(\lambda) \overline{I_A(\lambda - \frac{2\pi k}{T})} \\ &= \frac{1}{2\pi A} \left[\int_0^A X(t) \exp(-i\lambda t) dt \right] \left[\int_0^A X(s) \exp(+i(\lambda - \frac{2\pi k}{T}) s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \left[\int_{-A}^A X(t)X(t+r) \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right) \exp\left(+i\left(\lambda - \frac{2\pi k}{T}\right)r\right) dr \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^A \left[\int_0^A X(t)X(t+r) \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right] \exp\left(+i\left(\lambda - \frac{2\pi k}{T}\right)r\right) dr \\
&= \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^A \widehat{B}_k(A, r) \exp\left(+i\left(\lambda - \frac{2\pi k}{T}\right)r\right) dr
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $r = t - s$.

$$\begin{aligned}
g_k(A, \lambda) &= \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^A \widehat{B}_k(A, -r) \exp(+i\lambda r) dr \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{B}_k(A, r) \exp(-i\lambda r) dr.
\end{aligned}$$

La proposition suivante donne les propriétés de l'estimateur $\widehat{B}_k(A, u)$.

Proposition 71 (*Hurd (1989)*)

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 et les expressions 3.4.1 à 3.4.3, l'estimateur $\widehat{B}_k(A, u)$ est asymptotiquement sans biais, *i.e.*,

1)

$$E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) = B_k(u) \left[1 - \frac{|u|}{A}\right] + \frac{\varepsilon(A, u)}{A} \text{ où } \varepsilon(A, u) \text{ bornée } \forall A, \forall u \quad (3.2.6)$$

2) si $B(\cdot, u) \in L_1([0, T] \times \mathbb{R})$, alors il existe une constante C telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon(A, u)| du \leq C$.

3)

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{2}} \left| E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) - B_k(u) \right| = 0, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3.2.7)$$

Preuve. (Voir Hurd (1989)). ■

La proposition suivante (Hurd (1989)) établit la propriété de convergence en moyenne quadratique des estimateurs $\widehat{B}_k(A, u)$.

Proposition 72

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé de période T

en posant $Z(t, u) = X(t+u)X(t) - R(t+u, t)$

$$R_{z,u}(t_1, t_2) = E(Z(t_1, u)Z(t_2, u))$$

et si l'une des 4 conditions suivantes est vérifiée :

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{z,u}(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$
- b) $\lim_{u \rightarrow \infty} R_{z,u}(t+u, t) = 0$ uniformément en t .
- c) le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien et $\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T B^2(t, u) dt du < \infty$.
- d) le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien et $\lim_{u \rightarrow \infty} B(t+u, t) = 0$ uniformément en t .

alors :

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \widehat{B}_k(A, u) = B_k(u) \text{ en moyenne quadratique.} \quad (3.2.8)$$

La preuve est donnée dans Hurd (1989); néanmoins nous la présentons en détaillant certaines étapes.

Preuve. ■

La démonstration est donnée pour $u \geq 0$.

Posons

$$J_k(A) = \frac{1}{A} \int_0^{A-u} [X(t+u)X(t) - B(t, u)] \exp\left(-i \frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \widehat{B}_k(A, u) - E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) \quad (3.2.9)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire nous obtenons :

$$E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - B_k(u) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left| E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) - B_k(u) \right|$$

D'autre part $\left| E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right) - B_k(u) \right| \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$

il nous à montrer que $E \left\{ |J_k(A)|^2 \right\} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$

⊗ cas où la condition a) est vérifiée :

$$\text{Nous avons } E \left(|J_k(A)|^2 \right) \leq \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} |R_{z,u}(t, s)| dt ds.$$

donc $E \left\{ |J_k(A)|^2 \right\} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$

⊗ cas où la condition b) est vérifiée :

soit $\varepsilon > 0$ donné, et un A_0 tel que: $|R_{z,u}(t+s, t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $|s| > A_0$

et soient les ensembles : $E = [0, A] \times [0, A]$ et $F = E \cap \{(t, s) ; |t - s| < A_0\}$

$$\begin{aligned}
E \left(|J_k(A)|^2 \right) &\leq \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} |R_{z,u}(t, s)| dt ds. \\
&\leq \frac{1}{A^2} \int_0^A \int_0^A |R_{z,u}(t, s)| dt ds. \\
&\leq \frac{1}{A^2} \int_{E-F} |R_{z,u}(t, s)| dt ds + \frac{1}{A^2} \int_F |R_{z,u}(t, s)| dt ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4MA_0A}{A^2} \quad \text{où } A > \frac{8A_0M}{\varepsilon} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

où M est une borne pour les moments d'ordre 4 du processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$

⊗ cas où la condition c) est vérifiée :

nous utilisons la propriété des moments d'ordre 4 du processus gaussien

$$\begin{aligned}
E \left(|J_k(A)|^2 \right) &\leq \frac{1}{A^2} \int_0^A \int_0^A |R_{z,u}(t, s)| dt ds. \\
&\leq \frac{1}{A^2} \int_0^A \int_0^A |R(t+u, s+u)R(t, s)| dt ds + \frac{1}{A^2} \int_0^A \int_0^A |R(t+u, s)R(t, s+u)| dt ds. \\
&\leq \frac{1}{A^2} \left[\int_0^A \int_0^A R^2(t+u, s+u) dt ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^A \int_0^A R^2(t, s) dt ds \right]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad \frac{1}{A^2} \left[\int_0^A \int_0^A R^2(t+u, s) dt ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^A \int_0^A R^2(t, s+u) dt ds \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et pour chacune des 4 intégrales nous effectuons un changement de variable

$r = t - s$ et $p = s$ nous obtenons donc : $r \in \mathbb{R}$ et $p \in [0, A] \subset [0, 2A]$

$$\begin{aligned}
\int_0^A \int_0^A R^2(t+u, s+u) dt ds &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{2A} B^2(p+u, r) dp \\
&\leq \left(1 + \left[\frac{2A}{T}\right]\right) \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^T B^2(p+u, r) dp
\end{aligned}$$

en subdivisant $[0, 2A]$ en sous intervalles de longueur T où T est la période du processus

$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ et sous la condition c), on obtient :

$$E \left(|J_k(A)|^2 \right) = O\left(\frac{1}{A}\right)$$

⊗ cas où la condition d) est vérifiée :

nous utilisons le fait que $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0$ tel que $|s| > A_0 \implies |R(t+u, t)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \forall t$.

Ainsi pour $\forall t$ si $|s| > A_0 + |u|$ nous obtenons

$$R_{z,u}(t+s, t) \leq |R(t+s+u, t+u)R(t+s, t)| + |R(t+s+u, t)R(t+s, t+u)| \leq \varepsilon.$$

La proposition suivante (Monsan (1994)) établit la propriété de convergence en moyenne quadratique des estimateurs $\widehat{B}_k(A, u)$ sous la condition c) donnée dans la proposition précédente, lorsque l'hypothèse de normalité du processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est occultée et est remplacée par la condition que le moment d'ordre 4 du processus est uniformément borné; ceci fait intervenir la fonction cumulant d'ordre 4 définie dans le premier chapitre en (1.8.13). dans toutes les manipulations mathématiques.

Proposition 73

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus périodiquement corrélé à l'ordre 4 avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T B^2(t, u) dt du < \infty \quad (3.2.10)$$

et

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T |K(t, u, v, v + u)| dt du < +\infty \quad (3.2.11)$$

alors

$$\lim_{A \rightarrow \infty} E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - B_k(u) \right|^2 \right\} = 0. \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (3.2.12)$$

Preuve. ■

Nous donnons la démonstration pour u positif, fixé. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - B_k(u) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - E \left(\widehat{B}_k(A, u) \right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left| E \left(\widehat{B}_k(A, u) \right) - B_k(u) \right|$$

Dans la proposition (61), $E \left(\widehat{B}_k(A, u) \right) - B_k(u)$ tend vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$

en posant $J_k(A) = \widehat{B}_k(A, u) - E\left(\widehat{B}_k(A, u)\right)$ il nous suffit de voir que

$$E\left\{|J_k(A)|^2\right\} \longrightarrow 0 \text{ quand } A \longrightarrow +\infty$$

Or,

$$J_k(A) = \frac{1}{A} \int_0^{A-u} [X(t+u)X(t) - B(t, u)] \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

en passant à l'espérance du module au carré nous obtenons

$$\begin{aligned} E\left(|J_k(A)|^2\right) &= \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} E\left\{\left[(X(t+u)X(t) - B(t, u)) \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.[(X(s+u)X(s) - B(s, u)) \exp\left(+i\frac{2\pi ks}{T}\right)]\right\} dt ds \\ &= \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} E[(X(t+u)X(t))(X(s+u)X(s))] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \\ &\quad - \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} E(X(t+u)X(t)) B(s, u) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \\ &\quad - \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} E(X(s+u)X(s)) B(t, u) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \\ &\quad + \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} B(t, u) B(s, u) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(|J_k(A)|^2\right) &= \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} E[(X(t+u)X(t))(X(s+u)X(s))] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \\ &\quad - \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} B(t, u) B(s, u) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}(t-s)\right) dt ds \end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$E[(X(t+u)X(t))(X(s+u)X(s))] - B(t, u)B(s, u) =$$

$$K(s, u, t-s, t-s+u) + B(s, t-s)B(t+u, s-t) + B(s, t-s+u, B(t, u-t+s))$$

nous obtenons donc

$$E\left(|J_k(A)|^2\right) \leq I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{où}$$

$$I_1 = \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} |B(s, t-s)B(t+u, s-t)| ds dt < +\infty$$

$$I_2 = \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} |B(s, t-s+u)B(t, u-t+s)| ds dt < +\infty$$

$$\text{pour } I_3 = \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u} \int_0^{A-u} |K(s, u, t-s, t-s+u)| ds dt$$

posons $t' = t - s$; sachant que t et $s \in [0, A - u]$, u étant positif, $t' \in [-A + u, A - u]$

$$\text{alors} \quad I_3 \leq \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2A} \left| K(s, u, t', t' + u) \right| ds dt'$$

En subdivisant $[0, 2A]$ en sous intervalles de longueur T qui est la période du processus

et utilisant l'hypothèse H_2 , nous obtenons :

$$I_3 \leq \frac{1}{A^2} \left(\frac{[2A]}{T} + 1 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_0^T \left| K(s, u, t', t' + u) \right| ds$$

conclusion

$$I_3 = O\left(\frac{1}{A}\right)$$

$$\text{donc} \quad E \left\{ \left| \widehat{B}_k(A, u) - B_k(u) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } A \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi $\widehat{B}_k(A, u)$ est un estimateur de $B_k(u)$ convergent en moyenne quadratique et, par conséquent, convergent en probabilité.

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien, Hurd (1989) a déterminé le taux de convergence de la covariance $COV \left[\widehat{B}_k(A, u_1), \widehat{B}_j(A, u_2) \right]$, ce qui lui a permis de déterminer le taux de convergence des estimateurs $\widehat{g}_k(A, u)$ des densités spectrales $g_k(\lambda)$. Nous donnons donc, la consistance des estimateurs $\widehat{B}_k(A, u)$. Mais, auparavant, nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 74 (hurd(1989))

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé,

de fonction de covariance $R(t + u, t)$, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T R^2(t + u, t) dt du = K < \infty, \quad (3.2.13)$$

alors: $\forall t_2 > t_1$

$$J_n(v, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} B(t + av + b, v + c) B(t + dv + e, v + f) \exp\left(\frac{-i2\pi nt}{T}\right) dt = (t_2 - t_1) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_{p+\varepsilon}(v, t_1, t_2)$$

où

$$\sigma_p = B_p(v + c) B_{n-p}(v + f) \exp\left(\frac{i2\pi p(av + b)}{T}\right) \exp\left(\frac{i2\pi(n-p)(dv + e)}{T}\right).$$

$$|\varepsilon(v, t_1, t_2)| \leq K_1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(v, t_1, t_2)| dv \leq K_2$$

posons $I(t) = B(t + av + b, v + c)B(t + dv + e, v + f) \exp(\frac{-i2\pi nt}{T})$

Nous subdivisons l'intervalle $[t_1, t_2]$ en sous intervalles de longueur T .

Soit $t_2' = t_1 + mT$ où m est la partie entière de $\frac{(t_2 - t_1)}{T}$ et désigne donc un nombre entier d'intervalles de longueur T .

$$\begin{aligned} J_n(v, t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2'} I(t) dt + \int_{t_2'}^{t_2} I(t) dt = mT \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p + \int_{t_2'}^{t_2} I(t) dt \\ &= (t_2 - t_1) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p - (t_2 - t_2') \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p + \int_{t_2'}^{t_2} I(t) dt \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon(v, t_1, t_2) = \int_{t_2'}^{t_2} I(t) dt - (t_2 - t_2') \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p$$

⊗ pour établir la borne K_1 de $\varepsilon(v, t_1, t_2)$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \varepsilon(v, t_1, t_2) &= \int_{t_2'}^{t_2} I(t) dt - \frac{(t_2 - t_2')}{T} \int_0^T I(t) dt \\ &= \int_0^T f(t, t_2', t_2) I(t) dt - \int_0^T g(t, t_2', t_2) I(t) dt \end{aligned}$$

où t_2', t_2 sont fixés. les fonctions f et g sont positives bornées par 1 pour $t \in [0, T]$.

ainsi:

$$\begin{aligned} |\varepsilon(v, t_1, t_2)| &\leq \int_{t_2'}^{t_2} 2I(t) dt \leq 2 \left[\int_0^T B^2(t + av + b, v + c) dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T B^2(t + dv + e, v + f) dt \right]^{1/2} \\ &\leq 2 \left[\int_0^T M dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T M dt \right]^{1/2} = 2MT \text{ où } M \text{ est une borne pour le moment} \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

d'ordre 4 du processus.

⊗ pour montrer que $\varepsilon(v, t_1, t_2) \in L_1(-\infty, \infty)$.

A partir de (3.2.14)

$$|\varepsilon(v, t_1, t_2)| \leq S(v + c)S(v + f) \quad \text{où} \quad S(v) = \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p^2(v) \right]^{1/2} \text{ existe car } B(\cdot, v) \in L_2[0, T], \forall v \in \mathbb{R}$$

et en vertu de l'hypothèse (3.2.13) nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(v, t_1, t_2)| dv \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} S^2(v + c) dv \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S^2(v + f) dv \right]^{1/2} = K < \infty$$

ainsi

$$\varepsilon(v, t_1, t_2) \in L_1(-\infty, \infty).$$

Proposition 75 (Hurd(1989))

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est gaussien périodiquement corrélé, tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T |B(t, u)| dt du < \infty \quad (3.2.15)$$

alors $\forall u_1, u_2 \in [0, A]$

$$Acov(\widehat{B}_j(A, u_1), \widehat{B}_k(A, u_2)) = \int_{-A}^A U_A(u, u_1, u_2) \cdot [F(u, u_1, u_2) + G(u, u_1, u_2)] du + O\left(\frac{1}{A}\right) \quad (3.2.16)$$

où

$$F(u, u_1, u_2) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p(u + u_1 + u_2) B_{j-k-p}(u) \exp \left[\frac{-i2\pi(ju + pu)}{T} \right] \quad (3.2.17)$$

$$G(u, u_1, u_2) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p(u + u_1) B_{j-k-p}(u - u_2) \exp \left[\frac{-i2\pi(ju - ju_1 + ku_2 + pu_2)}{T} \right] \quad (3.2.18)$$

la fonction U_A vérifiant

$$U_A(u, u_1, u_2) \leq 1 \text{ pour } u \in [-A, A]$$

et $\lim_{A \rightarrow \infty} U_A(u, u_1, u_2) = 1$

la démonstration est donnée pour $u_1, u_2 \geq 0$.

$$cov(\widehat{B}_j(A, u_1), \widehat{B}_k(A, u_2)) = E \left[(\widehat{B}_j(A, u_1) \widehat{B}_k(A, u_2)) \right] - E \left[(\widehat{B}_j(A, u_1)) \right] E \left[(\widehat{B}_k(A, u_2)) \right]$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{A^2} \int_0^{A-u_1} \int_0^{A-u_2} B(t + u_2, s - t + u_1 - u_2) B(t, s - t) \exp \left[-i2\pi \left(\frac{js - kt}{T} \right) \right] ds dt +$$

$$\frac{1}{A^2} \int_0^{A-u_1} \int_0^{A-u_2} B(t, s - t + u_1) B(t + u_2, s - t - u_2) \exp \left[-i2\pi \left(\frac{js - kt}{T} \right) \right] ds dt.$$

En effectuant une partition des domaines d'intégration pour I_1 et I_2

$$E = [0, A - u_1] \times [0, A - u_2] \text{ en}$$

$$A_1 = \{(s, t) \in E; t > s\}$$

$$A_2 = \{(s, t) \in E; s \geq t \text{ et } s \leq t + u_2 - u_1\}$$

$$A_3 = \{(s, t) \in E; s \geq t + u_2 - u_1\}.$$

nous notons par J_1 , J_2 , J_3 les 3 intégrales correspondantes à I_1

et nous effectuons le changement de variable : $r = s - t$, $p = s$

$$J_1 = \frac{1}{A^2} \int_{r=-A+u_2}^0 \int_{p=0}^{A-u_2+r} B(p-r+u_2, r+u_1-u_2) B(p-r, r) \exp \left[\frac{-i2\pi(jp-kp+kr)}{T} \right] dr dp$$

nous obtenons

$$J_1 = (A - u_2 + r) F(r, u_1, u_2) + \epsilon(r, 0, A - u_1 + r)$$

donc

$$AJ_1 = \int_{-A+u_2}^0 \left(1 - \frac{u_2-r}{A}\right) F(r, u_1, u_2) dr + \frac{1}{A} \int_{-A+u_2}^0 \epsilon(r, 0, A - u_1 + r) dr$$

$\left(1 - \frac{u_2-r}{A}\right)$ peut être identifier à $U_A(r, u_1, u_2)$ sur l'intervalle $[-A + u_2, 0]$.

Des transformations similaires nous donnent pour J_2 et J_3

$$J_2 = \frac{1}{A^2} \int_{r=0}^{u_2-u_1} \int_{p=r}^{A-u_2+r} B(s-r+u_2, r+u_1-u_2) B(p-r, r) \exp \left[\frac{-i2\pi(jp-kp+kr)}{T} \right] dp dr$$

$$J_3 = \frac{1}{A^2} \int_{r=u_2-u_1}^{A-u_1} \int_{p=r}^{A-u_1} B(s-r+u_2, r+u_1-u_2) B(p-r, r) \exp \left[\frac{-i2\pi(jp-kp+kr)}{T} \right] dp dr$$

on obtient :

$$AJ_2 = \int_0^{u_2-u_1} \left(1 - \frac{u_2}{A}\right) F(r, u_1, u_2) dr + \frac{1}{A} \int_0^{u_2-u_1} \epsilon(r, r, A - u_2 + r) dr$$

$$AJ_3 = \int_{u_2-u_1}^{A-u_1} \left(1 - \frac{u_1+r}{A}\right) F(r, u_1, u_2) dr + \frac{1}{A} \int_{u_2-u_1}^{A-u_1} \epsilon(r, r, A - u_1) dr$$

$\left(1 - \frac{u_2}{A}\right)$ est identifiée à $U_A(r, u_1, u_2)$ sur l'intervalle $[0, u_2 - u_1]$.

$\left(1 - \frac{u_1+r}{A}\right)$ est identifiée à $U_A(r, u_1, u_2)$ sur l'intervalle $[u_2 - u_1, A - u_1]$.

Nous posons $U_A(r, u_1, u_2) = 0$ pour $r \in \overline{[-A + u_2, A - u_1]}$ où $\overline{[-A + u_2, A - u_1]}$ est le complémentaire de l'intervalle $[-A + u_2, A - u_1]$.

Ainsi nous écrivons :

$$A(J_1 + J_2 + J_3) = \int_{-A}^A U_A(r, u_1, u_2) F(r, u_1, u_2) dr + \frac{K_2}{A}$$

où

$$K_2 = \int_{-A+u_2}^0 |\epsilon(r, 0, A - u_1 + r)| dr + \int_0^{u_2-u_1} |\epsilon(r, r, A - u_2 + r)| dr + \int_{u_2-u_1}^{A-u_1} |\epsilon(r, r, A - u_1)| dr$$

est bornée et est indépendante de A .

nous obtenons

$$A \text{cov}(\widehat{B}_j(A, u_1), \widehat{B}_k(A, u_2)) = \int_{-A}^A U_A(u, u_1, u_2) [F(u, u_1, u_2) + G(u, u_1, u_2)] du + O\left(\frac{1}{A}\right).$$

La proposition suivante établit la consistance des estimateurs $\hat{g}_k(A, u)$ en occultant l'hypothèse que le processus est gaussien .Ce résultat fut donné par Monsan , néanmoins nous avons détaillé et éclairci les différentes étapes de la démonstration.

Proposition 76

Si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est périodiquement corrélé à l'ordre 4 et si

- 1) $K \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$
 - 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T B(t, u)^2 dt du \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$
 - 3) $S(u)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u)^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |B_k(u)|^2$ (égalité de Parseval)
- alors $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ et $\forall \omega_1, \omega_2 \geq 0$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} AB_A COV\{\hat{g}_j(A, \omega_1), \hat{g}_k(A, \omega_2)\} \leq \frac{2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} |h(z)|^2 dz \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} S(u+u_1)S(u)du < +\infty$$

(3.1.19)

Preuve. ■

$$AB_A COV\{\hat{g}_j(A, \omega_1), \hat{g}_k(A, \omega_2)\} = AB_A \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-A}^A \int_{-A}^A [h(B_A v_1)h(B_A v_2) COV(\hat{B}_j(A, v_1), \hat{B}_k(A, v_2)) \exp(-i\omega_1 v_1 + i\omega_2 v_2)] dv_1 dv_2$$

$$COV(\hat{B}_j(A, v_1), \hat{B}_k(A, v_2)) = E \left[\hat{B}_j(A, v_1) - E(\hat{B}_j(A, v_1)) \right] \overline{E \left[\hat{B}_k(A, v_2) - E(\hat{B}_k(A, v_2)) \right]} =$$

$$\frac{1}{A^2} \int_0^{A-v_1} \int_0^{A-v_2} E[(X(s+v_1)X(s) - B(s, v_1))(X(t+v_2)X(t) - B(t, v_2)) \cdot \exp(-i\frac{2\pi}{T}(js-kt))] ds dt$$

d'autre part

$$E[(X(s+v_1)X(s) - B(s, v_1))(X(t+v_2)X(t) - B(t, v_2))] =$$

$$K(t, v_2, s-t, s-t+v_1) + B(t, s-t+v_1)B(t+v_2, s-t+v_2) + B(t, s-t)B(s+v_1, v_2-s+t-v_1)$$

en remplaçant nous obtenons la forme $I_1 + I_2 + I_3$ où

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 = & \frac{AB_A}{(2\pi)^2} \int_{-A}^A \int_{-A}^A h(B_A v_1) h(B_A v_2) \left[\frac{1}{A^2} \int_0^{A-v_1} \int_0^{A-v_2} B(t, s-t+v_1) B(t+v_2, s-t-v_2) \exp(-i \frac{2\pi}{T} (js - kt)) dt ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{A^2} \int_0^{A-v_1} \int_0^{A-v_2} B(t, s-t) B(s+v_1, v_2-s+t-v_1) \exp(-i \frac{2\pi}{T} (js - kt)) dt ds \right] \times \\
& \exp(-i w_1 v_1 + i w_2 v_2) dv_1 dv_2
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) \leq \frac{C}{2\pi^2} \int_0^\infty |h(z)|^2 dz \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} S(u + u_1) S(u) du$$

et pour I_3 nous avons

$$|I_3| \leq \frac{4B_A}{2\pi^2 A} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} |h(B_A v_1) h(B_A v_2)| \times \int_0^{2A} \int_0^{2A} |K(t, v_2, s-t, s-t+v_1)| dv_1 dv_2$$

en posant $t - s = u_2$

et en subdivisant $[0, 2A]$ en $\lceil \frac{2A}{T} \rceil$ intervalles de longueur T où $[x]$ désigne la partie entière

du nombre x , nous pouvons majorer I_3 par

$$|I_3| \leq \frac{2M'^2 B_A}{\pi^2 A} \left(1 + \lceil \frac{2A}{T} \rceil\right) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(t, u_1, u_2, u_3)| dt du_1 du_2 du_3 = O(B_A)$$

on choisit B_A tel que $\lim_{A \rightarrow \infty} AB_A = \infty$ pour obtenir la consistance de l'estimateur $\hat{g}_k(A, w)$.

Dans la section suivante, nous effectuons un échantillonnage périodique sur les processus périodiquement corrélés, et nous présentons l'effet aliasing qui en découle.

3.3 Estimation avec échantillonnage périodique

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T , de fonction d'autocovariance

$$B(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} kt)$$

Dans ce contexte, les instants d'échantillonnage sont tels que

$$t_n = nh \quad h > 0 \tag{3.3.1}$$

Considérons le processus échantillonné Y_n défini, à partir du processus X , par :

$$Y_n = X(nh) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.2}$$

Par analogie avec les processus stationnaires au second ordre, nous donnons les caractéristiques de $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ périodiquement corrélé à partir de celles du processus échantillonné $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et réciproquement. Notons

$$B^h(m, n) = E[Y_{m+n}Y_m] \quad (3.3.3)$$

la fonction d'autocovariance du processus échantillonné $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Nous montrons que ce type d'échantillonnage fait apparaître un *effet aliasing*.

3.3.1 Premier cas $\frac{T}{h} = N$ est un entier positif

Lemme 77

Sous les hypothèses précédentes nous avons

1)

$$B^h(m + N, n) = B^h(m, n). \quad (3.3.4)$$

i.e., Y_n est aussi un processus périodiquement corrélé, à temps discret, de période N .

2) $B^h(m, n)$ admet une représentation en série de Fourier

$$B^h(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} B_l^h(n) \exp(i \frac{2\pi}{N} ml) \quad (3.3.5)$$

où

$$B_l^h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} B^h(m, n) \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{N} ml). \quad (3.3.6)$$

Preuve.

■

$$\begin{aligned} 1) B^h(m + N, n) &= E[Y_{m+n+N}Y_m] \\ &= E[X((m + n + N)h)X(mh)] \\ &= E[X((m + n)h + T)X(mh)] \\ &= E[X((m + n)h)X(mh)] \\ &= E[Y_{m+n}Y_m] \end{aligned}$$

$$= B^h(m, n)$$

Y_n est périodique en m de période N .

2) Cette fonction B^h admet une représentation en série de Fourier telle que :

$$B^h(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} B_l^h(n) \exp(i \frac{2\pi}{N} ml)$$

où $B_l^h(n)$ est le coefficient de Fourier de la fonction B^h associée au processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

et

$$B_l^h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} B^h(m, n) \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{N} ml).$$

Le lemme suivant donne les relations entre les fonctions d'autocovariance et celles des coefficients de Fourier qui lui sont associés.

Lemme 78

Sous les mêmes hypothèses nous avons

1)

$$B^h(m, n) = B(mh, nh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(nh) \exp(i \frac{2\pi}{T} kmh) \quad (3.3.7)$$

2)

$$B_l^h(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jN+l}(nh) \quad (3.3.8)$$

Preuve. ■

$$1) B^h(m, n) = E[X_{(m+n)h} X_{mh}] = E[X_{mh+(nh)} X_{mh}] = B(mh, nh)$$

$$B(mh, nh) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k(nh) \exp(i \frac{2\pi k}{hN} mh)$$

en posant $k = jN + l$; si $-\infty \leq k \leq +\infty, 0 \leq l \leq N-1, -\infty \leq j \leq +\infty$

nous obtenons

$$\begin{aligned} B(mh, nh) &= \sum_{l=0}^{N-1} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{jN+l}(nh) \right] \exp(i \frac{2\pi}{N} m(jN + l)) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{jN+l}(nh) \right] \exp(i \frac{2\pi}{N} ml) \end{aligned}$$

par application du lemme précédent, le coefficient de Fourier de la fonction de covariance du processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc

$$B_l^h(n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_{jN+l}(nh).$$

L'échantillonnage périodique tel que décrit sur les processus périodiquement corrélés, entraîne un effet *aliasing*. Par suite, à partir du processus échantillonné, on ne peut reconstituer le processus d'origine de façon unique; ce qui se résume dans la proposition suivante

Proposition 79

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé; Alors, il existe deux fonctions d'autocovariance différentes $B_1(t, u)$ et $B_2(t, u), t \in [0, T], u \in \mathbb{R}$, pour le processus initial $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ auxquelles correspond une même fonction d'autocovariance $B^h(m, n), m, n \in \mathbb{Z}$, pour le processus échantillonné $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Preuve. ■

A u fixé, nous supposons que $B(t, u) \in L^2([0, T])$

et admet la représentation en série de Fourier suivante

$$B(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} kt)$$

Donc les coefficients de Fourier $B_k(u)$ existent

et on construit d'autres coefficients de Fourier

$$B_{p,k}(u) = \cos(\frac{2\pi}{T} pu) B_k(u) \quad \text{où } p \text{ est un entier non nul.}$$

Pour p fixé, les $B_{p,k}(u)$ et les $B_k(u)$ sont deux fonctions de u différentes $\in L^2([0, T])$,

et $B_p(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_{p,k}(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} kt)$ est différente de $B(t, u)$.

Il reste à vérifier que $B_p(t, u)$ est une autre fonction d'autocovariance pour $X(t)$ en effet

1) c'est une forme hermitienne définie positive, *i.e.*,

$$\sum_{i,j=1}^n x_i \bar{x}_j B_{p,k_i k_j}(u_i - u_j) \geq 0.$$

où

$B_{p,k_i k_j}(u) = B_{p,k_j - k_i}(u) \exp(i \frac{2\pi}{T} k_i(u))$ est le k_i, k_j -ème élément des matrices-coefficients

de la représentation en série de Fourier de la matrice d'autocovariance $B_p(t, u)$.

Et, l'on a :

$$B_{p,k_i,k_j}(u) = \frac{1}{2} [\exp(i\frac{2\pi}{T}pu) + \exp(-i\frac{2\pi}{T}pu)] B_{k_j-k_i}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}k_i u)$$

où $B_{k_j-k_i}(u) \exp(-i\frac{2\pi}{T}k_i u) = B_{k_i,k_j}(u)$ et $B_{k_i,k_j}(u)$ est le k_i, k_j -ème élément des matrices-coefficients de la représentation en série de Fourier de la matrice d'autocovariance $B(t, u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2A &= \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{x}_j \exp(i\frac{2\pi}{h}(u_i - u_j)) B_{k_i k_j}(u_i - u_j) + \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{x}_j \exp(-i\frac{2\pi}{h}(u_i - u_j)) B_{k_i k_j}(u_i - u_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i \exp(i\frac{2\pi}{h}u_i) \overline{x_j \exp(i\frac{2\pi}{h}u_j)} B_{k_i k_j}(u_i - u_j) + \\ &\quad \sum_{i,j=1}^n x_i \exp(-i\frac{2\pi}{h}u_i) \overline{x_j \exp(-i\frac{2\pi}{h}u_j)} B_{k_i k_j}(u_i - u_j) \geq 0 \end{aligned}$$

car B est définie positive

2) Il reste à voir que $B_p^h(m, n) = B(m, n)$

$$B^h(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} B_l^h(n) \exp(i\frac{2\pi}{N}ml)$$

où $B_l^h(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jN+l}(nh)$ d'après le lemme précédent.

$$B_p^h(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} B_{p,l}^h(n) \exp(i\frac{2\pi}{N}ml)$$

$$\begin{aligned} \text{où } B_{p,l}^h(n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{p,jN+l}(nh) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jN+l}(nh) \cos(\frac{2\pi}{T}pnh) \quad \text{où } p \text{ est fixé égal à } N \text{ et } \frac{T}{h} = N \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jN+l}(nh) \end{aligned}$$

donc on a bien $B_p^h(m, n) = B(m, n)$.

Remarque 80

Ce qui exprime la non injectivité de l'application qui à $B(t, u)$ du processus périodiquement corrélé, associe $B(m, n)$ fonction d'autocovariance du processus échantillonné dans le cas d'un échantillonnage périodique.

3.3.2 Second cas $\frac{T}{h}$ n'est pas un entier

Dans cette partie, nous introduisons une fonction $r(t)$ telle que $r(t)$ est une fonction paire, réelle, appartenant à $L^1 \cap L^2$, et de fonction dérivée seconde continue qui s'annule aux points $t_n = n.h$ et $r'(0) = r''(0) = 0$

Si nous choisissons $r(u) = \exp \left[\frac{1}{(u+t_n+\frac{h}{2})^2 - \frac{h^2}{4}} \right]$, $u \in]t_n, t_{n+1}[$

nous construisons les $a_k(u)$ comme suit :

$$a_0(u) = a_0(-u) = r(u) \quad \text{pour } k = 0 \text{ et } u \geq 0$$

$$a_k(u) = \frac{1}{k^2} r(u) \text{ et}$$

$$a_k(-u) = \exp(-i\frac{2\pi}{T}ku) a_k(u) \quad \text{pour } k \geq 1 \text{ et } u \geq 0$$

$$a_{-k}(u) = \overline{a_k(u)} \quad \text{pour } k \geq 1 \text{ et } u \in \mathbb{R}.$$

les fonctions $a_k(u)$ ainsi construites sont à dérivées continues et $a_k(u) \in L^1 \cap L^2$.

Nous construisons les fonctions $a_{jk}(u)$ et leurs transformées de Fourier $A_{jk}(\omega)$ associées comme suit :

pour $j, k \in \mathbb{Z}$, soit

$$a_{jk}(u) = a_{k-j}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}ju),$$

$$A_{jk}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{jk}(u) \exp(-i\omega u) du.$$

Avec les notations précédentes on a

$$a_{jk}(-u) = \overline{a_{jk}(u)} \quad ; \quad a_{p-j, q-j}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}ju) = a_{pq}(u);$$

$$A_{jk}(\omega) = \overline{A_{k,j}(\omega)} \quad ; \quad A_{p-j, q-j}(\omega - \frac{2\pi}{T}j) = A_{pq}(\omega).$$

et $A_{jk} \in L^1 \cap L^2$.

1) pour $\omega \in [0, \frac{2\pi}{T}]$, il existe deux matrices hermitiennes positives $[A_{jk}^{(i)}(\omega)]_{j,k}$, $i = 1, 2$

$$\sup_{i=1,2} \left\{ \left| A_{jk}^{(i)}(\omega) \right| \right\} \leq |A_{jk}(\omega)| \quad \text{et} \quad A_{jk}(\omega) = A_{jk}^{(1)}(\omega) - A_{jk}^{(2)}(\omega).$$

2) pour $\omega \in [\frac{2\pi}{T}j, \frac{2\pi}{T}(j+1)]$, $j \in \mathbb{Z}$

$$\text{et pour } i = 1, 2 \quad A_{pq}^{(i)}(\omega) = A_{p-j, q-j}^{(i)}(\omega - \frac{2\pi}{T}j); p, q \in \mathbb{Z}.$$

Lemme 81

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T ; sous les hypothèses précédentes, il existe deux fonctions d'autocovariance $B^{(1)}(t, u)$ et $B^{(2)}(t, u)$ distinctes pour $t \in [0, T], u \in \mathbb{R}$ pour le processus initial $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ auxquelles correspond une même fonction d'autocovariance $B_k^{(1)}(t_n) = B_k^{(2)}(t_n)$ pour le processus échantillonné.

Ainsi $B^{(1)}(t, u)$ et $B^{(2)}(t, u)$ sont dits *aliases*.

Preuve.

■

Avec les notations précédentes nous posons :

$$B_{jk}^{(i)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{jk}^{(i)}(\omega) \exp(i\omega u) d\omega = B_{0,k-j}^{(i)}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}ju).$$

$$B_k^{(i)}(u) = B_{0,k}^{(i)}(u)$$

nous avons :

$$B_{jk}^{(i)}(u) = B_{k-j}^{(i)}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}ju).$$

$$\left| B_k^{(i)}(u) \right| \leq \frac{1}{k^2} \text{ pour } k \neq 0$$

Ainsi, nous pouvons définir les fonctions $B^{(i)}(t, u)$ telles que :

$B^{(i)}(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k^{(i)}(u) \exp(i\frac{2\pi}{T}ju)$ pour $i = 1, 2$ qui sont fonctions de covariance du processus périodiquement corrélé, nous obtenons aux points t_n :

$$B_{jk}^{(1)}(t_n) - B_{jk}^{(2)}(t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (A_{jk}^{(1)}(\omega) - A_{jk}^{(2)}(\omega)) \exp(i\omega t_n) d\omega$$

$$= a_{jk}(t_n)$$

$$= 0.$$

$$\text{donc } B_k^{(1)}(t_n) = B_k^{(2)}(t_n).$$

L'égalité des coefficients de Fourier des fonctions d'autocovariance respectives du processus échantillonné entraîne l'égalité des fonctions d'autocovariance de ce même processus.

$$\text{et } \forall m, n \in Z, \quad B^{(1)}(t, t_n) = B^{(2)}(t, t_n),$$

$$B^{(1)}(t_m, t_n) = B^{(2)}(t_m, t_n).$$

Remarque 82

Nous pouvons généraliser ce résultat à une combinaison linéaire convexe de fonctions $B_\alpha(t, u)$ telles que :

$B_\alpha(t, u) = \alpha B^{(1)}(t, u) + (1 - \alpha) B^{(2)}(t, u)$ où $0 \leq \alpha \leq 1$ soit une famille de fonctions d'autocovariance *aliases*.

3.4 Estimation avec échantillonnage aléatoire

3.4.1 Hypothèses et notations

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T tel que :

$$B(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt).$$

$$B(t, u) \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}).$$

- Nous supposons que les fonctions densités spectrales $g_k \in L^1 \cap L^2, k \in \mathbb{Z}$.
- Les instants d'échantillonnage t_n sont tels que :

$$t_1 = 0 \quad \text{et} \quad t_n = t_{n-1} + \alpha_n \quad (3.4.1)$$

$(t_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires croissantes ;

$(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi de probabilité telle que

$$E(\alpha_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3.4.2)$$

α_n a pour densité de probabilité $f(u)$ et $f(u) = 0$ pour $u \leq 0$.

Faisons les hypothèses suivantes :

$H_1)$ $f \in L^2(\mathbb{R})$

$H_2)$ Les instants $(t_n)_{n \geq 0}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes du processus d'observation $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$.

$\phi(\omega)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire α_n ;

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(i\omega u) du \quad (3.4.3)$$

et

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) \exp(-i\omega u) d\omega \quad (3.4.4)$$

$f_k(u)$ désigne la densité de probabilité de la somme de k variables aléatoires $\alpha_1, \dots, \alpha_k, k \in \mathbb{Z}^*$.

$[\phi(\omega)]^k$ est la fonction caractéristique associée à $f_k(u), k \in \mathbb{Z}^*$.

$$[\phi(\omega)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(u) \exp(i\omega u) du \quad (3.4.5)$$

et

$$f_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi(\omega)]^k \exp(-i\omega u) d\omega \quad (3.4.6)$$

Proposition 83

Soit $Y_n = X(t_n)$ le processus échantillonné du processus initial $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\omega)|^{2k} d\omega \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\omega)|^2 d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du < +\infty$$

Par conséquent, f_k et $\phi^k \in L^2, k \in \mathbb{Z}^*..$

Preuve. ■

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_k^2(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_k^2(u)| du = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(u) \overline{f_k(u)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi^k(\omega)} \exp(+i\omega u) d\omega \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi^k(\omega)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(u) \exp(+i\omega u) du \right] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi^k(\omega)} \phi^k(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^k(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\omega)|^{2k} d\omega \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\omega)|^2 d\omega \quad \text{car nous pouvons déduire que } |\phi(\omega)| \leq 1. \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)^2 du < \infty. \end{aligned}$$

Proposition 84

supposons que :

$$\sum_{k \geq 1} f_k(u) = K < +\infty \quad (3.4.7)$$

et en posant

$$C_k^\alpha(n) = \frac{1}{KT} \sum_{l \geq 1} E \left[Y_{l+n} Y_l \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] \quad (3.4.8)$$

nous obtenons alors :

1/ $C_k^\alpha(n)$ est une série convergente

2/

$$C_k^\alpha(n) = \int_0^{+\infty} B_k(u) f_n(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\omega) (\phi(\omega))^n d\omega. \quad (3.4.9)$$

3/

$$C_k^\alpha(0) = B_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\omega) d\omega. \quad (3.4.10)$$

Preuve. ■

$$\begin{aligned} 1/ \ E \left[Y_{l+n} Y_l \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] &= E \left[E \left[X(t_{l+n}) X(t_l) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] / \{t_n\} \right] \\ &= E \left[B(t_l, t_{l+n} - t_l) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T B(t, u) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right) f_l(t) f_n(u) dt du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 1} E \left[Y_{l+n} Y_l \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] &\leq \sum_{l \geq 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |B(t, u) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right) f_l(t) f_n(u)| dt du \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |B(t, u)| |\exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right)| \left(\sum_{l \geq 1} f_l(t) \right) f_n(u) dt du \\ &\leq K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |B(t, u)| dt du \quad B(t, u) \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2/ \ C_k^\alpha(n) &= \frac{1}{KT} \sum_{l \geq 1} E \left[Y_{l+n} Y_l \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] \\ &= \frac{1}{KT} \sum_{l \geq 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T B(t, u) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right) f_l(t) f_n(u) dt du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T B(t, u) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right) dt \right] f_n(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_k(u) f_n(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} B_k(u) f_n(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\omega) \exp(i\omega u) d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^n(\omega') \exp(-i\omega' u) d\omega' \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\omega) \phi^n(\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3/ \ C_k^\alpha(0) &= \frac{1}{KT} \sum_{l \geq 1} E \left[X(t_l) X(t_l) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t_l \right) 1_{\{t_l < T\}} \right] \\ &= \frac{1}{KT} \sum_{l \geq 1} \int_0^T B(t, 0) \exp \left(-i \frac{2\pi}{T} k t \right) f_l(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T B(t, 0) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \\
&= B_k(0)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$C_k^\alpha(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\omega) d\omega = B_k(0)$$

Proposition 85

L'échantillonnage aléatoire est *alias-free* si et seulement si

la fonction caractéristique $\phi(\omega)$ ne prend pas plus d'une seule valeur sur l'axe réel

L'échantillonnage est *alias free* $[\omega_1 \neq \omega_2 \implies \phi(\omega_1) \neq \phi(\omega_2)]$

Preuve. ■

Nous montrons que si pour $\omega_1 \neq \omega_2$ et $\phi(\omega_1) = \phi(\omega_2)$ alors il y a apparition de l'effet *aliasing*.

1/ Pour $k \geq 0$ il suffit de construire une suite de fonctions $A_k \in L^1 \cap L^2$ telle que :

$$A_k(\omega) = A_k(\frac{2\pi}{T} - \omega), \quad \omega \neq \frac{2\pi}{T} - \omega, \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} A_k(\omega) \phi^n(\omega) d\omega = 0, \quad n \geq 0$$

2/ Si $\mathcal{A}$ désigne la classe des transformées de Fourier des fonctions L_1 -intégrables, nous avons montré qu'il existe une suite $a_k \in \mathcal{A} \cap L^2$, non identiquement nulle telle que

$$\text{a) } a_k(-u) = \exp(-i \frac{2\pi}{T} ku) a_k(u)$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} a_k(u) f_n(u) du = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\text{c) } a_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(u) d\omega = 0$$

donc il existe A_k tel que :

$$a_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(u) \exp(i\omega u) d\omega, \quad a_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(u) d\omega = 0, \quad A_k(-\omega) = \overline{A_{-k}(\omega)}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

3.4.2 Cas d'échantillonnage poissonnien

Dans cette partie, nous supposons que les variables $(\alpha_i)_i$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité (*i.i.d*) exponentielle de paramètre β telle que :

$$f(u) = \beta \exp(-\beta u) 1_{\mathbb{R}^+(u)} \quad (3.4.11)$$

la loi de $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ est donc

$$f_n(u) = \beta \exp(-\beta u) \frac{(\beta u)^{n-1}}{(n-1)!} 1_{\mathbb{R}^+(u)} \quad (3.4.12)$$

$$\sum_{n \geq 1} f_n(u) = \beta < +\infty \quad (3.4.13)$$

Remarque 86

Les fonctions $\{f_n(u) : n \geq 1\}$ forment un système complet dans $L^2[0, \infty]$.

Il existe donc une suite de fonctions complète et orthogonale

$\{q_n(u) : n \geq 1\}$ dans $L^2[0, \infty]$ telle que $q_n(u) = \sum_{l=1}^n b_{n,l} f_l(u)$ où

$$b_{n,l} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} (-2)^{l-1} C_{n-1}^{l-1} \quad (3.4.14)$$

Dans ce qui suit, nous donnons les propriétés du processus échantillonné fondé sur l'échantillonnage poissonien tel que décrit précédemment. Nous donnons l'expression de la fonction d'autocovariance de Y_n en fonction de la suite de fonctions q_n orthogonale à f_n .

Proposition 87

Soit

$$\gamma_k^\alpha(n) = \int_0^\infty B_k(u) q_n(u) du \quad (3.4.15)$$

et

$$B_k(u) = \sum_{n \geq 1} \gamma_k^\alpha(n) q_n(u) \quad \forall n \geq 1, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.4.16)$$

alors :

1/

$$\gamma_k^\alpha(n) = \sum_{l=1}^n b_{n,l} C_k^\alpha(l) \quad (3.4.17)$$

2/

$$g_k(\omega) = \sum_{n \geq 1} \gamma_k^\alpha(n) \left(\psi_n(\omega) + \psi\left(\frac{2\pi k}{T} - \omega\right) \right) \quad \text{est dans } L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.4.18)$$

où

$$\psi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-i\omega u) q_n(u) du. \quad (3.4.19)$$

Preuve. ■

$$\begin{aligned} 1/ \quad \gamma_k^\alpha(n) &= \int_0^\infty B_k(u) q_n(u) du \\ &= \int_0^\infty B_k(u) [b_{n,1}f_1(u) + b_{n,2}f_2(u) + \dots + b_{n,n}f_n(u)] du \\ &= \int_0^\infty B_k(u) b_{n,1}f_1(u) du + \int_0^\infty b_{n,2}f_2(u) du + \dots + \int_0^\infty b_{n,n}f_n(u) du \\ &= \sum_{l=1}^n b_{n,l} C_k^\alpha(l) \quad \text{car } C_k^\alpha(l) = \int_0^\infty B_k(u) f_l(u) du \\ 2/ \quad g_k(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty B_k(u) \exp(-i\omega u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty B_k(-u) \exp(+i\omega u) du + \int_0^\infty B_k(u) \exp(-i\omega u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty \exp(-i\frac{2\pi k u}{T}) B_k(u) \exp(+i\omega u) du + \int_0^\infty B_k(u) \exp(-i\omega u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty B_k(u) \exp(-iu(\frac{2\pi k}{T} - \omega)) du + \int_0^\infty B_k(u) \exp(-i\omega u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \gamma_k^\alpha(n) \int_0^\infty \exp(-iu(\frac{2\pi k}{T} - \omega)) q_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \gamma_k^\alpha(n) \int_0^\infty \exp(-i\omega u) q_n(u) du \\ &= \sum_{n \geq 1} \gamma_k^\alpha(n) (\psi_n(\omega) + \psi(\frac{2\pi k}{T} - \omega)) \end{aligned}$$

3.4.3 Estimation spectrale pour les processus périodiquement corrélés

3.4.3.1 Hypothèses et notations

A partir de ces relations, Monsan a proposé 3 estimateurs des fonctions densités spectrales $g_k, k \in \mathbb{Z}$. Dans cette section, nous nous sommes intéressés de manière plus approfondie au premier estimateur noté $\hat{g}_k^1$; cependant, nous donnons aussi les caractéristiques principales du second estimateur noté $\hat{g}_k^2$. Le troisième estimateur $\hat{g}_k^3$, nécessite d'autres approches et notations.

Soit $H(\omega)$ une fonction paire absolument intégrable telle que:

$$\int_{-\infty}^\infty H(\omega) d\omega = 1$$

soit M_N une suite de nombres ≥ 0 telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = \infty$.

$$W_N(\omega) = M_N \cdot H(M_N \omega)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^\infty H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, w_N(t) = h(\frac{t}{M_N})$$

supposons que l'on obtienne un échantillon $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$, nous estimons g_k par

$$\begin{aligned} \hat{g}_k^1(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} w_N(t_{l+n} - t_l) X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \quad (3.4.20) \\ &\times \left\{ \exp \left[i \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i\omega(t_{l+n} - t_l)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_k^2(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{M_N} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \quad (3.4.21) \\ &\times \left\{ \exp \left[i \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i\omega(t_{l+n} - t_l)] \right\} \end{aligned}$$

Propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{g}_k^1$

Avant de donner les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{g}_k^1$, nous donnons une autre expression équivalente à (3.3.20).

Lemme 88

1/

$$\begin{aligned} \hat{g}_k^1(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \quad (3.4.22) \\ &\times \left\{ \exp \left[i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i\lambda(t_{l+n} - t_l)] \right\} \end{aligned}$$

2/ et

$$\left| \sum_{n=1}^N \phi(\omega)^n \right| \leq \frac{2\beta}{|\omega|} \quad \text{si } \omega \neq 0 \quad (3.4.23)$$

Preuve. ■

1/ Nous avons $w_N(t) = h(\frac{t}{M_N}) = \int_{-\infty}^{\infty} H(u) \exp(iu\frac{t}{M_N}) du = \int_{-\infty}^{\infty} W(u) \exp(iut) du$

$$w_N(t_{l+n} - t_l) = \int_{-\infty}^{\infty} W(u) \exp(iu(t_{l+n} - t_l)) du.$$

En divisant par 2 et, en utilisant le fait que H et, donc, W_N est une fonction paire

$$\hat{g}_k^1(N, \omega) = I_1 + I_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(u) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n})X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \times \\
&\quad \left\{ \exp \left[i \left(\omega + u - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i(\omega + u)(t_{l+n} - t_l)] \right\} du \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(u) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n})X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \times \\
&\quad \left\{ \exp \left[i \left(\omega - u - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i(\omega - u)(t_{l+n} - t_l)] \right\} du
\end{aligned}$$

or $I_1 = I_2$ en posant $\lambda = \omega + u$ on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{g}_k^1(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n})X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \times \\
&\quad \left\{ \exp \left[i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i(\lambda)(t_{l+n} - t_l)] \right\} d\lambda \\
2/ \quad \left| \sum_{n=1}^N \phi(\omega)^n \right| &= \phi(\omega) \left(\frac{\phi(\omega)^N - 1}{\phi(\omega) - 1} \right) \quad \text{suite géométrique où } |\phi(\omega)| \leq 1 \\
&\leq 2 \left| \frac{\phi(\omega)}{\phi(\omega) - 1} \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{\beta}{\omega} \right| \\
&\quad (\text{car, dans notre cas } \phi(\omega) = \frac{\beta}{\beta - i\omega}).
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que l'estimateur $\hat{g}_k^1(N, \omega)$ est asymptotiquement sans biais.

Theorème 89

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} \frac{|B_j(u)|}{|j - k|} + |B_k(u)| \right) du < +\infty \quad (3.4.24)$$

alors:

1/

$$E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) g_k(\lambda) d\lambda + o(1) \quad (3.4.25)$$

2/

$$E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} H(u) g_k(\omega - \frac{u}{M_N}) du + o(1) \quad (3.4.26)$$

i.e., $\hat{g}_k^1$ est un estimateur asymptotiquement sans biais pour les fonctions densités spectrales $g_k(\omega), k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. ■

A partir de l'expression de

$$\hat{g}_k^1(N, \omega) = \frac{1}{2\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T} k t_l) \times \\ \left\{ \exp \left[i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i(\lambda)(t_{l+n} - t_l)] \right\} d\lambda$$

par passage au espérances, on obtient :

$$E(\hat{g}_k^1(N, \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) \times I(\lambda) d\lambda \text{ où} \\ I(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} E \left[\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T} k t_l) \times \right. \\ \left. \left\{ \exp \left[i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i(\lambda)(t_{l+n} - t_l)] \right\} \right]$$

puis, en passant aux espérances conditionnelles sur les lois des écarts entre les instants

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} B_j(u) \exp(i\frac{2\pi}{T} j t) \times \exp(-i\frac{2\pi}{T} k t) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) + \exp(-i\lambda(u)) \right\} \right] f_n(u) f_l(t) du dt$$

puis, en séparant les variables

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_j(u) \left(\exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) \exp(-i\lambda u) \right) f_n(u) \right\} \times \\ \left(\sum_{l=1}^{N-n} \int_0^{\infty} \exp(i\frac{2\pi}{T} (j-k)t) f_l(t) dt \right) du$$

en considérant le cas $j = k$ et le cas $j \neq k$ nous obtenons :

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \int_0^{\infty} B_k(u) \left(\exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) + \exp(-i\lambda u) \right) f_n(u) du \right\} + \\ \frac{1}{2\pi\beta N} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \sum_{j \neq k} B_j(u) \left(\exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) + \exp(-i\lambda u) \right) f_n(u) \right\} \times \left(\sum_{l=1}^{N-n} \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j-k) \right)^l \right) du$$

$$\text{car nous avons } \int_0^{\infty} \exp(i\frac{2\pi}{T} (j-k)t) f_l(t) dt = \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j-k) \right)^l \text{ et}$$

en posant

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \int_0^{\infty} B_k(u) \left(\exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) + \exp(-i\lambda u) \right) f_n(u) du$$

et

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} B_j(u) \left(\exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) u \right) + \exp(-i\lambda u) \right) \times \sum_{l=1}^{N-n} \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j-k) \right)^l \right) f_n(u) du$$

nous remarquons que :

$$|I_2(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \left| \sum_{j \neq k} B_j(u) \right| \times 2 \times \frac{\beta}{2\pi|j-k|} f_n(u) du = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

et,

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) e_n^k(\lambda)$$

$$\text{où } e_n^k(\lambda) = \int_0^\infty B_k(u) \left(\exp\left(i\left(\lambda - \frac{2\pi}{T}k\right)u\right) + \exp(-i\lambda u) \right) f_n(u) du$$

et en remarquant que :

$$\begin{aligned} 1/ \quad \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^\infty e_n^k(\lambda) &= \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\infty B_k(u) \left(\exp\left(i\left(\lambda - \frac{2\pi}{T}k\right)u\right) + \exp(-i\lambda u) \right) \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(u) \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B_k(u) \left(\exp\left(i\left(\lambda - \frac{2\pi}{T}k\right)u\right) + \exp(-i\lambda u) \right) du \\ &= g_k(\lambda) \end{aligned}$$

$$2/ \quad I_1(\lambda) = g_k(\lambda) - \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=N}^\infty e_n^k(\lambda) - \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{N} e_n^k(\lambda)$$

$$3/ \quad |e_n^k(\lambda)| \leq 2 \int_0^\infty |B_k(u)| f_n(u) du$$

Il vient alors :

$$\sum_{n=1}^\infty e_n^k(\lambda) \quad \text{converge uniformément}$$

$$\sum_{n \geq N} e_n^k(\lambda) \text{ et } \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n e_n^k(\lambda) \text{ convergent uniformément vers } 0$$

donc

$$\begin{aligned} E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} &= \int_{-\infty}^\infty W_N(\omega - \lambda) \left[g_k(\lambda) + o(1) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^\infty W_N(\omega - \lambda) g_k(\lambda) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{-\infty}^\infty M_N H(M_N(\omega - \lambda)) g_k(\lambda) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{-\infty}^\infty M_N H(M_N(\omega - \lambda)) g_k(\lambda) d\lambda + o(1) \\ &= \int_{-\infty}^\infty H(u) g_k\left(\omega - \frac{u}{M_N}\right) du + o(1) \end{aligned}$$

donc $\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = g_k(\omega)$ et, par conséquent, $\hat{g}_k^1(N, \omega)$ est un estimateur as-

ymptotiquement sans biais.

Dans le lemme suivant, nous donnons une autre expression de $E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \}$.

Lemme 90

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T tel que

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{j \neq k} \frac{|B_j(u)|}{|j-k|} + |B_k(u)| \right) du < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^\infty |u B_k(u)| du < +\infty$$

alors

$$E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) g_k(\lambda) d\lambda + O(\frac{1}{N}).$$

Le corollaire suivant nous donne l'expression du biais de cet estimateur $\hat{g}_k^1$.

Corollaire 91

En plus des hypothèses du théorème précédent , nous supposons que :

$$u^q B_k(u) \in L^1([0, \infty[) \quad \text{où } q \in \mathbb{N}^*$$

et que la fonction $h(t)$ est q fois différentiable à dérivées bornées, alors

$$E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = g_k(w) + \sum_{l=1}^{q-1} i^l \frac{h^l(0)}{M_N^q} g_k^l(w) + O(\frac{1}{M_N^q}) + O(\frac{1}{N}).$$

Monsan ne donne pas la démonstration de ce corollaire. Nous la présentons dans ce qui suit pour un processus périodiquement corrélé

Preuve.

■

D'une part,

$$\begin{aligned} E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) g_k(\lambda) d\lambda + O(\frac{1}{N}). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M_N \cdot H(M_N(\omega - \lambda)) g_k(\lambda) d\lambda + O(\frac{1}{N}). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(u) g_k(w - \frac{u}{M_N}) du + O(\frac{1}{N}). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} h(t) \exp(-iut) dt \right) g_k(w - \frac{u}{M_N}) du + O(\frac{1}{N}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} h(\frac{t}{M_N}) \exp(-it(w - \lambda)) dt \right) g_k(\lambda) d\lambda + O(\frac{1}{N}). \end{aligned}$$

D'autre part ,

La formule de Mac Laurin au voisinage de 0 pour $h(\frac{t}{M_N})$ à l'ordre q nous donne :

$$h(\frac{t}{M_N}) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) + \frac{t^q}{q! M_N^q} h^q(x) \quad \text{où } x \in \left] 0, \frac{t}{M_N} \right[.$$

$$\text{donc } E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \exp(-it(w - \lambda)) g_k(\lambda) + O(\frac{1}{M_N^q}).$$

pour $j = 0$ nous avons

$$E \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \exp(-it(w - \lambda)) g_k(\lambda) dt d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(0) \exp(-it(w - \lambda)g_k(\lambda)) dt d\lambda \\
&= g_k(w).
\end{aligned}$$

pour $j \neq 0 : j \neq q$, posons :

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^j \exp(-it(w - \lambda)) dt \right] d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\lambda) [l^{(j)}(w - \lambda)] d\lambda
\end{aligned}$$

où $\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^j \exp(-it(w - \lambda)) dt \right]$ est la dérivée j -ième d'une fonction l de $(w - \lambda)$

que l'on note par $l^{(j)}(w - \lambda)$. En dérivant par partie l'expression R , $(q - 1)$ fois,

nous obtenons

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \left[g_k(\lambda) l^{(j-1)}(w - \lambda) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} j i g_k^{(1)}(\lambda) [l^{(j-1)}(w - \lambda)] d\lambda \right] \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) \left(- \int_{-\infty}^{\infty} i j g_k^{(1)}(\lambda) [l^{(j-1)}(w - \lambda)] d\lambda \right) \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) i^j j! \int_{-\infty}^{\infty} g_k^{(j)}(\lambda) [l^{(0)}(w - \lambda)] d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} \frac{t^j}{M_N^j} h^j(0) i^j j! g_k^{(j)}(w).
\end{aligned}$$

pour $j = q$ ce qui correspond au reste du développement de Mac Laurin :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{t^q}{M_N^q} h^q(x) 1 \Big|_{0, \frac{T}{M_N}} \left[\exp(-it(w - \lambda)) g_k(\lambda) dt d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{q!} \frac{1}{M_N^q} \int_{-\infty}^{\infty} |t^q h^{(q)}(x)| 1 \Big|_{0, \frac{t}{M_N}} \left[\exp(-itw) dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_k(\lambda) \exp(it\lambda) d\lambda \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{q!} \frac{1}{M_N^q} \int_{-\infty}^{\infty} |t^q| (B_k(t)) dt < +\infty \text{ et même c'est un } O\left(\frac{1}{M_N^q}\right)$$

et la condition d'existence de la dérivée q ième de g_k découle du fait de l'hypothèse émise

$u^q B_k(u) \in L^1[0, +\infty[$ en effet

$$\begin{aligned}
\left| g_k^{(q)}(\lambda) \right| &= \left| \left(\int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(-iu\lambda) du \right)^{(q)} \right| = \left| i^q \int_{-\infty}^{\infty} u^q B_k(u) \exp(-iu\lambda) du \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} u^q B_k(u) < \infty.
\end{aligned}$$

Avant d'énoncer le théorème de consistance de l'estimateur $\hat{g}_k^1(N, \omega)$, nous donnons les trois principales hypothèses suivantes:

(h1)

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} \frac{|B_j(u)|}{|j-k|} + |B_k(u)| \right) du < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} |u B_k(u)| du < +\infty$$

$$b) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |B_j(0)| \int_0^{\infty} |B_j(u)| du < \infty, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |B_j(0)|^2 < \infty$$

(h2) $\forall j \geq 0, \exists h_j(u)$ telle que :

a) $h_j(u)$ est une fonction continue, positive, paire, intégrable, croissante, sur $[0, \infty[$,

b) $|B_j(u)| \leq h_j(u)$,

$$c) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j_1+j_2 \neq 0} \frac{1}{|j_1+j_2|} h_{j_1}(u_1) h_{j_2}(u_2) + \sum_{j_1+j_2=0} \frac{1}{|j_1+j_2|} h_{j_1}(u_1) h_{j_2}(u_2) \right) du_1 du_2 < \infty$$

$$d) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j_1+j_2 \neq 0} \frac{1}{|j_1+j_2|} h_{j_1}(u_1) h_{j_2}(u_2) + \sum_{j_1+j_2=0} \frac{1}{|j_1+j_2|} h_{j_1}(u_1) h_{j_2}(u_2) \right) (u_1 + u_2) du_1 du_2 < \infty$$

(h3) $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé à l'ordre 4

et $\forall j \in \mathbb{Z}$ il existe trois fonctions positives q_j^1, q_j^2, q_j^3 telles que :

$$|K_j(u_1, u_2, u_3)| \leq \prod_{i=1}^3 q_j^i(u_i),$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} \frac{q_j^1(u_1) q_j^2(u_2) q_j^3(u_3)}{|j-k|} + q_j^1(u_1) q_j^2(u_2) q_j^3(u_3) \right) du_1 du_2 du_3 < \infty.$$

(h4) la suite M_N est telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} = 0$.

Nous posons également:

$$p(l, n, k, \lambda) = \left(\exp(i(\lambda - \frac{2\pi}{T}k)(t_{l+n} - t_l)) + \exp(-i\lambda(t_{l+n} - t_l)) \right) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l).$$

$$J_k(N, \lambda) = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) p(l, n, k, \lambda)$$

$$U_{N,1}(k, \lambda, \mu) =$$

$$\frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{l_1, l_2 \in R} E \left(p(l_1, n_1, k, \lambda) \overline{p(l_2, n_2, k, \mu)} \cdot E \{ X(t_{l_1+n_1}) X(t_{l_1}) X(t_{l_2+n_2}) X(t_{l_2}) / (t_n) \} \right).$$

$$U_{N,2}(k, \lambda, \mu) =$$

$$\frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{l_1, l_2 \in R} E(p(l_1, n_1, k, \lambda) \overline{p(l_2, n_2, k, \mu)} \cdot B(t_{l_1}, t_{l_2} - t_{l_1}) B(t_{l_1+n_1}, t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1})).$$

$$U_{N,3}(k, \lambda, \mu) =$$

$$\frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{l_1, l_2 \in R} E(p(l_1, n_1, k, \lambda) \overline{p(l_2, n_2, k, \mu)} \cdot B(t_{l_1}, t_{l_2+n_2} - t_{l_1}) B(t_{l_2}, t_{l_1+n_1} - t_{l_2})).$$

$$U_{N,4}(k, \lambda, \mu) =$$

$$\frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{l_1, l_2 \in R} E(p(l_1, n_1, k, \lambda) \overline{p(l_2, n_2, k, \mu)} \cdot K(t_{l_1}, t_{l_1+n_1} - t_{l_1}, t_{l_2+n_2} - t_{l_1}, t_{l_2} - t_{l_1})).$$

où le domaine $R = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq l_1 \leq N - n_1, 1 \leq l_2 \leq N - n_2\}$.

(voir annexe 2 pour quelques résultats algébriques concernant ce type de domaines de $\mathbb{N}^2$).

Lemme suivant nous donne une expression de la variance de l'estimateur $\hat{g}_k^1(N, \omega)$.

Lemme 92

Avec les notations précédentes nous avons :

$$var(\hat{g}_k^1(N, \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) W_N(\omega - \mu) cov(J_k(N, \lambda), J_k(N, \mu)) d\lambda d\mu$$

Preuve. ■

A partir des expressions de l'estimateur et celles de $J_k(N, \lambda)$ et $p(l, n, k, \lambda)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{g}_k^1(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T} k t_l) \times \\ &\quad \left\{ \exp \left[i \left(\lambda - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i\lambda(t_{l+n} - t_l)] \right\} \\ cov(\hat{g}_k^1(N, \omega), \hat{g}_k^1(N, \omega)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) W_N(\omega - \mu) cov(cov(J_k(N, \lambda), J_k(N, \mu)) d\lambda d\mu J_k(N, \mu)) d\lambda d\mu \end{aligned}$$

En se basant fondamentalement sur les démonstrations des différents résultats de l'annexe,

nous donnons dans la proposition suivante les écarts entres les

$$(U_{N,i}(k, \lambda, \mu))_{i=1,3} \text{ et les } E(J_k(N, \lambda)) \overline{E(J_k(N, \mu))},$$

qui vont nous permettre de donner ,en conséquence,dans le théorème qui suivra le taux de la variance de

l'estimateur et par suite la conclusion de la consistance de cet estimateur des fonctions de densités spectrales.

Proposition 93

(1) Sous les hypothèses (h1) et (h2),

$$U_{N,1}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda)) \overline{E(J_k(N, \mu))} = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

$$U_{N,3}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

(2) Sous l'hypothèse (h3),

$$U_{N,4}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

(3) Sous les hypothèses (h1) et (h2) , et si la fonction H est à dérivée bornée alors

$$U_{N,2}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu \quad .$$

Preuve. (voir annexe2) ■

Ainsi nous énonçons le théorème de la consistance de l'estimateur .

Theorème 94

Sous les hypothèses (h1),(h2) ,(h3) et si la fonction H est à dérivée bornée ,

nous avons $var \{ \hat{g}_k^1(N, \omega) \} = O\left(\frac{M_N}{N}\right) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad .$

Preuve. ■

A partir de l'expression du lemme 81

Nous évaluons le covariance de $J_k(N, \lambda)$.

$$cov(J_k(N, \lambda), J_k(N, \mu)) = E(J_k(N, \lambda) \overline{J_k(N, \mu)}) - E(J_k(N, \lambda)).E(\overline{J_k(N, \mu)})$$

en passant à l'espérance conditionnelle par rapport à la loi des instants (t_n) nous

obtenons :

$$\begin{aligned} & E(J_k(N, \lambda) \overline{J_k(N, \mu)}) \\ &= E \left(\frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n_1=1}^{N-1} \sum_{l_1=1}^{N-n_1} X(t_{l_1+n_1}) X(t_{l_1}) p(l_1, n_1, k, \lambda) \times \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n_2=1}^{N-1} \sum_{l_2=1}^{N-n_2} (X(t_{l_2+n_2}) X(t_{l_2}) \overline{p(l_2, n_2, k, \lambda)}) / (t_n) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\beta N} \right)^2 \sum_{n_1=1}^{N-1} \sum_{n_2=1}^{N-1} \left(\sum_{l_1=1}^{N-n_1} \sum_{l_2=1}^{N-n_2} E(p(l_1, n_1, k, \lambda) \overline{p(l_2, n_2, k, \lambda)}) \right) \\ & \quad E(X(t_{l_1+n_1}) X(t_{l_1}) X(t_{l_2+n_2}) X(t_{l_2}) / (t_n)) . \end{aligned}$$

en parcourant les domaines de l_1, l_2 dans $R = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq l_1 \leq N - n_1, 1 \leq l_2 \leq N - n_2\}$

$$E(J_k(N, \lambda) \overline{J_k(N, \mu)}) = \sum_{i=1}^4 U_{N,i}(k, \lambda, \mu)$$

$$cov(J_k(N, \lambda), J_k(N, \mu)) = \sum_{i=1}^4 U_{N,i}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda)).E(\overline{J_k(N, \mu)})$$

$$= O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{M_N}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= O\left(\frac{M_N}{N}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{g}_k^1(N, \omega)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) W_N(\omega - \mu) \text{cov}(J_k(N, \lambda), J_k(N, \mu)) d\lambda d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega - \lambda) W_N(\omega - \mu) (O(\frac{M_N}{N})) d\mu d\lambda \\ &= O(\frac{M_N}{N}) \end{aligned}$$

puisque H est à dérivée bornée et $W_N(\omega) = M_N H(M_N \omega)$.

Propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{g}_k^2$

Le théorème suivant nous donne le bias de l'estimateur $\hat{g}_k^2$.

Theorème 95

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} \frac{|B_j(u)|}{|j-k|} + |B_k(u)| \right) du < +\infty$$

alors

$$E(\hat{g}_k^2(N, \omega)) = g_k(\omega) + o(1)$$

Corollaire 96

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé de période T tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq k} \frac{|B_j(u)|}{|j-k|} + |B_k(u)| \right) du < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} |u B_k(u)| du < +\infty$$

alors

$$E(\hat{g}_k^2(N, \omega)) = g_k(\omega) + O(\frac{1}{M_N}).$$

Preuve. ■

Dans ce cas ci les séries $ne_n^k(\omega)$ convergent uniformement, et donc

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} e_n^k(\omega) \right| \leq \frac{1}{M_N} \sum_{n=N+1}^{\infty} n |e_n^k(\omega)| = \frac{1}{M_N} o(1)$$

$$\text{et} \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M_N} ne_n^k(\omega) \right| = O(\frac{1}{N}), \text{ ce qui implique le résultat.}$$

Pour la consistance de l'estimateur $\hat{g}_k^2(N, \omega)$, nous introduisons les hypothèses suivantes

$$(h'1) \quad (a) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j_1+j_2 \neq 0} \frac{|B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)|}{|j_1+j_2|} \right) du_1 du_2 + \int_0^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |B_j(u)|^2 \right) du < \infty,$$

$$(b) \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{j_1+j_2 \neq 0} \frac{|B_{j_1}(u_1)B_{j_2}(u_2)|}{|j_1+j_2|} \right) (u_1 + u_2) du_1 du_2 + \int_0^\infty \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |B_j(u)|^2 \right) u du < \infty.$$

(h'2) $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus périodiquement corrélé à l'ordre 4 et

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad |K_j(u_1, u_2, u_3)| \leq h_j(u_1, u_2, u_3)$$

où h_j est une fonction croissante $[0, \infty[$ et paire par rapport à chaque composante

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \frac{h_j(0, u, 0)}{|j-k|} du < \infty, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j(0, 0, 0) < \infty$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N^2}{N} = 0$$

Nous posons :

$$\Gamma_k(n, N, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-n} \left[\exp(i(\omega - \frac{2\pi}{T}k)(t_{l+n} - t_l)) + \exp(-i\omega(t_{l+n} - t_l)) \right] \times \\ \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) X(t_{l+n})X(t_l)$$

Theorème 97

Sous les hypothèses (h'1) , (h'2) et (h3') on a

$$1) \quad var \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \} = O(\frac{1}{N})$$

$$2) \quad var \left\{ \widehat{g}_k^2(N, \omega) \right\} = O(\frac{M_N^2}{N}).$$

Preuve. ■

Nous avons

$$E \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \} = \frac{N-n}{N} e_n^k(\omega) + \frac{1}{N} o(1) \quad (\text{voir annexe})$$

$$|E \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \}|^2 = \left(\frac{N-n}{N} \right)^2 |e_n^k(\omega)|^2 + \frac{1}{N} o(1)$$

$$\left[var \left\{ \widehat{g}_k^2(N, \omega) \right\} \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{M_N} [var \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \}]^{1/2} \\ \leq \frac{M_N}{2\pi\beta} O(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

3.5 Application numérique

Dans ce qui suit , nous considérons un processus périodiquement corrélé , à temps continu, à partir duquel seront donnés les estimateurs des fonctions densités spectrales $\{g_k(\omega), k \in \mathbb{Z}\}$.

1/partie théorique

• $Y(t)$ est un processus stationnaire de fonction d'autocovariance continue C_Y ,

$$C_Y(t) = E[Y(t+u)Y(t)]$$

• $P(t)$ est une fonction périodique , bornée de periode T ,

et en posant $X(t, \omega) = P(t)Y(t, \omega)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \bullet B(t, u) &= E[X(t+u)X(t)] \\ &= P(t+u)P(t).E[Y(t+u)Y(t)]. \end{aligned}$$

$$= P(t+u)P(t)C_Y(u).$$

$$\begin{aligned} \bullet B_k(u) &= \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt. \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t+u)P(t)C_Y(u) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \\ &= \frac{1}{T} C_Y(u) \left[\int_0^T P(t+u)P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \right]. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{En posant } G(u) = \int_0^T P(t+u)P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt$$

$G(u)$ est développable en série de Fourier

$$\begin{cases} G(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in \frac{2\pi}{T} u) \\ \text{et } c_n = \frac{1}{T} \int_0^T G(u) \exp(-in \frac{2\pi}{T} u) du \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T G(u) \exp(-in \frac{2\pi}{T} u) du \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^T P(t+u)P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) dt \right] \exp(-in \frac{2\pi}{T} u) du \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T P(t')P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} kt) \exp(-in \frac{2\pi}{T} (t' - t)) dt dt' \quad \text{en posant } t+u = t' \\ &= \left[\frac{1}{T} \int_0^T P(t) \exp(+i \frac{2\pi}{T} (n-k)t) dt \right] \left[\int_0^T P(t') \exp(-i \frac{2\pi}{T} nt') dt' \right] \\ &= \overline{P_{n-k}}.T.P_n \\ \text{où } P_n &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} nt) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B_k(u) &= \frac{1}{T} C_Y(u) G(u) = \frac{1}{T} C_Y(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in \frac{2\pi}{T} u) \\ &= \frac{1}{T} C_Y(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{P_{n-k}}.T.P_n \exp(in \frac{2\pi}{T} u) \end{aligned}$$

$$= C_Y(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{P_{n-k}} \cdot P_n \exp(in \frac{2\pi}{T} u). \quad \text{et} \quad P_n = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} nt) dt .$$

• Soit le processus $Y(t)$ gaussien de Markov tel que la fonction d'autocovariance est $C_Y(u) = \exp(-|u|)$.

• $P(t)$ une fonction periodique de période 2π telle que : $\sum_n |p_n| < \infty$.

Soit $P(t) = |t|$ si $-\pi < t < \pi$

$$P_n = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \exp(-i \frac{2\pi}{T} nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right] = \begin{cases} \frac{-2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n-k}} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \exp(+i \frac{2\pi}{T} (n-k)t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n-k)\pi) - 1}{(n-k)^2} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{\pi(n-k)^2} & \text{si } (n-k) \text{ est impair donc } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } (n-k) \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B_k(u) &= \exp(-|u|) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{P_{n-k}} \cdot P_n \exp(in \frac{2\pi}{T} u). \\ &= \exp(-|u|) \sum_{n \text{ impair}} \frac{-2}{\pi(n-k)^2} \exp(inu) \quad \text{pour } k \text{ pair} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \exp(-|u|) \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(n-k)^2} \exp(inu) \quad \text{pour } k \text{ pair} \end{aligned}$$

• $B_k(u) \in L^1(\mathbb{R})$, les densités spectrales du processus $X(t)$ sont données par

$$\begin{aligned} g_k(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) \exp(-i\omega u) du \quad \text{existe pour } k \in \mathbb{Z} \text{ (pair)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} B_k(u) [\exp(-i\omega u) + \exp(i(\omega - \frac{2\pi}{T}k)u)] du \end{aligned}$$

• **Remarque** (vois graphes illustrant ceci)

les $g_k(\omega)$ sont symétriques par rapport à $\frac{k}{2}$ en effet :

$$\begin{aligned} g_k(\omega + \frac{k}{2}) &= g_k(k - (\omega + \frac{k}{2})) \\ &= g_k(\frac{k}{2} + \frac{k}{2} - \omega - \frac{k}{2}) \\ &= g_k(\frac{k}{2} - \omega) . \end{aligned}$$

• Nous avons choisit la fenêtre spectrale de Parzen

$$h(t) = \begin{cases} 1 - 6t^2 + 6|t|^3 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |t|^3) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sa transformée de Fourier $H(\omega)$ vérifie $\int_R H(\omega) d\omega = 1$ en effet :

$$\begin{aligned} \int_R H(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-it\omega) dt \right] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(t\omega) dt \right] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\omega^4} \left[\omega^3 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 6\omega^2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - 336 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - 24\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + 96 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 240 \right] d\omega = \end{aligned}$$

1.

• Dans le cas d'échantillonnage poissonien les instants (t_k) sont tels que :

$$t_0 = 0$$

$$t_k = t_{k-1} + \alpha_k$$

où $\alpha_k = \frac{-1}{\beta} \log(\theta_k)$ et θ_k uniforme sur $[0, 1]$.

• Les observations du processus $X(t_k)$ sont générées par : $X(t_k) = P(t_k).Y(t_k)$ où

les $Y(t_k)$ sont générées par

$$Y(t_0) = 0$$

$$Y(t_k) = \exp(-(t_{k+1} - t_k))Y(t_k) + \sqrt{1 - \exp(-2(t_{k+1} - t_k))} \cdot \gamma_{k+1}.$$

et les γ_k sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites.

• un estimateur de la densité spectrale

$$\begin{aligned} \hat{g}_k^1(N, \omega) &= \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-n} w_N(t_{l+n} - t_l) X(t_{l+n}) X(t_l) \exp(-i\frac{2\pi}{T}kt_l) \\ &\times \left\{ \exp \left[i \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) (t_{l+n} - t_l) \right] + \exp [-i\omega(t_{l+n} - t_l)] \right\} \end{aligned}$$

2/ Programmation

Suite à l'étude théorique présentée, nous donnons les différents programmes réalisés sous logiciel Matlab, pour l'estimation de l'estimateur de la densité spectrale sous des schémas d'échantillonnage.

2.1 Fonction gkwfiltr1tab

La spécification de la fonction MatLab décrivant le calcul des fonctions gk

transformées de Fourier des bk(u), étude théorique présentée dans le chapitre 3 est la suivante :

function gkwfiltr1tab(vi_w, pas_w, vf_w)

- paramètres d'entrée w

• valeur initiale de w (vi_w)

- valeur finale de w (vf_w)
- pas de w (pas_w)

```

function gkwfiltr1tab(vi_w,pas_w,vf_w)

format long

w=vi_w:pas_w:vf_w;

iii=1;

k=0;

global N

MN=7;

lamb=-8:0.1:8;

u=0:0.1:5;

p=-7:2:7;

for l=1:length(k)

for m=1:length(w)

for r=1:length(lamb)

for j=1:length(u)

som(l,j)=0.;

for s=1:length(p)

n(s)=-2/(pi*(p(s)^2));

kconj(s,l)=-2/(pi*((p(s)-k(l))^2));

g(j,s,l)=exp(i*p(s)*u(j))*n(s)*kconj(s,l);

som(l,j)=som(l,j)+g(j,s,l);

end

exps(l,j)=(exp(-u(j)))*som(l,j);

integra(j,l,r)=exps(l,j)*(exp(-i*lamb(r)*u(j))+exp(i*(lamb(r)-k(l))*u(j)));

end

resulta1=(trapz(u,real(integra)))/(2*pi);

resultaa1(l,r)=resulta1(:,l,r);

if (w(m)-lamb(r)~=0),

```

```

prod1(r,l,m)=resultaa1(l,r)*MN*hh(MN*(w(m)-lamb(r)));
else
prod1(l,r,m)=0;
end
end
prd11=trapz(lamb,prod1);
perl1(l,m)=prd11(:,l,m);
TTAB1(iii)=perl1(l,m);
iii=iii+1;
end
end
end
end
iii=iii-1;
save FTTAB1.mat TTAB1

```

2.2 Fonction estimgkwfiltr12000__GK

Cette fonction a pour objectif de calculer l'estimateur des fonctions densité spectrales .

```

function estimgkwfiltr12000__GK(N, vi_w, vf_w, pas_w)
global TTAB2
global ii
global N
format long
rand('state',sum(100*clock))
MN=7;
beta=1/pi;
% les instants
uu=rand(N,1);
tpc(1)=0;
for k=2:N;

```

```

alpha(k)=-1./(beta)*log(uu(k));
tpc(k)=tpc(k-1)+alpha(k);
end
% les x(tk)
gamma=randn(N,1);
m1=tpc(N);
m2=m1/(2*pi);
m=round(m2);
y(1)=0;
xpc(1)=0;
for k=2:N;
y(k)=(exp(-(tpc(k)-tpc(k-1))))*y(k-1)+((1.-exp(-2.*(tpc(k)-tpc(k-1))))^.5)*gamma(k) ;
end
for k=2:N
for a=0:m;
if (tpc(k)<(2*a+1)*pi & tpc(k)>(2*a*pi))
xpc(k)=(tpc(k)-2*pi*a)*y(k);
,elseif (tpc(k)<(2*a+2)*pi & tpc(k)>(2*a+1)*pi )
xpc(k)=((2*a+2)*pi-tpc(k))*y(k);
end
end
end
k=0;
ii=1;
for w=vi_w:pas_w:vf_w;
s2=0;
for n=1:N-1;
s1=0.;
for l=1:N-n;

```

```

expression=exp(-i*k*tpc(l))*(exp(i*(w-k)*(tpc(l+n)-tpc(l)))+exp(-i*w*(tpc(l+n)-tpc(l))));
s1=s1+(xpc(l+n)*xpc(l)*h((tpc(l+n)-tpc(l))/MN)).*expression;
end
s2=s2+s1;
end
s2=s2/(2.*pi.*beta*N);
TTAB2(ii)=real(s2) ;
ii=ii +1;
end
ii=ii-1;

```

1.3 Fonction test2000

Cette fonction calcule l'estimateur des moindres carrés MSE pour les parties réelles

```
function test2000(N, nbsimul, vi_w, vf_w, pas_w)
```

```
format long
```

```
global TTAB2
```

```
global ii
```

```
global N
```

```
nn=1
```

```
for i=1:nbsimul
```

```
estimgkwfiltr12000_GK(N,vi_w,vf_w,pas_w)
```

```
for l=1:ii
```

```
M2000(i,l)=TTAB2(l);
```

```
end
```

```
end
```

```
save FM2000.mat M2000
```

```
% calcul de vecteur ttab2 contenant les moyennes des
```

```
for l=1:ii
```

```
M2000R=0;
```

```
for il=1:i
```

```

M2000R=M2000R+ M2000(i1,l);

end

TTAB2(l)=M2000R/i;

end

save FTTAB2.mat TTAB2

load FTTAB1

% calcul de l'ecart entre theorique et la moyenne de l'estimé au carré

for j=1:ii
REEL(j)=(TTAB2(j)-TTAB1(j))^2;
end;

% calcul du mse qui est l'integrale de vecteur precedent sur toutes les
% valeur de w
w=vi_w:pas_w:vf_w;
MMMSSEE1(nn)=trapz(w,REEL);
nn=nn+1;
end

save FMMMSSEE1.mat MMMSSEE1

1.4 Programme principal

%programme principal2000 : qui permet d'appeler les fonctions gkwfiltrées, estmagkwtab,test2000,
format long

global N

%les données
N=200

vi_w=-8;
pas_w=0.1;
vf_w=8;
w=vi_w:pas_w:vf_w;

% PARTIE THEORIQUE: calcul du vecteur TTAB1 représentant la partie réelle
% des fonctions gk(w) theoriques filtrées par la fenetre H

```

```

gkwfiltr1tab(vi_w,pas_w,vf_w)

load FTTAB1

% PARTIE ESTIMATION : calcul du vecteur TTAB2 representant la partie
% réelle des fonctions gk(w) estimées par échantillonnage poissonien,et
% puis calcul du mse dans la fonction test2000

nbsimul=30

test2000(N, nbsimul, vi_w, vf_w, pas_w);

% PARTIE graphes

load FTTAB2;

subplot(2,1,1);

plot(w,real(TTAB1));grid;

title('Graphe de la partie réelle de la GK théorique pour ');

subplot(2,1,2);

plot(w,real(TTAB2));grid;

title('Graphe de la partie réelle de la GK estimée ');

load FMMMSSEE1;

```

3/résultats et graphes obtenus comparatifs selon les différents supports ou encore les paramètres d'entrée ,pour un nombre de simulation nombres fixé à 30, et lorsque La taille N de l'échantillon augmente, on constate que le MISE (mean integrated square error) diminue.Ce qui confirme le résultat du chapitre 3, pour un K donné,l'estimateur $Gk1(w)$ obtenu à l'aide de l'échantillonnage aléatoire poissonien est un bon estimateur.

CHAPTER IV

ECHANTILLONNAGE ALÉATOIRE POUR DES PROCESSUS ARCH

Chapitre 4

Echantillonnage aléatoire sur les processus ARCH

Ce chapitre constitue une extension des travaux de Oppenheim et Kadi (1994) sur l'échantillonnage aléatoire des processus *ARMA* à une sous classe des processus non linéaires; les processus *ARCH*.

Il se compose de quatre sections. Dans la première nous donnons quelques définitions et notations concernant les processus conditionnellement hétéroscédastiques. La seconde section regroupe quelques propriétés d'un modèle *GARCH*(p, q). L'échantillonnage aléatoire sur les processus *ARCH*(p) fait l'objet de la section 3. Dans la section 4 les résultats sont généralisés aux processus *GARCH*(p, q).

4.1 Définitions et notations

Définition 98 (*Engle 1982*)

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *ARCH*(p), s'il est de la forme

$$X_t = \sigma_t \eta_t \quad (4.1.1)$$

où $(\eta_t)_t$ est un bruit blanc gaussien, centré, de variance 1, *i.e.*, $\eta_t \sim i.i.d N(0, 1)$.

et

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (4.1.2)$$

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

Notation 99

Nous notons

I_{t-1} l'information contenue dans $\{X_u, u \leq t-1\}$. C'est la σ -algèbre engendrée par le passé du processus jusqu'à l'instant $t-1$.

$$I_{t-1} = \sigma(X_u, u \leq t-1) = \sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \quad (4.1.3)$$

4.2 Propriétés d'un modèle *GARCH*(p, q)

Proposition 100

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *ARCH*(p)

Le carré de ce processus est un processus autorégressif d'ordre p , *i.e*

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \varepsilon_t .$$

où $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc faible.

Preuve. ■

posons

$$\varepsilon_t = X_t^2 - \sigma_t^2 \quad (4.1.4)$$

il vient

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \varepsilon_t$$

donc $\{X_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ a une représentation *AR*(p) si le processus $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus d'innovation.

c'est à dire que :

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) = \delta_\tau(t) \gamma_0, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= E(X_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= E(E(X_t^2 - \sigma_t^2) \mid I_{t-1}) \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \sigma_t^2 \text{ est } I_{t-1}\text{-mesurable} \quad \text{et} \quad E(X_t^2 \mid I_{t-1}) = \sigma_t^2$$

donc

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{2/} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) = E(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} \mid I_{t-1})) \quad \forall \tau \geq 1.$$

· pour $\tau \geq 1$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) &= E(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} \mid I_{t-1})) \\ &= E(E((X_t^2 - \sigma_t^2)(X_{t-\tau}^2 - \sigma_{t-\tau}^2) \mid I_{t-1})) \\ &= E((X_{t-\tau}^2 - \sigma_{t-\tau}^2) \times E(X_t^2 - \sigma_t^2 \mid I_{t-1})) \\ &= E((X_{t-\tau}^2 - \sigma_{t-\tau}^2) \times 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(car $X_{t-\tau}^2 - \sigma_{t-\tau}^2$ est $I_{t-\tau}$ mesurable, donc I_{t-1} mesurable et $E(X_t^2 - \sigma_t^2 \mid I_{t-1}) = 0$)

· pour $\tau = 0$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= E(X_t^4 - 2\sigma_t^2 X_t^2 + \sigma_t^4) \\ &= E(E(X_t^4 - 2\sigma_t^2 X_t^2 + \sigma_t^4 \mid I_{t-1})) \\ &= E(X_t^4) - E(\sigma_t^4) \end{aligned}$$

$= \gamma_0$ qui est la variance du processus ε , quantité constante par rapport à t car

le processus est stationnaire au second ordre.

Dans le lemme suivant nous donnons l'expression du moment d'ordre 4 du processus $ARCH(1)$.

Lemme 101 (*Engle (1982)*)

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $ARCH(1)$

Le moment d'ordre 4 de ce processus est donné par

$$E(X^4) = \frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right], \text{ elle existe si } 3\alpha_1^2 < 1.$$

Proposition 102

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $GARCH(p, q)$

Le carré de ce processus est un processus $ARMA(m, q)$ où $m = \max(p, q)$ i.e :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t.$$

où $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc faible.

Preuve. ■

Soit $\varepsilon_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ il vient

$$X_t^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \varepsilon_t$$

soit $m = \max(p, q)$, $\alpha_i = 0$ pour $i > p$ et, $\beta_i = 0$ pour $i > q$

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i - \beta_i) X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \varepsilon_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j (X_{t-j}^2 - \sigma_{t-j}^2) + \varepsilon_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

donc $\{X_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ a une représentation $ARMA(m, q)$ où le processus $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc faible ,de moyenne nulle et non corrélé .

Dans ce qui suit, nous abordons dans une première étape le problème de l'échantillonnage aléatoire sur les processus $ARCH(p)$.

4.3 Echantillonnage aléatoire sur les processus $ARCH(p)$

Nous avons précisé dans la section précédente de ce chapitre que si un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ répond à un modèle $ARCH(p)$ alors, le processus carré $\{X_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation $AR(p)$.

D'autre part, effectuer un échantillonnage aléatoire sur le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, revient par conséquent à effectuer un échantillonnage sur le processus au carré.

A partir de cela, nous avons utilisé les résultats du chapitre 2 , résultats de Oppenheim et Kadi (1994) sur les processus $ARMA$ et fait l'extension à des modèles non linéaires, les modèles $ARCH$.

C'est ainsi que, dans les travaux précédents de Oppenheim et Kadi (1994), un échantillonnage aléatoire dans les processus AR mène à des processus $ARMA$ et, par conséquent, nous montrerons qu'un échantillonnage dans les processus $ARCH$ définit un processus $GARCH$ moyennant certaines conditions qui seront données ci-dessous.

Pour la première partie de cette section, en ce qui concerne l'échantillonnage d'un processus $ARCH(1)$, nous avons utilisé comme loi d'échantillonnage des instants, une loi de probabilité de Bernoulli sur N^* puis, en second lieu pour l'échantillonnage d'un processus $ARCH(2)$, nous avons choisi une loi d'échantillonnage des instants, une loi de probabilité de Poisson sur N^* .

Auparavant, nous énonçons un résultat algébrique sur les polynômes à coefficients réels; Ce résultat nous a permis, pour les propositions qui suivent, de considérer les pôles racines du polynôme caractéristique de la partie autorégressive du processus d'être réelles et simples.

Proposition 103 (*Kurtz (1992)*)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n, n \geq 2$.

Si 1) $\forall k = 0, \dots, n \quad a_k > 0$ et

2) $\forall k = 1, \dots, n-1 \quad a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} > 0$

Alors

toutes les racines du polynôme P sont simples et réelles.

Preuve. (voir Kurtz (1992)). ■

Avec les notations précisées du chapitre 2, nous établissons la proposition suivante pour un processus $ARCH(1)$ échantillonné aléatoirement; nous déterminons de façon précise les coefficients $\tilde{\varphi}_i$ et $\tilde{\theta}_j$ du processus $\tilde{X}$ obtenu par échantillonnage aléatoire en fonction des paramètres du processus initial.

Proposition 104 *(Guerbyenne et Madani)*

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $ARCH(1)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) X_t = \sigma_t \eta_t \text{ où } (\eta_t)_t \text{ est un bruit blanc gaussien centré, de variance 1} \\ \quad \quad \quad i.e \eta_t \sim i.i.d N(0,1) \\ 2) \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad \text{et } \alpha_0 > 0 \text{ et } 0 < \alpha_1 < 1 \end{array} \right.$$

En échantillonnant le processus X selon une loi de probabilité L de Bernoulli sur N^* telle que:

$$L_j = p^{j-1}(1-p)^{2-j}, \quad j \in \{1, 2\} \text{ et } p \in [0, 1]$$

Nous obtenons le processus échantillonné $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_t = \tilde{\sigma}_t \tilde{\eta}_t \\ \text{et} \\ \tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{X}_{t-1}^2 \end{array} \right.$$

c'est à dire un processus $ARCH(1)$ de paramètres :

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}(1-K_1) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_1 = K_1 \quad \text{où} \quad K_1 = \hat{L}(-\alpha_1).$$

$$\tilde{\alpha}_0 > 0 \quad \text{et } 0 < \tilde{\alpha}_1 < 1.$$

($\widehat{L}$ designe la transformée en Z de la loi d'échantillonnage L).

Preuve.

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $ARCH(1)$,

$$X_t = \sigma_t \eta_t \quad , \quad \text{où } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad E(\eta_t) = 0 \quad \text{et} \quad E(\eta_t^2) = 1.$$

$$E(X_t^2) = E(E(\sigma_t^2 \eta_t^2 \mid I_{t-1})) = E(\sigma_t^2)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) \quad (\text{le processus } X \text{ est stationnaire au second})$$

$$= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

$$E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} > 0 \quad \text{ssi} \quad \alpha_0 > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha_1 < 1.$$

d'autre part si $\varepsilon_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ on obtient

$$X_t^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \varepsilon_t$$

$$= \alpha_1(X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}) + \varepsilon_t.$$

et en posant $Y_t = X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ nous obtenons

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (*)$$

$Y_t \sim AR(1)$, stationnaire car $0 < \alpha_1 < 1$.

$$E(Y_t) = 0, \forall t.$$

Autre écriture de (*) où $\phi_0 = 1$ et $\phi_1 = -\alpha_1$

$$\phi_0 Y_t + \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t \quad (**)$$

le polynôme caractéristique associé au processus Y est tel que

$$\Phi(Z) = \sum_{i=0}^1 \phi_i Z^{1-i} = \phi_0 Z + \phi_1 = Z + \phi_1$$

les pôles sont racines de donc $\Phi(Z) = 0$

$$\text{donc } Z = -\phi_1 = \alpha_1$$

i.e $r_1 = \alpha_1$ est un pôle simple

ainsi il existe un pôle simple réel positif à l'intérieur du cercle unité .

d'autre part

$$\widehat{C}_Y(z) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} C_Y(h) z^{-h}$$

$$C_Y(h) = E(Y_t Y_{t-h}) = E(\alpha_1 Y_{t-1} Y_{t-h}) + E(\varepsilon_t Y_{t-h})$$

$$= \alpha_1 E(Y_{t-1} Y_{t-h})$$

$$= \alpha_1^2 E(Y_{t-2} Y_{t-h})$$

$$= \alpha_1^h E(Y_{t-h} Y_{t-h}) = \alpha_1^h \sigma_Y^2.$$

$$\sigma_Y^2 = \text{var}(Y_t) = \text{var}(\alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) = \alpha_1^2 \text{var}(Y_{t-1}) + \text{var}(\varepsilon_t) + 2\text{cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\text{var}(\varepsilon_t)}{1 - \alpha_1^2}.$$

$$\text{var}(X_t^2) = E[(X_t^2 - E(X_t^2))^2] = E(X_t^4) - (E(X_t^2))^2 = E(X_t^4) - \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}\right)^2.$$

$$= \frac{2\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2 (1 - 3\alpha_1^2)}.$$

où $\alpha_1 \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ (positivité de la variance).

La loi d'échantillonnage L choisie est telle que

$$L_j = P(t_{k+1} - t_k = j) = p^j (1 - p)^{2-j} \quad j \in \{1, 2\} \text{ et } p \in [0, 1].$$

$\widehat{L}(Z)$ = transformée en Z de L la loi d'échantillonnage des instants

$$= \sum_{j=1}^2 L_j Z^j = (1 - p)Z + pZ^2.$$

Le processus $\widetilde{Y}_t$ échantillonné de Y_t , sera un processus $AR(1)$

$$\widetilde{\phi}_0 \widetilde{Y}_t + \widetilde{\phi}_1 \widetilde{Y}_{t-1} = \varepsilon_t$$

Où La transformée en Z de sa fonction de covariance est telle que:

$$\widehat{C}_{\widetilde{Y}}(z) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1-\alpha_1^2} \frac{1-\widehat{L}^2(-\alpha_1)}{(1-z\widehat{L}(-\alpha_1))(1-z^{-1}\widehat{L}(-\alpha_1))} \quad (cf. \text{ Kadi et Oppenheim (1994)})$$

où

$$\widehat{L}(-\alpha_1) = (1-p)\alpha_1 + p\alpha_1^2 = K_1 \text{ (notation)}$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{\widetilde{Y}}(z) &= \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1-\alpha_1^2} \frac{1-K_1^2}{(1-zK_1)(1-\frac{1}{z}K_1)} \\ &= \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1-\alpha_1^2} \frac{1-K_1^2}{(\frac{1}{z}-K_1)(z-K_1)} \quad \text{que nous écrivons sous la forme :} \\ &= \sigma_{\epsilon}^2 \frac{1}{(\frac{1}{z}-K_1)(z-K_1)} \quad \text{où} \quad \sigma_{\epsilon}^2 = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1-\alpha_1^2} (1-K_1^2). \end{aligned}$$

donc $\widehat{C}_{\widetilde{Y}}(z)$ est rationnelle en Z c'est la transformée en Z d'un processus $AR(1)$.

$\widetilde{Y}_t$ vérifie donc l'équation aux différences stochastique suivante :

$$\widetilde{Y}_t = K_1 \widetilde{Y}_{t-1} + \widetilde{\epsilon}_t.$$

$$\widetilde{X}_t^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = K_1(\widetilde{X}_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}) + \widetilde{\epsilon}_t.$$

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t^2 &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}(1-K_1) + K_1\widetilde{X}_{t-1}^2 + \widetilde{\epsilon}_t \\ &= \widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{\alpha}_1\widetilde{X}_{t-1}^2 + \widetilde{\epsilon}_t \end{aligned}$$

donc le processus échantillonné $\widetilde{X}$ est de modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{X}_t = \widetilde{\sigma}_t \widetilde{\eta}_t \\ et \\ \widetilde{\sigma}_t^2 = \widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{\alpha}_1 \widetilde{X}_{t-1}^2 \end{array} \right.$$

c'est à dire un $ARCH(1)$ où les paramètres sont tels que :

$$\widetilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}(1-K_1) \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}_1 = K_1$$

et on a $0 < \widetilde{\alpha}_1 < 1$.

$\widetilde{\alpha}_0 > 0$ car :

$$\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}(1-K_1) > 0 \quad K_1 < 1 \text{ en effet}$$

$K_1 = (1-p)\alpha_1 + p\alpha_1^2 < 1$ ceci est vrai $\forall p \in [0, 1]$ puisque $0 < \alpha_1 < 1$ par hypothèse

Pour un processus $ARCH(2)$, nous avons établi un résultat donné dans la proposition suivante.

Proposition 105 *(Guerbyenne et Madani)*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) X_t = \sigma_t \eta_t \quad , \quad \text{où } (\eta_t)_t \text{ est un bruit blanc gaussien, centré, de variance 1,} \\ \qquad \qquad \qquad i.e. \eta_t \sim i.i.d N(0,1) \\ 2) \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2, \quad \text{et} \quad \alpha_0 > 0, 0 < \alpha_0 + \alpha_1 < 1 \end{array} \right.$$
$$L_j = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \quad j \geq 1, \lambda \in [0, \infty[$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_t = \tilde{\sigma}_t \tilde{\xi}_t \\ \text{et} \\ \tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{X}_{t-1}^2 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{X}_{t-2}^2 + \tilde{\beta}_1 \tilde{\sigma}_{t-1}^2 \end{array} \right. \quad \text{i.e un processus } GARCH(2, 1)$$
$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 - \hat{L}(r_1) - \hat{L}(r_2) + \hat{L}(r_1)\hat{L}(r_2))$$

$$\tilde{\beta}_1 = -\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0} = -\frac{R_1\hat{L}(r_2)(-1+\hat{L}^2(r_1))+R_2\hat{L}(r_1)(-1+\hat{L}^2(r_2))}{R_1(1-\hat{L}^2(r_1))(1+\hat{L}^2(r_2))+R_2(1-\hat{L}^2(r_2))(1+\hat{L}^2(r_1))}$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0} - \tilde{\phi}_1) = -\tilde{\beta}_1 + \widehat{(\bar{L}(r_1) + \hat{L}(r_2))}.$$

$\hat{L}$ est la transformée en Z de la loi d'échantillonnage considérée.

$$R_1 = \frac{r_1}{(1-r_1^2)(1-r_1r_2)(r_1-r_2)} \text{ et } R_2 = \frac{r_2}{(1-r_2^2)(1-r_1r_2)(r_2-r_1)}$$

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $ARCH(2)$

$$X_t = \sigma_t \eta_t \quad ,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 \quad \text{où } \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0.$$

$$E(X_t^2) = E(E(\sigma_t^2 \eta_t^2 \mid I_{t-1})) = E(\sigma_t^2)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) + E(\alpha_2 X_{t-2}^2)$$

$$= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

$$E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} > 0 \quad \text{pour} \quad \alpha_0 > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$$

soit $\varepsilon_t = X_t^2 - \sigma_t^2$.

$$X_t^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} + \varepsilon_t$$

$$= \alpha_1 (X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}) + \varepsilon_t.$$

en posant $Y_t = X_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}$

nous avons $E(Y_t) = 0, \forall t$ et nous obtenons

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \text{ donc } Y_t \text{ admet donc une structure d'un processus } AR(2)$$

stationnaire

$$\text{où } 0 < \alpha_1 < 1, \quad 0 < \alpha_2 < 1. \quad \text{et} \quad 0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

en posant $\phi_0 = 1, \phi_1 = -\alpha_1, \phi_2 = -\alpha_2$. les paramètres du processus Y_t ,

nous réécrivons le modèle en fonctions des ϕ_i

$$Y_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$\text{d'autre part } \hat{C}_Y(z) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} C_Y(h) z^{-h}$$

r_1 = pôle associé au processus Y_t

$$R_1 = \frac{r_1}{(1-r_1^2)(1-r_1 r_2)(r_1-r_2)}$$

$$R_2 = \frac{r_2}{(1-r_2^2)(1-r_1 r_2)(r_2-r_1)}$$

· Nous effectuons un échantillonnage aléatoire du processus Y_t , selon une loi L de probabilités telle que :

$$L_j = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \quad j \geq 1.$$

$$\hat{L}(z) = z \exp(\lambda(z-1)) \quad (\text{transformée en } Z \text{ de la loi de probabilité } L)$$

· Le processus $\tilde{Y}_t$ échantillonné de Y_t selon la loi L , sera donc un processus $ARMA(2, 1)$

tel que

$$\hat{C}_{\tilde{Y}}(z) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \frac{\sum_{j=-1}^1 \tilde{\theta}_j(\tilde{\phi}, 0, L)}{\prod_{j=1}^2 (1-z\hat{L}(r_j))(1-z^{-1}\hat{L}(r_j))} \quad (\text{Kadi et Oppenheim})$$

où

$$\tilde{\phi}_0 = 1. \quad , \quad \tilde{\phi}_1 = -(\hat{L}(r_1) + \hat{L}(r_2)) \text{ et } \tilde{\phi}_2 = \hat{L}(r_1) \cdot \hat{L}(r_2).$$

et

$$\tilde{\theta}_0 = R^t \cdot A^t \cdot (J^0 + j^{0t}) \tilde{\Phi} - \left(\sum_{j=1}^2 R_j \right) (\tilde{\Phi})^t J^0 \cdot \tilde{\Phi}.$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\widehat{L}(r_2) & -\widehat{L}(r_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} ; J^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \widetilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{\phi}_1 \\ \widetilde{\phi}_2 \end{bmatrix} . \\
\widetilde{\theta}_0 &= \begin{bmatrix} 2R_1 + 2R_2, & -2R_1.\widehat{L}(r_2) - 2R_2.\widehat{L}(r_1), & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\widehat{L}(r_2) - \widehat{L}(r_1) \\ -\widehat{L}(r_1).\widehat{L}(r_2) \end{bmatrix} \\
&\quad - (R_1 + R_2) \left((1 + (\widehat{L}(r_2) + \widehat{L}(r_1))^2 + (\widehat{L}(r_2).\widehat{L}(r_1))^2 \right) \\
&= R_1 \left[1 + \widehat{L}^2(r_2) - \widehat{L}^2(r_1) - \widehat{L}^2(r_2)\widehat{L}^2(r_1) \right] + R_2 \left[1 + \widehat{L}^2(r_1) - \widehat{L}^2(r_2) - \widehat{L}^2(r_2)\widehat{L}^2(r_1) \right] \\
&= R_1 \left[\widehat{L}^2(r_2)(1 - \widehat{L}^2(r_1)) + 1 - \widehat{L}^2(r_1) \right] + R_2 \left[\widehat{L}^2(r_1)(1 - \widehat{L}^2(r_2)) + 1 - \widehat{L}^2(r_2) \right] \\
\widetilde{\theta}_0 &= R_1(1 - \widehat{L}^2(r_1)(1 + \widehat{L}^2(r_2))) + R_2(1 - \widehat{L}^2(r_2)(1 + \widehat{L}^2(r_1))).
\end{aligned}$$

de même pour

$$\widetilde{\theta}_1 = R^t . A^t . (J^1 + j^{1t}) \widetilde{\Phi} - \left(\sum_{j=1}^2 R_j \right) (\widetilde{\Phi})^t J^1 . \widetilde{\Phi}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\widehat{L}(r_2) & -\widehat{L}(r_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} ; J^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \widetilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{\phi}_1 \\ \widetilde{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

nous obtenons

$$\widetilde{\theta}_1 = R_1 \widehat{L}(r_2)(-1 + \widehat{L}(r_1)) + R_2 \widehat{L}(r_1)(-1 + \widehat{L}^2(r_2)).$$

Ainsi le processus échantillonné $\widetilde{Y}_t$ centré, est de type un $ARMA(2, 1)$ de paramètres

$\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1, \widetilde{\phi}_2, \widetilde{\theta}_0$ et $\widetilde{\theta}_1$

$$\widetilde{y}_t + \widetilde{\phi}_1 \widetilde{y}_{t-1} + \widetilde{\phi}_2 \widetilde{y}_{t-2} = \widetilde{\theta}_0 \varepsilon_t + \widetilde{\theta}_1 \varepsilon_{t-1}$$

et en posant $\xi_t = \widetilde{\theta}_0 \varepsilon_t$ processus bruit d'innovation

$$\widetilde{y}_t + \widetilde{\phi}_1 \widetilde{y}_{t-1} + \widetilde{\phi}_2 \widetilde{y}_{t-2} = \xi_t + \frac{\widetilde{\theta}_1}{\widetilde{\theta}_0} \xi_t \quad (*)$$

par le même opérateur linéaire $\mathcal{E}_L : X_t \rightarrow \widetilde{X}_t$

$$\text{nous posons} \quad \widetilde{y}_t = \widetilde{X}_t^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

le modèle (*) s'écrit donc

$$\left(\widetilde{X}_t^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \right) + \widetilde{\phi}_1 \left(\widetilde{X}_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \right) + \widetilde{\phi}_2 \left(\widetilde{X}_{t-2}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \right) = \xi_t + \frac{\widetilde{\theta}_1}{\widetilde{\theta}_0} \xi_{t-1}.$$

$$\widetilde{X}_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} (1 + \widetilde{\phi}_1 + \widetilde{\phi}_1) - \widetilde{\phi}_1 \widetilde{X}_{t-1}^2 - \widetilde{\phi}_2 \widetilde{X}_{t-2}^2 + \frac{\widetilde{\theta}_1}{\widetilde{\theta}_0} \xi_{t-1} + \xi_t.$$

si en posant $\tilde{\xi}_t = \tilde{X}_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2$ à partir de

$$\tilde{X}_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1) - \tilde{\phi}_1 \tilde{X}_{t-1}^2 - \tilde{\phi}_2 \tilde{X}_{t-2}^2 + \frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0}(\tilde{X}_{t-1}^2 - \tilde{\sigma}_{t-1}^2) + (\tilde{X}_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2).$$

il vient que

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1) - \frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0}\tilde{\sigma}_{t-1}^2 + (\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0} - \tilde{\phi}_1)\tilde{X}_{t-1}^2 - \tilde{\phi}_2 \tilde{X}_{t-2}^2$$

Ainsi le processus échantillonné du processus initial $ARCH(2)$ suit un d'un modèle de processus $GARCH(2, 1)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_t = \tilde{\sigma}_t \tilde{\xi}_t \\ et \\ \tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{X}_{t-1}^2 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{X}_{t-2}^2 + \tilde{\beta}_1 \tilde{\sigma}_{t-1}^2 \end{array} \right.$$

où les paramètres sont :

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1),$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0} - \tilde{\phi}_1),$$

$$\tilde{\alpha}_2 = -\tilde{\phi}_2$$

$$\tilde{\beta}_1 = -\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0}$$

Montrons que ces paramètres du processus $\tilde{X}_t$ sont positifs :

$$\cdot \tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}(1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1)$$

$$1 + \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2 = 1 - \hat{L}(r_1) - \hat{L}(r_2) + \hat{L}(r_1)\hat{L}(r_2)$$

$$= (\hat{L}(r_1) - 1)(\hat{L}(r_2) - 1) > 0 . \quad (\text{car } \hat{L}(r_i) = r_i \exp(\lambda(r_i - 1)) < 1, i = 1, 2)$$

$\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} > 0$ car $\alpha_0 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 < 1$ condition de stationnarité du processus X_t initial $ARCH(2)$

donc $\tilde{\alpha}_0 > 0$.

$$\cdot \tilde{\alpha}_2 = -\tilde{\phi}_2 = -(\hat{L}(r_1)\hat{L}(r_2))$$

$$= -r_1 r_2 \exp(\lambda(r_1 + r_2 - 2)) \quad \text{où } r_i = \text{ième pôle du modèle } AR(2) \text{ du processus } Y_t.$$

$$= -(\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2})(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2}) \exp(\lambda(r_1 + r_2 - 2))$$

$$= -(-\frac{4\alpha_2}{4}) \exp(\lambda(r_1 + r_2 - 2)) > 0.$$

donc $\tilde{\alpha}_2 > 0$.

$$\cdot \tilde{\beta}_1 = -\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0}$$

où

$$\tilde{\theta}_0 = R_1(1 - \hat{L}^2(r_1)(1 + \hat{L}^2(r_2)) + R_2(1 - \hat{L}^2(r_2)(1 + \hat{L}^2(r_1))).$$

$$\tilde{\theta}_1 = R_1\hat{L}(r_2)(-1 + \hat{L}^2(r_1)) + R_2\hat{L}(r_1)(-1 + \hat{L}^2(r_2)).$$

$$R_1 = \frac{r_1}{(1-r_1^2)(1-r_1r_2)(r_1-r_2)} \quad ; \quad R_2 = \frac{r_2}{(1-r_2^2)(1-r_1r_2)(r_2-r_1)}$$

$$r_1 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2}; \quad r_2 = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2}; \quad r_2 - r_1 < 0; \quad r_1r_2 = -\alpha_2 < 0; \quad 0 < r_1 < 1; \quad -1 <$$

$$r_2 < 0$$

donc R_1 et R_2 sont positifs et ,

$$(1 - \hat{L}^2(r_i))(1 + \hat{L}^2(r_i)) > 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

$$\text{donc } \tilde{\theta}_0 > 0.$$

$$\tilde{\theta}_1 < 0 \text{ en effet}$$

$$R_1\hat{L}(r_2)(-1 + \hat{L}^2(r_1)) + R_2\hat{L}(r_1)(-1 + \hat{L}^2(r_2)) < 0 \text{ car}$$

$$\frac{r_1r_2}{(1-r_1r_2)(r_1-r_2)} \left[\frac{\exp(\lambda(r_2-1))}{(1-r_1^2)} (-1 + r_1^2 \exp(2\lambda(r_1-1))) - \frac{\exp(\lambda(r_1-1))}{(1-r_2^2)} (-1 + r_2^2 \exp(2\lambda(r_2-1))) \right]$$

$$(-1 + r_1^2 \exp(2\lambda(r_1-1))) - \frac{\exp(\lambda(r_1-1))}{(1-r_2^2)} (-1 + r_2^2 \exp(2\lambda(r_2-1))) > 0.$$

$$\cdot \tilde{\alpha}_1 = \left(\frac{\tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_0} - \tilde{\phi}_1 \right)$$

$$= \frac{\tilde{\theta}_1 - \tilde{\phi}_1 \tilde{\theta}_0}{\tilde{\theta}_0}; \quad \text{or } \tilde{\theta}_0 > 0 \text{ déjà vu , reste à voir } \tilde{\theta}_1 - \tilde{\phi}_1 \tilde{\theta}_0 > 0$$

$$\tilde{\theta}_1 - \tilde{\phi}_1 \tilde{\theta}_0 = R_1\hat{L}(r_2)(-1 + \hat{L}^2(r_1)) + R_2\hat{L}(r_1)(-1 + \hat{L}^2(r_2)) +$$

$$(\hat{L}(r_1) + \hat{L}(r_2))(R_1(1 - \hat{L}^2(r_1)(1 + \hat{L}^2(r_2)) + R_2(1 - \hat{L}^2(r_2)(1 + \hat{L}^2(r_1)))$$

$$= R_1\hat{L}(r_2)(-1 + \hat{L}^2(r_1))(-1 + 1 + \hat{L}^2(r_2)) + R_2\hat{L}(r_1)(-1 + \hat{L}^2(r_2))(-1 +$$

$$1 + \hat{L}^2(r_1)) +$$

$$R_1\hat{L}(r_1)(1 - \hat{L}^2(r_1))(1 + \hat{L}^2(r_2)) + R_2\hat{L}(r_2)(1 - \hat{L}^2(r_2))(1 + \hat{L}^2(r_1))$$

$$= R_1(1 - \hat{L}^2(r_1)) \left(\hat{L}^3(r_2) + \hat{L}(r_1)(1 + \hat{L}^2(r_2)) \right) +$$

$$R_2(1 - \hat{L}^2(r_2)) \left(\hat{L}^3(r_1) + \hat{L}(r_2)(1 + \hat{L}^2(r_1)) \right)$$

où

$$\hat{L}^3(r_2) + \hat{L}(r_1)(1 + \hat{L}^2(r_2)) > 0 \quad \text{car} \quad \hat{L}^2(r_2) \cdot \hat{L}(r_2) < \hat{L}(r_1)(1 + \hat{L}^2(r_2)).$$

de même pour

alors

Le processus $\tilde{X}_t$ échantillonné du processus X_t sera un processus $GARCH(m, q)$,
dont on déterminera ses paramètres (où m désigne le nombre des $\hat{L}(r_j)$ distincts non nul)

Preuve.

■

idée de la démonstration $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $ARCH(p)$.

X^2 étant un $AR(p)$: $\sum_{j=0}^p \phi_j X_{t-j}^2 = \varepsilon_t$ où $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc,

nous savons qu'en échantillonnant un $AR(p)$ suivant une loi L associée à M

On obtient un $ARMA(p, q')$ où $q' \leq m - \left\lfloor \frac{l}{q} \right\rfloor$.

où m désigne le nombre des $\hat{L}(r_j)$ distincts non nul

Le processus $\tilde{Y} = \tilde{X}_t^2 - E(\tilde{X}_t^2)$ sera un processus un $ARMA(m, \max(m-1, 0))$ centré.

$$\tilde{Y}_t^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i \tilde{Y}_{t-i}^2 + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\max(m-1, 0)} \tilde{\theta}_j \varepsilon_{t-j}.$$

puis on explicite les paramètres du processus $GARCH$.

Quelques perspectives

1/ Il serait intéressant de voir comment les travaux de Masry pourraient être étendus aux cas des processus localement stationnaires et de faire l'extension des travaux de Kadi aux cas des processus périodiques à temps discret. et d' étendre les résultats de Monsan aux processus localement périodiques.

2/ Nous avons pensé à d'autres schémas d'échantillonnage qui pourraient faire l'objet d'autres travaux

Annexe 1

Nous donnons les demonstrations et les différentes techniques de calcul des différents résultats du chapitre 2

1/ Démonstrations du théoreme (oppenheim)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } E(\tilde{X}_n) &= E(X_{t_n}) = E(E(X_{t_n} | t_n)) = \sum_j E(X_{t_n} | t_n = j)P(t_n = j) \\
 &= \sum_j E(X_j)P(t_n = j) \quad \text{car le processus } X \text{ et } T \text{ sont indépendants .} \\
 &= \sum_j mP(t_n = j) = \\
 &= m \sum_j P(t_n = j) \\
 &= m
 \end{aligned}$$

donc le processus échantillonné $\tilde{X}_n$ et le processus initial stationnaire X_n ont même moyenne .

$$\begin{aligned}
 \text{b) } C_{\tilde{X}}(h) &= E(\tilde{X}_{n+h}\tilde{X}_n) = E(X_{t_{n+h}}X_{t_n}) \quad (\text{si } m = 0) \\
 &= E(E(X_{t_{n+h}}X_{t_n} | t_{n+h} - t_n)) \\
 &= \sum_j E(X_{t_{n+h}}X_{t_n} | t_{n+h} - t_n = j) \times P(t_{n+h} - t_n = j) \\
 &= \sum_j E(X_{t_{n+h}}X_{t_{n+h}-j} | t_{n+h} - t_n = j) \times P(t_{n+h} - t_n = j) \\
 &= \sum_j E(X_{t+j}X_t) \times P[\sum_{l=n+1}^{n+h} (t_l - t_{l-1}) = j] \\
 &= \sum_{j=h} C_X(j) \times L^{\star h}(j). \\
 \text{c) } C_{\tilde{X}}(h) &= \sum_{j=h} C_X(j) \times L^{\star h}(j) \\
 &= \sum_{j=h} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} z^{J-1} \hat{C}_X(Z) dZ \right] \times L^{\star h}(j) \quad \text{relation entre } C_X(j) \text{ et la sa transformée} \\
 &\text{en } Z, \hat{C}_X(Z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=h}^{\infty} (e^{i\theta})^{j-1} \hat{C}_X(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \times L^{\star h}(j) \quad \text{en posant } Z = e^{i\theta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{j=h}^{\infty} L^{\star h}(j) (e^{i\theta})^j \right] \hat{C}_X(e^{i\theta}) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \hat{L}(e^{i\theta}) = \sum_j L_j \cdot (e^{i\theta})^j \quad \text{et donc} \quad \left(\hat{L}(e^{i\theta}) \right)^h = \sum_{j=h}^{\infty} L^{\star h}(j) (e^{i\theta})^j \quad \text{d'où}$$

$$C_{\tilde{X}}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\hat{L}(e^{i\theta}) \right)^h \hat{C}_X(e^{i\theta}) d\theta. \quad \text{en posant } x = e^{i\theta}, \quad x \in C_{\Gamma} \text{ si } \theta \in]-\pi, \pi[,$$

$$d\theta = \frac{dx}{ix}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left(\widehat{L}(x) \right)^h \widehat{C}_X(x) \frac{dx}{x}.$$

d) la transformée en Z de $C_X(h)$ notée par $\widehat{C}_X(Z)$ est telle que:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_X(Z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_X(j) Z^{-j} = \sum_{j=-\infty}^0 C_X(j) Z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} C_X(j) Z^{-j} - \widehat{C}_X(0) \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left(\widehat{L}(x) \right)^j \widehat{C}_X(x) \frac{dx}{x} \right] \cdot Z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left(\widehat{L}(x) \right)^j \widehat{C}_X(x) \frac{dx}{x} \right] \cdot Z^{-j} - \\ \widehat{C}_X(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \widehat{C}_X(x) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\widehat{L}(x)}{Z} \right)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widehat{L}(x) \cdot Z \right)^j \right] \frac{dx}{x} - \widehat{C}_X(0) \end{aligned}$$

la première série entière converge si $0 < \left| \frac{\widehat{L}(x)}{Z} \right| < 1$

et la seconde série entière converge si $0 < \left| \widehat{L}(x) Z \right| < 1$

$$\widehat{C}_X(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left\{ \frac{\widehat{C}'_X(x)}{1 - \frac{\widehat{L}(x)}{Z}} + \frac{\widehat{C}_X(x)}{1 - \widehat{L}(x) \cdot Z} \right\} \frac{dx}{x} - \widehat{C}_X(0) \quad \text{où } \Gamma \in]a, \min(|Z|, \left| \frac{1}{|Z|} \right|) [$$

(l'expression de la transformée en Z de l'échantillonné en fonction de celle du processus initial)

2/ démonstration du théoreme 2 (stabilité et caractéristique des arma échantillonnés)(Oppenheim et Kadi)

$\cdot X$ est un processus $ARMA(p, q)$ est tel que : $\sum_{j=0}^p \phi_j X_{t-j} = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}.$

les polynômes $\Phi(Z) = \sum_{j=0}^p \phi_j Z^{t-j}$, $\Theta(Z) = \sum_{j=0}^q \theta_j Z^{t-j}$ sont tels que :

$\det(\Phi(Z))$ admet ses racines dans le cercle unité C_1

$$\det(\Phi(Z)) = Z^\lambda \prod_{i=1}^m (Z - \alpha_i)^{\lambda_i}$$

où la racine nulle est d'ordre λ , α_i racine non nulle d'ordre λ_i ($\sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda = p$), $\sup \{|\lambda_i|\} =$

$a < 1$

$\widehat{C}_X(Z)$ existe dans la couronne $\{|z|, |Z| \in]a, \frac{1}{a} [\}$

$\widehat{C}_X(Z)$ celle de l'échantillonné existe aussi et est égale à :

$$\widehat{C}_X(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \widehat{C}_X(x) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\widehat{L}(x)}{Z} \right)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widehat{L}(x) \cdot Z \right)^j \right] \frac{dx}{x} - \widehat{C}_X(0)$$

(expression *rationnelle* en z , pour avoir la structure d'un ARMA(Rosanov))

$$\widehat{C}_X(Z) = \Phi^{-1}(Z) \cdot \Theta(Z) \cdot C_\varepsilon \cdot \Theta'(\frac{1}{Z}) \cdot [\Phi^{-1}(\frac{1}{Z})]'$$

$$= \frac{1}{Z^\lambda \prod_{i=1}^m (Z - \alpha_i)^{\lambda_i}} a'(Z) \Theta(Z) . C_\varepsilon \frac{\Theta'_1(Z)}{Z^q} \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

$$\text{où } \Phi\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{Z^p} \Phi_1(Z), \quad \Theta\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{Z^q} \Theta_1(Z),$$

$$\text{et } \Phi^{-1}(Z) = \frac{1}{\det(\Phi(Z))} a'(Z) \text{ et } a(Z) = \text{matrice des cofacteurs}$$

$$\widehat{C}_X(Z) = \left[Z^{\lambda+q-p} \prod_{i=1}^m (Z - \alpha_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^m (1 - Z\alpha_i)^{\lambda_i} \right]^{-1} \times M(Z)$$

$$\text{où } M(Z) = a'(Z) \Theta(Z) . C_\varepsilon \Theta_1(Z) \Phi_1(Z) = \text{matrice à coefficients polynômiaux en } Z$$

$$\begin{aligned} \cdot \widehat{C}_{\widetilde{X}}(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left\{ \frac{\widehat{C}'_X(x)}{1 - \frac{\widehat{L}(x)}{Z}} + \frac{\widehat{C}_X(x)}{1 - \widehat{L}(x) \cdot Z} \right\} \frac{dx}{x} - \widehat{C}_X(0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Gamma} \left\{ \frac{M'(x)}{1 - \frac{\widehat{L}(x)}{Z}} - \frac{M(x)}{1 - \widehat{L}(x) \cdot Z} \right\} \frac{1}{x^{\lambda+q-p} \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^m (1 - x\alpha_i)^{\lambda_i}} \frac{dx}{x} - \widehat{C}_X(0) . \end{aligned}$$

l'utilisation des residus pour le calcul de cette intégrale :

$$\text{les seuls pôles de } \widehat{C}_{\widetilde{X}}(Z) \text{ sont les zéros de } Z^{\lambda+q-p} \prod_{i=1}^m (Z - \alpha_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^m (1 - Z\alpha_i)^{\lambda_i} .$$

résidus :

$$\text{en } \alpha_i \quad m \text{ pôles d'ordre } \lambda_i \quad , \quad \text{et en } 0 \quad \text{pôles d'ordre } \lambda + q - p + 1$$

Annexe 2

les démonstrations détaillées du chapitre 3 sont données dans cet annexe 2 .

1/ Nous construisons les ensembles suivants $(R_i)_{i=1,11}$ qui recouvrent le domaine R .

$$R = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq l_1 \leq N - n_1, 1 \leq l_2 \leq N - n_2\}$$

définit pour le lemme 81 et la proposition 82 du chapitre 3.

$$R_1 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 < l_1 + n_1 \leq l_2 < l_2 + n_2\},$$

$$R_7 = \{(l_1, l_2) \in R : l_2 < l_2 + n_2 \leq l_1 < l_1 + n_1\},$$

$$R_2 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 < l_2 < l_1 + n_1 < l_2 + n_2\},$$

$$R_8 = \{(l_1, l_2) \in R : l_2 < l_1 < l_2 + n_2 < l_1 + n_1\},$$

$$R_3 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 = l_2 < l_1 + n_1 < l_2 + n_2\},$$

$$R_9 = \{(l_1, l_2) \in R : l_2 = l_1 < l_2 + n_2 < l_1 + n_1\},$$

$$R_4 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 < l_2 < l_1 + n_1 = l_2 + n_2\},$$

$$R_{10} = \{(l_1, l_2) \in R : l_2 < l_1 < l_2 + n_2 = l_1 + n_1\},$$

$$R_5 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 < l_2 < l_2 + n_2 < l_1 + n_1\},$$

$$R_{11} = \{(l_1, l_2) \in R : l_2 < l_1 < l_1 + n_1 < l_2 + n_2\}.$$

$$R_6 = \{(l_1, l_2) \in R : l_1 = l_2 < l_1 + n_1 = l_2 + n_2\},$$

ainsi

$$R = \cup_{i=1}^{11} R_i. \quad \text{et} \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

2/ posons $U_{N,i}(k, \lambda, \mu) = \sum_{r=1}^{11} U_{N,i}^{(r)}(k, \lambda, \mu), i = 1, 2, 3, 4$ où $U_{N,i}^{(r)}(k, \lambda, \mu)$ est de même forme que $U_{N,i}(k, \lambda, \mu)$ avec $\sum_R$ remplacé par $\sum_{R_r}$. et par symetrie des couples (l_1, n_1) et (l_2, n_2) , nous avons pour $i = 1, 2, 3$,

$$U_{N,i}^{(r)}(k, \lambda, \mu) = U_{N,i}^{(r+6)}(k, \lambda, \mu), \quad r = 1, \dots, 5.$$

$$E(\hat{g}_k^2(N, \omega)) = g_k(\omega) + O(\frac{1}{M_N}).$$

Résultat1

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes , alors :

$$\sum_{l_1=1}^{N-n_1} \sum_{l_2=1}^{N-n_2} b_{l_2-l_1} = \sum_{s=-N}^N b_s V(s, n_1, n_2). \text{ où } V(s, n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } -(N-n_1) \geq s, \\ N-n_1-s & \text{si } -(N-n_1) < s \leq \min(0, n_1-n_2), \\ N-\max(n_1-n_2) & \text{si } \min(0, n_1-n_2) \leq s \leq \max(0, n_1-n_2), \\ N-n_2-s & \text{si } \max(0, n_1-n_2) \leq s < N-n_2, \\ 0 & \text{si } N-n_2 \leq s. \end{cases}$$

Résultat2

Soit $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}, (b_s)_{s \in \mathbb{N}}, (c_s)_{s \in \mathbb{N}}$ 3 suites de nombres positifs telque:

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} b_s < \infty \text{ et } \sum_{s=0}^{\infty} c_s < \infty \quad \text{alors}$$

$$\text{pour } i = 2, 3, 4, 6, \quad Q_i = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_i} a_{l_1} b_{l_2-l_1} c_{l_2-l_1+n_2-n_1} = O\left(\frac{1}{N^\circ}\right) \sum_{s=0}^{\infty} a_s$$

$$\text{et} \quad Q_5 = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_5} a_{l_1} b_{l_2-l_1} c_{l_1-l_2+n_1-n_2} = O\left(\frac{1}{N^\circ}\right) \sum_{s=0}^{\infty} a_s$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \text{ et } d \in \mathbb{C} \text{ tel que } |d| \leq 1,$$

$$P_i = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_i} a_{l_1-l_2} d^{n_1-(l_2-l_1)} b_{l_2-l_1+n_2-n_1} \text{ pour } i = 2, 3, 4, 6, \text{ et}$$

$$P_5 = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_5} a_{l_2-l_1} d^{n_2} b_{l_1-l_2+n_1-n_2}. \quad \text{alors : nous obtenons quand } N \rightarrow \infty$$

$$P_2 = D_N(d) \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} b_s \right) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$P_3 = D_N(d) a_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} b_s \right) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$P_4 = D_N(d) b_0 \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r \right) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$P_5 = D_N(d) \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} b_r \right) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$P_6 = D_N(d) a_0 b_0 + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{où } D_N(d) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) d^n$$

Résultat3

$$\text{Soit } P_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{n=2}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) \phi(\lambda)^n \quad \text{alors}$$

$$(i) \quad |P_N(\lambda)| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad |P_N(\lambda)| \leq \frac{\beta}{N\lambda^2} + \frac{4\beta^2}{N^2\lambda^2} \quad \forall \lambda \neq 0,$$

$$(iii) \quad |P_N(\lambda)| \leq \frac{1}{N} + \frac{\beta}{N|\lambda|} + \frac{4\beta^2}{N^2\lambda^2} \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Si la fonction H est bornée et à dérivée bornée et soit

$$S_N(u, a) = \int_{-\infty}^{\infty} W_N(u-v)P_N(v) \exp(-iva)dv - \frac{2\pi}{N}W_N(u) \sum_{n=2}^N (1 - \frac{n}{N})f_n(a), \text{ alors}$$

$$S_N(u, a) = O(\frac{M_N}{N}).$$

Résultat4

Soit h et l deux fonctions $\in L^1[0, \infty[$ et $uh(u)$, $ul(u) \in L^1[0, \infty[$. Alors

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c_n d_n)^{\frac{1}{2}} \leq \beta \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(u)l(v)dudv \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(c_n d_n)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\beta^2 u + \beta)(\beta^2 v + \beta)h(u)l(v)dudv \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ où}$$

$$c_n = \int_0^{\infty} h(u)f_n(u)du \quad \text{et} \quad d_n = \int_0^{\infty} l(u)f_n(u)du.$$

Avec ces 3 résultats et notations nous pouvons donner la démonstration détaillée de la proposition de la section de la variance de l'estimateur $g_k^1(N, \omega)$.

Démonstration du lemme 81

Il s'agit de montrer que

$$U_{N,1}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda))\overline{E(J_k(N, \mu))} = O(\frac{1}{N}) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

$$U_{N,3}(k, \lambda, \mu) = O(\frac{1}{N}) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

$$U_{N,4}(k, \lambda, \mu) = O(\frac{1}{N}) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu$$

$$U_{N,2}(k, \lambda, \mu) = O(\frac{1}{N}) \quad \text{uniformément en } \lambda \text{ et } \mu.$$

$$U_{N,1}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda))\overline{E(J_k(N, \mu))}$$

$$= 2U_{N,1}^{(1)}(k, \lambda, \mu) + 2 \sum_{r=2}^5 U_{N,1}^{(r)}(k, \lambda, \mu) + U_{N,1}^{(6)}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda))\overline{E(J_k(N, \mu))}$$

$$E(J_k(N, \lambda)) = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n=2}^N (N-n)e_n^k(\lambda) + O(\frac{1}{N}).$$

$$\text{comme } |e_n^k(\lambda)| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |B_k(u)| f_n(u)du = 2d_n^k \quad \text{avec } \sum_{n \geq 1} d_n^k < \infty \text{ et } \sum_{n \geq 1} n d_n^k < \infty, \text{ nous}$$

avons

$$E(J_k(N, \lambda))\overline{E(J_k(N, \mu))} = \left(\frac{1}{2\pi\beta N} \right)^2 \sum_{n=2}^N (N-n_1)(N-n_2)e_{n_1}^k(\lambda)e_{n_2}^k(\lambda) + O(\frac{1}{N}).$$

pour $(l_1, l_2) \in R_1$, $t_{l_1}, t_{l_1+n_1} - t_{l_1}, t_{l_2} - t_{l_1+n_1}, t_{l_2+n_2} - t_{l_2}$ sont indépendants

et donc:

pour $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[\times]0, \infty[\times]0, \infty[$

$$(2\pi\beta N)^2 U_{N,1}^{(1)}(k, \lambda, \mu) = \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_1} \int_{\Omega} B(t_1, u_1)B(t_2 + u_1 + t_1, u_2)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi}{T} k \right) u_1 \right) + \exp(-i\lambda u_1) \right\} \times \left\{ \exp \left(-i \left(\mu - \frac{2\pi}{T} k \right) u_2 \right) + \exp(i\mu u_2) \right\} \times \\
& \exp \left\{ i \frac{2\pi}{T} k (t_2 + u_1) \right\} \times f_{l_1}(t_1) f_{n_1}(u_1) f_{l_2-l_1-n_1}(t_2) f_{n_2}(u_2) dt_1 dt_2 du_1 du_2 \\
& = \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{j_1+j_2=0}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi}{T} k \right) u_1 \right) + \exp(-i\lambda u_1) \right\} \times \\
& \left\{ \exp \left(-i \left(\mu - \frac{2\pi}{T} k \right) u_2 \right) + \exp(i\mu u_2) \right\} \times \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_2 + k) \right)^{l_2-l_1-n_1} B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2) f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
& + \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{j_1+j_2 \neq 0}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2) \exp(i \frac{2\pi}{T} (j_2 + k) u_1) \times \\
& \left\{ \exp \left(i \left(\lambda - \frac{2\pi}{T} k \right) u_1 \right) + \exp(-i\lambda u_1) \right\} \times \left\{ \exp \left(-i \left(\mu - \frac{2\pi}{T} k \right) u_2 \right) + \exp(i\mu u_2) \right\} \\
& \times \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) \right)^{l_1} \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_2 + k) \right)^{l_2-l_1-n_1} f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Y_3| & \leq \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1+j_2 \neq 0}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)| \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \left| \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) \right) \right|^{l_1} f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
& \leq \frac{1}{(\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1+j_2 \neq 0}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)| \sum_{l_1=1}^{N-n_1} \sum_{s=n_1}^{N-n_2-l_1} \left| \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) \right) \right|^{l_1} f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2
\end{aligned}$$

en posant $s = l_2 - l_1$ et que $l_2 - l_1 \geq n_1$ dans R_1 on obtient

$$|Y_3| \leq \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \frac{T}{2\pi} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1+j_2 \neq 0}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{|B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)|}{|j_1+j_2|} f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2 = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$|Y_2| \leq \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \left(\frac{\beta T}{2\pi} + 1 \right) \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j \neq k}^{\infty \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)| f_{n_1}(u_1) f_{n_2}(u_2) du_1 du_2 = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

si on pose

$$\begin{aligned}
W'_{N,1}(k, \lambda, \mu) & = 2U_{N,1}^{(1)}(k, \lambda, \mu) - E(J_k(N, \lambda)) \overline{E(J_k(N, \mu))} \\
& = \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n_1=1}^{N-1} (N - n_1) e_{n_1}^k(\lambda) \frac{1}{2\pi\beta N} \sum_{n_2=1}^{N-1} (N - n_2) \overline{e_{n_2}^k(\mu)} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
& = \frac{1}{(2\pi\beta)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} e_{n_1}^k(\lambda) \overline{e_{n_2}^k(\mu)} \frac{1}{N^2} \left\{ 2 \sum_{R_1} 1 - (N - n_1)(N - n_2) \right\} + O\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2 \sum_{R_1} 1 & = 2 \sum_{s=n_1}^{N-n_2} (N - n_2 - s) 1_{\{N-n_2-n_1-1 \geq 0\}} \\
& = (N - n_2 - n_1)(N - n_2 - n_1 + 1) 1_{\{N-n_2-n_1-1 \geq 0\}}. \\
\frac{1}{N^2} \left\{ 2 \sum_{R_1} 1 - (N - n_1)(N - n_2) \right\} & = \left\{ \left(1 - \frac{n_1+n_2}{N} \right) \left(1 - \frac{n_1+n_2-1}{N} \right) - \left(1 - \frac{n_1}{N} \right) \left(1 - \frac{n_2}{N} \right) \right\} 1_{\{N-n_2-n_1-1 \geq 0\}} + \\
& \quad \left(1 - \frac{n_1}{N} \right) \left(1 - \frac{n_2}{N} \right) (1 - 1_{\{N-n_2-n_1-1 \geq 0\}}) \\
& = A(n_1, n_2) + B(n_1, n_2).
\end{aligned}$$

$$|A(n_1, n_2)| \leq \frac{3}{N}(\frac{4}{3}n_1 + n_2 + 1) \quad \text{et} \quad |B(n_1, n_2)| \leq \frac{n_1+1}{N},$$

$$\begin{aligned} \left| W'_{N,1}(k, \lambda, \mu) \right| &\leq \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \int_0^\infty \int_0^\infty |B_k(u_1)B_k(u_2)| f_{n_1}(u_1)f_{n_2}(u_2) \{4n_1 + 3n_2 + 3 + n_1 + 1\} du_1 du_2 \\ &\leq \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \int_0^\infty \int_0^\infty |B_k(u_1)B_k(u_2)| \times \{(\beta^2 u_1 + \beta)\beta + (\beta^2 u_2 + \beta)\beta + \beta^2\} du_1 du_2 \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ en utilisant l'hypothèse (h2)} \end{aligned}$$

Evaluation de $W''_{N,1}(k, \lambda, \mu)$

pour $r = 2, \dots, 6$, t_{l_1} et $t_{l_1+n_1} - t_{l_1}$, t_{l_1} et $t_{l_2+n_2} - t_{l_2}$, t_{l_1} et $t_{l_2} - t_{l_1}$, sont

des couples de variables aléatoires indépendantes donc

$$U_{N,1}^{(r)}(k, \lambda, \mu) \leq \frac{4}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_1} \sum_{j_1 + j_2 \in \mathbb{Z}^2} \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T}(j_1 + j_2)\right) \right|^{l_1} . E \{ h_{j_1}(t_{l_1+n_1} - t_{l_1}) h_{j_2}(t_{l_2+n_2} - t_{l_2}) \}$$

soit $\gamma = t_{l_1+n_1} - t_{l_1}$ et $\delta = t_{l_2+n_2} - t_{l_2}$

et on choisit $\gamma' \leq \gamma$ et $\delta' \leq \delta$, γ' et δ' indépendants pour $r = 2, \dots, 6$

$$\gamma \geq \begin{cases} t_{l_2} - t_{l_1}, & r = 2, 4 \\ (t_{l_2} - t_{l_1}) + (t_{l_1+n_1} - t_{l_2+n_2}) & r = 5, \quad \text{et} \\ t_{l_1+n_1} - t_{l_1}, & r = 3, 6 \end{cases}$$

$$\delta \geq \begin{cases} t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1}, & r = 3 \\ t_{l_2+n_2} - t_{l_2}, & r = 2, 4, 5, \\ 0 & r = 6 \end{cases}$$

puisque $h_j(u)$ est croissante dans $[0, \infty[$

$$E \{ h_{j_1}(\gamma) h_{j_2}(\delta) \} \leq E \{ h_{j_1}(\gamma') h_{j_2}(\delta') \} \leq E \{ h_{j_1}(\gamma') \} E \{ h_{j_2}(\delta') \}$$

remarquons que la densité de probabilité de $(t_{l_2} - t_{l_1}) + (t_{l_1+n_1} - t_{l_2+n_2})$ est $f_{n_2-n_1}$, donc

pour $r = 2, \dots, 6$

$$\left| U_{N,1}^{(r)}(k, \lambda, \mu) \right| \leq G_{N,1}^{(r)}$$

$$= \frac{1}{(\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1, l_2) \in R_1} \sum_{j_1 + j_2 \in \mathbb{Z}^2} \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T}(j_1 + j_2)\right) \right|^{l_1} g^{(r)}(l_1, l_2, n_1, n_2),$$

où

$$g^{(r)}(l_1, l_2, n_1, n_2) = \begin{cases} a_{j_1}(l_2 - l_1)a_{j_2}(n_2), & r = 2, \\ a_{j_1}(n_1)a_{j_2}(n_2 - n_1 + l_2 - l_1), & r = 3, \\ a_{j_1}(l_2 - l_1)a_{j_2}(n_2), & r = 4, \\ a_{j_1}(n_2 - n_1)a_{j_2}(n_2), & r = 5, \\ a_{j_1}(n_1), & r = 6, \end{cases}$$

$$\text{où } a_j(n) = \int_0^\infty h_j(u) f_n(u) du.$$

R_5 est caractérisé par $l_2 - l_1 > 0$ et $l_2 - l_1 < n_1 - n_2$, posons $s = l_2 - l_1$, nous avons

$$\begin{aligned} G_{N,1}^{(5)} &= \frac{1}{(\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1+j_2 \neq 0} \sum_{l_1=1}^{N-n_1} \sum_{s=1}^{n_1-n_2-l_1} a_{j_1}(n_2-n_1)a_{j_2}(n_2) \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T}(j_1+j_2)\right) \right|^{l_1} 1_{\{n_1-n_2-2 \geq 0\}} \\ &\quad + \frac{1}{(\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1+j_2=0} \sum_{s=1}^{n_1-n_2-l_1} (N-n_1)a_{j_1}(n_1-n_2)a_{j_2}(n_2) 1_{\{n_1-n_2-2 \geq 0\}} \\ &\leq \frac{T}{2\pi(\pi\beta)^2 N} \sum_{n_2=1}^{N-1} \sum_{p=2}^{N-1-n_2} \sum_{j_1+j_2 \neq 0} \frac{a_{j_1}(p)a_{j_2}(n_2)}{|j_1+j_2|} \\ &\quad + \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \sum_{n_2=1}^{N-1} \sum_{p=2}^{N-1-n_2} \sum_{j_1+j_2=0} (p-1)a_{j_1}(p)a_{j_2}(n_2) \\ &\leq \frac{T}{2\pi^3 N} \sum_{j_1+j_2 \neq 0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{j_1}(u_1)h_{j_2}(u_2)}{|j_1+j_2|} du_1 du_2 \\ &\quad + \frac{1}{(\pi\beta)^2 N} \sum_{j_1+j_2=0} \int_0^\infty \int_0^\infty (\beta^2 u_1 + 2\beta) h_{j_1}(u_1) h_{j_2}(u_2) du_1 du_2 \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

·même procédé pour les $G_{N,1}^{(r)}$ pour $r = 2, 3, 4, 6$, ainsi

$$W_{N,1}''(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu.$$

et même principe de raisonnement pour montrer que

$$U_{N,3}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ et } U_{N,4}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

comme pour $W_{N,1}''(k, \lambda, \mu)$, nous avons $U_{N,2}^{(1)}(k, \lambda, \mu) = O\left(\frac{1}{N}\right)$ uniformément en λ et μ .

pour $r = 2, 3, 4, 6$ nous écrivons

$$t_{l_2} = (t_{l_2} - t_{l_1}) + t_{l_1}, \quad t_{l_1+n_1} - t_{l_1} = (t_{l_1+n_1} - t_{l_2}) + (t_{l_2} - t_{l_1}) \text{ et}$$

$$t_{l_1+n_2} - t_{l_2} = (t_{l_1+n_2} - t_{l_1+n_1}) + (t_{l_1+n_1} - t_{l_2})$$

nous avons

$$U_{N,2}^{(r)}(k, \lambda, \mu) = \Omega(\lambda, \mu) + \Omega(\lambda, -\mu + \frac{2\pi}{T}k) + \Omega(-\lambda + \frac{2\pi}{T}k, \mu) + \Omega(-\lambda + \frac{2\pi}{T}k, -\mu + \frac{2\pi}{T}k)$$

où

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda, \mu) &= \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2} E(B_{j_1}(t_{l_2} - t_{l_1}) B_{j_2}(t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1})) \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{2\pi}{T} j_2 (t_{l_1+n_2} - t_{l_2})\right) \times \exp\left(i \frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) t_{l_1}\right) \times \exp\left(i \frac{2\pi}{T} (j_2 + k) (t_{l_2} - t_{l_1})\right) \\ &\quad \times \exp\left(i(\lambda - \frac{2\pi}{T} k) (t_{l_2} - t_{l_1})\right) \exp(i(\lambda - \mu) (t_{l_1+n_1} - t_{l_2})) \\ &\quad \times \exp\left(-i(\mu - \frac{2\pi}{T} k) (t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1})\right) \exp(i \frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) t_{l_1})\end{aligned}$$

pour $r = 2, 3, 4, 6$, $t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1}$ et $t_{l_1+n_2} - t_{l_2}$, $t_{l_2} - t_{l_1}$ sont indépendants ,

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda, \mu) &= \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2} \phi\left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2)\right)^{l_1} \\ &\quad \times z_{j_1}(l_2 - l_1, \lambda - \frac{2\pi}{T} j_2) \phi\left((\lambda - \mu + \frac{2\pi}{T} j_2)\right)^{n_1 - (l_2 - l_1)} \\ &\quad \times z_{j_2}(n_2 - n_1 + l_2 - l_1, -\mu + \frac{2\pi}{T} k)\end{aligned}$$

où $z_j(n, \lambda) = \int_0^\infty B_j(u) f_n(u) \exp(i\lambda u) du \quad \forall n \geq 1$, et $z_j(0, \lambda) = B_j(0)$.

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda, \mu) &= \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{j_1 + j_2 = 0} z_{j_1}(l_2 - l_1, \lambda - \frac{2\pi}{T} j_1) \\ &\quad \times \phi\left(\lambda - \mu - \frac{2\pi}{T} j_1\right)^{n_1 - (l_2 - l_1)} z_{j_2}(n_2 - n_1 + l_2 - l_1, -\mu + \frac{2\pi}{T} k) + Q(\lambda, \mu)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}|Q(\lambda, \mu)| &\leq \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} a_{l_1} b_{j_1}(l_2 - l_1) b_{j_2}(n_2 - n_1 + l_2 + l_1) \text{ avec} \\ a_l &= \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2)\right)^l \right|, \quad b_j(l) = \int_0^\infty |B_j(u)| f_l(u) du \quad \forall l \geq 1 \text{ et } b_j(0) = |B_j(0)|\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}|Q(\lambda, \mu)| &\leq \frac{1}{(2\pi\beta)^2 N} \sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \sum_{l=1}^\infty \sum_{p=1}^\infty \sum_{s=1}^\infty a_l b_{j_1}(s) b_{j_2}(p) \\ &\leq \frac{1}{(2\pi\beta)^2 N} \sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{B_{j_1}(u_1) B_{j_2}(u_2)}{|j_1 + j_2|} du_1 du_2 = O\left(\frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

pour

$U_{N,2}^{(5)}(k, \lambda, \mu)$ nous écrivons

$$\begin{aligned}t_{l_2+n_2} - t_{l_1+n_1} &= -(t_{l_1+n_1} - t_{l_2+n_2}) \quad \text{et} \quad t_{l_1+n_1} - t_{l_1} = (t_{l_1+n_1} - t_{l_2+n_2}) + (t_{l_2+n_2} - t_{l_2}) \\ &\quad + (t_{l_2} - t_{l_1})\end{aligned}$$

et en utilisant la relation $B_j(-u) = \exp(-i \frac{2\pi}{T} j u) B_j(u)$

et même raisonnement nous donne

$$U_{N,2}^{(5)}(k, \lambda, \mu) = \Omega'(\lambda, \mu) + \Omega'(\lambda, -\mu + \frac{2\pi}{T} k) + \Omega'(-\lambda + \frac{2\pi}{T} k, \mu) + \Omega'(-\lambda + \frac{2\pi}{T} k, -\mu + \frac{2\pi}{T} k)$$

où

$$\Omega'(\lambda, \mu) = \frac{1}{(2\pi\beta N)^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{N-1} \sum_{(l_1 l_2) \in R_1} \sum_{j_1 + j_2 = 0} z_{j_1}(l_2 - l_1, \lambda - \frac{2\pi}{T} j_1)$$

$$\times \phi\left(\lambda - \mu - \frac{2\pi}{T}j_1\right)^{n_2} z_{j_2}(n_1 - n_2 + l_1 - l_2, -\mu + \frac{2\pi}{T}k) + O(\frac{1}{N})$$

pose

$\overline{D}_N(\lambda) = D_N(\phi(\lambda))$ et le lemme 82 donne

$$U_{N,2}(k, \lambda, \mu) = 2 \sum_{r=1}^5 U_{N,2}^{(r)}(k, \lambda, \mu) + U_{N,2}^{(6)}(k, \lambda, \mu)$$

$$= S(\lambda, \mu) + S(\lambda, -\mu + \frac{2\pi}{T}k) + S(-\lambda + \frac{2\pi}{T}k, \mu) + S(-\lambda + \frac{2\pi}{T}k, -\mu + \frac{2\pi}{T}k) + O(\frac{1}{N})$$

$$S(\lambda, \mu) = \frac{1}{(2\pi\beta)^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{D}_N(\lambda - \mu - \frac{2\pi}{T}j) (2Z_j(\lambda - \frac{2\pi}{T}j) \overline{Z_j(\mu - \frac{2\pi}{T}k)}) + 2B_j(0) \overline{Z_j(\mu - \frac{2\pi}{T}k)} \\ + 2Z_j(\lambda - \frac{2\pi}{T}j) \overline{B_j(0)} + B_j(0) \overline{B_j(0)} + 2Z_j(\lambda - \frac{2\pi}{T}j) \overline{Z_j(-\lambda + \frac{2\pi}{T}k)}$$

où

$$Z_j(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z_j(n, \lambda) = \int_0^{\infty} B_j(u) \exp(i\lambda u) du.$$

nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(u - \lambda) W_N(u - \mu) S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \sum_{i=1}^5 T_i.$$

par exemple si nous écrivons $\overline{D}_N(\lambda) = \frac{N-1}{N^2} \phi(\lambda) + P_N(\lambda)$, on a $T_1 = T_{11} + T_{12}$ où

$$|T_{12}| \leq \frac{A_4}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_N(u - \lambda) W_N(u - \mu)| d\lambda d\mu \times \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |B_j(s) B_j(t)| ds dt = O(\frac{1}{N})$$

d'après le (c) de

hypothèse(h2)

et

$$T_{11} = \frac{1}{(2\pi\beta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(u - \lambda) W_N(u - \mu) P_N(\lambda - \mu - \frac{2\pi}{T}j) \\ \times \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_j(s) B_{-j}(t) \exp(i(\lambda - \frac{2\pi}{T}j)s) \times \exp(-i(\mu - \frac{2\pi}{T}k)t) ds dt \right) d\lambda d\mu \\ = \frac{1}{(2\pi\beta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_N(u - \lambda) \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_j(s) B_{-j}(t) \exp(i(\lambda - \frac{2\pi}{T}j)s) \times \exp(-i(\mu - \frac{2\pi}{T}k)t) d\lambda ds dt \\ \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_N(u - \lambda + \frac{2\pi}{T}j + v) P_N(v) \exp(ivt) dv \right) \quad \text{où}$$

$$v = \lambda - \mu - \frac{2\pi}{T}j$$

$$= \frac{1}{(2\pi\beta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_N(u - \lambda) \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_j(s) B_{-j}(t) \exp(i(\lambda - \frac{2\pi}{T}j)s) \times \exp(-i(\lambda - \frac{2\pi}{T}j - \frac{2\pi}{T}k)t) \\ \times \left(\frac{2\pi}{N} W_N(u - \lambda + \frac{2\pi}{T}j) \sum_{n=2}^N (1 - \frac{n}{N}) f_n(-t) \right) d\lambda ds dt + O(\frac{M_N}{N}) \\ = 0 + O(\frac{M_N}{N}).$$

pour les autres T_i même principe.

Démonstration de la proposition 86

$$\begin{aligned}
\text{var} \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \} &= \sum_{i=1}^4 U_{n,N,i}(k, \omega) - |E \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \}|^2 \quad \text{où} \\
U_{n,N,1}(k, \omega) &= \frac{1}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} E(B(t_{l_1}, t_{l_1+n} - t_{l_1}) B(t_{l_2}, t_{l_2+n} - t_{l_2})) \times p(l_1, n, k, \omega) p(l_2, n, k, \omega), \\
U_{n,N,2}(k, \omega) &= \frac{1}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} E(B(t_{l_1}, t_{l_2} - t_{l_1}) B(t_{l_1+n}, t_{l_2+n} - t_{l_1+n})) \times p(l_1, n, k, \omega) \overline{p(l_2, n, k, \omega)}, \\
U_{n,N,3}(k, \omega) &= \frac{1}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} E(B(t_{l_1}, t_{l_2+n} - t_{l_1}) B(t_{l_2}, t_{l_1+n} - t_{l_2})) \times p(l_1, n, k, \omega) \overline{p(l_2, n, k, \omega)}, \\
U_{n,N,4}(k, \omega) &= \frac{1}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} E(K(t_{l_1}, t_{l_1+n} - t_{l_1}, t_{l_2+n} - t_{l_1}, t_{l_2} - t_{l_1})) \times p(l_1, n, k, \omega) \overline{p(l_2, n, k, \omega)}
\end{aligned}$$

où

$$R' = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{N} : 1 \leq l_1, l_2 \leq N - n\}.$$

posons

$$\begin{aligned}
R'_1 &= \{(l_1, l_2) \in R' : l_1 < l_1 + n \leq l_2 < l_2 + n\}, \\
R'_2 &= \{(l_1, l_2) \in R' : l_1 < l_2 < l_1 + n < l_2 + n\}, \\
R'_3 &= \{(l_1, l_2) \in R' : l_2 < l_2 + n \leq l_1 < l_1 + n\}, \\
R'_4 &= \{(l_1, l_2) \in R' : l_2 < l_1 < l_2 + n < l_1 + n\}, \\
R'_5 &= \{(l_1, l_2) \in R' : l_1 = l_2 < l_1 + n = l_2 + n\}.
\end{aligned}$$

alors

$$R' = \cup_{r=1}^5 R'_r \text{ et } R'_i \cap R'_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \text{ ainsi}$$

$$U_{n,N,1}(k, \omega) = \sum_{r=1}^5 U_{n,N,1}^{(r)}(k, \omega) \quad \text{où } U_{n,N,1}^{(r)}(k, \omega) \text{ même type que } U_{n,N,1}(k, \omega) \text{ avec } \sum_{R'}$$

remplacée par $\sum_{R'_r}$

par symetrie entre l_1 et l_2 on a :

$$\begin{aligned}
U_{n,N,1}^{(1)}(k, \omega) &= U_{n,N,1}^{(3)}(k, \omega) \\
U_{n,N,1}^{(2)}(k, \omega) &= U_{n,N,1}^{(4)}(k, \omega)
\end{aligned}$$

comme dans la proposition précédente , nous avons

$$2U_{n,N,1}^{(1)}(k, \omega) - |E \{ \Gamma_k(n, N, \omega) \}|^2 = O(\frac{1}{N}) \text{ uniformement en } \omega \text{ et } k$$

soit

$$|w_2| = 2U_{n,N,1}^{(2)}(k, \omega)$$

$$\leq \frac{8}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_2} \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2} E \{ |B_{j_1}(t_{l_1+n} - t_{l_1}) B_{j_2}(t_{l_2+n} - t_{l_2})| \} \left| \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) \right) \right|^{l_1}$$

$$\leq \frac{8}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_2} \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(n) c_{j_2}(n))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(n) \right)$$

$$\text{où } c_j(n) = \int_0^\infty |B_j(u)|^2 f_n(u) du$$

et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_2} 1 &= \sum_{s=1}^{n-1} (N - n - s) 1_{\{N-n > n-1\}} + \sum_{s=1}^{N-n-1} (N - n - s) 1_{\{N-n \leq n-1\}} \\ &\leq |(n-1)(2N-3n)| + (N-n)(N-N-1) 1_{\{N-n \leq n-1\}} \\ &\leq 20nN, \end{aligned}$$

donc

$$w_2 = O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ uniformment en } \omega \text{ et } k$$

avec le lemme et même raisonnement implique :

$$U_{n,N,1}^{(5)}(k, \omega) = O\left(\frac{1}{N}\right) .$$

pour $U_{n,N,2}(k, \omega)$ et $U_{n,N,3}(k, \omega)$ on a

$$\begin{aligned} |U_{n,N,2}(k, \omega)| &\leq \frac{4}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_2} \sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} E \{ |B_{j_1}(t_{l_2} - t_{l_1}) B_{j_2}(t_{l_2+n} - t_{l_1+n})| \} \left| \phi \left(\frac{2\pi}{T} (j_1 + j_2) \right) \right|^{l_1} \\ &\leq \frac{4}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_2} \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(|l_2 - l_1|) c_{j_2}(|l_2 - l_1|))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(|l_2 - l_1|) \right) \\ &\leq \frac{8}{N^2} \sum_{s=0}^{N-n-1} (N - n - s) \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(|s|) c_{j_2}(|s|))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(|s|) \right) \\ &\leq \frac{8}{N} \sum_{c=0}^{\infty} \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(|s|) c_{j_2}(|s|))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(|s|) \right) \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right) \\ |U_{n,N,3}(k, \omega)| &\leq \frac{4}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_3} \sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(|l_2 - l_1 + n|) c_{j_2}(|l_2 - l_1 - n|))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} \\ &\quad + \frac{4}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'_3} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (c_j(|l_2 - l_1 + n|) c_j(|l_2 - l_1 - n|))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{8}{N^2} \sum_{s=0}^{N-n-1} \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(|s+n|) c_{j_2}(|s-n|))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (c_j(|s+n|) c_j(|s-n|))^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \frac{8}{N} \sum_{c=0}^{\infty} \left(\sum_{j_1 + j_2 \neq 0} \frac{(c_{j_1}(s) c_{j_2}(s))^{\frac{1}{2}}}{|j_1 + j_2|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (c_j(s))^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

pour $U_{n,N,4}(k, \omega)$ on a

$$|U_{n,N,4}(k, \omega)| \leq \frac{8}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} \sum_{j \in \mathbb{Z}} E(h_j(|t_{l_1+n} - t_{l_1}|, |t_{l_2} - t_{l_1}|, |t_{l_2+n} - t_{l_1}|) t \times |\phi(j - k)|^{l_1})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{8}{N^2} \sum_{(l_1, l_2) \in R'} \left(\sum_{j \neq k} \frac{s_j(|l_2 - l_1|)}{|j - k|} + s_k(|l_2 - l_1|) \right) \\
&= O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{uniformement en } \omega \text{ et } k
\end{aligned}$$

où

$$s_j(n) = \int_0^\infty h_j(0, u, 0) f_n(u) du \quad \text{et} \quad s_j(0) = h_j(0, 0, 0).$$

REFERENCES

- [1] Anderson T.W(1971)"The statistical analysis of times series".Wiley.New York.
- [2] Beutler et Leneman(1966)"Random sampling of random processes", Information and control, vol.9,325-346.
- [3] F.J.Beutler et O.A.Z.Leneman (1966)"The theory of stationnary point processes",Acta Mathematica,Vol.116,p.159-197.
- [4] F.J.Beutler (1970)"Alias free randomly timed sampling of stochastic processes", IEEE transactions on information theory, vol.16,147-152.
- [5] T.Bollerslev,R.Y.(1986)"Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity,Journ.of Econometrics 31.307-327
- [6] D.R.Brillinger (1972)"The spectral analysis of stationary interval functions"P.Sixth Berkeley symp. vol.1.,p.483-513.University of California Press Berkeley.
- [7] D.R.Brillinger (1973)"Estimation of the mean of stationary time series by sampling" J.appl.pro.,p.419-431.
- [8] D.R.Brillinger (1975)"Statistical inferences for stationnary point processes", Stochastic Processes and related topics.vol.1.of proceeding of sum.resear.inst.statist.inf.for.stoch.proces.
- [9] D.J.Daley et D.Vere-Jones(1972)"A summary of the theory of pointprocesses" In P.A.W. lewis,ed.stochastic Point Processes,wiley,New-York,299-383.
- [10] C.Deniau et G.Oppenheim (1986)"Time random sampling" P.. universit  Paris sud Orsay.
- [11] C.Deniau et G.Oppenheim(1989)"Estimation of centrality parameter and random sampling", Bermetika.

- [12] Gladyshev(1963)"Periodically and almost periodically correlated processes with continuous time parameter"Th.Probability Appl.52,39-64
- [13] D.Guégan (1994)"séries chronologiques non linéaires à temps discret"Ed.Economica.
- [14] Hellinsky (1983)"The invertibility of sampling and aggregated arma models",Metrika,Vol.31,201-213.
- [15] Higham(2000)"An algorithmic Intoduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations"SIAM,Vol.43,N°3,525-546.
- [16] Hurd(1989)"Non parametric Time series Analysis for Periodically Correlated Processes"IEEE,vol.35.
- [17] Jerri.(1977)"The shannon sampling theorem its various extentions and applications:a tutorial review."Proceeding of the IEEE ,vol.65,n°11.
- [18] A.Kadi(1994)"Agregation et Echantillonnage Aléatoire de Series temporelles"thèse d'état,université Paris V, Orsay.
- [19] M.Kponsou(1998)"Estimation spectrale Dans les processus à n-accroissements stationnaires"thèse d'état,université de Rouen.
- [20] Leneman(1966)"Random sampling of random processes: optimum linear interpolation",Journal of Franklin Institute, vol.281,n°4,pp.302-314.
- [21] E.Masry(1976)"Discrete-time spectral Estimation of continous-Parameter Processes-A New consistent Estimate"IEEE,trans.inform.theory,vol.22,n°3,may1976.
- [22] E.Masry(1978)"Random sampling and spectrale estimation of continous times processes"IEEE, trans.inform.theory,it.24,p173-183
- [23] E.Masry(1978)"Alias free sampling :an alternative conception and applications"IEEE,trans.inform. theory.p317-324.
- [24] V.Monsan(1994)"Poisson sampling for spectral estimation in periodically Correleted Processes",Applicatones mathematicae,22,p227-266.

- [25] Nguhen(1985)"On point processes sampling in continous time models"pub.inst.stat.univ.xxx.fasc. 1-2.p73-95
- [26] G.Oppenheim(1983)"Echantillonnage aléatoire des processus linéaires scalaires et vectoriels à temps discret, blanchiment" thèse d'état,université Paris V, Orsay.
- [27] E.Parzen(1963)"Stochastic Processes"Holden Day,Inc.
- [28] D.Priestly(1981)"Spectral Analysis and Times Series"vol.2, Ac.Press.
- [29] Wei.W.S.W(1989)"Time series Analysis"A.W.Pub,Inc.