

Propriétés statistiques d'états comprimé et  
superposé. Application à l'étude de  
performances en détection et information.

31 mars 2004



# Table des matières

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                 | <b>5</b>  |
| <b>1 Éléments de mécanique quantique</b>                            | <b>11</b> |
| 1.1 États et opérateurs . . . . .                                   | 11        |
| 1.1.1 États . . . . .                                               | 11        |
| 1.1.2 Opérateurs . . . . .                                          | 12        |
| 1.2 Représentations . . . . .                                       | 20        |
| 1.2.1 États cohérents . . . . .                                     | 20        |
| 1.2.2 Nombre . . . . .                                              | 21        |
| 1.2.3 Position . . . . .                                            | 22        |
| <b>2 Lois de probabilité de quelques états particuliers</b>         | <b>23</b> |
| 2.1 Rappels . . . . .                                               | 23        |
| 2.2 État Cohérent . . . . .                                         | 24        |
| 2.2.1 Dans la base $\{ n\rangle\}$ . . . . .                        | 24        |
| 2.2.2 Dans la base $\{ x\rangle\}$ . . . . .                        | 26        |
| 2.3 État Superposé . . . . .                                        | 28        |
| 2.3.1 Dans la base $\{ n\rangle\}$ . . . . .                        | 28        |
| 2.3.2 Dans la base $\{ x\rangle\}$ . . . . .                        | 31        |
| 2.4 État Comprimé . . . . .                                         | 31        |
| 2.4.1 Dans la base $\{ n\rangle\}$ . . . . .                        | 31        |
| 2.4.2 Dans la base $\{ x\rangle\}$ . . . . .                        | 35        |
| 2.5 État Thermique . . . . .                                        | 37        |
| 2.6 Conclusion . . . . .                                            | 39        |
| <b>3 Intrication dans le modèle de Jaynes-Cummings</b>              | <b>41</b> |
| 3.1 Rappels . . . . .                                               | 41        |
| 3.2 Applications pour un champ de nombre de photons $n$ élevé . . . | 44        |
| 3.2.1 Probabilité de transition . . . . .                           | 47        |
| 3.2.2 Propriétés statistiques du champ après interaction . . . .    | 48        |
| 3.2.3 Propriétés liées à l'atome . . . . .                          | 51        |
| 3.2.4 Entropie . . . . .                                            | 53        |

|          |                                                                              |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Critères de séparabilité des états quantiques</b>                         | <b>57</b>  |
| 4.1      | Entropie conditionnelle . . . . .                                            | 57         |
| 4.2      | Le vecteur de la sphère de Bloch . . . . .                                   | 61         |
| 4.3      | Le critère de réduction . . . . .                                            | 64         |
| 4.4      | Critère de différence de variations des distances . . . . .                  | 66         |
| 4.4.1    | Définition . . . . .                                                         | 66         |
| 4.4.2    | Bornes de $D(\theta)$ . . . . .                                              | 68         |
| 4.4.3    | Propriétés de $D(\theta)$ . . . . .                                          | 69         |
| 4.4.4    | Expression approchée de $D(\theta)$ . . . . .                                | 71         |
| 4.5      | Analyse de $R$ , $\lambda_-$ et $D$ en fonction du nombre de photons . . . . | 71         |
| 4.6      | Application du modèle JC pour la génération d'états superposés               | 73         |
| <b>5</b> | <b>Performances obtenues avec un état superposé</b>                          | <b>77</b>  |
| 5.1      | Statistique de détection . . . . .                                           | 78         |
| 5.1.1    | Approche classique. Généralités . . . . .                                    | 78         |
| 5.1.2    | Détection quantique . . . . .                                                | 80         |
| 5.1.3    | Détection à variable discrète . . . . .                                      | 83         |
| 5.1.4    | Détection homodyne . . . . .                                                 | 86         |
| 5.2      | Capacité de canal . . . . .                                                  | 89         |
| 5.2.1    | Définition . . . . .                                                         | 89         |
| 5.2.2    | Capacité du canal dans le cas binaire . . . . .                              | 90         |
| 5.2.3    | Discussion . . . . .                                                         | 92         |
|          | <b>Conclusions</b>                                                           | <b>94</b>  |
| <b>A</b> | <b>Loi de probabilité <math>P_{Sq}(n)</math> d'un état comprimé</b>          | <b>101</b> |
| <b>B</b> | <b>Le critère <math>D(\theta)</math> et l'information de Fisher</b>          | <b>103</b> |
| B.1      | Relation entre $D(\theta)$ et l'information de Fisher . . . . .              | 103        |
| B.1.1    | Entropie de Fisher . . . . .                                                 | 103        |
| B.1.2    | $D(\theta)$ borné par l'entropie de Fisher . . . . .                         | 104        |
| B.2      | Expression de l'Information de Fisher en mécanique quantique .               | 106        |
| <b>C</b> | <b>Bornes du critère <math>D(\theta)</math></b>                              | <b>109</b> |
| C.1      | Norme $\ell_1$ et variation de distances . . . . .                           | 109        |
| C.2      | Différence de variations des distances . . . . .                             | 110        |
| C.3      | Bornes de $D(\theta)$ . . . . .                                              | 111        |
| <b>D</b> | <b>Expression approchée de <math>D(\theta)</math></b>                        | <b>113</b> |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Introduction</i>                                                        | 5          |
| <b>E Détection du champ superposé</b>                                      | <b>115</b> |
| E.1 Propriétés statistiques des états superposés . . . . .                 | 115        |
| E.1.1 Calcul des constantes de normalisation . . . . .                     | 115        |
| E.1.2 Distributions de probabilité . . . . .                               | 117        |
| E.2 Calcul de la phase $\varphi$ en fonction de la puissance $S$ . . . . . | 123        |
| E.3 Capacité d'un canal discret . . . . .                                  | 124        |
| <b>F Schéma de principe d'une transmission quantique</b>                   | <b>127</b> |
| <b>G Proposition d'une liaison semi quantique</b>                          | <b>131</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                       | <b>131</b> |



# Introduction

Développée au début du XXe siècle, la mécanique quantique est une théorie qui permet de décrire les systèmes physiques à l'échelle atomique et sub-atomique. Les concepts sur lesquels est fondée cette théorie tels que : la dualité onde-corpuscule, l'indéterminisme, le principe d'incertitude, la non-localité, le principe de superposition ..., sont sans équivalents classiques et permettent d'expliquer de nombreux phénomènes physiques contrairement à la mécanique classique.

L'interprétation de ces concepts et postulats a donné lieu à un débat qui s'est enrichi avec l'établissement du principe de complémentarité de Bohr et du principe d'incertitude de Heisenberg. En effet, pour tester la validité de ce dernier principe Einstein, Podolsky et Rosen [1] ont imaginé une expérience qui consiste à observer les paramètres (position et impulsion) d'un couple de particules éloignées l'une de l'autre après avoir interagi entre elles.

La mécanique quantique considère le système composé (le couple de particules dans l'exemple précédent) comme un système unique décrit par un état quantique dit inséparable ou intriqué. Cette intrication donne lieu à des corrélations quantiques qui se manifestent quelle que soit la distance qui sépare les deux sous systèmes : mesurer l'observable sur l'une des deux particules rend instantanément certain, le résultat de la mesure de la même observable sur l'autre particule.

Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) montrent que ce résultat implique que l'information s'est propagée avec une vitesse infinie, conséquence incompatible avec la théorie de la relativité restreinte. La mesure des observables position et impulsion sur la première particule ne peut alors pas changer l'état de la deuxième particule (hypothèse de localité). En revanche, il est possible de prédire la position et l'impulsion de la deuxième particule sans que celle-ci ne soit perturbée ; ce qui permet d'associer simultanément deux éléments de réalité physique à ces deux observables (hypothèse de réalité). Ainsi, EPR montrent, à partir d'une expérience de pensée, que la description de la réalité physique donnée par la mécanique quantique est incomplète puisqu'il est impossible d'écrire un état quantique avec des valeurs bien définies pour les deux observables position et impulsion à la fois (principe d'incertitude d'Heisenberg). En effet, selon EPR, la nature est déterministe et la nature aléatoire des phénomènes observés n'est due qu'à un manque d'informations sur les systèmes [1]. Des

théories à variables cachées ont été alors introduites comme alternatives à la mécanique quantique [2]. En particulier, J. Bell [3] a démontré que l'existence de telles entités est incompatible avec les prévisions de la mécanique quantique en établissant dans le cadre d'une théorie réaliste locale des inégalités que l'on peut vérifier expérimentalement.

Les progrès technologiques considérables des années 1980 ont permis par la suite de réaliser l'essentiel de l'expérience EPR [4, 5, 6] et de conclure que les inégalités de Bell ne sont pas satisfaites lorsque les systèmes composés sont décrits par des états inséparables (intriqués) : l'état de tout l'ensemble, décrit par la superposition des états relatifs à chaque sous système, est alors une fonction d'onde non séparable et l'information que peut contenir celle-ci n'est pas localisée en un endroit précis de l'espace.

Ces résultats qui renforcent les prévisions de la mécanique quantique ont permis d'imaginer des applications surtout dans le domaine de la transmission de l'information [7, 8, 9, 10]. La téléportation est sans doute l'une des applications la plus connue et la plus prometteuse. Cette technique consiste à transmettre de l'information quantique inconnue sans que celle-ci ne soit interceptée (voir annexe F) en utilisant les états intriqués (corrélations quantiques).

La génération de ces états a déjà fait l'objet de plusieurs travaux théoriques ; parmi lesquels ceux de Jaynes et Cummings [11, 12] qui ont abouti à des résultats pouvant être confrontés à l'expérience. Ainsi, le couplage d'un atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique permet de générer des états inséparables. L'échange cohérent et réversible d'énergie entre atome et champ avec seulement un quantum donne lieu à des oscillations de Rabi. La durée de ces oscillations permet de déterminer directement le temps de cohérence (ou d'intrication) mis par les deux sous systèmes avant de retrouver leur état d'équilibre.

Par ailleurs, un système composé décrit par un état séparable est un état factorisable en plusieurs états indépendants décrivant chacun un seul sous système [13]. Or, comme on ne peut pas affirmer que la non décomposition en un produit d'états implique la non séparabilité, plusieurs critères de séparabilité des états ont été proposés [14, 15, 16, 17, 18].

En effet, le critère de l'entropie conditionnelle a déjà permis d'analyser l'évolution des propriétés statistiques des champs cohérent et thermique (champs pouvant être décrits dans le cadre de la physique classique), selon le modèle de Jaynes-Cummings [19]. Ce critère montre que pour des valeurs du nombre de photons élevées  $n \gg 1$  ( $n \lesssim 100$ ) des corrélations quantiques ne sont observées que pour des champs pourvus de propriétés de cohérence et durant un intervalle de temps très court (juste après la séparation des deux sous systèmes).

Or, un temps de cohérence (durée des corrélations quantiques) plus grand permet une exploitation avantageuse dans le domaine du traitement de l'information quantique. Dans ce but, nous nous sommes proposés d'étudier l'évolution dynamique des propriétés statistiques d'un champ comprimé (système décrit



par un état purement quantique), après son interaction avec un atome excité ( si l'atome est dans l'état fondamental, des phénomènes analogues seront observés avec des valeurs différentes pour les grandeurs mesurées). Cette étude réalisée en utilisant des critères déjà établis nous permettra de déterminer le temps que mettent les deux sous systèmes (atome et champ) pour retrouver leur état d'équilibre.

Cependant, ces critères représentent des conditions nécessaires mais non suffisantes car ils ne nous permettent pas de caractériser la dilution de l'intrication (présence simultanée d'états séparables et inséparables). À cet effet, nous avons développé un nouveau critère qui pourrait représenter une condition nécessaire et suffisante dans tous les cas possibles. Notre critère fondé sur la différence de variations des distances [20], sera présenté en détails et comparé aux autres critères.

D'autre part, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un autre état quantique, décrit par la superposition de deux états cohérents déphasés et d'amplitudes opposées. Cette classe d'états dont les propriétés sont purement quantiques (i.e. sans équivalents classiques) et aussi importantes que celles d'un état comprimé, suscite un grand intérêt tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental [21, 22]. Dans notre cas, nous avons exploité les propriétés statistiques de cet état qui présente une intrication entre les deux états cohérents, en vue d'améliorer les performances de détection et de transmission d'états.

Nous nous sommes attachés dans ce travail à définir en premier lieu un état sans équivalent classique et étudier ses propriétés (intrication et statistiques) à l'aide des critères de séparabilité en vue de déterminer le temps de cohérence. En second lieu, nous calculons les performances d'un système de détection lorsque le signal est décrit par un état superposé.

Pour une telle étude, nous avons eu recours aux postulats de la mécanique quantique et quelques résultats physiques déjà établis. Nous donnons dans le premier chapitre quelques éléments de cette théorie qui sont nécessaires à notre étude et analyse théorique.

Dans le chapitre 2, nous donnons les lois de probabilités des états représentant les champs : cohérent, comprimé, superposé et thermique. La détermination des différentes densités de probabilité et de leurs moments factoriels nous permettra de distinguer les caractères classique/quantique ou purement quantique des états. Cette étude s'avère nécessaire car elle nous offre la possibilité de connaître tous les paramètres caractérisant une radiation avant son intrication avec un autre sous système.

Dans le modèle de Jaynes-Cummings (JC), cette intrication peut être générée par l'interaction du champ avec un atome à deux niveaux. Nous décrivons brièvement cette interaction dans le chapitre 3 où nous explicitons les propriétés statistiques du champ et de l'atome en termes d'opérateurs densités. L'étude du moment factoriel réduit pour les champs comprimé, cohérent et

thermique en fonction du temps ainsi que l'entropie des deux sous systèmes feront l'objet de notre première analyse dans ce chapitre.

Les critères de séparabilité (inséparabilité) de tels états sont étudiés dans le chapitre 4 où nous analysons le critère de l'entropie conditionnelle [16], le critère de la norme du rayon de la sphère de Bloch [23] et le critère de réduction [18] pour les champs comprimé, cohérent et thermique. Enfin, nous présentons le critère que nous avons établi et que nous appelons "critère de différence de variations des distances" [24].

Par ailleurs, nous décrivons dans le dernier paragraphe du chapitre 4 la possibilité de réalisation pratique à partir du modèle de Jaynes-Cummings de champs superposés à l'état pur. Leurs propriétés statistiques analysées dans le chapitre 2, sont exploitées pour une application à l'amélioration des performances d'un système de détection [25].

Pour cela, nous donnerons d'abord quelques résultats essentiels de la théorie de détections classique et quantique dans le chapitre 5 afin de calculer la probabilité d'erreur respectivement pour une détection quantique (détection idéale), une détection discrète (comptage de photons) et une détection continue (mesure de la composante d'un champ électromagnétique). Ensuite, nous calculerons dans le cadre de la théorie de l'information, la capacité des canaux des signaux transmis par la source. Cette grandeur s'exprimant en fonction de la probabilité d'erreur de détection, dépend de la phase présente entre les deux champs cohérents qui constituent le champ superposé. Nous nous sommes intéressés particulièrement à ce paramètre (la phase) en vue de déduire les performances d'un système lorsque le récepteur est fixé. Les performances optimales qui seront déduites de la détection quantique (détection optimale) constitueront une référence pour tout système de détection.

Nous présentons à la fin de ce mémoire plusieurs annexes où nous exposons les différentes étapes des calculs que nous avons entrepris au cours de cette étude ainsi qu'une proposition d'une liaison semi quantique.

# Chapitre 1

## Éléments de mécanique quantique

La mécanique quantique utilise le formalisme mathématique de l'algèbre linéaire pour décrire un système physique à l'échelle microscopique. Ce formalisme requiert les définitions et propriétés des vecteurs d'états, d'opérateurs et de matrices dans un espace de Hilbert de dimension finie ou infinie.

Dans ce chapitre, nous rappelons ces principaux outils mathématiques suivant les notations de Dirac afin de résumer les résultats essentiels qui sont utilisés dans ce travail. Ces résultats seront parfois seulement énoncés ; les démonstrations étant disponibles dans de nombreux ouvrages spécialisés [26, 27, 28].

### 1.1 États et opérateurs

#### 1.1.1 États

Dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  pouvant admettre des bases orthonormées de dimension finie ou infinie, l'état quantique d'un système physique est décrit par un vecteur noté  $|\psi\rangle$ , considéré comme une superposition linéaire de vecteurs indépendants. On définit de même le vecteur conjugué à  $|\psi\rangle$ , soit  $\langle\psi|$  que l'on considère, comme un état appartenant à un espace dual  $\mathcal{H}^*$ .

L'expression de  $|\psi\rangle$  dans  $\mathcal{H}$  est donnée par

$$|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle, \quad c_i = \langle u_i|\psi\rangle \quad (1.1)$$

dans une base discrète :  $\{|u_i\rangle \in \mathcal{H}\}$  ;

$$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \quad (1.2)$$

$$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbf{1} \quad (1.3)$$

et dans une base continue :  $\{|v_p\rangle \in \mathcal{H}\}$ ,

$$|\psi\rangle = \int |v_p\rangle \langle v_p| \psi \rangle dv_p = \int c_p |v_p\rangle dv_p, \quad c_p = \langle v_p| \psi \rangle. \quad (1.4)$$

$$\langle v_p| v_j \rangle = \delta(p - j) \quad \text{et} \quad \int |v_p\rangle \langle v_p| dv_p = 1 \quad (1.5)$$

Il convient par ailleurs de normaliser cet état  $|\psi\rangle$  de telle façon qu'il ait une longueur unité  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . À cet effet, deux kets ne différant que par un facteur de phase  $e^{i\theta}$  commun à toutes les composantes, représentent le même état.

### 1.1.2 Opérateurs

#### a) Définition et propriétés

$A$  est un opérateur linéaire si

$$|\phi\rangle = A |\psi\rangle \quad (1.6)$$

et

$$A (\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1 A |\psi_1\rangle + \lambda_2 A |\psi_2\rangle \quad (1.7)$$

Son opérateur adjoint  $A^+$  est défini par  $\langle \psi | \hat{A}^+ | \phi \rangle = \left( \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle \right)^*$ .

Dans une représentation donnée de  $\mathcal{H}$ , un opérateur peut être défini par une matrice dont les éléments sont  $A_{mn} = \langle m | \hat{A} | n \rangle$  et pourvu d'une trace finie  $Tr(\hat{A}) = \sum_n A_{nn}$  où  $A_{mn}^2 \leq A_{nn} A_{mm}$ . Parmi les propriétés que doivent satisfaire les opérateurs pour représenter les grandeurs physiques (observables), on notera

- $|\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle| < \infty, \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle$  normés (opérateur borné);
- $\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = (\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle)^*$  (opérateur auto-adjoint  $A = A^+$ );
- $\hat{A}\hat{A}^+ = \hat{A}^+\hat{A} = 1$  (opérateur unitaire);
- $\hat{A} = \sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n|$  avec  $a_n$  réel et  $\geq 0$ , tel que  $\sum_n a_n < \infty$  (théorème de décomposition spectrale).

#### b) Mesure d'opérateurs

Après la mesure de l'opérateur, le système est décrit par un état propre correspondant à la valeur propre  $a_n$  mesurée. Si une deuxième mesure est effectuée après un temps suffisamment court pour que le système n'ait pas évolué, le résultat sera encore  $a_n$ . Cependant, dans le cas général le résultat de la mesure n'est pas unique, comme dans le cas de la mécanique classique, mais est probabiliste. Ainsi, si le système était auparavant dans l'état  $|\psi\rangle$ , la probabilité de mesurer la valeur  $a_n$  est donnée par :

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = |c_n|^2 \quad (1.8)$$

où  $c_n = \langle a_n | \psi \rangle$  est l'amplitude de probabilité de mesure. On vérifie facilement que (1.8) est bien une probabilité par :

$$\sum_n P(a_n) = \sum_n \langle a_n | \psi \rangle \langle \psi | a_n \rangle = \langle \psi | \left( \sum_n |a_n\rangle \langle a_n| \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

et que la valeur moyenne de l'observable est

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (1.9)$$

Les observables sont le plus souvent non commutatives  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ , ce qui implique que les deux grandeurs physiques  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ne sont pas mesurables simultanément. À cet effet, les fluctuations sur la mesure des deux observables apparaissent et vérifient l'inégalité généralisée :

$$(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{C} \rangle|^2 \quad (1.10)$$

avec  $\langle \hat{C} \rangle = \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle$  et  $(\Delta \hat{A})^2, (\Delta \hat{B})^2$  les écarts quadratiques moyens des deux observables. On les note également  $\sigma_A^2$  et  $\sigma_B^2$  dont les expressions sont respectivement égales à  $(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2)$  et  $(\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2)$ .

Lorsque l'état du système est dans un état propre de  $\hat{A}$ , les fluctuations liées à sa mesure s'annulent tandis que les fluctuations de l'observable  $\hat{B}$  deviennent infinies. Dans le cas d'observables commutatives, les fluctuations des deux observables s'annulent simultanément.

Par ailleurs, pour  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  vérifiant  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ , on démontre [29]

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) \exp\left(-\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]\right) \quad (1.11)$$

Ces brefs rappels sont d'abord appliqués pour des processus physiques pour lesquels l'Hamiltonien  $\hat{H}$  est indépendant du temps. La dynamique d'un état est décrite par l'équation de Schrödinger (représentation de *Schrödinger*) :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.12)$$

La solution s'obtient par l'intermédiaire de l'opérateur unitaire  $\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$ , sous la forme  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ . La norme du vecteur est conservée et les valeurs propres sont invariantes sous l'action de cet opérateur. Notons que dans la représentation de *Heisenberg*, les vecteurs sont considérés comme stationnaires et les opérateurs sont dépendants du temps.

L'équivalence entre la représentation de *Schrödinger* et celle de *Heisenberg* se traduit par

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_H\rangle, \quad (1.13)$$

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t, t_0) \quad (1.14)$$

de sorte que l'équation d'évolution d'un opérateur  $A$  s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \quad (1.15)$$

La troisième représentation dite "*interaction picture*" est adaptée dans le cas où l'Hamiltonien  $\hat{H}$  est la somme de deux termes  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ . En effet, pour  $\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}$  qui satisfait l'équation

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0}{dt} = \hat{H}_0^S \hat{U}_0, \quad \hat{U}_0^+(t, t_0) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \quad (1.16)$$

la relation entre cette représentation et celle de *Schrödinger*

$$\hat{A}_I(t) = \hat{U}_0^+(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}_0(t, t_0) \quad (1.17)$$

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t, t_0)|\psi_S(t)\rangle \quad (1.18)$$

montre que les vecteurs et les observables sont des variables du temps. L'équation d'évolution de la fonction d'onde dans la représentation "*interaction picture*" est

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_1^I |\psi_I(t)\rangle \quad (1.19)$$

$$\hat{H}_1^I = \hat{U}_0^+(t, t_0)\hat{H}_1^S\hat{U}_0(t, t_0) \quad (1.20)$$

Certains opérateurs jouent un rôle prépondérant dans la description d'un système physique. Il s'agit de projecteurs, d'opérateurs densité et des opérateurs fondamentaux de l'oscillateur harmonique dont les propriétés principales sont énumérées ici sans démonstration. Notons que l'oscillateur harmonique sert à décrire convenablement le comportement des systèmes au voisinage de leurs états d'équilibre stable.

## b) Opérateur de projection

Soit un ket  $|\psi\rangle$  normé à l'unité. L'opérateur  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  agissant sur un état quelconque  $|\phi\rangle$ , donne un état proportionnel à  $|\psi\rangle$  tel que le coefficient de proportionnalité est le produit scalaire  $\langle\psi|\phi\rangle$ . Les propriétés principales de cet opérateur sont

- $\hat{P}_m^2 = \hat{P}_m$ ;
- $\sum_m \hat{P}_m = 1$ ;  $\hat{P}_m \hat{P}_n = 0$  pour  $m \neq n$ ;
- $(\hat{P}_m + \hat{P}_n)^2 = \hat{P}_m + \hat{P}_n$  si et seulement si  $\hat{P}_m \hat{P}_n = \hat{P}_n \hat{P}_m = 0$ ;
- $(\hat{P}_m \cdot \hat{P}_n)^2 = \hat{P}_m \cdot \hat{P}_n$  si  $[\hat{P}_m, \hat{P}_n] = 0$ .

### c) Opérateur densité

On dit que l'information sur l'état d'un système physique est incomplète lorsque celui-ci est décrit par une superposition d'états  $\{|\psi_\lambda\rangle\}_{\lambda=1}^n$  chacun de probabilité  $p_\lambda$  ( $p_\lambda > 0$ ;  $\sum_\lambda p_\lambda = 1$ ). L'opérateur densité s'écrit :

$$\rho = \sum_\lambda p_\lambda |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| \quad (1.21)$$

Cet opérateur représente un outil mathématique très commode car il rend simple l'application simultanée des postulats de la mécanique quantique et des résultats du calcul des probabilités. En outre, cette classe d'opérateurs incluant à la fois les états purs et leur mélange statistique, et exprimant la connaissance (au sens probabiliste) de chacun par l'intermédiaire des probabilités  $p_\lambda$ , joue un rôle important dans le traitement de l'information quantique.

La probabilité  $P(a_n)$  d'observer la valeur propre  $a_n$  de l'observable  $\hat{A}$ , est alors donnée par la somme sur tous les états possibles des produits de la probabilité d'obtenir la valeur propre  $a_n$  lorsque l'état est  $|\psi_\lambda\rangle$  et de la probabilité  $p_\lambda$  d'obtenir l'état  $|\psi_\lambda\rangle$  :  $P(a_n) = \sum_\lambda p_\lambda |\langle\psi_\lambda|a_n\rangle|^2$ . Cette expression peut être réécrite sous la forme  $P(a_n) = \langle a_n|\rho|a_n\rangle$ . D'autre part, en prenant une base orthonormée complète, on déduit facilement que :

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr(\rho\hat{A}) \quad (1.22)$$

Nous énumérons ci-dessous quelques propriétés de l'opérateur densité :

- $\rho = \rho^+$  ;  $\rho$  est hermitique
- $Tr(\hat{\rho}) = 1$ ;  $Tr(\hat{\rho}^2) < 1$  (= 1 pour un état pur) ;
- $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0$ ,  $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ;
- $Tr(\hat{\rho}\hat{\rho}') = Tr(\hat{\rho}'\hat{\rho})$ ;
- $\partial Tr(f(\hat{\rho})) = Tr(\partial\hat{\rho}\partial f(\hat{\rho}))$ ;
- $Tr(\partial\hat{\rho}\hat{\rho}') = 0$ , si  $\forall \partial\hat{\rho} = \partial\hat{\rho}^+ \implies \hat{\rho} = 0$ ;
- $i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$  ; (équation d'évolution de l'opérateur  $\hat{\rho}$ ).

Après avoir défini l'outil mathématique qui permet de caractériser le plus commodément possible un état aussi bien macroscopique que microscopique, on peut définir de manière explicite l'intrication quantique ainsi que l'entropie d'un système en termes d'opérateurs densités.

#### c.1) Intrication

Soit un système  $S$  constitué de deux parties  $A$  et  $B$  dont les états appartiennent à des espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  et  $\mathcal{H}_B$  distincts (respectivement de bases  $|a_i\rangle$  et  $|b_j\rangle$ ). Si on prépare un état du système en effectuant un ensemble complet de mesures sur  $A$  et  $B$  séparément, on a alors un produit tensoriel direct tel que [13]

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i w_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i, \quad \sum_i w_i = 1 \quad (1.23)$$

où  $\hat{\rho}_A^i$  et  $\hat{\rho}_B^i$  sont les opérateurs densité relatifs aux sous systèmes  $A$  et  $B$  respectivement et  $w_i$  le poids statistique correspondant à l'observable  $O_i$ .

L'équation (1.23) définit ainsi un état séparable tel qu'une action seulement sur  $A$ , laisse l'état de  $B$  et les prévisions des résultats de mesure sur  $B$  inchangés. On peut, cependant, préparer aussi  $S$  par des mesures conjointes d'observables de l'ensemble  $(AB)$ . Dans ce cas, l'état du système global est un état non séparable ou "intriqué" tel que  $|\psi_{AB}\rangle \neq |\psi_A\rangle |\psi_B\rangle$ , ou en termes d'opérateurs

$$\hat{\rho}_{AB} \neq \sum_i w_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \quad (1.24)$$

L'opérateur densité  $\hat{\rho}_{AB}$  est un projecteur, mais en général pas  $\hat{\rho}_A$  et  $\hat{\rho}_B$  qui sont toujours des opérateurs densité hermitiques. Ce ne sont des projecteurs ( $Tr \hat{\rho}^2 = 1$ ) que si  $A$  et  $B$  ne sont pas intriqués (systèmes indépendants).

Les états intriqués donnent lieu à des corrélations quantiques qui ont un temps de vie limité, parfois trop court pour être observable expérimentalement. En effet, les systèmes qui sont fortement couplés entre eux, sont en général aussi fortement couplés à leur environnement. Ce couplage avec l'environnement entraîne un processus de décohérence [30] si bien que le système va abandonner un état superposé de plusieurs états pour un état mélange statistique où les états sont orthogonaux donc sans interférences. La décohérence est d'autant plus rapide que la taille du système est grande; ce qui explique la difficulté d'observer expérimentalement des corrélations quantiques lorsque le nombre de particules mises en jeu augmente; voir leur inexistance à l'échelle macroscopique [31]. Toutefois, les progrès technologiques récents ont permis de manipuler des systèmes décrits par des superpositions quantiques macroscopiques [32] dans des environnements parfaitement contrôlés. On note également que l'intrication pour un état microscopique bien isolé de l'extérieur dure autant que le système lui même, en l'absence de toute mesure nécessairement.

### c.2) Entropie

L'entropie probabiliste d'un système physique décrit par une observable  $A$ , comme elle a été introduite par Shannon [33],

$$H(A) = - \sum_a p(a) \log p(a) \quad (1.25)$$

est une grandeur qui mesure le degré de notre connaissance du système où  $p(a)$  est la probabilité de mesurer la valeur propre  $a$  de  $A$ .  $H(A)$  n'est ni une observable attachée au système physique ni un état qui le décrit. Elle nous permet, en effet, de déduire toute l'information possible d'un système donné à partir de la mesure de l'observable  $A$ . Elle se distingue de l'entropie thermodynamique bien que de nombreuses relations entre les deux définitions sont démontrées [34].



En mécanique quantique, l'entropie est définie par von Neumann en termes de matrice densité [35]

$$S(\rho) = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (1.26)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann que nous posons égale à 1 et  $\hat{\rho}$  l'opérateur densité du système ( $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ ). Cette entropie peut être également l'entropie de Shannon lorsque  $\rho$  décrit un mélange statistique d'états.

Quand l'état d'un système est parfaitement connu (état pur), une mesure n'apporte aucune information sur ce dernier car le résultat est connu d'avance, par conséquent l'entropie est nulle. Elle est positive lorsque l'état du système est décrit par un mélange statistique d'états dont l'opérateur densité s'écrit  $\rho = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$

L'entropie calculée à partir de l'opérateur densité total de deux systèmes  $A$  et  $B$  qui est  $S_{AB} = -\text{Tr}(\rho_{AB} \ln \rho_{AB})$  n'est pas, en général, égale à la somme des deux entropies des deux sous systèmes  $S_{A,B} \neq S_A + S_B$  [35]; propriété résultant de l'intrication (superposition) des états de  $A$  et  $B$  [36]

#### d) Opérateur densité partiel

On a recours aux opérateurs densité partiels lorsque on a des systèmes formés par plusieurs sous-systèmes.

Soit un système  $S$  composé de deux sous systèmes indépendants  $U$  et  $V$ . L'espace  $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$  est le produit tensoriel des deux sous espaces  $\mathcal{H}_U$  et  $\mathcal{H}_V$ . Soient  $\{|a_i\rangle \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  et  $\{|b_j\rangle \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$  les bases complètes orthonormées respectivement des deux sous systèmes  $U$  et  $V$ . Dans l'espace  $\mathcal{H}_S$ , l'état décrivant le système composé est  $|\psi\rangle = \sum_{i,j=1} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  et l'opérateur densité correspondant est :

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* |a_i\rangle \langle a_k| \otimes |b_j\rangle \langle b_l| \quad (1.27)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl} |a_i\rangle \langle a_k| \otimes |b_j\rangle \langle b_l| \quad (1.28)$$

Il est possible de décrire les propriétés de l'un des deux sous systèmes sans avoir aucune information sur l'autre grâce à l'opérateur densité partiel que l'on définit respectivement pour  $U$  et  $V$  :

$$\rho_u = \text{Tr}_v \rho = \sum_j \langle b_j | \rho | b_j \rangle = \sum_{i,j,k} \rho_{ij,kj} |a_i\rangle \langle a_k| \quad (1.29)$$

$$\rho_v = \text{Tr}_u \rho = \sum_i \langle a_i | \rho | a_i \rangle = \sum_{i,j,l} \rho_{ij,il} |b_j\rangle \langle b_l| \quad (1.30)$$

Ainsi, lorsqu'un système n'est pas isolé de son environnement  $\Sigma$  on peut le caractériser par son opérateur densité partiel où les degrés de liberté de  $\Sigma$  ne

sont pas pris en compte. L'observable  $\hat{A}_u$  du sous système  $U$  est alors décrite par les éléments de matrice

$$\langle a_i | \hat{A}_u | a_k \rangle = \langle a_i, b_j | \hat{A}_u \otimes 1_v | a_k, b_l \rangle \quad (1.31)$$

dans  $U$  et la valeur moyenne de l'observable  $\hat{A}_u$  dans l'espace total est

$$\langle \hat{A}_u \rangle = Tr(\rho_u \hat{A}_u) \quad (1.32)$$

De la même manière, une autre observable  $\hat{B}_v$  de  $V$  peut être aussi définie comme dans le cas de  $U$ ; ces deux observables partagent un ensemble de vecteurs propres si et seulement si elles commutent.

### e) Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique intervient de manière importante dans la description du champ électromagnétique. En effet, ce dernier peut être développé dans une cavité sur plusieurs modes et l'on démontre à partir des équations de Maxwell que chaque mode est équivalent à un oscillateur harmonique indépendant.

Nous rappelons ci dessous quelques résultats relatifs à cet opérateur en partant de la relation canonique de commutation (CCR)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.33)$$

vérifiée par les deux opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ , position et impulsion respectivement. La CCR suppose que la dimension de l'espace est infinie et que les opérateurs sont bornés. L'expression (1.33) est aussi vérifiée pour les opérateurs bornés à spectre discret dans un espace de dimension finie. En effet, pour deux opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  tels que  $\hat{a}\hat{b} = \epsilon\hat{b}\hat{a}$ , et  $\hat{a}^d = \hat{b}^d = 1$  où  $\epsilon = \exp(\frac{2\pi}{d})$  et  $d$  la dimension de la base, deux autres opérateurs hermitiques en dérivent directement [27]

$$\hat{q} = -i\sqrt{\frac{d}{2\pi}} \log \hat{a}, \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{d}{2\pi}} \log \hat{b} \quad (1.34)$$

Les éléments de matrice du commutateur dans la base

$$\left( B : \{ |\epsilon^k\rangle \}, \langle \epsilon^k | \epsilon^l \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \exp(\frac{2\pi}{d}kl), k, l = 0, 1, \dots, d-1 \right)$$

s'écrivent

$$[\hat{q}, \hat{p}]_{k,l} = \begin{cases} \frac{d(d-1)}{2}, & \epsilon^{k-l} = 1 \\ \frac{2}{\epsilon^{k-l}-1}, & \epsilon^{k-l} \neq 1 \end{cases} \quad (1.35)$$

La trace de ce commutateur est nulle ( $Tr([\hat{q}, \hat{p}]) = 0$ ). On retrouve les expressions habituelles des deux observables lorsque la somme discrète est remplacée par une intégrale [37].

D'autre part, l'Hamiltonien d'une particule libre de masse  $m = 1$  dans un espace  $d \rightarrow \infty$  (cas classique) est

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2)$$

Pour quantifier le champ électromagnétique, on introduit l'opérateur non hermitique

$$\hat{a} = \frac{\omega \hat{x} + i \hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad (1.36)$$

et son conjugué  $\hat{a}^+$  qui sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de photons. À partir de la CCR, on montre que  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ . D'autre part, les opérateurs et l'Hamiltonien deviennent après substitution

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+), \quad \hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.37)$$

où le terme  $\frac{\hbar\omega}{2}$  est l'énergie due aux fluctuations du vide.

À présent, soit  $|n\rangle$  un état propre de  $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$  et également de  $\hat{H}$  puisque

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (1.38)$$

$n$  est le nombre de quanta ayant la même énergie d'excitation  $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$  pour un mode donné. Par un choix convenable des constantes [27], on démontre les relations suivantes :

$$\hat{a}^k |n\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} |n-k\rangle \quad (1.39)$$

$$\hat{a}^{+k} |n\rangle = \sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}} |n+k\rangle \quad (1.40)$$

La base  $\{|n\rangle\}$  est orthonormée ( $\langle m | n \rangle = 1$  si et seulement si  $m = n$ ) et satisfait à la relation de fermeture  $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ . Retenons aussi que  $[\hat{a}, \hat{a}^+ \hat{a}] = \hat{a}$ ,  $[\hat{a}^+, \hat{a}^+ \hat{a}] = -\hat{a}^+$  et que  $[\hat{a}^2, \hat{a}^{+2}] = 4\hat{a}^+ \hat{a} + 2$ .

Par ailleurs, il convient de souligner quelques remarques concernant les opérateurs définis auparavant

- Les valeurs propres de  $\hat{N}$  sont réelles et non négatives.
- $\hat{a} |0\rangle = 0$ .
- l'état  $|\phi\rangle = \hat{a}^+ |0\rangle$  ne peut être normalisé.
- les opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$  n'ont pas d'inverses.

### f) Opérateur unitaire de déplacement

On définit l'opérateur unitaire de déplacement comme

$$\widehat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \widehat{a}^+ - \alpha^* \widehat{a}) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha \widehat{a}^+) \exp(-\alpha^* \widehat{a}) \quad (1.41)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Les propriétés essentielles de  $\widehat{D}(\alpha)$  sont rappelées sans démonstration ci-dessous

- $\widehat{D}(\alpha) |\gamma\rangle = \exp(i\Im \alpha \gamma^*) |\alpha + \gamma\rangle$
- $\widehat{D}(\alpha) \widehat{D}(\beta) = \widehat{D}(\alpha + \beta) \exp(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta);$
- $Tr [\widehat{D}(\alpha) \widehat{D}(\beta)] = \pi \delta(\alpha - \beta);$
- $\widehat{D}(\alpha) \widehat{a} \widehat{D}^+(\beta) = \widehat{a} - \alpha;$
- $\widehat{D}(\alpha) \widehat{a}^+ \widehat{D}^+(\beta) = \widehat{a}^+ - \alpha^*.$

## 1.2 Représentations

La représentation dépend généralement du problème à étudier. On la choisit afin que les calculs à effectuer soient simplifiés au maximum. Les représentations étant nombreuses ; nous ne citerons que celles qui sont les plus fréquemment utilisées dans ce mémoire.

### 1.2.1 États cohérents

Les états cohérents sont obtenus comme la superposition linéaire et infinie des états de Fock [38]. On définit pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) |n\rangle \quad (1.42)$$

Ils représentent les états propres de l'opérateur d'annihilation  $\widehat{a}$  tel que

$$\widehat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \langle \alpha | \widehat{a}^+ = \langle \alpha | \alpha^* \quad (1.43)$$

La condition de normalisation de l'état cohérent s'obtient à partir de :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d(\Re \alpha) d(\Im \alpha) &= \sum_m \frac{1}{m!} \left[ \int 2|\alpha| d(|\alpha|) |\alpha|^{2m} \exp(-|\alpha|^2) \right] |m\rangle \langle m| \\ &= \sum_m |m\rangle \langle m| = 1 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux ; leur produit scalaire est donné par

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(\alpha^* \beta - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right) \quad (1.45)$$

On dit que la base  $\{|\alpha\rangle\}$  est surcomplète ; c'est à dire normée mais non orthogonale. Les valeurs moyennes des observables position et impulsion calculées dans l'état  $|\alpha\rangle$  sont respectivement

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \Re(\alpha) \quad (1.46)$$

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \sqrt{2\hbar\omega} \Im(\alpha) \quad (1.47)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_p^2 = \frac{\hbar}{2} \quad (1.48)$$

### 1.2.2 Nombre

Pour l'interprétation des expériences de comptage de photons (détection discrète), la représentation *nombre* s'avère très utile. L'amplitude de la probabilité de mesurer  $n$  photons dans l'état  $|\alpha\rangle$  pris comme exemple est

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \quad (1.49)$$

À partir de la base orthonormée formée par les états propres  $\{|n\rangle\}$  de l'opérateur  $\hat{N}$ , on montre que  $\langle n|\hat{x}|n\rangle = \langle n|\hat{p}|n\rangle = 0$ . On montre également que

$$\begin{aligned} \langle m|\hat{D}(\alpha)|n\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{\ell} \langle m|\exp(\alpha\hat{a}^+)|\ell\rangle \langle\ell|\exp(-\alpha^*\hat{a})|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\alpha^*)^{(n-m)} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2), \quad (m \leq n) \end{aligned} \quad (1.50)$$

où  $L_m^{n-m}(|\alpha|^2)$  sont les polynômes de Laguerre [39]

$$L_m^{n-m}(|\alpha|^2) = \frac{1}{m!} e^{|\alpha|^2} |\alpha|^{-2(n-m)} \frac{d^m}{d|\alpha|^{2m}} \left( e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} \right) \quad (1.51)$$

De même, une classe d'états déduits des états cohérents constitue une base utile. Ce sont des états comprimés définis par l'opérateur [40]

$$\hat{S}(\zeta) = \frac{\zeta^* a^2 - \zeta a^{+2}}{2}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad (1.52)$$

tel que

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \hat{S}(\zeta) |k\rangle \quad (1.53)$$

La représentation *nombre* des états comprimés dont une étude détaillée est donnée dans le prochain chapitre s'obtient simplement [41]

$$\langle n | \alpha, \zeta \rangle = \sum_m \langle n | \hat{S}(\zeta) | m \rangle \langle m | \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \quad (1.54)$$

$$= \sqrt{\frac{\left[ \frac{\exp(i\phi) \tanh(r)}{2} \right]^n}{n! \cosh(r)}} \exp \left( -\frac{|\alpha|^2 + \alpha^* \exp(i\phi) \tanh(r)}{2} \right) H_n \left( \frac{\alpha + \alpha^* \exp(i\phi) \tanh(r)}{\sqrt{2 \exp(i\phi) \tanh(r)}} \right) \quad (1.55)$$

où  $H_n$  sont les polynômes de Hermite dont on rappelle une propriété [42] qui sera utilisée dans le chapitre 2 (calcul des moments d'ordre  $n$  de la densité de probabilité d'un état comprimé)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{2xyt - (x^2 + y^2)t^2}{1 - t^2} \right) \quad (1.56)$$

### 1.2.3 Position

Lorsque la détection d'un champ électromagnétique est homodyne (détection d'une variable aléatoire continue), la représentation position sera préférée (cf Annexe E). En effet, l'opérateur de mesure sera alors  $\hat{x}$  dont on peut interpréter les valeurs propres comme correspondant à la composante réelle du champ électrique de la radiation.

À partir de  $\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| dx = 1$ ,  $\hbar = 1$ , on démontre les égalités suivantes

$$\langle x | \alpha \rangle = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( -\frac{\omega x^2}{2} + \alpha \sqrt{2\omega} x - \alpha \Re e(\alpha) \right) \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \langle n | x \rangle &= \frac{1}{\pi} \int \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | x \rangle d(\Re e(\alpha)) d(\Im m(\alpha)) \\ &= (\omega)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp \left( -\frac{\omega x^2}{2} \right) H_n(x \sqrt{\omega}) \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ipx) \quad (1.59)$$

avec  $H_n(x\sqrt{\omega})$  les polynômes d'Hermite [39].

Pour  $\zeta \in \mathbb{R}$ , l'amplitude de la probabilité de mesurer  $x$  dans l'état comprimé  $|\alpha, r\rangle$  est

$$\langle x | \alpha, r \rangle = \left( \frac{2 \exp(2r)}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( -x^2 + 2\alpha \exp(r)x - \frac{|\alpha|^2 + \alpha^2}{2} \right) \quad (1.60)$$

Pour  $\zeta \in \mathbb{C}$ , ces expressions s'écrivent de manière assez compliquée et le caractère Gaussien est cependant conservé [43].

# Chapitre 2

## Lois de probabilité de quelques états particuliers

Les rayonnements auxquels nous nous intéressons sont représentés par des champs cohérents généralisés. Nous considérons, dans ce chapitre, quatre types de radiations : le champ superposé, le champ comprimé, le champ cohérent et finalement le champ thermique. Les densités de probabilité qui leur sont associées ainsi que les deux premiers moments analysés nous permettront de mettre en évidence les propriétés statistiques de chaque état, révélant ainsi l'aspect quantique ou classique du champ.

En effet, l'analyse préliminaire des états ou des opérateurs densités qui décrivent les différents rayonnements est importante car elle nous offre la possibilité de connaître tous les paramètres qui caractérisent chaque champ avant son interaction avec l'atome (objet du chapitre suivant).

### 2.1 Rappels

On définit tout d'abord la fonction génératrice à partir de laquelle seront déduits les différents moments.

Les observables que nous considérons sont le nombre de photons  $n$  et l'intensité intégrée  $W$ . On leur associe respectivement les opérateurs de mesure  $\hat{N}$  et  $\hat{W}$ . Il est à noter que, dans le cas général, l'intensité intégrée dépend à la fois du temps initial  $t_0$  et du temps final  $t_1$  mais non plus de la différence  $|t_1 - t_0|$  et que l'intensité instantanée  $I$  représente le carré du module du champ électromagnétique  $E$

$$I(\theta) = E(\theta) E^*(\theta) \quad (2.1)$$

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} I(\theta) d\theta \quad (2.2)$$

La fonction génératrice est déduite de la densité de probabilité de  $W$  (ou  $n$ )

$$G(\xi, t_0, t_1) \triangleq \langle \exp(-\xi W(t_0, t_1)) \rangle \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \xi\beta)^n P(n, t_0, t_1) \quad (2.3)$$

$G(\xi, t_0, t_1)$  vérifie la condition nécessaire  $0 \leq G(\xi, t_0, t_1) \leq 1$  quel que soit  $t_0, t_1$  dans le domaine  $0 \leq \xi \leq 1$ . Par ailleurs, la densité de probabilité est décrite en termes d'opérateurs  $P(n, t_0, t_1) = \text{Tr} \left( |\psi\rangle \langle\psi| \hat{N}^n \right)$  avec  $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$  l'opérateur densité décrivant l'état du champ et  $\langle e^{-\xi W(t_0, t_1)} \rangle = \text{Tr} \left( \rho e^{-\xi \hat{W}} \right)$ .

Le paramètre  $\beta = (e^{-t_0} - e^{-t_1})$  se simplifie pour des champs stationnaires que nous considérons ici. En effet, pour  $t_1 = t_0 + T$  et  $t_0 = 0$ ,  $\beta = 1 - e^{-T} \simeq T$  pour  $T \ll \tau_c$  ( $\tau_c$  : temps de cohérence du champ), soit  $\beta = 1$  pour un intervalle de temps unité.

Les moments factoriels d'ordre  $k$  de  $n$  et les moments d'ordre  $k$  de l'intensité intégrée  $W$  se déduisent de l'équation (2.3) :

$$\langle n^{[k]} \rangle = \langle W^k \rangle = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} G(\xi) |_{\xi=0} \quad (2.4)$$

avec  $\langle n^{[k]} \rangle = \langle n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \rangle$ .

Par ailleurs, sachant que la densité de probabilité de mesurer  $n$  particules  $P(n)$  est donnée en fonction de la densité de probabilité de l'intensité intégrée  $P(W)$  par [44]

$$P(n) = \int_0^\infty e^{-W} \frac{W^n}{n!} P(W) dW \quad (2.5)$$

d'une part et d'autre part  $G_n(u) = \sum_n e^{-un} P(n)$ , on peut établir alors la relation :

$$G_W(\xi) = G_n(1 - e^{-\xi}); \quad u = 1 - e^{-\xi} \quad (2.6)$$

## 2.2 État Cohérent

### 2.2.1 Dans la base $\{|n\rangle\}$

Un état cohérent est un état propre de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  qui peut être développé dans la base orthonormée  $\{|n\rangle\}$  (kets propres de l'oscillateur harmonique) :

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (2.7)$$

D'autre part, l'amplitude de probabilité de mesurer  $n$  dans l'état  $|\alpha\rangle$  est obtenue par action de  $\hat{a}$  sur les états  $|n\rangle$  :

$$\langle n|\hat{a}|\alpha\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle \triangleq \alpha \langle n|\alpha\rangle \quad (2.8)$$



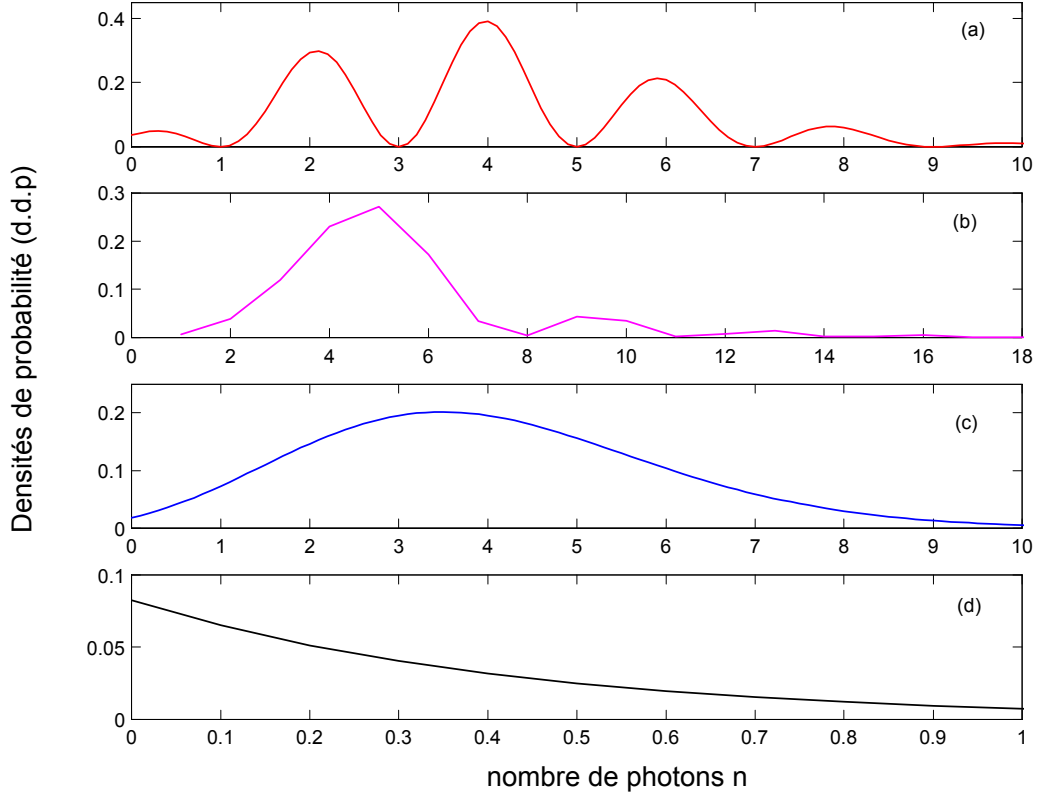


FIG. 2.1 – figure illustrant les densités de probabilité pour les champs : a) superposé avec  $\langle n \rangle_C = 4$  et  $\varphi = 0$ ; b) comprimé avec  $\langle n \rangle_C = 4$  et  $r = 1$ ; c) cohérent avec  $\langle n \rangle_C = 4$  et d) thermique avec  $\langle n \rangle_T = 0.1$

D'où par récurrence :

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle$$

Comme l'état cohérent est normé

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1$$

et

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|^2}$$

nous déduisons l'expression déjà définie en (1.42) :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.9)$$

et finalement la densité de probabilité (d.d.p) de trouver  $n$  photons dans l'état  $|\alpha\rangle$  est une loi de Poisson (voir figure 2.1 (c)) :

$$P_C(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (2.10)$$

Ayant déterminé  $P_C(n)$ , nous déduisons respectivement les fonctions génératrices des moments pour  $W$  et  $n$

$$G_W(\xi) = e^{-|\alpha|^2 \xi}; \quad G_n(\xi) = e^{-|\alpha|^2 (1 - e^{-\xi})} \quad (2.11)$$

À partir de  $\langle n^2 \rangle_C = \langle n \rangle_C (\langle n \rangle_C + 1)$ , nous déduisons la variance et le moment factoriel réduit d'ordre 2 :

$$(\sigma_n^2)_C = \langle n \rangle_C = |\alpha|^2; \quad h_C = \frac{\langle n^2 \rangle_C - \langle n \rangle_C^2}{\langle n \rangle_C^2} = 1 \quad (2.12)$$

De même, la variance  $(\sigma_W^2)_C$  calculée à partir des deux premiers moments de l'intensité intégrée  $\langle W \rangle = \langle n \rangle_C$ ;  $\langle W^2 \rangle = \langle n \rangle_C^2$  est nulle.

### 2.2.2 Dans la base $\{|x\rangle\}$

Soit l'opérateur position  $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$  tels que

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle \text{ et } \int |x\rangle \langle x| dx = 1 \quad (2.13)$$

L'équation qui régit l'amplitude de la probabilité de mesurer  $x$  dans l'état  $|\alpha\rangle$ , sachant que  $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$  est

$$\langle x | \hat{a} | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x \langle x | \alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \alpha \rangle \right) \quad (2.14)$$

$$\sqrt{2}\alpha \langle x | \alpha \rangle = x \langle x | \alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \alpha \rangle \quad (2.15)$$

Cette équation différentielle a pour solution  $\langle x | \alpha \rangle = C e^{-\frac{x^2}{2} + \alpha\sqrt{2}x}$ . La d.d.p. correspondante étant normée, soit

$$P(x) = |\langle x | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2.16)$$

qui est une loi de Gauss de moyenne  $\langle x \rangle = \sqrt{2}\alpha_x$  et de variance  $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$ . De même, on trouve des expressions similaires pour  $P(p) = |\langle p | \alpha \rangle|^2$ , en particulier  $\sigma_p^2 = \frac{1}{2}$ . Une représentation de l'état cohérent par un vecteur  $\vec{\alpha}$

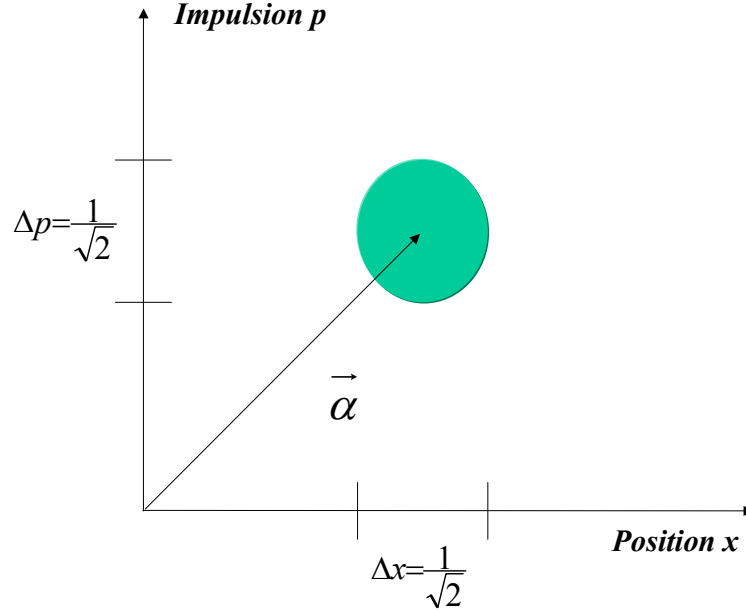


FIG. 2.2 – Représentation géométrique de l'état cohérent dans l'espace des phases. Cet état appartient à la classe d'incertitude minimale ( $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$ ).

dans l'espace des phases dans la figure 2.2 montre que cet état, pour lequel  $(\Delta x)^2 = (\Delta p)^2 = \frac{1}{2}$ , appartient à la classe des états d'incertitude minimale (relation d'incertitude d'Heisenberg).

Notons que toutes ces propriétés et relations décrivant l'état  $|\alpha\rangle$  et écrites dans le formalisme de la mécanique quantique, ne sont pas caractéristiques d'un état purement quantique et sont en fait également interprétables en physique classique.

Il n'en est pas de même de la radiation générée par la superposition d'états cohérents. Ce type d'état présente plusieurs aspects difficilement interprétables dans le cadre de la physique classique comme nous le verrons ci dessous. Nous verrons également dans le chapitre 5 que le choix de ce nouvel état permet d'améliorer les performances d'un système de détection.

## 2.3 État Superposé

### 2.3.1 Dans la base $\{|n\rangle\}$

Pour définir l'état superposé, appelé aussi "état de Schrödinger" [22], nous le considérons comme la superposition quantique de deux états cohérents

$$|\psi\rangle = c (|\alpha\rangle + \lambda e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (2.17)$$

et nous limitons son analyse aux cas où les paramètres  $c, \varphi, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ . Nous tenons compte, cependant, d'une réalisation non idéale de cette superposition par le paramètre de phase qui se révélera par la suite très utile pour la transmission de l'information quantique (cf. Chapitre 5).

La normalisation de (2.17) pour le cas où  $\lambda = 1$  conduit à

$$c^2 = \frac{1}{2 + 2e^{-2\alpha^2} \cos(\varphi)} \quad (2.18)$$

dont un calcul détaillé est présenté dans l'Annexe E. La valeur particulière de  $\lambda$  ne restreint en rien la généralité des résultats auxquels on aboutit. L'opérateur densité  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  de cet état pur révèle des propriétés purement quantiques dont quelques unes peuvent être déduites par l'étude de la probabilité du nombre de photons. Pour cela, nous calculons la d.d.p. dans la représentation  $|n\rangle$  (voir Annexe E)

$$P_S(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \frac{(1 + (-1)^n \cos(\varphi))}{(1 + e^{-2\alpha^2} \cos(\varphi))} P_C(n) \quad (2.19)$$

où  $P_C(n)$  est la d.d.p de Poisson. Notons que d'après (2.19),  $P_S(n)$  s'annule pour des valeurs impaires (paires) de  $n$ , lorsque  $\varphi = 0$  ( $\pi$ ). Le tracé de  $P_S(n)$  (voir figure 2.1 (a)), montre des oscillations dues aux effets d'interférence des deux champs cohérents représentés respectivement par les états  $|\alpha\rangle$  et  $|-\alpha\rangle$ . La fonction génératrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} G_W^s(\xi) &= \frac{e^{-\alpha^2}}{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \xi)^n (1 + (-1)^n \cos \varphi) \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\xi \alpha^2} + \nu e^{\xi \alpha^2}}{1 + \nu} \end{aligned} \quad (2.20)$$

expression dans laquelle  $\alpha^2 = S = \langle n \rangle_C$  est l'intensité du champ pour un intervalle de temps unité et  $\nu = e^{-2\alpha^2} \cos \varphi$ . Les deux premiers moments de  $n$  en découlent de sorte que

$$\langle n \rangle_S = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \alpha^2, \quad \langle n^2 \rangle_S = \alpha^4 + \langle n \rangle \quad (2.21)$$

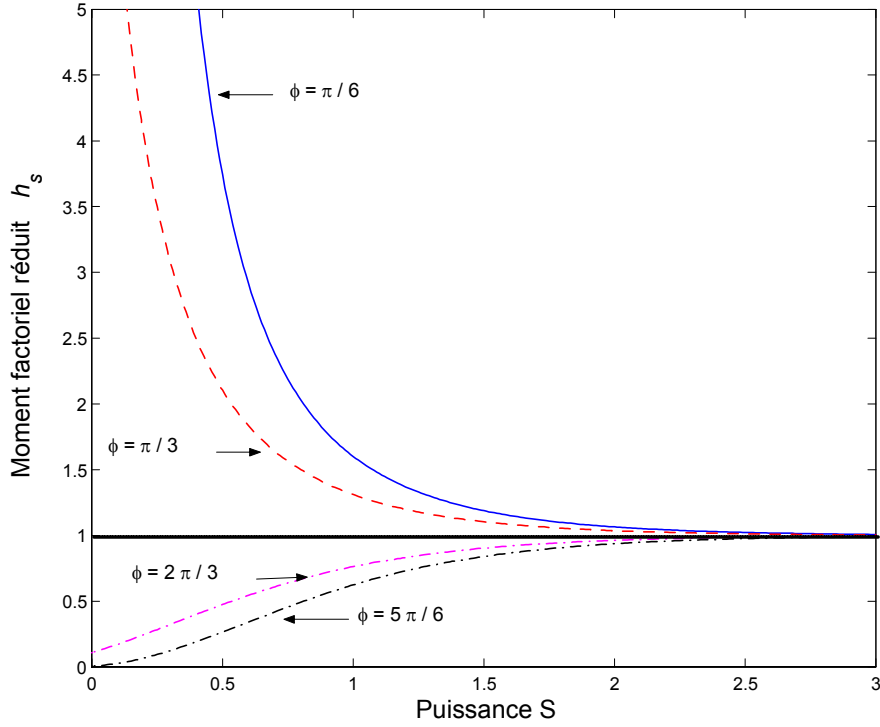


FIG. 2.3 – Moment factoriel réduit d'ordre 2 du champ superposé caractérisant les effets sub et super Poissonien pour différentes valeurs de la phase  $\phi$ .

soit

$$(\sigma_n^2)_S = \alpha^4 \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} + \alpha^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \quad (2.22)$$

Nous déduisons le moment factoriel réduit d'ordre 2 dont un calcul détaillé est présenté en Annexe E :

$$h_S = \frac{(\langle n^2 \rangle_S - \langle n \rangle_S)}{\langle n \rangle_S^2} = \left( \frac{e^{2S} + \cos \varphi}{e^{2S} - \cos \varphi} \right)^2 \quad (2.23)$$

Cette grandeur dépend de la puissance du signal  $S$  et de la phase  $\varphi$ . Pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , nous retrouvons le cas d'une distribution de Poisson. Le calcul exact de cette expression pour  $S$  variant entre 0 et 3 (voir figure 2.3) montre un caractère super-Poissonien ( $h_S \geq 1$ ) lorsque  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  et sous-Poissonien ( $h_S \leq 1$ ) lorsque  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ .

Par ailleurs, nous notons que la variance pour ce champ est positive ou nulle, quelles que soient les valeurs de  $\alpha$  et  $\nu$

Un calcul analogue à celui effectué pour le cas du champ cohérent, permet d'aboutir aux deux premiers moments de l'intensité intégrée

$$\langle W \rangle_S = \langle n \rangle_S, \quad \langle W^2 \rangle_S = \alpha^4 \quad (2.24)$$

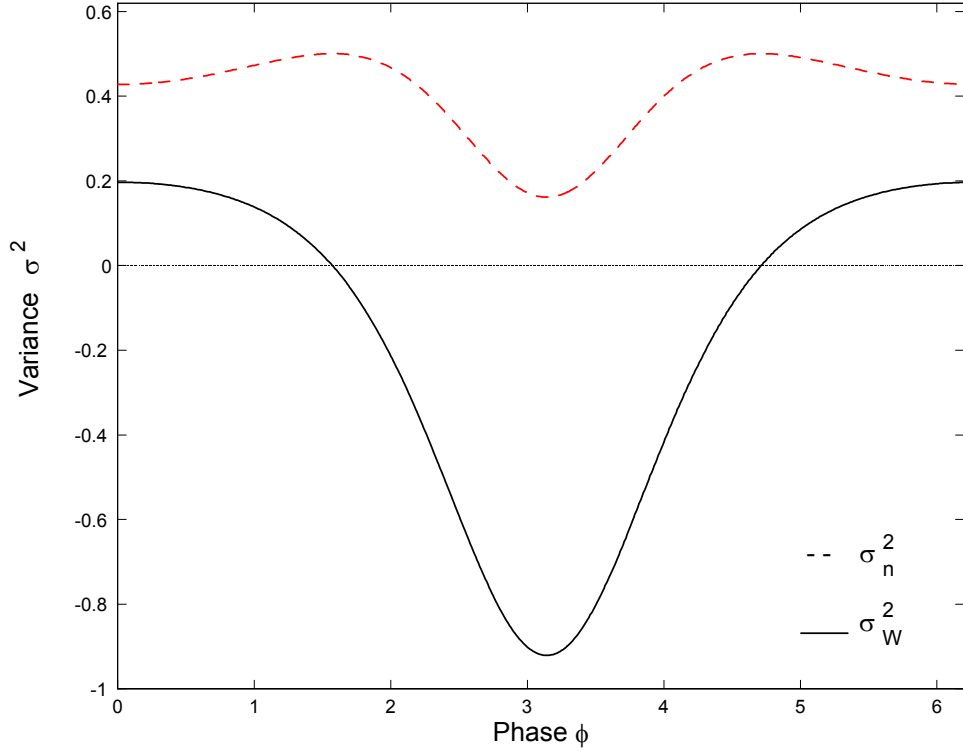


FIG. 2.4 – Variance d'un champ superposé lors de la mesure des deux observables  $\hat{N}$  et  $\hat{W}$ . Cette grandeur illustre le caractère quantique de l'état superposé.

soit pour la variance

$$(\sigma_W^2)_S = \alpha^4 \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} \quad (2.25)$$

L'expression (2.25) qui est du signe de  $\cos \varphi$ , montre que l'intensité lumineuse n'existe que pour  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . D'autre part, on montre que la valeur de la phase imposant  $V_W \geq 0$  dépend, en général, de  $\alpha^2$  (voir Annexe E). En effet, la condition retenue ( $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ) est vérifiée seulement pour  $\alpha^2 < 5$ ; au delà de cette valeur de puissance la variance pour l'intensité intégrée est définie pour toutes les valeurs de la phase  $\varphi$ .

Ainsi pour un champ non classique, la grandeur classique appelée intensité lumineuse n'est pas toujours définie puisqu'il existe une région des valeurs de  $\varphi$  et de puissance  $S$  conduisant à des résultats évidemment erronés (voir figure 2.4). Ceci ne concerne que l'intensité car l'observable nombre de photons est d'interprétation physique toujours satisfaisante [45]. Ce dernier point peut être confirmé sur un deuxième exemple, le champ comprimé dont nous présentons ci-dessous brièvement les calculs de  $P_{Sq}(n)$ ,  $G_W^{Sq}(\xi)$ ,  $(\sigma_W^2)_{Sq}$  et  $(\sigma_n^2)_{Sq}$ .

### 2.3.2 Dans la base $\{|x\rangle\}$

Le calcul de la densité de probabilité dans la base  $\{|x\rangle\}$  de cet état est détaillé dans l'Annexe E. La d.d.p. sera utilisée dans le chapitre 5 pour calculer les performances d'un système de détection lorsque le récepteur choisi mesure la composante réelle du champ électromagnétique.

## 2.4 État Comprimé

Une autre classe de sources cohérentes [41] révèle des propriétés quantiques aussi intéressantes que les états superposés. Cette radiation est décrite par des états cohérents pour lesquels les fluctuations de l'observable position  $\hat{x}$  sont nettement réduites tandis que celles de l'observable impulsion  $\hat{p}$  augmentent (limite quantique imposée par l'inégalité de Heisenberg). Notons que généralement seules les valeurs propres de  $\hat{x}$  sont expérimentalement exploitées, les vecteurs propres ne jouant pas de rôle dans ce travail.

L'état comprimé est donc un état cohérent transformé par l'opérateur  $\hat{S}(\zeta)$  [40]

$$|\sigma\rangle = \hat{S}(\zeta) |\alpha\rangle \quad (2.26)$$

où  $\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta^* \hat{a}^2 + \zeta \hat{a}^{+2})}$ , et  $\zeta = r e^{i\varphi}$  est le coefficient de compression. À cause de la forme de  $\hat{S}(\zeta)$ , les calculs de  $\langle n | \sigma \rangle$  et de  $\langle x | \sigma \rangle$  deviennent plus complexes, leurs expressions sont données sans démonstration en (1.55) et (1.60). On se limite ici au cas où  $\zeta = r$  est réel et positif.

### 2.4.1 Dans la base $\{|n\rangle\}$

On définit un nouvel opérateur annihilation obtenu par la transformation :

$$\hat{b} = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+ \quad (2.27)$$

qui est canonique,  $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$ , dans la mesure où les paramètres  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  satisfont la condition

$$\mu^2 - \nu^2 = 1$$

L'équation aux valeurs propres est

$$\hat{b} |\beta; \mu, \nu\rangle = \beta |\beta; \mu, \nu\rangle \quad (2.28)$$

tel que pour  $\nu = 0$ ,  $|\beta\rangle \equiv |\alpha\rangle$ . La projection de l'état nombre sur  $|\beta\rangle$  permet de déterminer la densité de probabilité :

$$P_{Sq}(n) = |\langle n | \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-\alpha^2(1+\tanh(r))}}{\cosh(r)} \frac{\left(\frac{\tanh(r)}{2}\right)^n}{n!} H_n^2(z) \quad (2.29)$$

dont un calcul détaillé est présenté en Annexe A . Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nous posons

$$z^2 = \frac{\alpha^2 e^{2r}}{\sinh(2r)} \quad (2.30)$$

$$\mu = \cosh(r) \quad (2.31)$$

$$\nu = \sinh(r) \quad (2.32)$$

$\langle n \rangle_C = |\alpha|^2$ , et  $H_n(z)$  désignent les polynômes d'Hermite. Comme le montre la figure 2.1 (b), cette d.d.p. admet des valeurs de  $n_q$  tel que  $P_{S_q}(n_q) = 0$ . Ces valeurs correspondent aux points où  $H_n^2(z) = 0$ . Notons cependant qu'un choix différent de  $r$  montrerait l'existence de plusieurs  $n_q$  qui représentent en fait les abscisses où les oscillations engendrées par les opérateurs  $a$  et  $a^+$  s'annulent.

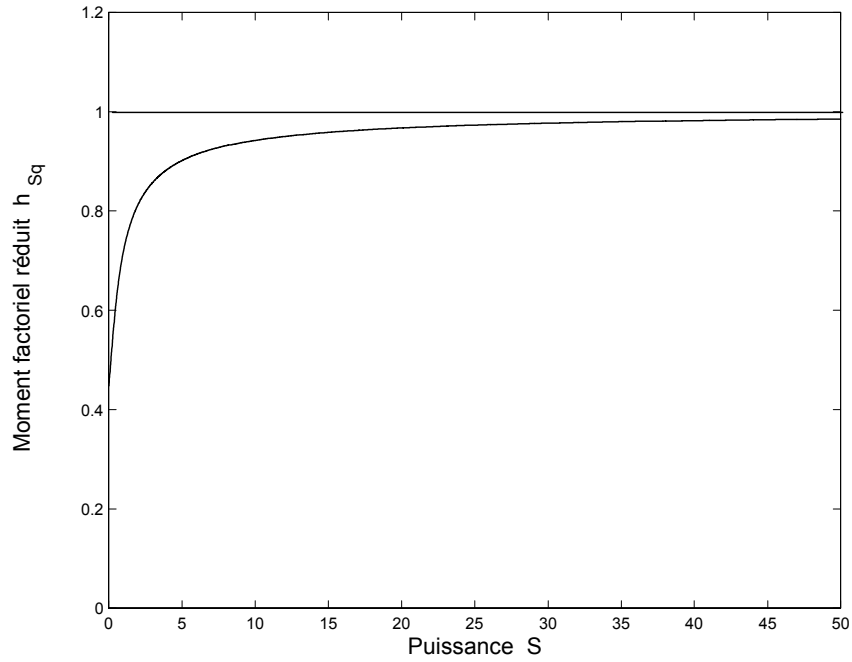


FIG. 2.5 – Moment factoriel réduit d'ordre 2 caractérisant l'effet sub Poissonien du champ comprimé. Le facteur de compression étant égal à  $r^* \approx (1/6) \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ;  $\langle n \rangle_C = S$ .

Afin de calculer les deux premiers moments, nous disposons de deux méthodes. La première directe, consiste à calculer, à partir de la définition de l'opérateur  $\widehat{b}$ , les valeurs moyennes

$$\langle \beta | \widehat{b}^+ \widehat{b} | \beta \rangle, \quad \langle \beta | \widehat{b}^+ \widehat{b} \widehat{b}^+ \widehat{b} | \beta \rangle, \quad \langle \beta | \widehat{b} \widehat{b}^+ \widehat{b}^2 | \beta \rangle, \dots \quad (2.33)$$



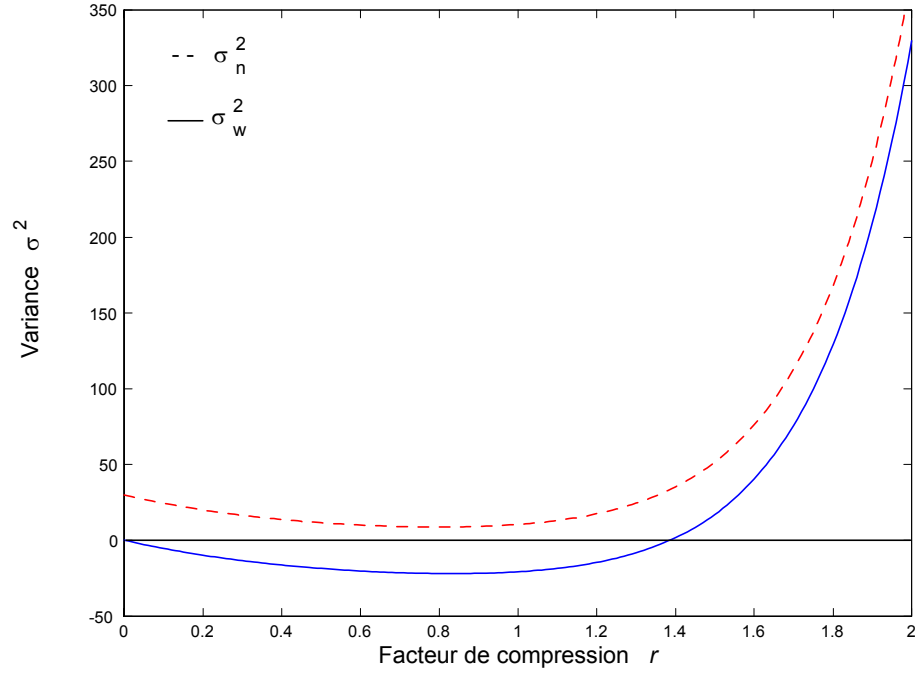


FIG. 2.6 – Variance du champ comprimé lors de la mesure des deux observables  $\hat{N}$  et  $\hat{W}$ . Pour  $r \lesssim 1.4$  ( $\sigma_W^2 < 0$ ), l'interprétation de l'intensité intégrée  $W$  en termes d'intensité classique est mise en défaut.

La deuxième méthode revient à calculer la fonction génératrice des moments de l'intensité intégrée comme dans le cas des champs cohérent et superposé :

$$G_W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \xi)^n P_{Sq}(n) \quad (2.34)$$

À partir de l'équation (1.56), nous obtenons

$$G_W(\xi) = \frac{e^{-\alpha^2(1+\tanh(r))}}{\cosh(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \xi)^2 \tanh^2(r)}} \exp\left(\frac{2z^2(1 - \xi) \tanh(r)}{1 + (1 - \xi) \tanh(r)}\right) \quad (2.35)$$

expression à partir de laquelle nous déduisons les deux premiers moments de  $n$  ainsi que la variance :

$$\langle n \rangle_{Sq} = \langle n \rangle_C + \sinh^2(r) \quad (2.36)$$

$$(\sigma_n^2)_{Sq} = \langle n^2 \rangle_{Sq} - \langle n \rangle_{Sq}^2 = e^{-2r} \langle n \rangle_C + \frac{\sinh^2(2r)}{2} \quad (2.37)$$

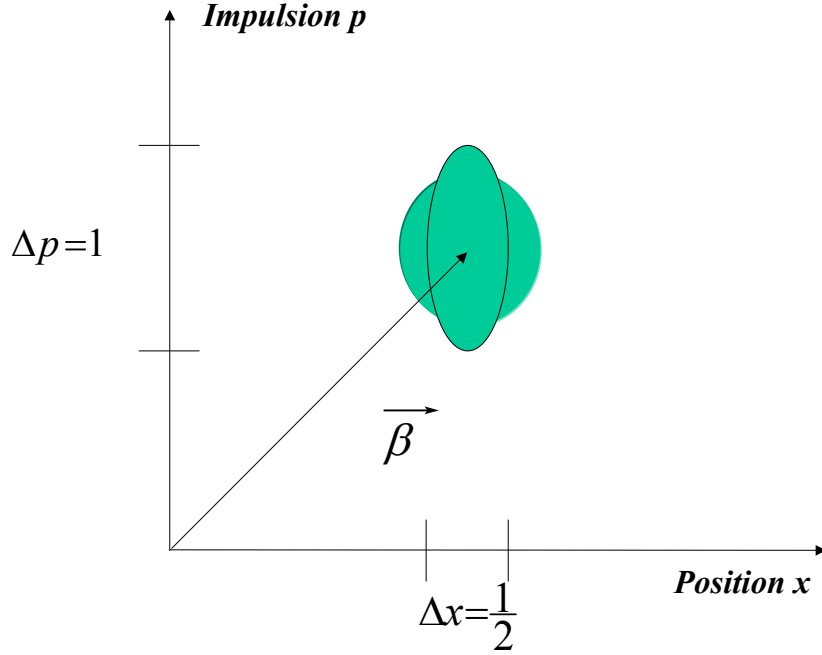


FIG. 2.7 – Représentation géométrique de l'état comprimé (état d'incertitude minimale  $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$ ) dans l'espace des phases. Notons que le cercle correspond au cas cohérent.

Notons que  $\langle n \rangle_C$  est le nombre moyen de photons correspondant à un champ cohérent. Le calcul exact du moment factoriel réduit d'ordre 2 pour le champ comprimé montre un caractère sous Poissonien  $h_{Sq} = \frac{(\langle n^2 \rangle_{Sq} - \langle n \rangle_{Sq}^2)}{\langle n \rangle_{Sq}^2} < 1$  comme le montre la figure 2.5.

Par ailleurs, les deux premiers moments de  $W$  sont déduits de (2.34) :

$$\langle W \rangle_{Sq} = \alpha^2 + \sinh^2(r) \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \langle W^2 \rangle_{Sq} &= 2 \sinh^4(r) + \alpha^4 + 2 \alpha^2 \sinh^2(r) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sinh^2(2r) - 2 \alpha^2 e^{-r} \sinh(r) \end{aligned} \quad (2.39)$$

soit pour la variance

$$(\sigma_W^2)_{Sq} = \sinh^4(r) + \frac{1}{4} \sinh^2(2r) - 2 \alpha^2 e^{-r} \sinh(r) \quad (2.40)$$

Nous remarquons que  $(\sigma_W^2)_{Sq}$  prend, là également, des valeurs négatives pour  $0 \leq r \leq r_c = \frac{1}{4} \alpha \sinh(4\alpha^2)$  (voir figure 2.6). Ceci est naturellement inacceptable

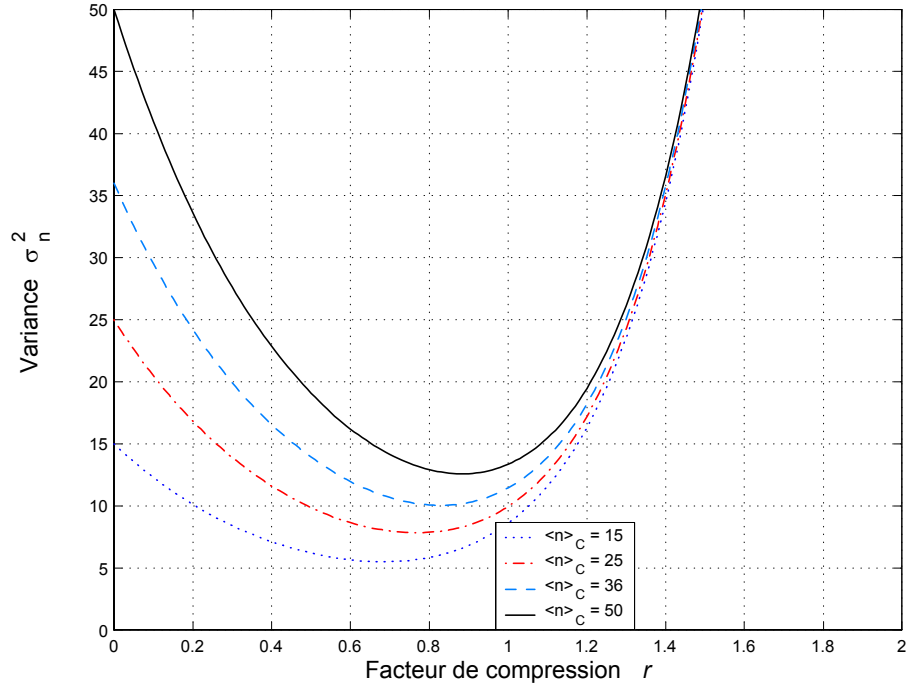


FIG. 2.8 – Variance  $\sigma^2$  d'un champ comprimé en fonction du degré de compression  $r$  pour plusieurs valeurs de  $\langle n \rangle_C$ . Cette figure permet de vérifier que l'approximation  $r^* \approx (1/6) \arg \sinh (2 \langle n \rangle_C)$  est satisfaisante pour des valeurs de  $\langle n \rangle_C$  élevées.

pour une variance [45]. On vérifie que l'approximation de  $r_c$  est en bon accord avec le calcul numérique.

### 2.4.2 Dans la base $\{|x\rangle\}$

De même, pour  $\alpha$  réel et  $\rho = e^{2r}$ , nous déduisons la d.d.p. de mesurer  $x$  dans cette base

$$P_{Sq}(x) = |\langle x | \beta \rangle|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-2\alpha^2 + 4\alpha\rho x - 2\alpha^2\rho^2) \quad (2.41)$$

À partir de cette d.d.p. qui est d'aspect Gaussien, nous calculons les deux premiers moments

$$\langle x \rangle_{Sq} = \int_{-\infty}^{\infty} x P_S(x) dx = \alpha\rho; \quad (2.42)$$

$$\langle x^2 \rangle_{Sq} = \alpha^2\rho^2 + \frac{1}{4} \quad (2.43)$$

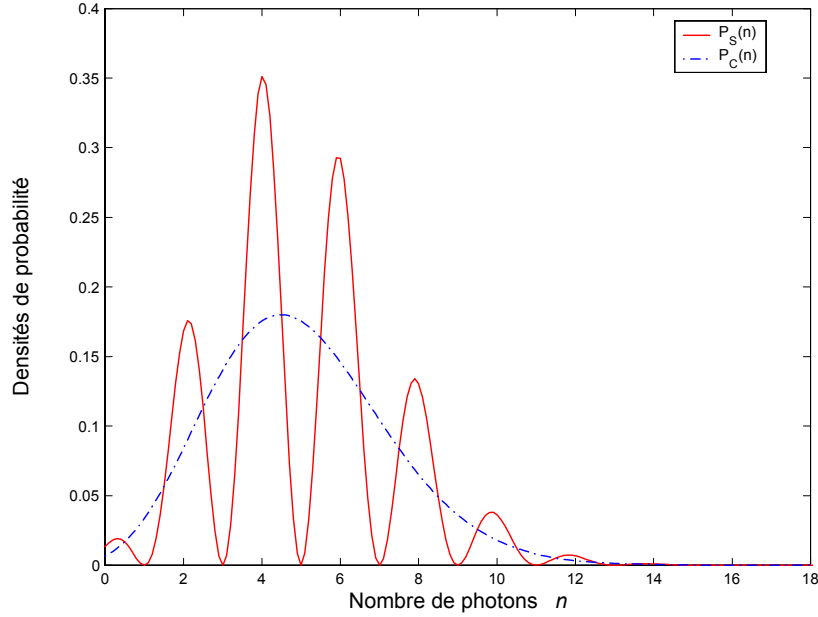


FIG. 2.9 – Comparaison de la densité de probabilité d'un champ superposé avec celle d'un champ cohérent ( $\langle n \rangle_C = 5$ ). Les fluctuations quantiques sont nettement réduites pour le champ superposé.

nous déduisons alors  $\sigma_x^2 = \frac{1}{4}$ . Comme cet état appartient également à la classe des états d'incertitude minimale  $\sigma_x^2 \sigma_p^2 = \frac{1}{4}$ , on trouve  $\sigma_p^2 = 1$ . La représentation géométrique de cet état dans l'espace des phases est illustrée par la figure 2.7. Cependant pour  $\langle n \rangle_C$  donné, la compression idéale qui nous permet d'avoir une meilleure qualité dans les mesures, c'est à dire moins de fluctuations autour de la valeur moyenne, correspond à  $r^*$ ; facteur de compression pour lequel l'équation (2.37) est minimale. Sur la figure 2.8, le minimum de  $(\sigma_n^2)_{Sq}$  en fonction de  $r$  est approximé par la formule

$$r^* \simeq \frac{1}{6} \arg \sinh (2\langle n \rangle_C) \quad (2.44)$$

résultat déduit de (2.37) par dérivation par rapport à  $r$  et qui est en bon accord le calcul numérique.

D'autre part, la comparaison de la densité de probabilité du champ cohérent avec celle d'un champ comprimé montre une diminution des fluctuations quantiques lorsque la valeur moyenne du nombre de photons correspondant à la partie cohérente  $\langle n \rangle_C$  est grande (figure 2.10). Ces fluctuations qui ne résultent pas des incertitudes liées à la mesure elle-même, sont encore moindres pour un champ superposé pour les valeurs de  $\langle n \rangle_C$  petites (voir figure 2.9).

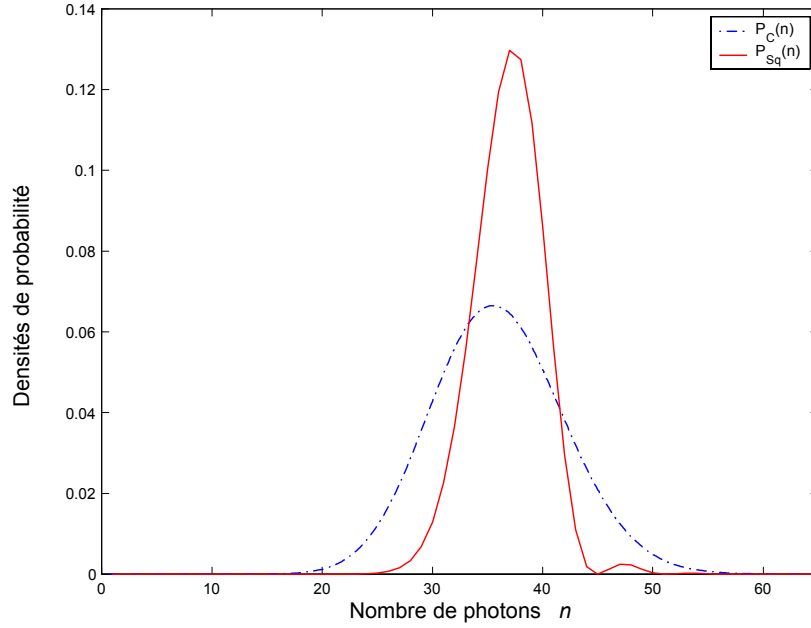


FIG. 2.10 – Comparaison de la densité de probabilité d'un champ comprimé avec celle d'un champ cohérent ( $\langle n \rangle_C = 36$ ). Cette figure illustre également la réduction de fluctuations quantiques pour le champ comprimé.

## 2.5 État Thermique

L'état d'une source thermique n'est pas simple à décrire. En effet, celle-ci est un mélange statistique d'états cohérents dans un mode donné en nombre infini. La dimension de l'espace correspondant est infinie. Néanmoins, il est commode, pour faire les calculs, d'utiliser la représentation  $P(\alpha)$  [44] dans laquelle la radiation est décrite par l'opérateur densité

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (2.45)$$

où  $P(\alpha) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle_T} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\langle n \rangle_T}\right)$  et  $\langle n \rangle_T$  le nombre moyen d'excitations pour un mode donné. Les éléments de matrice de l'opérateur  $\rho$  dans la base  $\{|n\rangle\}$  sont égaux à

$$\langle m | \rho | n \rangle = (1 - \nu) \nu^n \delta_{nm}, \quad \nu = \frac{\langle n \rangle_T}{1 + \langle n \rangle_T} \quad (2.46)$$

La densité de probabilité de mesurer  $n$  photons est une fonction décroissante de  $n$  (voir figure 2.1 (d)) :

$$P_T(n) = \text{Tr}(\rho \hat{\pi}_n) = (1 - \nu) \nu^n; \quad \hat{\pi}_n = |n\rangle \langle n| \quad (2.47)$$

La fonction génératrice des moments de  $W$  s'obtient à partir de (2.47) :

$$G_W(\xi) = \sum_n (1 - \xi)^n (1 - \nu) \nu^n = \frac{1}{1 + \xi \langle n \rangle_T} \quad (2.48)$$

qui nous permet de déduire

$$(\sigma_n^2)_T = \langle n \rangle_T^2 + \langle n \rangle_T; \quad h_T = 2 \quad (2.49)$$

$$(\sigma_W^2)_T = \langle n \rangle_T^2 \quad (2.50)$$

Notons que l'étude de la d.d.p. et des premiers moments de l'état thermique ne révèle aucun aspect quantique comme dans le cas pour l'état comprimé et superposé. La forme exponentielle de (2.47) peut également se déduire d'un calcul simple d'entropie.

En effet, l'entropie associée à l'intensité  $W$  est :

$$h(P) = - \int_X P(W) \log P(W) dW \quad (2.51)$$

avec  $P(W)$  sa d.d.p. Cette entropie doit être rendue maximale sous les contraintes qui expriment que  $P(W)$  est une d.d.p et que la valeur moyenne de  $W$  est une constante donnée :

$$P(W) \geq 0, \int_X P(W) dW = 1, \int_X W P(W) dW = cste \quad \forall W \in X \quad (2.52)$$

La solution est obtenue en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange

$$L(P) = h(P) + \lambda \int_X P(W) dW - \mu \int_X W P(W) dW \quad (2.53)$$

En effet, la dérivée de  $L(P)$  par rapport à  $P(W)$  est annulée

$$\frac{\partial L}{\partial P(W)} = -\log P(W) - 1 + \lambda - \mu W = 0 \quad (2.54)$$

pour

$$P(W) = C e^{-\mu W}, \quad \forall W \in X \quad (2.55)$$

qui représente bien la distribution d'intensité d'un rayonnement thermique ; la normalisation de  $P(W)$  permet de déduire  $C = \mu = \frac{1}{\langle W \rangle}$ . De plus, en faisant varier  $\mu$ , on décrit un très grand nombre de types de rayonnements.

À partir de cette distribution d'intensité, on retrouve la même expression de la d.d.p du nombre de photons mesurés dans  $[0, T]$  :

$$P(n) = \int_0^\infty e^{-WT} \frac{(WT)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\langle W \rangle} e^{-\frac{W}{\langle W \rangle}} \right] dW = \frac{\langle n \rangle_T^n}{(1 + \langle n \rangle_T)^{n+1}} = (1 - \nu) \nu^n \quad (2.56)$$

avec  $\langle n \rangle_T = \langle W \rangle_T$ ;  $\langle n^2 \rangle_T = 2\langle n \rangle_T^2 + \langle n \rangle_T$ .

Ainsi, il est montré que la radiation thermique est complètement décrite dans un cadre classique. De plus, on vérifie que l'intensité d'un champ classique peut être définie partout (c'est à dire pour toutes les valeurs des paramètres) lorsque l'on considère des sources cohérente et thermique.

## 2.6 Conclusion

Finalement, l'analyse des propriétés statistiques pour les quatre radiations montre que les aspects quantiques sont nettement observés pour les champs superposé et comprimé : leurs densités de probabilité présentent des interférences, la variance pour l'intensité intégrée  $W$  n'est pas définie pour toutes les valeurs du coefficient de compression ou de la phase, et leurs moments factoriels réduits d'ordre 2 présentent des effets sous et super Poissonien. En outre, nous remarquons que l'effet des interférences quantiques fait décroître la variance (voir résultats de  $\sigma_n^2$  pour les différents champs dans le tableau 2.1). Ces propriétés qui n'ont pas d'équivalents classiques nous incitent donc à les exploiter de manière avantageuse pour étudier les états intriqués et les performances de détection et d'information.

Dans le tableau ci-dessous, nous posons  $\Delta = e^{-\xi} \tanh(r)$ ,  $\nu = e^{-2\alpha^2} \cos \varphi$  et  $z^2 = \frac{\alpha^2 e^{2r}}{\sinh(2r)}$ .

Les valeurs moyennes  $\langle n \rangle$  sont respectivement  $\alpha^2$ ,  $\langle n \rangle_T$ ,  $\frac{1 - e^{-2\alpha^2} \cos \varphi}{1 + e^{-2\alpha^2} \cos \varphi} \alpha^2$  et  $\alpha^2 + \sinh^2(r)$ .

| Champ     | $P(n)$                                                                                                        | $G_n(\xi)$                                                                              | $\sigma_n^2$                                                     |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| cohérent  | $e^{-\alpha^2} \frac{(\alpha^2)^n}{n!}$                                                                       | $e^{\alpha^2(e^{-\xi}-1)}$                                                              | $\alpha^2 = \langle n \rangle_C$                                 |
| thermique | $\frac{\langle n \rangle_T^n}{(1 + \langle n \rangle_T)^{n+1}}$                                               | $\frac{1}{1 + \xi \langle n \rangle_T}$                                                 | $\langle n \rangle_T^2 + \langle n \rangle_T$                    |
| superposé | $\frac{(1 + (-1)^n \cos(\varphi))}{(1 + e^{-2\alpha^2} \cos(\varphi))} e^{-\alpha^2} \frac{(\alpha^2)^n}{n!}$ | $\frac{e^{-(1-e^{-\xi})\alpha^2} + \nu e^{(1-e^{-\xi})\alpha^2}}{1 + \nu}$              | $\alpha^4 \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} + \alpha^2 \frac{1-\nu}{1+\nu}$ |
| comprimé  | $\frac{e^{-\alpha^2(1+th(r))}}{\cosh(r)} \frac{\left(\frac{th(r)}{2}\right)^n}{n!} H_n^2(z)$                  | $\frac{e^{-\alpha^2(1+th(r))}}{ch(r)\sqrt{1-\Delta^2}} e^{\frac{2z^2\Delta}{1+\Delta}}$ | $e^{-2r} \langle n \rangle_C + \frac{(\sinh(2r))^2}{2}$          |

Table **2.1.** Tableau récapitulatif des lois de probabilité, des fonctions génératrices et des variances des champs considérés.





# Chapitre 3

## Intrication dans le modèle de Jaynes-Cummings

Les états intriqués dits aussi états supercorrelés [19] donnent lieu à des corrélations purement quantiques entre les différentes parties qui constituent un système composé, même si elles sont spatialement disjointes. Ces corrélations sont générées par une interaction forte et de courte durée entre les sous systèmes, leur durée de vie étant plus grande que le temps nécessaire à leur intrication. Le couplage d'un atome à deux niveaux avec un rayonnement électromagnétique génère des états intriqués. Ce système décrit par Jaynes et Cummings (JC) [11], est le modèle le plus simple qui permet d'effectuer des calculs exacts et surtout qui peut être réalisé en laboratoire.

Grâce à ce modèle, nous allons donc pouvoir analyser l'évolution dynamique d'un champ comprimé après son interaction avec un atome excité. Les propriétés statistiques de cette radiation abordées au chapitre 2, en ont révélé l'intérêt.

### 3.1 Rappels

Pour décrire des états intriqués, on traite de l'interaction d'un champ de photons monomode de fréquence  $\omega$  avec un atome à deux niveaux d'écart  $\omega_0$ . L'Hamiltonien  $H$  du système total constitué de l'atome et du champ de photons en interaction s'écrit :

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\kappa(\hat{a}^+\sigma_- + \hat{a}\sigma_+) \quad (3.1)$$

Les deux premiers termes représentent respectivement l'Hamiltonien de l'atome libre  $H_A$  et celui d'un champ de radiation avant interaction  $H_F$ . La figure 3.1 indique les valeurs propres (énergies) de l'Hamiltonien  $H_A + H_F$ . L'état propre d'énergie minimale est l'état  $|g, 0\rangle$ , dont l'énergie a été prise égale à zéro. Les

niveaux d'énergie se regroupent en multiplicités  $M_n$  formées de deux états (à l'exception de l'état fondamental) séparés de  $\hbar\Delta\omega = \hbar(\omega_0 - \omega)$ .

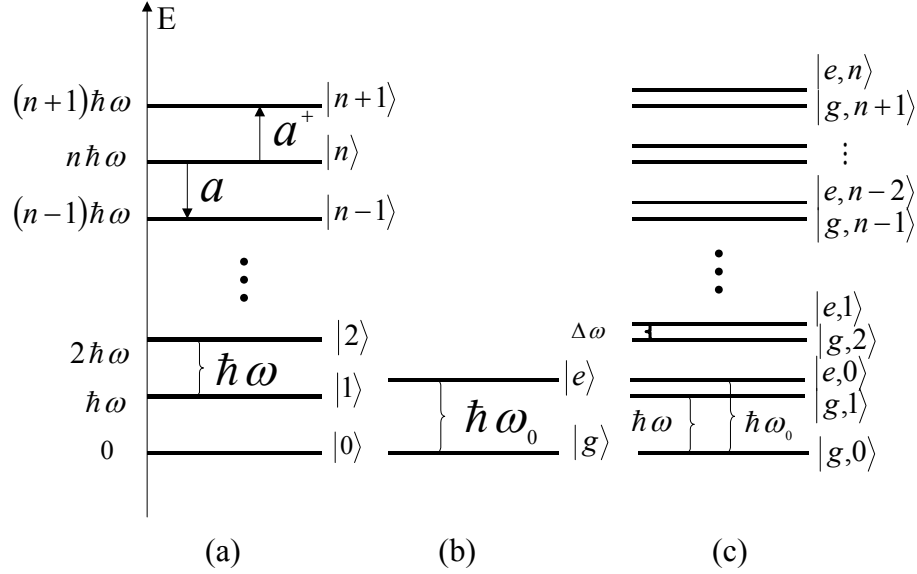


FIG. 3.1 – Niveaux d'énergie du champ libre quantifié (a), de l'atome libre (b) et du système atome-champ découplé (cas non résonnant) (c).

Le troisième terme décrit l'interaction entre les deux sous systèmes avec  $\kappa$  ( $\neq 0$ ) la constante de couplage. Les matrices  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$  dérivent des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

pour lesquelles  $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$ . Les opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  sont respectivement les opérateurs de création et de destruction de photons dont nous rappelons les actions sur les états nombre (voir figure 3.1(a)) :

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.3)$$

$\{|n\rangle\}$  est l'ensemble des états nombre orthonormés  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ . De même, on pose  $S_+ = \sigma_+ \hat{a}$  et  $S_- = \sigma_- \hat{a}^+$ . Sachant que  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ , on obtient

$$[\hat{a}^+ \hat{a}, S_{\pm}] = \mp S_{\pm}, \quad [\sigma_z, S_{\pm}] = \pm 2 S_{\pm}, \quad [S_+, S_-] = \frac{1 + \sigma_z}{2} + \hat{a}^+ \hat{a} \sigma_z \quad (3.4)$$

Par ailleurs, on pose

$$C_1 = \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \sigma_z \right), \quad C_2 = \hbar \kappa (S_+ + S_-) - \frac{\Delta \omega}{2} \sigma_z$$

avec  $\Delta \omega = \omega - \omega_0$ .

À la résonance ( $\omega \simeq \omega_0$ ), on remarque bien que  $H = C_1 + C_2$  et que  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes de mouvement  $[H, C_1] = [H, C_2] = 0$ . Dans la base  $\{|n, \pm 1\rangle\}$  où  $\pm 1$  désignent respectivement les états excité et fondamental de l'atome, nous avons

$$C_1 |n, \pm 1\rangle = \hbar \omega \left( n \pm \frac{1}{2} \right) |n, \pm 1\rangle \quad (3.5)$$

$$C_1 |0, -1\rangle = -\frac{1}{2} \hbar \omega |0, -1\rangle \quad (3.6)$$

Les éléments de l'opérateur  $C_1$  forment une matrice diagonale dans cette base alors que ce n'est pas le cas pour  $C_2$ . Cependant comme  $[C_1, C_2] = 0$ , il existe une base dans laquelle les deux opérateurs sont diagonaux. On prendra une combinaison linéaire des vecteurs propres de  $C_1$  [46]

$$|\phi(n, 1)\rangle = \cos \theta_n |n+1, -1\rangle + \sin \theta_n |n, +1\rangle \quad (3.7)$$

$$|\phi(n, 2)\rangle = \cos \theta_n |n, +1\rangle - \sin \theta_n |n+1, -1\rangle \quad (3.8)$$

Les états ainsi définis sont orthonormés. Ils seront aussi vecteurs propres de  $C_1$  et  $C_2$  si

$$C_2 |\phi(n, 1)\rangle = \lambda_n |\phi(n, 1)\rangle, \quad C_2 |\phi(n, 2)\rangle = \lambda'_n |\phi(n, 2)\rangle \quad (3.9)$$

La résolution de l'équation permet de déduire le paramètre  $\theta_n$  qui mesure l'intrication (l'inséparabilité) des états  $|\phi(n, 1)\rangle$  et  $|\phi(n, 2)\rangle$

$$\tan(\theta_n) = \frac{\kappa \sqrt{n+1}}{\frac{\Delta \omega}{2} + \lambda_n}, \quad \lambda_n = +\sqrt{\left(\frac{\Delta \omega}{2}\right)^2 + \kappa^2 (n+1)}; \quad \lambda'_n = -\lambda_n$$

Les solutions de l'équation (3.1) seront donc :

$$H |\phi(n, 1)\rangle = \hbar \left[ \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \lambda_n \right] |\phi(n, 1)\rangle \quad (3.10)$$

$$H |\phi(n, 2)\rangle = \hbar \left[ \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \lambda_n \right] |\phi(n, 2)\rangle \quad (3.11)$$

Sous l'effet du couplage atome-rayonnement, les niveaux d'énergie à l'intérieur de chaque multiplicité  $M_n$  se repoussent (voir figure 3.2) sauf le niveau fondamental  $|g, 0\rangle \equiv |0, -1\rangle$ . À la résonance exacte  $\Delta \omega = 0$ , l'écart énergétique

entre les deux niveaux ( $|\phi(n, 1)\rangle$  et  $|\phi(n, 2)\rangle$ ) vaut  $\Delta E_n = 2\hbar\kappa\sqrt{n+1} = \hbar\Omega_R$  avec  $\Omega_R$  la pulsation de Rabi lorsque la radiation est décrite par les états de Fock (la base  $\{|n\rangle\}$ ). D'autre part, lorsque le paramètre  $\theta_n$  est égal à  $\frac{\pi}{4}$ , les états  $|\phi(n, 1)\rangle$  et  $|\phi(n, 2)\rangle$  s'écrivent

$$|\phi(n, 1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+1, -1\rangle + |n, +1\rangle) \quad (3.12)$$

$$|\phi(n, 2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n, +1\rangle - |n+1, -1\rangle) \quad (3.13)$$

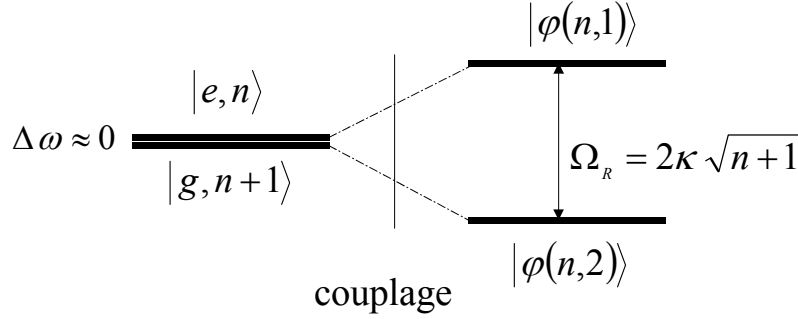


FIG. 3.2 – Diagramme d'énergie représentant les déplacements énergétiques des multiplicités  $M_n$  lors de l'interaction atome-champ.

Ces états sont des états intriqués de l'atome et du rayonnement. Il est impossible de les factoriser en une partie atomique et une partie de rayonnement. Les transitions de l'état  $|\phi(n, 1)\rangle$  vers l'état  $|\phi(n, 2)\rangle$  et réciproquement donnent lieu à des oscillations de Rabi qui engendrent des corrélations quantiques entre les deux sous systèmes. Cependant, lorsque  $\Delta\omega$  augmente le paramètre  $\theta_n$  tend vers 0, par conséquent les états  $|\phi(n, 1)\rangle$  et  $|\phi(n, 2)\rangle$  tendent vers les états factorisés

$$|\phi(n, 1)\rangle = |n+1, -1\rangle \text{ et } |\phi(n, 2)\rangle = |n, +1\rangle \quad (3.14)$$

pour lesquels il n'y a pas de corrélation.

### 3.2 Applications pour un champ de nombre de photons $n$ élevé

Dans ce paragraphe, nous détaillons les expressions des états de l'atome et celui de la radiation après leur interaction.

Reprenons l'atome à deux niveaux pour lequel l'état fondamental sera désigné par  $|g\rangle$  et le seul état excité par  $|e\rangle$ . L'état de cet atome s'écrit dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  comme

$$|\phi\rangle = a|g\rangle + b|e\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \langle g|e\rangle = 0 \quad (3.15)$$

Supposons l'atome en interaction avec un champ de radiation dans l'état

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (3.16)$$

expression dans laquelle  $c_n^2 = P(n)$  qui représente sa densité de probabilité (cf Chapitre 2). On ne considère pour simplifier la présentation de ce travail que le cas où  $a, b, c_n \in \mathbb{R}$ . L'atome et le champ électromagnétique sont deux sous systèmes préparés indépendamment l'un de l'autre; l'état initial du système global s'écrit alors sous forme d'un produit tensoriel direct (cf équation 1.23)

$$|\psi(0)\rangle = (a|g\rangle + b|e\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (3.17)$$

Il est beaucoup plus commode de définir leur opérateur densité respectif (l'indice A se rapporte à l'atome et l'indice F au champ de radiation)

$$\rho_A(0) = |\phi\rangle\langle\phi| = |a|^2 |g\rangle\langle g| + |b|^2 |e\rangle\langle e| \quad (3.18)$$

$$\rho_F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |n\rangle\langle n| \quad (3.19)$$

$$\rho_{AF}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_F(0) \quad (3.20)$$

Après un temps d'interaction très faible, les deux sous systèmes sont décrits par l'état final

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) |g\rangle \otimes |n\rangle + b_n(t) |e\rangle \otimes |n\rangle) \quad (3.21)$$

avec les coefficients adoptés par Ekert [23]

$$a_n(t) = a c_n \cos(\kappa t \sqrt{n}) - i b c_{n-1} \sin(\kappa t \sqrt{n}) \quad (3.22)$$

$$b_n(t) = b c_n \cos(\kappa t \sqrt{n+1}) - i a c_{n+1} \sin(\kappa t \sqrt{n+1}) \quad (3.23)$$

tels que

$$\begin{aligned} |a_n|^2 &= |a|^2 P(n) \cos^2(\kappa t \sqrt{n}) + |b|^2 P(n-1) \sin^2(\kappa t \sqrt{n}) \\ |b_n|^2 &= |b|^2 P(n) \cos^2(\kappa t \sqrt{n+1}) + |a|^2 P(n+1) \sin^2(\kappa t \sqrt{n+1}) \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous considérons le cas où l'atome est dans son état excité ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ). En posant  $\kappa t = \theta$ , l'opérateur densité à un instant ultérieur est écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\rho_{AF}(\theta) &= |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)| \\
&= \sum_{n,m} c_{n-1}c_{m-1} \sin(\theta\sqrt{n}) \sin(\theta\sqrt{m}) |g, n\rangle\langle g, m| \\
&\quad + \sum_{n,m} c_n c_m \cos\left(\theta\sqrt{n+1}\right) \cos\left(\theta\sqrt{m+1}\right) |e, n\rangle\langle e, m| \\
&\quad - i \sum_{n,m} c_{n-1}c_m \sin\left(\theta\sqrt{n}\right) \cos\left(\theta\sqrt{m+1}\right) |g, n\rangle\langle e, m| \\
&\quad + i \sum_{n,m} c_n c_{m-1} \cos\left(\theta\sqrt{n+1}\right) \sin\left(\theta\sqrt{m}\right) |e, n\rangle\langle g, m|
\end{aligned} \tag{3.24}$$

On remarque que l'intrication apparaît à partir des égalités

$|g, n\rangle\langle e, m| \triangleq (|g\rangle \otimes |n\rangle) (\langle e| \otimes \langle m|) = |g\rangle\langle e| \otimes |n\rangle\langle m|$  (de même pour  $|e, n\rangle\langle g, m|$ ). Les opérateurs densités de l'atome et du champ s'obtiennent à partir des traces partielles tel que

$$\begin{aligned}
\rho_A(\theta) &= \text{Tr}_F(\rho_{AF}(\theta)) = w_g |g\rangle\langle g| + (1 - w_g) |e\rangle\langle e| \\
&\quad + \frac{i}{2} \sum_n c_n^2 \sin\left(2\theta\sqrt{n+1}\right) (|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où

$$w_g(\theta) = \sum_n P(n) W(n, \theta), \quad W(n, \theta) = \sin^2\left(\theta\sqrt{n+1}\right) \tag{3.26}$$

Pour la radiation, l'opérateur densité s'écrit

$$\begin{aligned}
\rho_F(\theta) &= \text{Tr}_A(\rho_{AF}(\theta)) \\
&= \sum_n (P(n) (1 - W(n, \theta)) + P(n-1) W(n-1, \theta)) |n\rangle\langle n| \\
&= \sum_n P(n, \theta) |n\rangle\langle n|
\end{aligned} \tag{3.27}$$

avec

$$P(n, \theta) = P(n) (1 - W(n, \theta)) + P(n-1) W(n-1, \theta) \tag{3.28}$$

la densité de probabilité du champ après interaction.

Le calcul exact de ces diverses lois de probabilité ne peut être mené à bien que numériquement. Cependant, des approximations sont possibles pour des grandes valeurs moyennes de  $n$  à l'instant initial et pour des temps très rapprochés du temps initial. Nous prenons comme exemple un champ cohérent

dont la densité de probabilité  $P(n)$  décrit une distribution de Poisson ; une bonne approximation de  $w_g(\theta)$  et  $P(n, \theta)$  s'obtient lorsque  $\langle n \rangle_c \gg 1$ ,

$$w_g(\theta) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi \langle n \rangle}} e^{-\langle n \rangle (\theta-1)^2} \sin \left( \pi \theta \sqrt{\langle n \rangle^3} \right) \quad (3.29)$$

$$P(n, \theta) \sim P(n) \left( 1 - \theta^2 \left( 1 + n - \frac{n^2}{\langle n \rangle} \right) \right) \quad (3.30)$$

D'après les équations (3.24,3.25,3.27), on montre que l'effet du couplage d'un système à un seul niveau (état excité) avec le champ (en résonance avec la transition reliant l'état fondamental de l'atome à l'état excité) se manifeste par deux comportements : l'atome est décrit par un mélange statistique des états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  d'une part et d'autre part les états du champ et de l'atome sont intriqués. En effet, il y a intrication car si l'atome est dans l'état fondamental, c'est que le photon émis est absorbé par le champ, et que si l'atome est dans l'état excité, c'est que le photon émis par le champ est réabsorbé par l'atome. Cet échange réversible de photon qui engendre des oscillations de Rabi à un photon est caractérisé par une probabilité que l'on peut déterminer.

### 3.2.1 Probabilité de transition

Supposons que l'état initial du système est décrit par le ket  $|\psi(0)\rangle = |n, +1\rangle$  avec  $n$  quanta et d'un spin  $|\uparrow\rangle$  (orientation d'un axe  $\vec{Oz}$  choisi arbitrairement) qui correspond à l'état  $|e\rangle$ . L'état final du système, après la transition, est un autre ket  $|n+1, -1\rangle$  avec cette fois-ci  $(n+1)$  quanta et un spin  $|\downarrow\rangle$  (ou  $|g\rangle$ ). D'autre part, comme l'Hamiltonien (3.1) ne dépend pas explicitement du temps, l'état du système composé est solution de l'équation de Schrödinger

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left( -\frac{i H t}{\hbar} \right) |\psi(0)\rangle \quad (3.31)$$

La probabilité de trouver le système dans l'état propre  $|n+1, -1\rangle$  à un instant  $t$  est  $|\langle n+1, -1 | \psi(t) \rangle|^2$ . On obtient [46]

$$\begin{aligned} |\langle n+1, -1 | \exp(-\frac{i H t}{\hbar}) | n, +1 \rangle|^2 &= \frac{4\kappa^2 (n+1)}{(\Delta\omega)^2 + 4\kappa^2 (n+1)} \\ &\quad \sin^2 \left( \frac{1}{2} t \sqrt{(\Delta\omega)^2 + 4\kappa^2 (n+1)} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Cette expression représente également la probabilité de transition de l'état  $|n+1, -1\rangle$  vers l'état  $|n, +1\rangle$ .

L'effet d'émission spontanée a lieu lorsque  $n = 0$ . Ce cas correspond à l'atome se trouvant dans une cavité vide où la probabilité de transition est d'amplitude

constante. Dans le cas où  $n \neq 0$ , la probabilité de transition  $P_a(t)$  (ou  $P_b(t)$ ) dépend des différentes valeurs de  $\sqrt{n+1}$

$$P_a(t) = \sum_n |\langle n, -1 | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_n c_n^2 \sin^2(\theta \sqrt{n+1}) = w_g(\theta) \quad (3.33)$$

$$P_b(t) = \sum_n |\langle n, +1 | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_n c_n^2 \cos^2(\theta \sqrt{n+1}) = 1 - w_g(\theta) \quad (3.34)$$

par conséquent l'amplitude résultante n'est plus une constante (voir figure 3.3) tel que à l'instant  $\theta \sqrt{n+1} = \frac{\pi}{4}$ , les populations des niveaux excité et fondamental de l'atome sont les mêmes ( $P_a(t) = P_b(t) = \frac{1}{2}$ ).

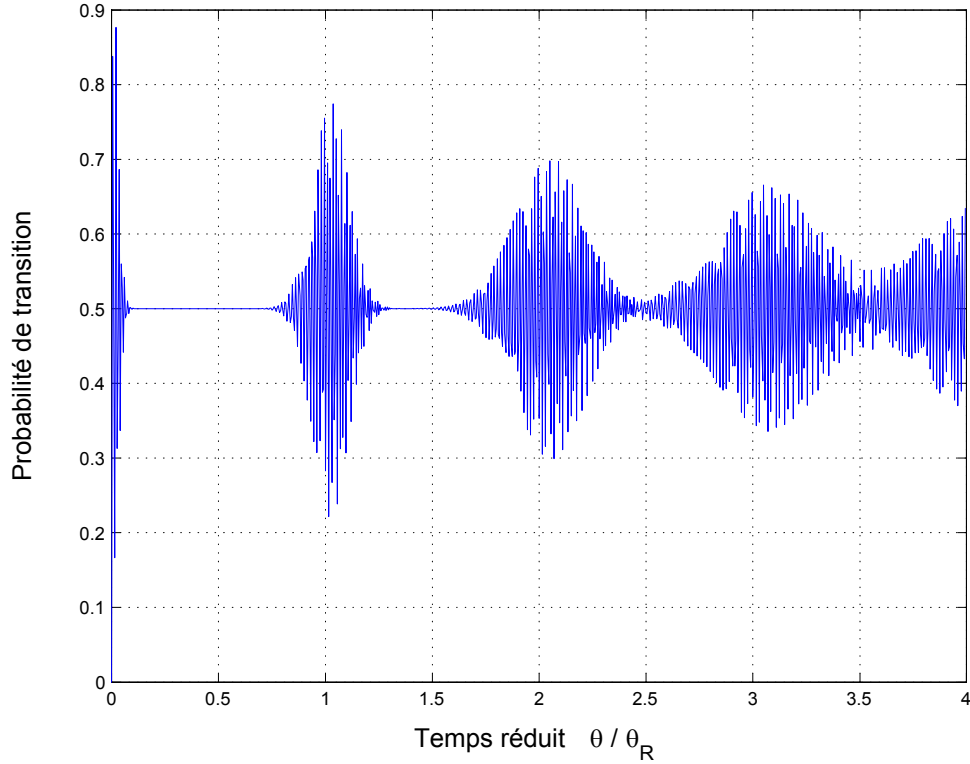


FIG. 3.3 – Probabilité de peupler l'état fondamental de l'atome en fonction du temps  $\theta/\theta_R$  après interaction avec un champ cohérent ( $\langle n \rangle_C = 36$ ).  $\theta_R = 2\pi\sqrt{\langle n \rangle_C}$  étant la période de Rabi.

### 3.2.2 Propriétés statistiques du champ après interaction

Pour étudier l'intrication produite par l'échange réversible d'énergie entre les deux sous systèmes atome-radiation, nous analysons l'évolution de leurs propriétés en fonction du temps  $\theta$ . Les états que nous considérons ci-dessous se



limitent à l'état comprimé, l'état cohérent et l'état thermique. Le champ cohérent et le champ thermique qui présentent respectivement la limite d'un état classique-quantique et d'un état purement classique serviront de modèles de comparaison pour les effets observés dans le cas d'un champ comprimé. L'état superposé présentant déjà une intrication entre les états  $|\alpha\rangle$  et  $|- \alpha\rangle$ , fera l'objet d'une étude détaillée dans le chapitre 5, en vue de son application à l'évaluation des performances d'un système de mesure.

Nous calculons d'abord le moment factoriel réduit d'ordre 2. En effet, la densité de probabilité exprimée à un instant  $\theta$  permet de calculer les deux premiers moments de l'opérateur  $\hat{N}$ , pour un champ initial donné ( $c_n^2$  connu) :

$$\langle n \rangle(\theta) = \langle n \rangle(0) + \sum_n P(n) \sin^2(\theta \sqrt{n+1}) \quad (3.35)$$

$$\langle n^2 \rangle(\theta) = \langle n^2 \rangle(0) + \sum_n (2n+1) P(n) \sin^2(\theta \sqrt{n+1}) \quad (3.36)$$

On déduit le moment factoriel d'ordre 2 réduit

$$h(\theta) = \frac{\langle n^2 \rangle(\theta) - \langle n \rangle(\theta)^2}{\langle n \rangle^2(\theta)} \quad (3.37)$$

dont l'approximation en  $\theta^2$  donne respectivement

$$\langle n \rangle(\theta) \sim (1 + \theta^2) \langle n \rangle(0) \quad (3.38)$$

$$\langle n^2 \rangle(\theta) \sim 3\theta^2 \langle n \rangle(0) + (1 + 2\theta^2) \langle n^2 \rangle(0) \quad (3.39)$$

$$h(\theta) \sim h(0) + \frac{2\theta^2}{(1 + \theta^2)^2} \frac{\langle n^2 \rangle(0) + \langle n \rangle(0)}{\langle n \rangle^2(0)} \quad (3.40)$$

Nous avons calculé numériquement  $\langle \tilde{h} \rangle(\theta) = \langle h \rangle(\theta) - \langle h \rangle(0)$  en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_R}$ .  $\theta_R = 2\pi\sqrt{\langle n \rangle_C}$  est la pulsation de Rabi pour les trois types de champ dont nous rappelons les densités de probabilité ci-dessous

- Champ comprimé

$$P_{Sq}(n) = \frac{e^{-\langle n \rangle_C (1 + \tanh(r))} \left( \frac{\tanh(r)}{2} \right)^n}{\cosh(r)} \frac{1}{n!} H_n^2(z), \quad z^2 = \frac{\langle n \rangle_C e^{2r}}{\sinh(2r)}; \quad (3.41)$$

$$r^* \simeq \frac{1}{6} \arg \sinh(2\langle n \rangle_C); \quad h(0) = 0.98 \quad (3.42)$$

- Champ cohérent

$$P_C(n) = e^{-\langle n \rangle_C} \frac{\langle n \rangle_C^n}{n!}; \quad h(0) = 1. \quad (3.43)$$

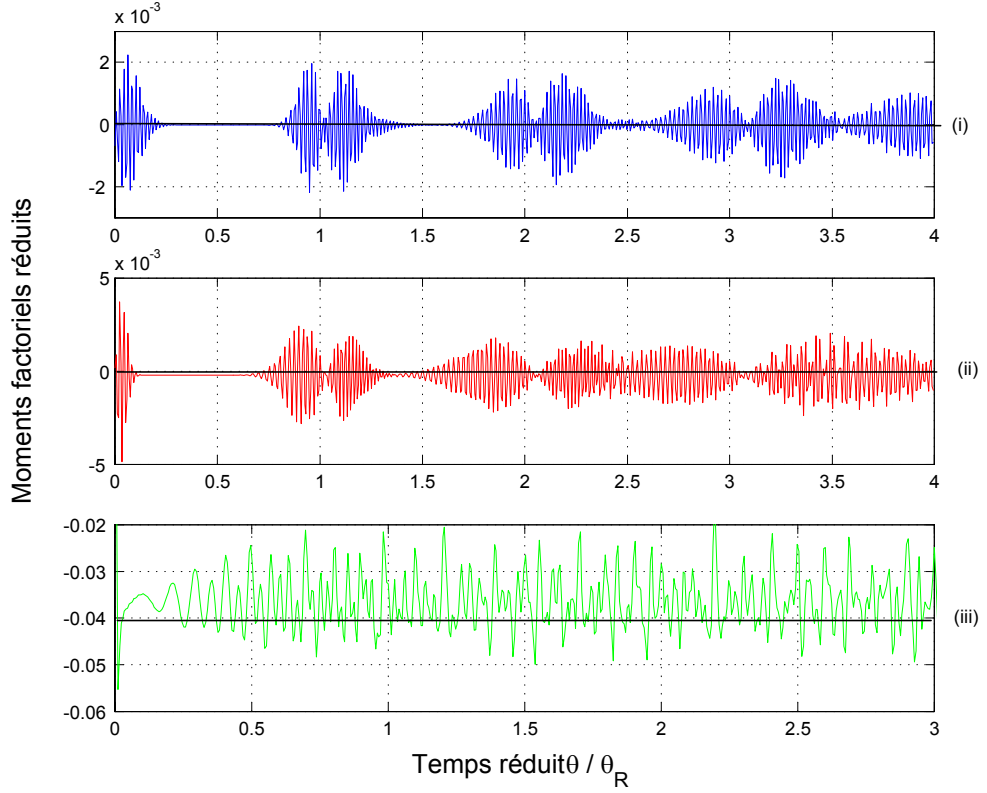


FIG. 3.4 – Variations du moment factoriel réduit d'ordre 2 pour les champs : (i) comprimé avec  $r^* \approx (1/6) \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ; (ii) cohérent et (iii) thermique.  $\theta_R$  étant la période d'oscillation de Rabi avec  $\langle n \rangle_C = 25$ .

- Champ thermique

$$P_T(n) = (1 - \nu)\nu^n; \quad \nu = \frac{\langle n \rangle_C}{1 + \langle n \rangle_C}; \quad h(0) = 2. \quad (3.44)$$

D'après la figure 3.4 (i) et (ii), les propriétés statistiques pour les champs comprimé et cohérent conduisent à des oscillations de Rabi bien résolues. Pour un champ cohérent, celles-ci qui sont nettement séparées au début, se brouillent pour  $\frac{\theta}{\theta_R} \geq 2.5$  alors que pour un état comprimé, elles restent nettement séparées même à  $\frac{\theta}{\theta_R} = 3$ . Ces oscillations d'amplitude variable s'amortissent rapidement au cours du temps, atténuation due à la contribution conjuguée des différentes sinusoïdes de période distincte  $\frac{2\pi}{\kappa\sqrt{n+1}}$ . Notons également que ces oscillations réapparaissent sur une échelle de temps encore plus grande. En revanche,  $\langle \tilde{h} \rangle(\theta)$  correspondant au champ thermique ne révèle aucune oscillation de Rabi. Nous remarquons des fluctuations aléatoires; les périodes d'oscillations de Rabi se brouillant lorsque  $\frac{\theta}{\theta_R} \geq 0.5$  comme le montre la figure 3.4 (iii).

Nous déduisons à partir de cette comparaison que le caractère quantique est nettement plus évident dans le cas de l'état comprimé que dans le cas de l'état cohérent. L'état thermique qui ne décrit qu'un mélange statistique d'états cohérents ne révèle aucune manifestation quantique.

Ces propriétés statistiques ne concernent que le champ de radiation après interaction. Une étude similaire pourrait être conduite pour les propriétés atomiques. Nous allons en examiner les principales dans le paragraphe suivant.

### 3.2.3 Propriétés liées à l'atome

Les propriétés statistiques de l'atome après interaction sont mises en évidence en décrivant son état de polarisation par la sphère de Bloch [23]. En effet, l'état d'un atome à deux niveaux peut être décrit par l'opérateur densité

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( 1 + \vec{R} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (3.45)$$

avec  $\vec{R}$  le vecteur de Bloch défini (voir figure 3.5) dans l'espace Euclidien à trois dimensions, et  $\vec{\sigma}$  la matrice de Pauli. L'opérateur  $\hat{\rho}$  dont les éléments de matrice dans la base à deux dimensions ( $2 \times 2$ )

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + R_3 & R_1 + i R_2 \\ R_1 - i R_2 & 1 - R_3 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

admet deux valeurs propres

$$g_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + |\vec{R}| \right] \quad (3.47)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - |\vec{R}| \right] \quad (3.48)$$

La norme du vecteur de Bloch nous renseigne sur l'état de l'atome. En effet, dans le cas où la norme du vecteur de Bloch est égale à l'unité  $\sqrt{\sum_i |R_i|^2} = 1$  (l'extrémité du vecteur est située sur la sphère de Bloch), le système est dans un état pur  $Tr(\hat{\rho}^2) = Tr(\hat{\rho}) = 1$ . L'opérateur densité  $\hat{\rho}$  a par conséquent une seule valeur propre non nulle  $g_1 = 1$  ( $g_2 = 0$ ). Lorsque la norme  $\sqrt{\sum_i |R_i|^2} < 1$  (l'extrémité du vecteur est située à l'intérieur de la sphère de Bloch), les valeurs propres  $g_1$  et  $g_2$  sont toutes les deux non nulles ; par conséquent l'état quantique est un mélange statistique  $Tr(\hat{\rho}^2) < 1$ .

Dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ , les éléments de la matrice densité de l'atome

$$\hat{\rho}_A(\theta) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\theta)|^2 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) b_n^*(\theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta) a_n^*(\theta) & \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(\theta)|^2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

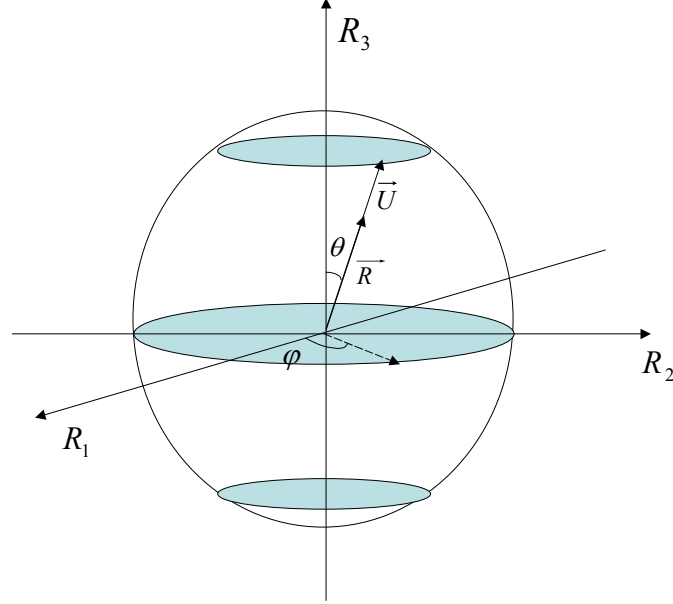


FIG. 3.5 – Description d'un système à deux états par la sphère de Bloch dans l'espace Euclidien. Les vecteurs unitaires propres associés aux valeurs propres  $0.5(1 \pm |R|)$  sont représentés par  $\vec{U}$  et  $-\vec{U}$ .

nous permettent de déduire les composantes du vecteur de Bloch  $\vec{R}$ . En effet, par identification avec l'expression précédente (cf 3.46), on déduit

$$R_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(\theta) b_n^*(\theta) + b_n(\theta) a_n^*(\theta)) \quad (3.50)$$

$$R_2(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i} (a_n(\theta) b_n^*(\theta) - b_n(\theta) a_n^*(\theta)) \quad (3.51)$$

$$R_3(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n(\theta)|^2 - |b_n(\theta)|^2) \quad (3.52)$$

Notons que dans le cas où l'atome est initialement dans un état excité ( $a = 0, b = 1$ ),  $R_1(\theta) = 0$ . L'approximation des deux autres composantes est

obtenue lorsque  $\langle n \rangle_C \gg 1$  pour  $\theta = \kappa t \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 R_2(\theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n-1} \sin(\theta \sqrt{n}) \cos(\theta \sqrt{n+1}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n-1} \left( \sin(\theta \sqrt{n} + \theta \sqrt{n+1}) + \sin(\theta \sqrt{n} - \theta \sqrt{n+1}) \right) \\
 &\sim e^{-\frac{\sigma^2 \theta^2}{2 \langle n \rangle_C}} \sin(\theta \sqrt{\langle n \rangle_C}) - \sin\left(\frac{\theta}{2 \sqrt{\langle n \rangle_C}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
 R_3(\theta) &\sim - \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 (\cos^2(\theta \sqrt{n}) - \sin^2(\theta \sqrt{n})) \\
 &\sim -e^{-\frac{\sigma^2 \theta^2}{2 \langle n \rangle_C}} \cos(2\theta \sqrt{\langle n \rangle_C})
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

avec

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \simeq -\frac{1}{2\sqrt{\langle n \rangle_C}}; \tag{3.55}$$

$$\sin(\theta \sqrt{n} + \theta \sqrt{n+1}) \simeq \sin(2\theta \sqrt{\langle n \rangle_C}) \cos\left(\frac{\theta(n - \langle n \rangle_C)}{\sqrt{\langle n \rangle_C}}\right); \tag{3.56}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n-1} (n - \langle n \rangle_C)^2 \simeq \sigma^2 \tag{3.57}$$

Nous remarquons que la polarisation de l'atome décrite par la sphère de Bloch permet de rendre compte des propriétés statistiques liées à l'atome après son interaction avec le champ. La norme du vecteur de la sphère de Bloch et les deux valeurs propres correspondantes pour chaque instant, représentent un critère qui permet de caractériser l'intrication de l'atome avec le champ. Le calcul numérique de ces grandeurs sera présenté dans le chapitre 4.

### 3.2.4 Entropie

Lorsque l'état d'un système physique est décrit par une superposition de plusieurs états, les probabilités interviennent afin de traduire un manque d'information que l'entropie de von Neumann permet d'évaluer (cf chapitre 1).

Dans notre cas, l'atome est dans un état excité avant son interaction avec le champ donc d'entropie nulle (l'état étant parfaitement connu). Par contre, s'il est dans une superposition d'états (état fondamental et un seul état excité), l'entropie maximale  $S_A = \ln 2$  correspond aux deux états équiprobables.

À un instant ultérieur, l'entropie de l'atome dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  s'écrit comme

$$S_A(\theta) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_A(\theta) \ln \hat{\rho}_A(\theta)) \quad (3.58)$$

$$= -w_g(\theta) \log w_g(\theta) - (1 - w_g(\theta)) \log(1 - w_g(\theta)) \quad (3.59)$$

avec  $\hat{\rho}_A(\theta)$  l'opérateur densité de l'atome défini par (3.25).

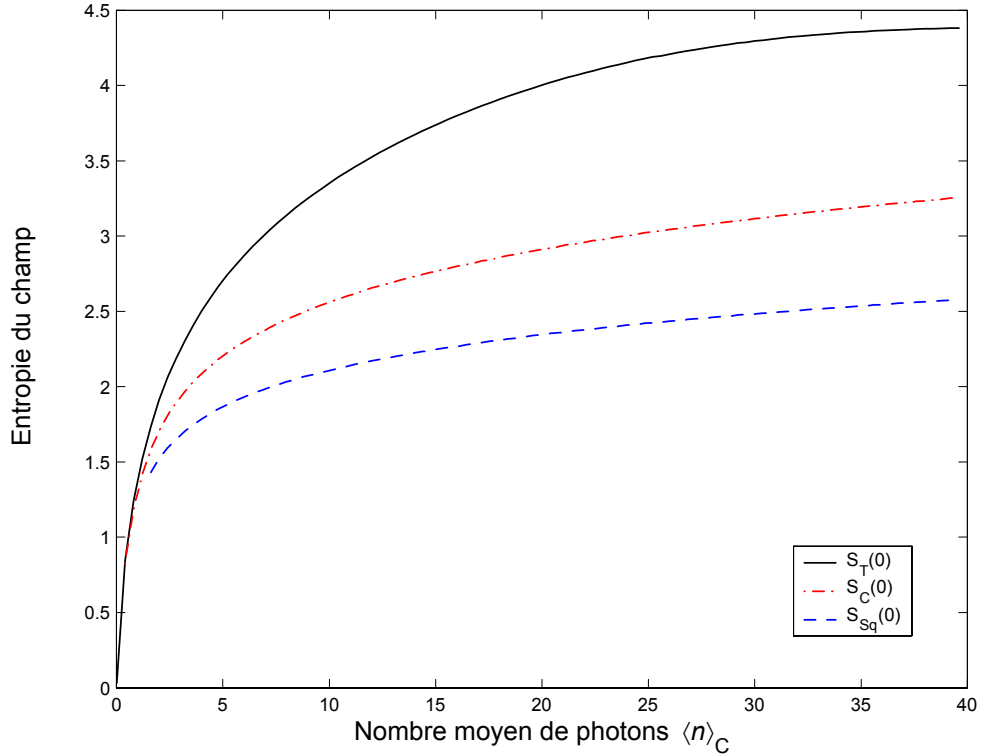


FIG. 3.6 – Evolution de l'entropie des champs (systèmes isolés) comprimé, cohérent et thermique respectivement en fonction du nombre de photons. L'entropie maximale est obtenue pour le champ thermique.

Calculons les expressions équivalentes pour le champ.

Avant son interaction avec la source, le champ électromagnétique d'atomes est décrit par une superposition linéaire d'états propres (orthogonaux) de l'opérateur  $\hat{N}$  tel que l'opérateur densité est donné par l'équation (3.19). Chaque projecteur  $|n\rangle\langle n|$  a une probabilité  $P(n)$  d'être réalisé. L'entropie d'un tel système est directement liée aux densités de probabilité telle que

$$S_F(0) = -\text{Tr}(\rho_F(0) \ln(\rho_F(0))) = -\sum_n P(n) \ln(P(n)) \quad (3.60)$$

Le calcul numérique de l'entropie pour les états comprimé, cohérent et thermique (avant leur interaction avec un autre sous système) en fonction de  $\langle n \rangle_C$

montre que l'état thermique a une entropie plus grande (voir figure 3.6). En effet, un état décrit par un mélange statistique est un état plus probable et que tous les états purement quantiques d'entropies minimales évoluent vers un mélange statistique d'états (couplage avec l'environnement).

L'évolution de cette entropie avec le temps  $\theta$  est

$$S_F(\theta) = -Tr (\hat{\rho}_F(\theta) \ln \hat{\rho}_F(\theta)) = -\sum_n P(n, \theta) \ln P(n, \theta) \quad (3.61)$$

Pour analyser avec plus de détails les propriétés des deux sous systèmes, nous reprendrons l'entropie et considérerons d'autres conditions de séparabilité (in-séparabilité) caractérisant l'intrication dans le chapitre suivant avec le nouveau critère que nous proposons.





# Chapitre 4

## Critères de séparabilité des états quantiques

Un état décrivant un système physique composé est intriqué (inséparable) lorsqu'il n'est pas factorisable en des états indépendants relatifs à chaque sous système (cf équation 1.24). Cependant, comme il n'a pas été établi que la non décomposition en un produit d'états indépendants implique l'inséparabilité ; des critères (ou tests) de séparabilité (inséparabilité) ont été alors proposés. Les inégalités de Bell qui sont déduites d'une théorie réaliste locale, représentent la première condition établie pour caractériser la séparabilité des états quantiques. En effet, un état intriqué viole les inégalités de Bell [3] mais un état qui satisfait les inégalités n'est pas nécessairement séparable. Ces inégalités qui représentent une condition nécessaire mais non suffisante pour décrire la séparabilité des fonctions d'ondes, nous montrent que les états peuvent être partiellement intriqués : on introduit alors la notion de degré de séparabilité (inséparabilité).

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier à l'aide des critères de séparabilité que nous avons retenus ci-dessous, l'évolution dans le temps des états intriqués générés par l'interaction de l'atome excité avec un champ comprimé. Ensuite, nous présentons un nouveau critère, fondé sur la différence de variations des distances. Il sera étudié dans le détail et comparé aux autres critères. Nous établirons des propriétés d'intrication remarquables pour le champ comprimé avec des temps caractéristiques. Ce qui nous permettra de déterminer le temps de cohérence (intrication) mis par les deux sous systèmes pour atteindre l'état d'équilibre.

### 4.1 Entropie conditionnelle

Parmi les critères connus pour tester l'intrication, l'entropie est le critère le plus souvent examiné. On définit l'entropie conditionnelle du système atome-champ

comme

$$S_{A|F}(\theta) = S_{A,F}(\theta) - S_F(\theta) = E(\theta) \quad (4.1)$$

avec  $S_{A,F}(\theta)$  l'entropie totale de l'atome-champ et  $S_F(\theta)$  celle du champ. L'expression (4.1) représente le manque d'information sur l'atome lorsque toutes les propriétés du champ sont déterminées. L'entropie d'un système ex-

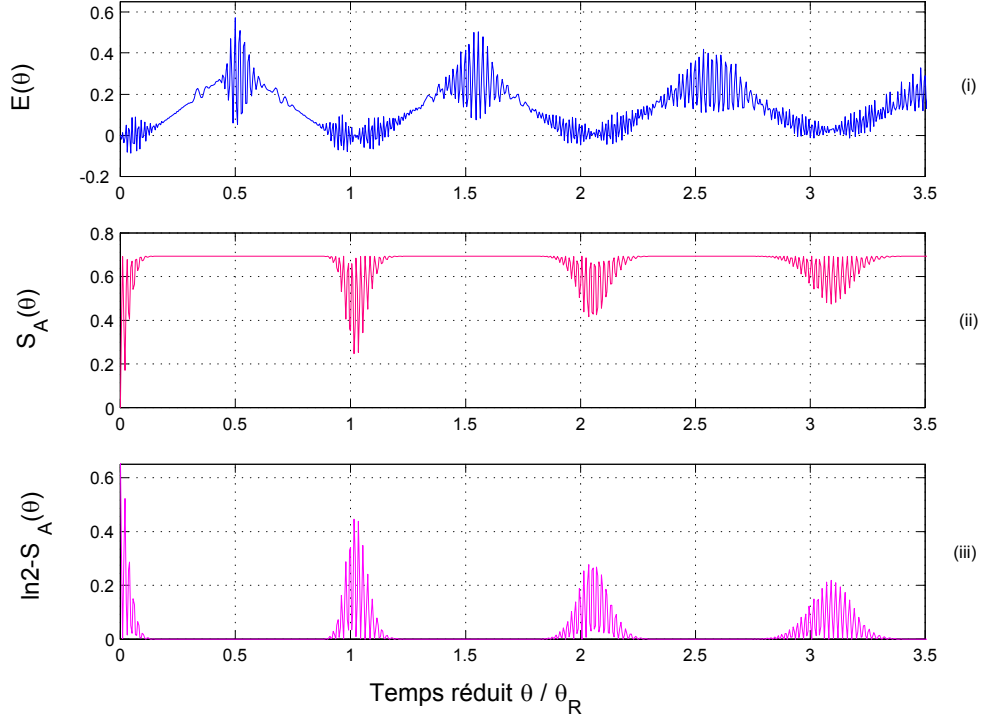


FIG. 4.1 – Comparaison de (i) l'entropie conditionnelle  $E(\theta)$  avec (ii) l'entropie de l'atome dans un état excité  $S_A(\theta)$  et (iii)  $\ln 2 - S_A(\theta)$ . Le Champ étant décrit par un état comprimé avec un facteur de compression  $r^* \approx (1/6) \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ;  $\langle n \rangle_C = 36$ .

primée en termes de matrices densités marginales ainsi que les valeurs propres déduites de cette grandeur ont déjà été analysées [47]. Cependant, le fait de trouver des valeurs propres négatives dans le spectre de l'entropie n'a été relié à l'inséparabilité des états quantiques que récemment [16].

Exprimée par von Neumann

$$S_{A|F} = -Tr [\hat{\rho}_{AF} \ln \hat{\rho}_{A|F}] \quad (4.2)$$

avec  $\hat{\rho}_{A|F}$  l'opérateur d'amplitude conditionnel

$$\hat{\rho}_{A|F} = \exp(-\sigma_{AF}); \quad \sigma_{AF} = 1_A \otimes \ln \hat{\rho}_F - \ln \hat{\rho}_{AF} \quad (4.3)$$

où  $1_A$  est la matrice unité dans l'espace de Hilbert associée à l'atome, on montre que celle-ci ( $S_{A|F}(\theta)$ ) peut prendre des valeurs négatives lorsque les états sont intriqués. En effet, dans le cas où les valeurs propres de l'opérateur  $\rho_{A|F}$  sont supérieures à 1 ( $\sigma_{AF} \not\geq 0$ ), l'expression (4.1) est négative et dans le cas où (4.1) est positive, il est nécessaire d'avoir des valeurs propres de  $\hat{\rho}_{A|F}$  inférieures à 1 (donc  $\sigma_{AF} > 0$ ). Ce nouvel opérateur  $\hat{\rho}_{A|F}$  qui n'est pas un opérateur densité permet donc de caractériser l'intrication. Par ailleurs, l'entropie conditionnelle

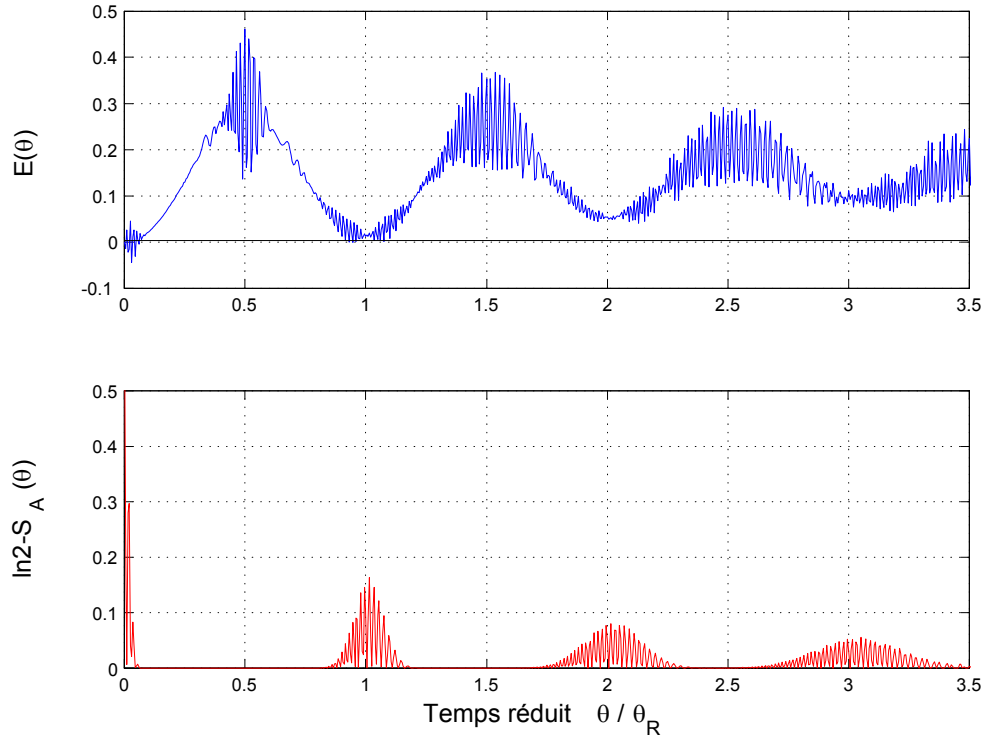


FIG. 4.2 – Evolution des entropies  $E(\theta)$  (i) et de  $(\ln 2 - S_A(\theta))$  (ii) avec le temps  $\theta/\theta_R$  dans le cas d'un champ cohérent  $\langle n \rangle_C = 36$ . Un échange d'information entre l'atome excité et le champ cohérent est observé mais le temps d'intrication est très court par rapport au système atome-champ comprimé.

peut se simplifier dans notre cas. Nous avons en effet  $S_{A,F}(\theta) = S_{A,F}(0)$  car le spectre des valeurs propres du système atome-champ est invariant sous la transformation unitaire. D'autre part, à  $\theta = 0$  les deux sous systèmes étant indépendants, nous avons donc  $S_{A,F}(0) = S_A(0) + S_F(0)$ . De plus, comme nous partons d'un état atomique bien défini (état excité)  $S_A(0) = 0$ , la condition d'inséparabilité devient alors

$$E(\theta) = S_F(0) - S_F(\theta) \leq 0 \quad (4.4)$$

L'évolution de l'entropie conditionnelle pour un champ comprimé ainsi que l'entropie de l'atome en fonction du paramètre  $\frac{\theta}{\theta_R}$  est représentée sur la figure

4.1. Nous avons choisi de prendre un nombre moyen de photons correspondant à la partie cohérente égal à  $\langle n \rangle_C = 36$  avec lequel nous obtenons une compression du champ égale à  $r^* = 0.8285$ . Le choix de cette valeur de  $\langle n \rangle_C$  nous permet d'avoir les meilleurs résultats aussi bien lors d'un calcul numérique dans le cadre du modèle de (JC) que pour l'approximation du facteur de compression (cf 2.44).

Les états du système total sont intriqués au bout de chaque oscillation de Rabi ( $E(\theta) \leq 0$ ). L'intrication disparaît à  $\theta \geq 3\theta_R$ . D'autre part, on voit apparaître des maxima à  $\theta_M = k\theta_0$  ( $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$ );  $k = 1, 3, \dots$  qui s'atténuent rapidement après quelques pseudo-périodes. Ces extrema présentent à leur tour des oscillations pseudo périodiques autour de  $\theta_M$ . Notons par ailleurs que  $S_{A|F}(\theta) < S_A(\theta)$  quelle que soit la valeur de  $\theta$  ce qui montre que l'intrication est un effet quantique qui fait diminuer le désordre qui peut exister dans un système. Si pour un champ comprimé, nous avons observé l'intrication pendant

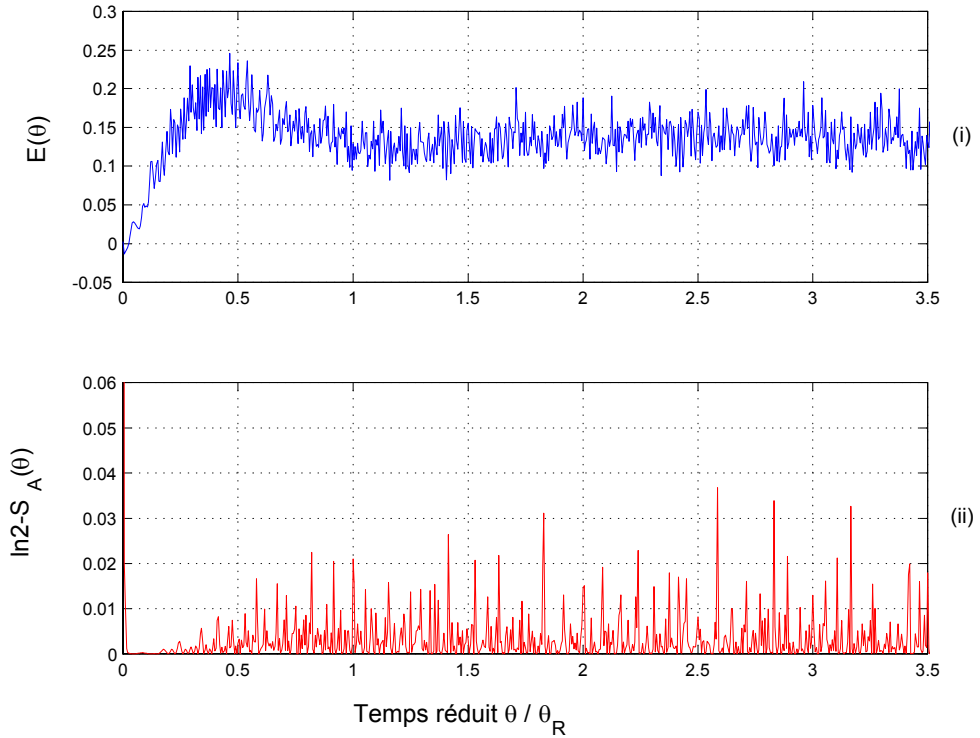


FIG. 4.3 – Evolution de l'entropie conditionnelle de l'atome ayant interagi avec (i) un champ thermique ( $\langle n \rangle_C = 36$ ) et (ii) celle de l'atome ( $\ln 2 - S_A(\theta)$ ). Aucun échange cohérent entre l'atome et le champ thermique n'a lieu.

un temps  $\theta < 3\theta_R$ , il n'en est pas de même pour un champ cohérent. En effet, le calcul numérique (voir figure 4.2) met en évidence une intrication des états au voisinage immédiat de l'origine des temps. D'autre part, nous constatons

que l'entropie d'un atome excité ayant interagi avec un champ comprimé est inférieure à celle de l'atome ayant interagi avec un champ cohérent autour de chaque oscillation de Rabi. Cette comparaison nous montre que le manque d'informations que l'on peut avoir sur l'atome est moindre lorsque ce dernier interagit avec un champ purement quantique.

Cependant, l'entropie de l'atome est maximale (égale à  $\ln 2$ ) dans les deux cas lorsque  $\theta = \theta_M$  (voir figures 4.1 (iii) et 4.2 (iii)). L'atome étant décrit par un mélange statistique de deux états équiprobables  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , état non intriqué avec celui du champ. Par ailleurs, nous remarquons que lorsque l'entropie du champ est maximale autour de chaque oscillation de Rabi (minimale autour de  $\theta_M$ ), celle de l'atome est respectivement minimale (maximale) caractérisant ainsi l'échange d'information non locale entre les deux sous systèmes.

En ce qui concerne le champ thermique, l'entropie conditionnelle qui lui est associée ne présente aucune intrication et l'entropie de l'atome ne présente pas d'oscillations en phase; ce qui explique l'aspect totalement aléatoire des courbes (i) et (ii) de la figure 4.3.

## 4.2 Le vecteur de la sphère de Bloch

Nous avons décrit plus haut (voir chapitre 3) l'état de polarisation de l'atome par le vecteur de Bloch  $\vec{R}$  et nous avons également déterminé ses trois composantes  $R_1, R_2$  et  $R_3$  dans l'espace Euclidien. La condition d'inséparabilité pour le système atome-champ est vérifiée pour

$$\left| \vec{R}(\theta) \right| = \sqrt{|R_1(\theta)|^2 + |R_2(\theta)|^2 + |R_3(\theta)|^2} < 1 \quad (4.5)$$

Dans le cas où  $\langle n \rangle_C \gg 1$ , une expression de (4.5) beaucoup plus simple a été établie [48]

$$R^2(\theta) \simeq \left| \sum_{n=0}^{\infty} P_F(n; 0) \exp \left[ \frac{in\theta}{4\langle n \rangle_C^{3/2}} \right] \right|^2 \quad (4.6)$$

qui devient dans le cas d'un état comprimé

$$R^2(\theta) = \exp \left( -\frac{\theta^2}{16 \langle n \rangle_C^2 e^{2r_s}} \right) \quad (4.7)$$

Les résultats obtenus en utilisant l'approximation (4.7) sont en excellent accord avec ceux déduits du calcul numérique effectué pour les champs cohérent et thermique lorsque l'atome est initialement décrit comme une superposition d'états tels que  $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Par ailleurs, à partir des valeurs propres  $|g_1|$  et  $|g_2|$  calculées précédemment (voir propriétés liées à l'atome dans le chapitre 3), nous pouvons développer

l'état du système atome-champ dans les bases orthonormées  $\{|u_1(\theta)\rangle, |u_2(\theta)\rangle\}$  et  $\{|v_1(\theta)\rangle, |v_2(\theta)\rangle\}$  respectivement de l'atome et du champ, bases déduites de la décomposition de Schmidt [23] :

$$|\psi_{AF}(\theta)\rangle = g_1(\theta) |u_1(\theta)\rangle \otimes |v_1(\theta)\rangle + g_2(\theta) |u_2(\theta)\rangle \otimes |v_2(\theta)\rangle \quad (4.8)$$

Le nombre de Schmidt qui correspond au nombre de valeurs propres ( $|g_1(\theta)|$  et

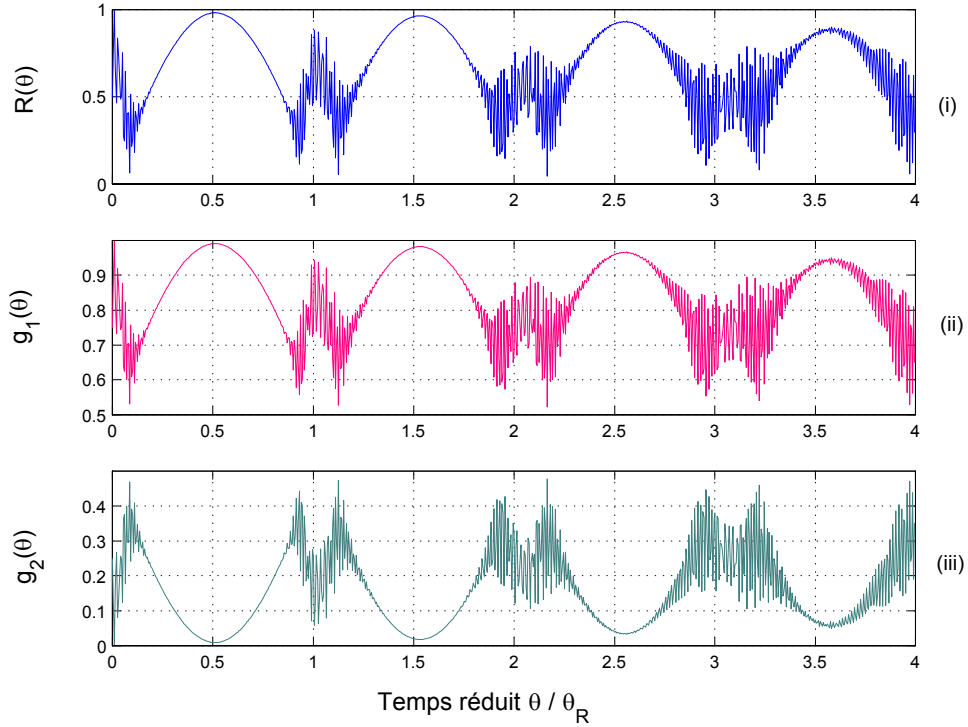


FIG. 4.4 – Variations de la norme du vecteur de Bloch  $R(\theta)$  (i) et de ses deux valeurs propres  $g_1(\theta)$  (ii) et  $g_2(\theta)$  (iii). L'atome étant initialement dans un état excité et le champ est décrit par un état comprimé. Le facteur de compression est  $r^* \approx (1/6) \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ,  $\langle n \rangle_C = 36$ .

$|g_2(\theta)|$ ) est égal à deux pour cet état. La décomposition de Schmidt réduit ainsi la dimension de l'espace de Hilbert associé au champ (supérieure à deux dans la base  $\{|n\rangle\}$ ) à la même dimension de l'atome lorsqu'il est décrit par la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ . À cet effet, les matrices de  $\hat{\rho}_A$  et  $\hat{\rho}_F$  sont déduites immédiatement

$$\hat{\rho}_A(\theta) = \begin{pmatrix} |g_1(\theta)|^2 & 0 \\ 0 & |g_2(\theta)|^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_F(\theta) = \begin{pmatrix} |g_1(\theta)|^2 & 0 \\ 0 & |g_2(\theta)|^2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Dans le cas où la longueur de  $\vec{R}$  est égale à l'unité,  $|g_1(\theta)| = 1$ ,  $|g_2(\theta)| = 0$  d'après (3.47) et (3.48). L'état du système décrit par (4.8) est un produit tensoriel direct de deux états purs des deux sous systèmes. On peut alors affirmer

que lorsqu'un sous système quantique est dans un état pur, il ne peut jamais être intriqué avec l'autre sous système. Dans le cas où  $|\vec{R}| < 1$ , le nombre de Schmidt est égal à deux, par conséquent l'état  $|\psi_{AF}(\theta)\rangle$  est décrit par une superposition de  $|u_1(\theta), v_1(\theta)\rangle$  et  $|u_2(\theta), v_2(\theta)\rangle$  (état intriqué). L'évolution des

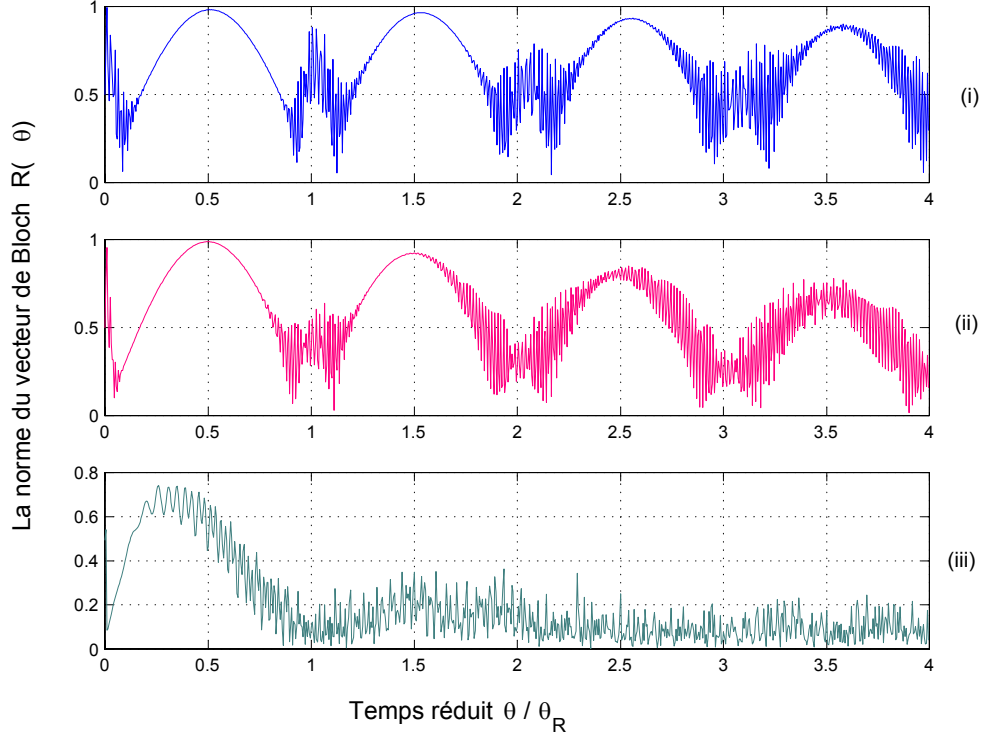


FIG. 4.5 – Comparaison des normes de vecteurs de Bloch d'un atome ayant interagi avec un champ comprimé ( $r^* \approx (1/6) \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ;  $\langle n \rangle_C = 36$ ) (i); un champ cohérent (ii) et un champ thermique (iii).

valeurs  $|\vec{R}(\theta)|$ ,  $|g_1(\theta)|$  et  $|g_2(\theta)|$  en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_R}$  pour le champ comprimé est représentée dans la figure 4.4. Pour  $\theta < 2\theta_R$ , le temps mis par l'atome pour retrouver l'état pur correspond à une période de Rabi, appelé aussi temps de *résurgence*. Par ailleurs, le temps de *collapse*, temps mis pour passer d'un état pur à un état intriqué, équivaut pratiquement à une demie période de Rabi. Cependant, les maxima de  $R(\theta)$  ne présentent pas d'oscillations comme pour  $E(\theta)$ . En revanche, nous n'observons de réapparition de maxima au terme de chaque oscillation de Rabi que dans le cas de  $R(\theta)$ , caractérisant ainsi l'intrication partielle des états (présence également d'états séparables). D'autre part, nous soulignons également l'importance de  $\theta_0$  (première demi période de Rabi) [49] puisqu'il s'agit du premier instant où les états intriqués redeviennent séparables d'une part. D'autre part, l'atome est décrit à cet instant par

un état pur lorsque  $\langle n \rangle_C$  est très grand. Ainsi, nous pouvons obtenir un atome décrit par un état pur à  $\theta = \theta_0$ , même si initialement nous n'avons aucune information sur son état.

Quant au champ thermique, la comparaison de  $\left| \vec{R} \right|_{th}$  avec  $\left| \vec{R} \right|_{coh}$  et  $\left| \vec{R} \right|_{squ}$  ne montre aucune propriété d'intrication. Au bout d'une période de Rabi, la re-émission pseudo-périodique a complètement disparu (voir figure 4.5).

Ces deux critères  $E(\theta)$  et  $\left| \vec{R}(\theta) \right|$  ne conduisant pas aux mêmes résultats et ne représentant que des conditions nécessaires mais non suffisantes, il est indispensable d'en rechercher un autre susceptible d'être complet. Le critère de réduction a été proposé à cette fin [14], [15], [18], [50].

### 4.3 Le critère de réduction

Cette nouvelle condition pour caractériser l'intrication, introduit un opérateur linéaire  $\Gamma = F \otimes I$ , où  $F : \rho \longrightarrow (Tr\rho) - \rho$  est un opérateur agissant seulement sur l'un des deux sous systèmes ( $B$  par exemple) et  $I$  un opérateur identité agissant sur  $A$  [18, 50]. Cet opérateur transforme de manière linéaire l'opérateur densité  $\rho_{AB}$  du système composé en un autre opérateur densité hermitique

$$\Gamma : \rho_{AB} \longrightarrow \Lambda_{AB} = (1_A \otimes \rho_B) - \rho_{AB} \quad (4.10)$$

définis tous les deux ( $\rho_{AB}$  et  $\Lambda_{AB}$ ) dans le même espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Les spectres de leurs valeurs propres sont invariants sous la transformation unitaire  $U_A \otimes U_B$ .

Si  $\rho_{AB} = \sum_i w_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$  (état séparable) alors toute transformation positive (ou opérateur) agissant sur  $\rho_{AB}$  donne un autre opérateur densité semi positif. En d'autres termes, si la factorisation de  $\rho_{AB}$  existe alors les éléments de la matrice  $\Lambda_{AB}$  sont tous définis semi positifs. Cependant, connaître le signe de chaque élément de matrice lorsque celle ci est de dimension très grande nous paraît moins simple que lorsque l'on a affaire seulement aux valeurs propres. Donc, si  $\rho_{AB}$  est factorisable il suffit de vérifier que toutes les valeurs propres de  $\Lambda_{AB}$  soient positives.

À présent, faisons agir l'opérateur positif  $\Gamma = F_F \otimes I_A$  sur  $\rho_{AF}(\theta)$  défini par (3.24) tel que  $F_F$  et  $I_A$  agissent respectivement sur le champ électromagnétique et l'atome.

Les éléments de la matrice  $\Lambda_{AF}(\theta) = (1_A \otimes \rho_F(\theta)) - \rho_{AF}(\theta)$ , ( $\rho_F = Tr_A(\rho_{AF})$ )



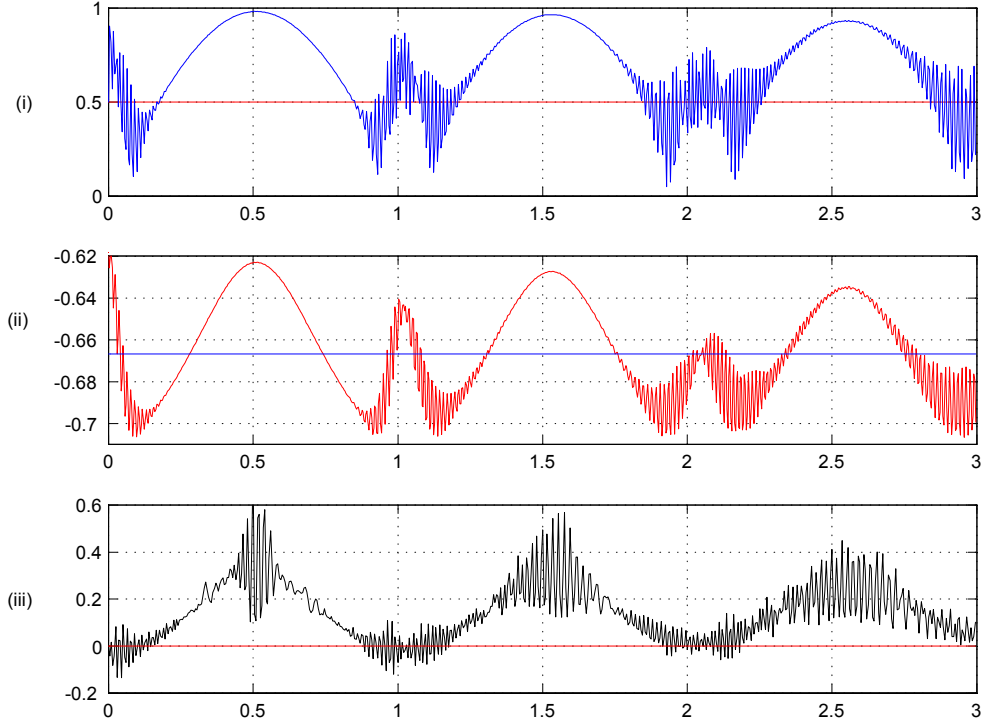


FIG. 4.6 – Critères  $R(\theta)$  : (i);  $\lambda_-(\theta)$  : (ii);  $D(\theta)$  : (iii), en fonction de  $\theta/\theta_R$ . Le rayonnement est décrit par un état comprimé ( $r^* \approx \arg \sinh(2 \langle n \rangle_C)$ ,  $\langle n \rangle_C = 36$ ) et l'atome est dans un état excité ( $a = 0; b = 1$ ).

sont :

$$\begin{aligned} \Lambda_{AF}(\theta) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} b_n b_m^* |g, n\rangle \langle g, m| + \sum_{n,m=0}^{\infty} (a_n a_m^* + b_n b_m^* - a_n b_m^*) |g, n\rangle \langle e, m| + \\ & \sum_{n,m=0}^{\infty} (a_n a_m^* + b_n b_m^* - a_m^* b_n) |e, n\rangle \langle g, m| + \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n a_m^* |e, n\rangle \langle e, m| \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des coefficients dépendants du temps  $\theta$ . Cette nouvelle matrice doit être un opérateur densité telle que  $Tr(\Lambda_{AF}(\theta)) = 1, \forall \theta$  et positive si et seulement si

$$|\Lambda_{nm}(\theta)|^2 - \Lambda_{nn}(\theta) \Lambda_{mm}(\theta) < 0 \quad (4.12)$$

Lorsque les états du système physique sont séparables alors toutes les valeurs propres de la matrice  $\Lambda_{AF}(\theta)$  sont positives. Les valeurs propres de la matrice  $\Lambda_{AF}(\theta)$  de dimension assez élevée  $2N \times 2N$ , avec  $N \sim 250$ , sont calculées numériquement dans le cas d'un champ comprimé. Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous trouvons deux valeurs propres négatives dont l'une est très faible par

rapport l'autre. Nous avons représenté sur la figure 4.6 (ii) l'évolution de la valeur la plus élevée  $\lambda_-(\theta)$  en fonction de  $\frac{\theta}{\theta_R}$ . Nous constatons un comportement similaire à  $R(\theta)$  (figure 4.6 (i)) où l'on note l'absence d'oscillations au niveau des maxima et une intrication "diluée" autour des valeurs  $\theta_R$  et  $2\theta_R$ . Par ailleurs, nous pouvons exprimer les bornes inférieure et supérieure de  $\lambda_-(\theta)$  comme :

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq \lambda_-(\theta) \leq -\frac{1}{2} \quad (4.13)$$

qui correspondent également aux valeurs propres de la matrice

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \beta & \frac{1}{2} - i\gamma \\ \frac{1}{2} + i\gamma^* & 1 - \beta \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

avec  $\beta = \sum_n |b_n|^2$  et  $\gamma = \sum_n (b_n b_n^* - a_n b_n^*)$ . Nous pouvons vérifier que cette matrice est un opérateur densité puisque  $\text{Tr}(\Lambda') = 1$  quelle que soit la valeur de  $\beta$ . Cette matrice à deux dimensions, n'est en fait qu'une forme simplifiée de  $\Lambda_{AF}(\theta)$  qui elle, est de dimension très grande. Dans le cas où  $\beta = 1$ , les valeurs propres  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  correspondent respectivement aux valeurs de  $\gamma = \frac{2}{3}, 1$ . D'autre part, lorsque  $\langle n \rangle_C \gg 1$  et  $\theta \ll \theta_R$ , des approximations sont possibles pour

$$\beta \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \cos\left(2\theta\sqrt{\langle n \rangle_C}\right) \quad (4.15)$$

$$\gamma \simeq \sin\left(\frac{\theta}{2\sqrt{\langle n \rangle_C}}\right) - e^{-\frac{\theta^2}{8}} \sin\left(2\theta\sqrt{1 + \langle n \rangle_C}\right) \quad (4.16)$$

expressions obtenues lorsque nous approximations  $\langle n \rangle_S$  et  $\sigma_S^2$  donnés respectivement par les équations (2.36) et (2.37) à  $\langle n \rangle_S \simeq \langle n \rangle_C$  et  $\sigma_S^2 \simeq \langle n \rangle_C$ .

## 4.4 Critère de différence de variations des distances

### 4.4.1 Définition

Nous avons tenté de définir un critère supplémentaire susceptible d'être plus complet (condition nécessaire et suffisante). Notre idée étant, par analogie avec l'entropie conditionnelle, d'évaluer l'écart des densités de probabilité  $P(n; 0)$  et  $P(n; \theta)$ .

Le critère que nous proposons donc pour l'inséparabilité des états quantiques est fondé sur la différence de variations des distances [24]. Ce critère est écrit sous la forme :

$$D(\theta) = \sum_n \left( \sqrt{P_F(n)} - \sqrt{P_F(n; \theta)} \right) < 0 \quad (4.17)$$

avec  $P_F(n)$  et  $P_F(n; \theta)$  les densités de probabilités de  $n$  de la radiation respectivement avant son interaction avec l'atome et à un instant ultérieur à la séparation des sous systèmes.

Nous notons l'existence d'une grande similitude entre le critère de l'entropie conditionnelle et notre critère où des variations analogues entre  $D(\theta)$  et  $E(\theta)$  sont observées (voir figure 4.7), mais la nouvelle condition que nous présentons est d'utilisation plus simple que l'entropie conditionnelle.

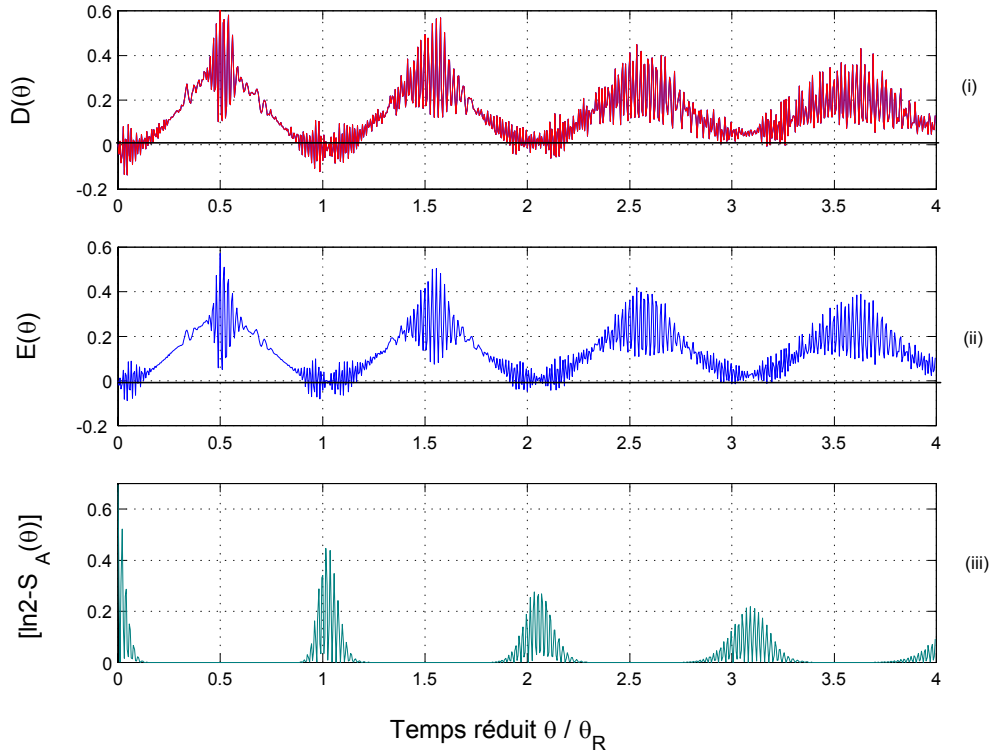


FIG. 4.7 – Illustration de la similitude existant entre le critère de différence de variations de distances avec le critère de l'entropie conditionnelle. Le champ étant décrit par un état comprimé ( $r^* = 0.8283$ ;  $\langle n \rangle_C = 36$ ) et l'atome étant dans un état excité.

En partant de l'équation (4.1), nous pouvons réécrire l'entropie conditionnelle sous une autre forme

$$E(\theta) = \sum_n (P_F(n; \theta) \ln P_F(n; \theta) - P_F(n; 0) \ln P_F(n; 0)) \quad (4.18)$$

En tenant compte des inégalités  $z^2 - \sqrt{z} \leq z \log z \leq z^2 + z$ ,  $z \in [0, 1]$ , nous montrons que

$$E(\theta) - N(\theta) \leq D(\theta) \leq E(\theta) - M \quad (4.19)$$

avec

$$M = \sum_n \left( P_F(n; 0) - P_F^2(n; 0) - \sqrt{P_F(n; 0)} \right), \quad -1 \leq M \leq 0 \quad (4.20)$$

et

$$N(\theta) = \sum_n \left( P_F^2(n; \theta) - P_F(n; \theta) + \sqrt{P_F(n; \theta)} \right), \quad 0 \leq N(\theta) \leq 1 \quad (4.21)$$

Pour des valeurs de  $\theta_\ell$  tel que  $N(\theta_\ell) = 0$  d'une part et  $M = 0$  d'autre part, nous avons  $D(\theta_\ell) = E(\theta_\ell) = 0$ . La figure 4.8 montre effectivement que ces deux paramètres s'annulent simultanément.

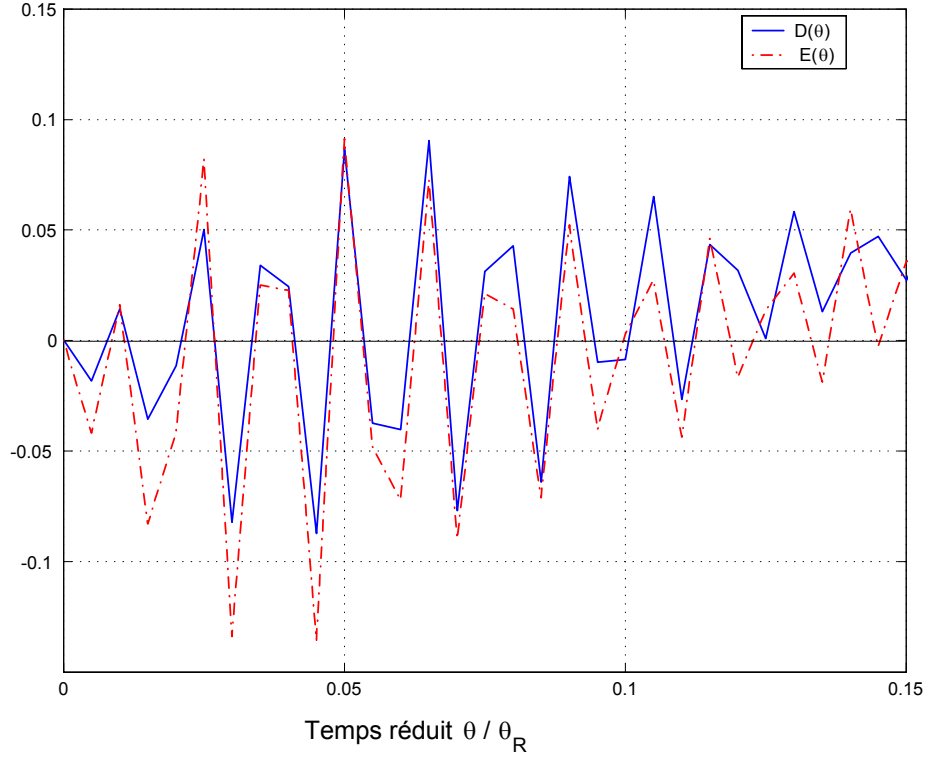


FIG. 4.8 – Illustration de l'intrication instantannée du champ comprimé par le critère  $D(\theta)$ . D'autre part, nous montrons que pour plusieurs valeurs de  $\theta_\ell$ , nous avons  $E(\theta_\ell) \simeq D(\theta_\ell) = 0$ .

#### 4.4.2 Bornes de $D(\theta)$

Mathématiquement,  $D(\theta)$  n'est pas une distance mais la racine carrée d'une distance (voir Annexe C) qui peut, néanmoins, être bornée par la norme  $\ell_1$  [20].

Ces limites s'avèrent trop larges pour notre objectif (voir Annexe C), d'autres bornes ont été recherchées à partir de l'expression de  $P_F(n)$  pour  $a = 0$  et  $n \simeq \langle n \rangle$ , et apparaissent plus précises pour l'encadrement de  $D(\theta)$  (cf Annexe C) :

$$D(\theta) \geq \sum_n \sqrt{P_F(n)} \left( 1 - \sqrt{\frac{n}{\langle n \rangle} + \cos^2(\theta \sqrt{n+1})} \right) \quad (4.22)$$

$$D(\theta) \leq \sum_n \sqrt{P_F(n)} \left( 1 - \cos(\theta \sqrt{n+1}) \right) \quad (4.23)$$

En outre, nous montrons en Annexe B, que l'existence d'une relation entre l'expression de  $D(\theta)$  et celle de l'entropie de Fisher (voir définition en Annexe B) nous amène à écrire pour  $\theta \rightarrow 0$

$$D(\theta) \leq \sqrt{|S(\theta) - S(0)|} = \sqrt{E(\theta)} \quad (4.24)$$

#### 4.4.3 Propriétés de $D(\theta)$

L'évolution de  $D(\theta)$  est représentée sur les figures 4.6 (iii), 4.7 (i) et 4.9. Nous pouvons démontrer les trois propriétés suivantes :

- $D(\theta) \leq 0$  autour de  $\theta_k = k\theta_R$ ,  $k = 0, 1, 2$ .
- $\frac{dD(\theta)}{d\theta} \leq 0$  lorsque  $\theta \rightarrow 0$ ,  $n \simeq \langle n \rangle \gg 1$ .
- $D(\theta_0) \rightarrow D_\infty \simeq \frac{1}{4}$  lorsque  $\langle n \rangle_C \rightarrow \infty$  avec  $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$ .

La première propriété montre bien que l'intrication a lieu aux mêmes instants que les autres critères ( $E(\theta)$ ,  $R(\theta)$  et  $\lambda_-(\theta)$ ). L'intrication disparaît au delà de  $\theta = 2\theta_R$  ce qui implique que les deux sous systèmes ne retrouvent pas de manière immédiate leur équilibre. Ce n'est pas le cas pour le champ cohérent où une intrication est observée uniquement pour  $\theta \rightarrow 0$ . En ce qui concerne le champ thermique, nous ne remarquons d'après la figure 4.9 (iii) aucune corrélation quantique et nous pouvons conclure que le système fortement couplé à son environnement ne présente pas de corrélations quantiques.

La deuxième propriété révèle que le champ devient instantanément intriqué avec l'atome (propriété bien illustrée par la figure 4.8). En effet, nous pouvons écrire la d.d.p. lorsque  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\frac{n}{\langle n \rangle} \simeq 1$  et  $\langle n \rangle \gg 1$  sous la forme suivante

$$P_F(n, \theta) \simeq P_F(n, 0) \left( \cos^2(\theta \sqrt{n+1}) + \frac{n}{\langle n \rangle} \sin^2(\theta \sqrt{n}) \right) \quad (4.25)$$

De cette expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dD(\theta)}{d\theta} &= -\theta \sum_n \frac{P_F(n, 0)}{\sqrt{P_F(n, \theta)}} \left( \frac{n^2}{\langle n \rangle} - (n+1) \right) \\ &= -\theta \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( \frac{n^2}{\langle n \rangle} - (n+1) \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

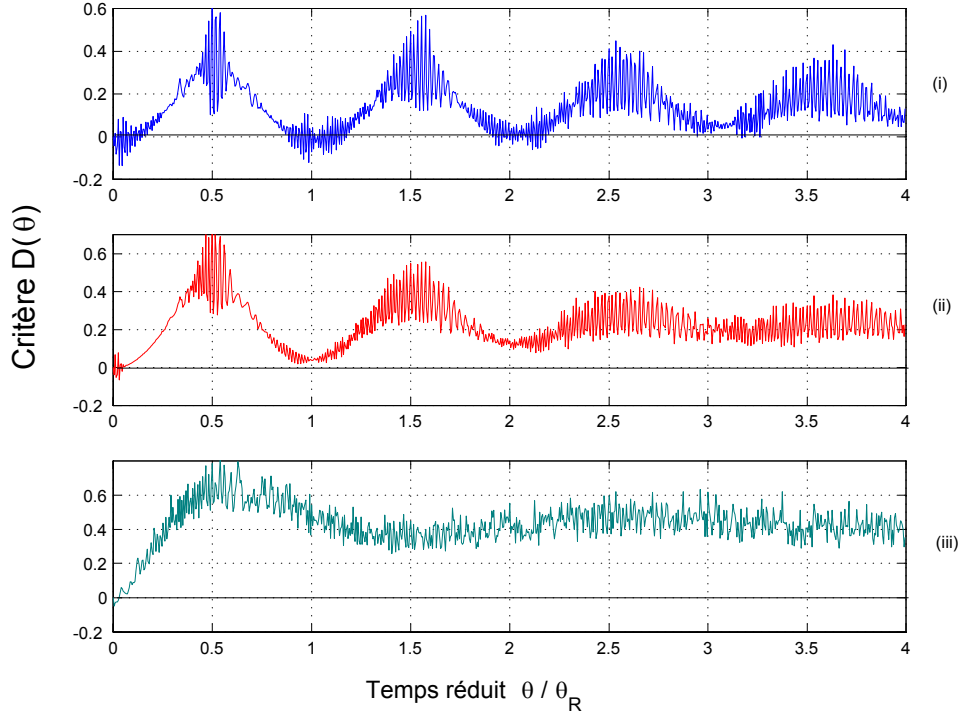


FIG. 4.9 – Analyse des propriétés statistiques des champs comprimé (i), cohérent (ii) et thermique (iii) à l’aide du critère de différence de variations des distances  $D(\theta)$ . Le temps de cohérence est plus long pour un champ comprimé où le facteur de compression est  $r^* \approx (1/6) \arg \sin h(2\langle n \rangle_C) = 0.8283$ ;  $\langle n \rangle_C = 36$ .

Sachant que

$$\sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( \frac{n^2}{\langle n \rangle} - (n+1) \right) \geq \sum_n P_F(n, 0) \left( \frac{n^2}{\langle n \rangle} - (n+1) \right) = 0 \quad (4.27)$$

nous déduisons que la dérivée de  $D(\theta)$  est bien négative.

Quant à la troisième propriété, nous montrons l’existence d’un maximum autour de la demi-période de l’oscillation de Rabi comme dans les autres critères. En effet, nous voyons apparaître des maxima qui s’atténuent rapidement avec le temps. Ces extrema présentent des oscillations autour de chaque  $\theta_M = \frac{k}{2}\theta_R$ ;  $k = 1, 3, \dots$  tel que pour  $\theta_0$  (premier instant où les états se séparent)  $D(\theta_0) \simeq \frac{1}{4}$ . L’entropie conditionnelle atteint la valeur maximale  $\frac{1}{e}$  tandis que  $\lambda_-(\theta_0)$  et  $R(\theta_0)$  qui présentent des maxima sans oscillations, atteignent respectivement les valeurs  $-0.62$  et  $1$ . Cependant, nous notons que la norme du vecteur de Bloch  $R(\theta_0)$  est une grandeur beaucoup plus significative puisqu’elle nous renseigne sur la pureté de l’état du système.

#### 4.4.4 Expression approchée de $D(\theta)$

Les variations de  $D(\theta)$  que nous avons représentées dans les figures 4.6 (iii), 4.7 et 4.8 sont déduites d'un calcul exact de (4.17). Néanmoins, afin d'étudier analytiquement la variation de  $D(\theta)$ , une approximation s'avère nécessaire. Nous nous plaçons dans le cas où le nombre de photons est élevé, le degré de compression est modéré et les temps courts.

L'expression approchée de  $D(\theta)$  dont nous présentons quelques étapes du calcul en annexe D, est alors la suivante

$$D(\theta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle_C}} \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2\sqrt{\langle n \rangle_C}} \right) + e^{-\frac{\sigma^2(\theta-\theta_0)^2}{4\langle n \rangle_C}} \cos \left( 4\theta\sqrt{\langle n \rangle_C} \right) \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi \langle n \rangle_C}} \left( \cos \left( 2\theta\sqrt{\langle n \rangle_C + 1} \right) - \cos \left( 2\theta\sqrt{\langle n \rangle_C} \right) \right) \quad (4.28)$$

$$\left( e^{-\frac{\sigma^2\theta^2}{4\langle n \rangle_C}} + e^{-\frac{\sigma^2(\theta-\theta_R)^2}{4\langle n \rangle_C}} \right) \quad (4.29)$$

pour  $\theta \in [0, \theta_R]$ ,  $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$  et  $\sigma^2$  donnée par l'équation (2.37). Le tracé de l'expression approchée de  $D(\theta)$  avec sa valeur calculée numériquement est représentée sur la figure 4.10. Cette approximation fait bien apparaître les différentes fréquences d'oscillations du système. En effet, le champ comprimé oscille avec une fréquence pseudo-périodique  $\frac{2\sqrt{\langle n \rangle_C}}{\pi}$  autour de  $\theta = \theta_0$ , deux fréquences  $\frac{\sqrt{\langle n \rangle_C + 1}}{\pi}$  et  $\frac{\sqrt{\langle n \rangle_C}}{\pi}$  autour de  $\theta = \theta_R$  et finalement une fréquence très courte  $\frac{1}{4\pi\sqrt{\langle n \rangle_C}}$  qui correspond à une période de longue durée du système.

### 4.5 Analyse de $R$ , $\lambda_-$ et $D$ en fonction du nombre de photons

Les critères que nous venons d'énoncer sont étudiés en fonction du temps  $\theta$ , pour des valeurs moyennes de  $n$  correspondant à la partie cohérente très grandes ( $\langle n \rangle_C \gg 1$  et  $\leq 100$ ). Nous avons mis en évidence des temps caractéristiques :  $\theta_R$  correspondant à l'oscillation de Rabi, où l'intrication a lieu,  $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$  instant où les états des deux sous systèmes deviennent séparables. Cependant, nous pouvons montrer que pour des valeurs de  $\langle n \rangle_C$  petites ( $\langle n \rangle_C \leq 5$ ),  $R(\theta) \rightarrow 1$ ,  $\lambda_-(\theta) \rightarrow -0.62$  et  $D(\theta) \rightarrow \frac{1}{4}$  autour de  $\theta_0$  ce qui laisse supposer la présence d'états partiellement séparables.

À cette fin, nous avons poursuivi la comparaison des propriétés du champ comprimé avec les trois critères cette fois en fonction de  $\langle n \rangle_C$ , à un instant bien particulier  $\theta = \theta_0$ . Nous représentons sur la figure 4.11 le tracé des trois courbes  $\bar{R} = R(\theta_0) - \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda_-(\theta_0) + \frac{2}{3}$  et  $D(\theta_0)$  en fonction de  $\langle n \rangle_C \leq 5$ .

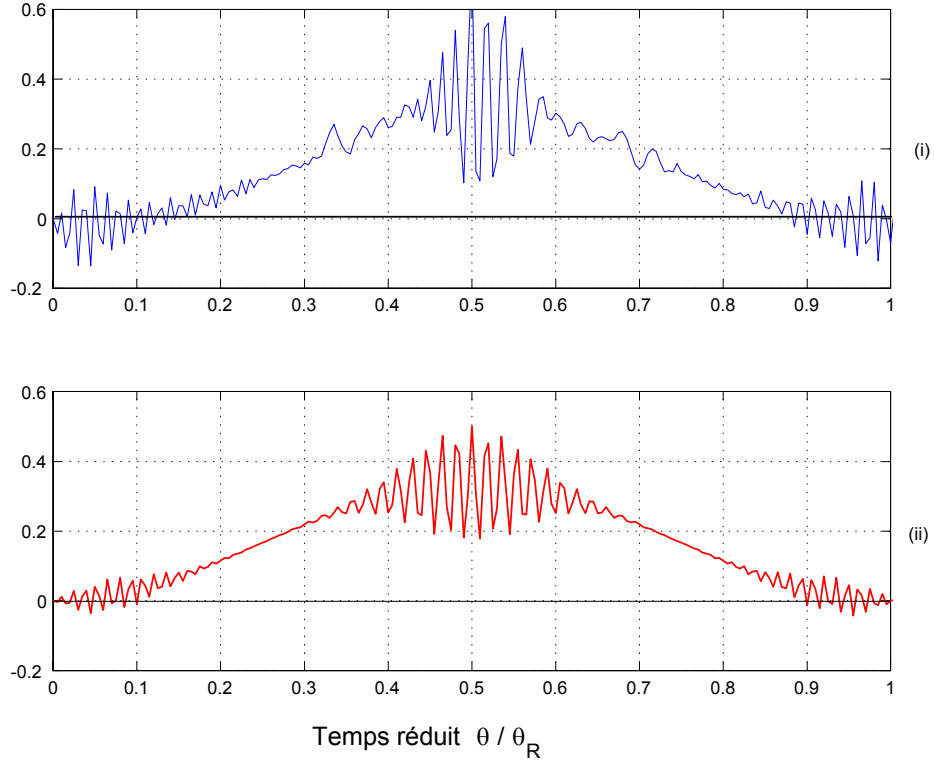


FIG. 4.10 – Comparaison de  $D(\theta)$  calculée numériquement (i) avec l'expression approximative correspondante (ii). Nous remarquons que pour des valeurs de  $\theta$  petites ( $\frac{\theta}{\theta_R} \leq 1$ ), l'expression approchée de  $D(\theta)$  est de même allure que  $D(\theta)$ .

En effet, le critère de réduction ainsi que celui de la différence de variation des distances montrent une intrication des états pour  $\langle n \rangle_C \leq 1.8$ . Par contre, le rayon de la sphère de Bloch l'indique uniquement pour  $\langle n \rangle_C \leq 1$ . Cette analyse montre que des corrélations quantiques ne sont pas décelées de manière claire par les trois critères pour les valeurs petites de  $\langle n \rangle_C$ . Ce résultat nous amène à la conclusion suivante : les trois critères représentent seulement des conditions nécessaires mais non suffisantes pour la séparabilité (inséparabilité) des états. Néanmoins, nous montrons pour la plupart des valeurs de  $\langle n \rangle_C$ , pour lesquelles  $\bar{\lambda} < 0$  ( $> 0$ ), nous avons également  $\bar{R} < 0$  ( $> 0$ ) et  $D < 0$  ( $> 0$ ).

Finalement, l'analyse effectuée en fonction des paramètres  $\theta$  et  $\langle n \rangle_C$  nous révèle un aspect complémentaire entre les trois critères où nous mettons en évidence une intrication plus ou moins forte pour le système atome-champ et un temps de corrélations quantiques pour un champ comprimé relativement long par rapport à celui d'un champ cohérent.



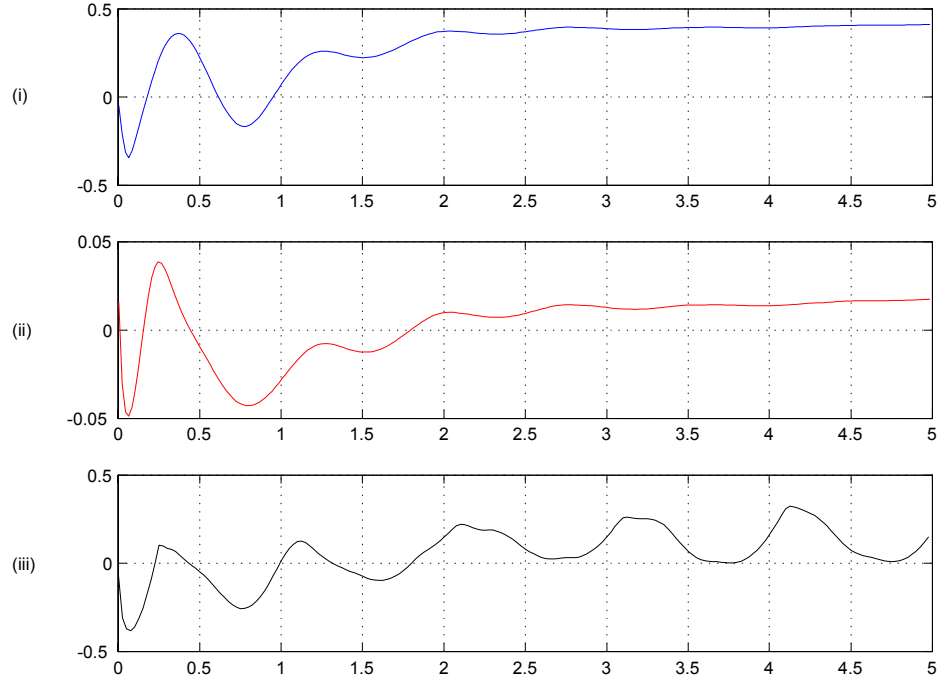


FIG. 4.11 – Critères  $\overline{R}(\theta_0)$  : (i);  $\overline{\lambda}_-(\theta_0)$  : (ii);  $D(\theta_0)$  : (iii) en fonction de  $\langle n \rangle_C$  dans le cas d'un champ comprimé ( $r^* = 0.8283$ ) en interaction avec un atome dans l'état excité. Notons que  $\overline{R}(\theta_0) = R(\theta_0) - 0.5$ ;  $\overline{\lambda}_-(\theta_0) = \lambda_-(\theta_0) + 0.6667$ .

## 4.6 Application du modèle JC pour la génération d'états superposés

Dans ce paragraphe, nous présentons une méthode qui nous offre la possibilité de générer des états superposés purs dans le laboratoire grâce à l'interaction d'un champ quantifié avec des atomes suivant le modèle de JC. L'analyse des propriétés statistiques du champ à l'aide des critères de séparabilité (inséparabilité) nous permet de déterminer l'instant pour lequel ce dernier est dans un état pur.

Pour cela, considérons un atome dans son état excité et une source cohérente, dont l'état initial de l'ensemble (atome+champ) est décrit par un produit tensoriel :

$$|\chi(0)\rangle = |e\rangle \otimes \sum_n c_n |n\rangle; \quad c_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (4.30)$$

L'évolution des propriétés statistiques du champ cohérent en fonction du temps réduit  $\frac{\theta}{\theta_R}$ , lorsque  $\langle n \rangle_C$  est très grand est donnée par sa densité de probabilité

$$P_F(n, \theta) = P_F(n) \cos^2(\theta\sqrt{n+1}) + P_F(n-1) \sin^2(\theta\sqrt{n}) \quad (4.31)$$

grandeur déterminée après une interaction de courte durée avec un atome se

trouvant dans un seul état excité ( $a = 0$ ).  $P_F(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!}$  étant la densité de probabilité avant l'interaction. Pour les deux conditions  $R(\theta)$  et  $D(\theta)$ , le champ cohérent passe d'un état intriqué pour  $\theta = 0$  à un état pur au bout d'une demie oscillation de Rabi ( $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$ ) (voir figures 4.5 (ii) et 4.9 (ii)). Nous avons alors tracé la densité de probabilité de  $P_C(n, \theta)$  respectivement pour  $\theta = 0, \frac{\theta_R}{2}$  et  $\theta_R$ . La d.d.p du champ décrite par une distribution de Poisson avant l'interaction avec la source d'atomes (voir figure 4.12 (i)) prend à  $\frac{\theta_R}{2}$  une allure similaire à celle des états cohérents superposés (cf figures 4.12 (ii) et 2.1.(a)), essentiellement autour de la valeur  $\langle n \rangle_C$ .

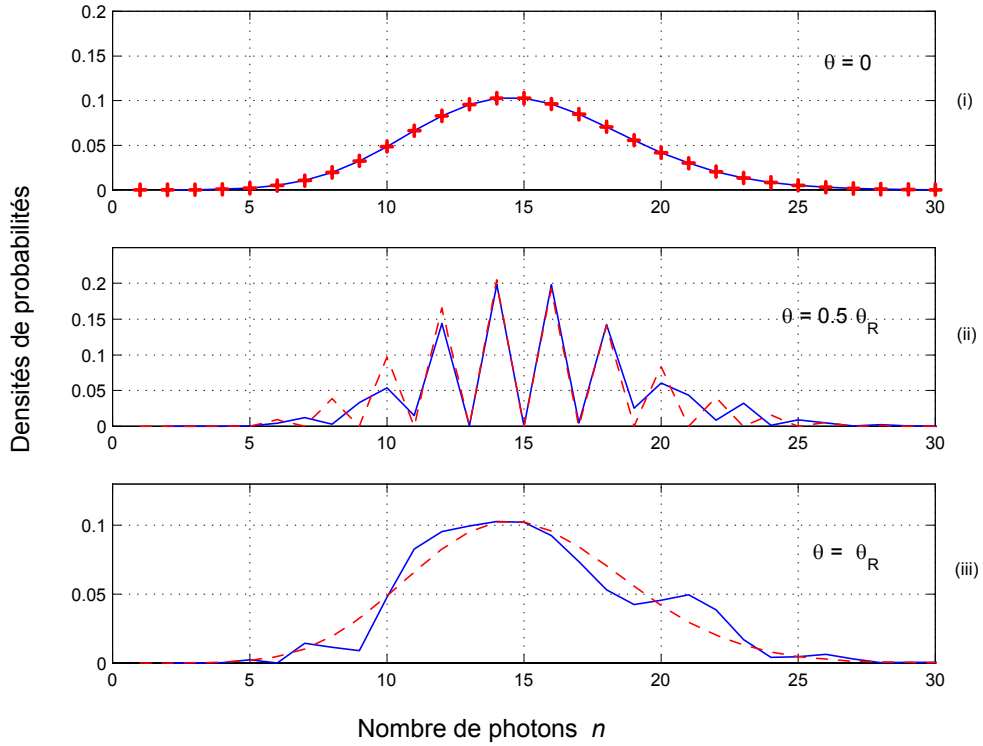


FIG. 4.12 – Comparaison de la densité de probabilité  $P_C(n, \theta)$  d'un champ cohérent (courbe en trait plein) avec : (i) une gaussienne (courbe en +) de variance  $\sigma^2 \approx \langle n \rangle_C = 15$ ; (ii) la densité de probabilité d'un champ superposé  $P_\varphi(n)$  (courbe en pointillée) et (iii) une gaussienne (courbe en pointillée) de variance  $\sigma^2 \approx \langle n \rangle_C = 15$

En effet, nous pouvons montrer par le principe de "balance détaillée" [51] que  $P_F(n; \theta_0)$  obtenu par le modèle de JC est du type superposé. Ce principe nous permet d'écrire l'égalité des sections efficaces

$$P_F(n) \cos^2(\theta_0 \sqrt{n+1}) \simeq P_F(n-1) \sin^2(\theta_0 \sqrt{n}) \quad (4.32)$$

d'où

$$P_F(n; \theta_0) \simeq 2 P_F(n) \cos^2(\theta_0 \sqrt{n+1}) \quad (4.33)$$

Dans le cas où  $n = \langle n \rangle(0) \pm k$  ( $\langle n \rangle(0)$  est entier et  $\gg 1$ ;  $k$  est un entier) d'une part et en utilisant l'approximation

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{\langle n \rangle + 1} \left( 1 + \frac{n - \langle n \rangle}{2(\langle n \rangle + 1)} \right) \quad (4.34)$$

d'autre part, nous obtenons

$$\cos^2(\theta_0 \sqrt{n+1}) = \cos^2(\pi \sqrt{\langle n \rangle} \sqrt{n+1}) \simeq \cos^2(\pm \frac{\pi}{2} k) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^k) \quad (4.35)$$

tel que la d.d.p. à  $\theta_0$  s'écrit

$$P_F(n; \theta_0) \simeq P_F(n; 0) (1 + (-1)^n) \quad (4.36)$$

ce qui nous montre l'existence des valeurs de  $n_c = \langle n \rangle(0) + 1, \langle n \rangle(0) + 3, \dots$  pour lesquelles  $P_F(n; \theta_0) = 0$ . L'expression (4.36) possède bien la structure de la loi des états superposés.

Finalement, pour générer les états superposés purs, il suffit de faire interagir un champ cohérent dont les propriétés statistiques ne révèlent pas d'aspect quantique avec un atome excité pendant un temps très court. À  $\theta_0 = \frac{\theta_R}{2}$ , nous obtenons un champ décrit par un état pur et superposé. Certes, cet état n'est pas intriqué avec l'état de l'atome puisqu'il est pur à cet instant mais une intrication entre les paquets d'ondes des états  $|\alpha\rangle$  et  $|- \alpha\rangle$  a lieu.

Cet état peut aussi être généré par une autre méthode qui consiste à faire transmettre un champ cohérent à travers un milieu non linéaire [52] tel que à l'instant  $T = \frac{\pi}{2\Omega}$  où  $\Omega$  est la constante de couplage du champ avec le milieu non linéaire, l'état cohérent se trouve dans un état superposé. L'observation dans les distributions de probabilité des franges d'interférences (interférences quantiques entre deux états macroscopiquement différents) a suscité un intérêt tant du point de vue théorique qu'expérimental [21, 22].

Dans notre cas, nous nous sommes intéressés à étudier les conséquences de l'intrication qui existe entre les états cohérents pour un système de détection. En effet, en tenant compte de la phase  $\varphi$  et en se plaçant dans des conditions idéales (signal sans bruit), les propriétés statistiques de l'état superposé seront analysées suivant les deux cas de la détection : détection discrète et détection continue. Le choix d'un tel état nous permettra d'évaluer les performances d'un système de détection dans le chapitre suivant et de les comparer aux performances optimales déduites d'une détection quantique qui représente une détection idéale.



# Chapitre 5

## Performances obtenues avec un état superposé

Un système de détection est composé principalement de trois parties : une source contenant toutes les informations d'un système physique (associée à un codeur plus un émetteur), un canal (qui peut être un espace libre ou une fibre optique) transmettant le signal et un récepteur suivi d'un décodeur (voir figure 5.1). Dans le cas d'une modélisation semi-classique, le signal d'entrée et le récepteur sont décrits respectivement par des états quantiques et des opérateurs de mesure. Les performances en détection et en information pour cette approximation s'avèrent nettement supérieures à celles d'un système classique [53] où la source et le récepteur sont traités de manière classique.

Pour déterminer les performances d'un système de détection, nous avons considéré un signal d'entrée décrit par l'état superposé

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \text{ où } |\psi\rangle = c (|\alpha\rangle + e^{-i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (5.1)$$

état purement quantique (cf chapitre 2 et annexe E). Deux autres états ont été également introduits afin de nous permettre une comparaison des performances atteintes avec ces différents états. Il s'agit de

$$\rho_\theta = |\theta\rangle\langle\theta| \text{ où } |\theta\rangle = d (|\alpha\rangle + | - e^{i\varphi}\alpha\rangle) \quad (5.2)$$

état différent de  $|\psi\rangle$  et d'un autre état décrivant un mélange statistique des états cohérents

$$\rho_m = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|) \quad (5.3)$$

Les signaux que l'on recueille à la sortie sont mesurés à l'aide de deux processus de détection différents : le détecteur de photons nous permet une détection discrète photon par photon, le détecteur homodyne servant à mesurer la composante réelle du champ électrique. Les densités de probabilité calculées pour ces deux récepteurs représentés respectivement par deux opérateurs de mesure  $\hat{N}$  et  $\hat{X}$ , nous permettent d'évaluer la capacité du canal. Celle-ci sera comparée

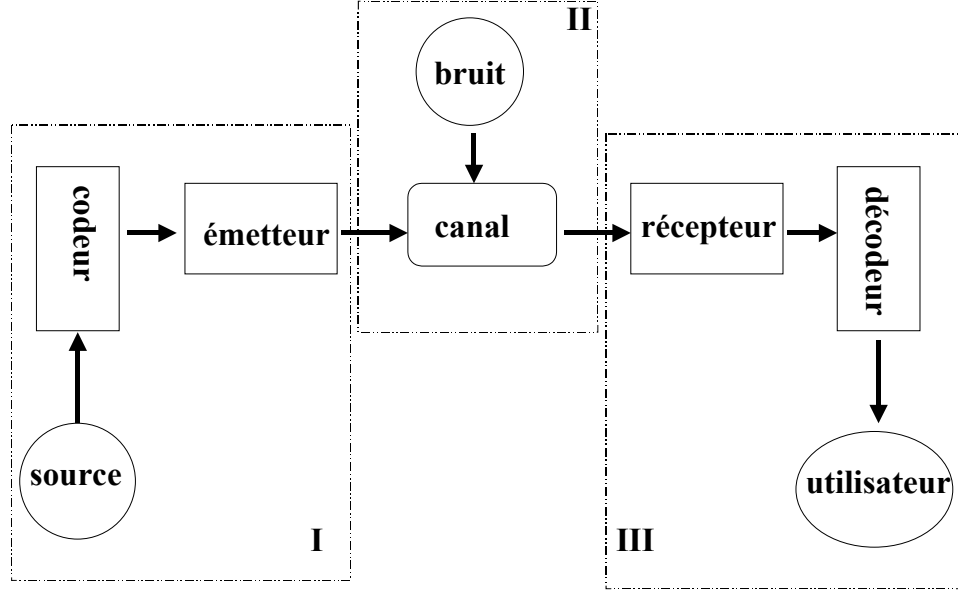


FIG. 5.1 – Schéma illustrant les parties principales d'un système de communication.

à la capacité optimale déduite d'un système de détection quantique correspondant à un récepteur idéal.

## 5.1 Statistique de détection

### 5.1.1 Approche classique. Généralités

Avant d'aborder la détection quantique, nous donnons brièvement les éléments de la théorie de la détection classique nécessaires au calcul des performances d'un système, selon la théorie des tests d'hypothèses, et utilisant le test du maximum de vraisemblance [54].

Soit un système dans un état  $j$ , de probabilité *a priori*  $\xi_j$ ,  $\sum_{j=1}^M \xi_j = 1$ . Appelons  $H_j$  l'hypothèse  $j$  où  $j = 1, 2, \dots, M$  pour un problème à  $M$  hypothèses. À cette hypothèse, on associe la grandeur caractérisant le signal de sortie du détecteur  $y(t) = s_j(t) + b(t)$  où  $s_j(t)$  est le  $j^{\text{ème}}$  signal et  $b(t)$  le bruit. Chaque  $y$  est décomposé en  $n$  composantes aléatoires  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de densité  $p_j(y) = p_j(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

L'approche Bayésienne [54] consiste à fixer des coûts  $C_{ij}$ , quantités mesurant

les pénalités d'avoir choisi l'hypothèse  $H_j$  dans le cas où l'hypothèse  $H_i$  est vraie. On appelle coût moyen, la quantité

$$\overline{C} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \xi_j C_{ij} p[i | j] \quad (5.4)$$

Il s'agit donc de rendre  $\overline{C}$  minimal. Les conditions

$$C_{ij} = 1 \text{ } i \neq j; \text{ } C_{ii} = 0 \quad (5.5)$$

$$C_{ij} = 0 \text{ } i \neq j; \text{ } C_{ii} = -1 \quad (5.6)$$

représentent deux exemples de coûts souvent utilisés. La probabilité d'erreur minimale

$$P_e = 1 - \sum_{j=1}^M \xi_j p[j | j] = \sum_{j=1}^M \xi_j \sum_{k \neq j}^M p[k | j] \quad (5.7)$$

On écrit la probabilité  $p[k | j]$  sous une forme rapportée à l'hypothèse "bruit seul" tel que

$$p[k | j] = \frac{\xi_k \Lambda_k(y)}{\sum_{j=1}^M \xi_j \Lambda_j(y)} \quad (5.8)$$

expression dans laquelle le rapport  $\Lambda_k(y) = \frac{p_k(y)}{p_0(y)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , est appelé rapport de vraisemblance.

### Cas binaire

Nous étudions le cas simple de deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  respectivement de probabilité *a priori*  $\xi_0$  et  $\xi_1$ ,  $\sum_{i=1}^{M=2} \xi_i = 1$ . On associe pour l'hypothèse  $H_0$  la grandeur caractérisant la sortie du détecteur  $y(t) = b(t)$  de densité  $p_0(y)$  et pour  $H_1$  la grandeur  $y(t) = s(t) + b(t)$  de densité  $p_1(y)$ .

$Q_0 = p[H_1 | H_0]$  est la probabilité de fausse alarme qui consiste à décider de la présence de signal alors que le signal est absent. La valeur de  $Q_0$  est fixée après la définition d'un seuil, valeur à partir de laquelle la détection est autorisée. D'autre part, tous les signaux envoyés et non détectés par le récepteur sont aussi considérés comme un bruit tel que la probabilité d'erreur associée est  $(1 - Q_d)$  où  $Q_d = p[H_1 | H_1]$  est la probabilité de détection correcte. Finalement, pour  $H_0$  et  $H_1$  de probabilité *a priori*  $\xi_0 = \xi_1 = \frac{1}{2}$ , la probabilité d'erreur moyenne s'écrit

$$P_{er} = \frac{1}{2} (1 + Q_0 - Q_d) \quad (5.9)$$

Par ailleurs, le canal représentant le support des signaux émis par la source, est caractérisé par les probabilités de transition (ou probabilités conditionnelles)

$$p(y_j | H_i) = \frac{p(H_i, y_j)}{p(H_i)} \quad (5.10)$$

tel que  $\sum_{j=1}^2 p(H_i, y_j) = p(H_i) = \xi_i$  et  $\sum_{i,j=1}^2 p(H_i, y_j) = 1$ ,  $p(H_i, y_j)$  étant la probabilité conjointe. Nous distinguerons ici deux types de canaux :

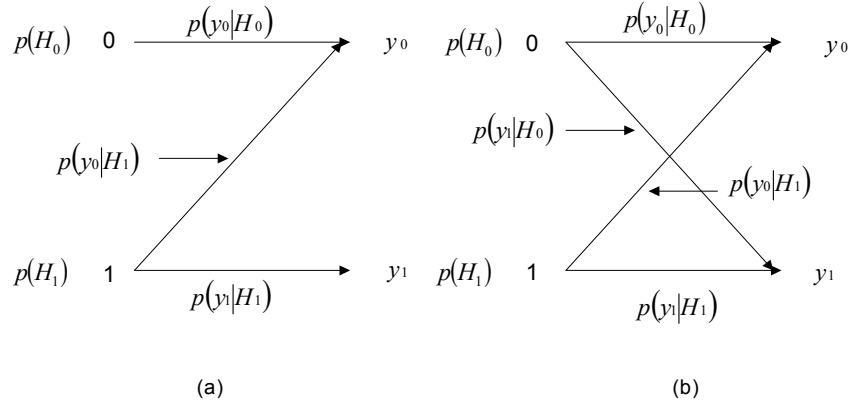


FIG. 5.2 – Schémas d'un canal en Z (a) et d'un canal symétrique (b) caractérisés par les probabilités conditionnelles  $p(y_0 | H_1)$  et  $p(y_1 | H_0)$  pour un système de détection binaire.

- le canal en  $Z$  (voir figure 5.2 (a)) pour un comptage de photons. En effet, le seuil de détection d'un photon étant parfaitement connu, le signal détecté lorsque l'évènement correspond à  $n = 0$  est nécessairement éliminé.
- le canal en  $X$  (voir figure 5.2 (b)) pour une détection homodyne (le canal est symétrique si  $p(y_j | H_i) = p(y_i | H_j)$  avec  $i \neq j$ ). En effet, la mesure continue de la composante réelle du champ électrique ne nous permet pas de séparer nettement entre le bruit et le signal lui même. Une optimisation du seuil s'avère très utile.

### 5.1.2 Détection quantique

Les expressions de la théorie statistique de la détection pour le cas quantique sont brièvement établies par analogie avec la théorie classique.

La source décrivant un système, est donnée par les opérateurs densité  $\{\hat{\rho}_i\}_{i=0}^{M-1}$  chacun avec la probabilité *a priori*  $\xi_i$  tels que

$$\forall i, \hat{\rho}_i \geq 0, \text{Tr}(\hat{\rho}_i) = 1; \xi_i \geq 0, \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i = 1. \quad (5.11)$$



D'autre part, les opérateurs de mesure doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\forall j, \hat{R}_j > 0, \sum_{j=0}^{N-1} \hat{R}_j = 1 \quad (5.12)$$

La probabilité d'erreur s'écrit alors

$$P_{er} = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \text{Tr} [\hat{\rho}_i \hat{R}_i] \quad (5.13)$$

et les éléments de la matrice des probabilités de transition, caractérisant le canal sont

$$p_{ij} = \text{Tr} [\hat{\rho}_i \hat{R}_j] \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = \xi_i, \quad \sum_{ij} p_{ij} = 1, \quad N = M \quad (5.14)$$

Les performances optimales sont déduites d'un opérateur de détection qui réalise le minimum de  $P_{er}$ . La méthode consiste à rendre le coût moyen  $\bar{C} = \sum_{ij} C_{ij} \xi_i \text{Tr} [\hat{\rho}_i \hat{R}_j]$  minimal. La solution  $\{\hat{R}_j\}$  réalisant  $\bar{C}_{\min}$  est l'opérateur de détection optimal (o.d.o). Le calcul de sa structure, dû essentiellement aux travaux de Helstrom et Holevo [54, 55], ne peut s'effectuer de manière rigoureuse que lorsque la source de messages est constituée soit de  $M$  états purs linéairement indépendants ou de  $M$  opérateurs densité qui commutent. Nous traitons ci-dessous le premier cas avec  $M = 2$  tel que  $\rho_0$  est l'opérateur densité décrivant le vide et  $\rho_1$  l'opérateur décrivant le signal dans l'état  $|\psi\rangle$ . Rappelons que  $|\psi\rangle = c|\alpha\rangle + e^{-i\varphi}|- \alpha\rangle$  dont les propriétés statistiques ont été déjà étudiées dans le chapitre 2, décrit la superposition de deux états cohérents (une intrication) avec une différence de phase.

### Détection quantique binaire : équation d'optimalité pour la probabilité d'erreur

Le calcul que nous avons conduit [25] n'a pas pour but de montrer que le récepteur de détection optimal est constitué de projecteurs  $A = \sum_{k=1}^2 U(\eta_k) |\eta_k\rangle \langle \eta_k|$ , mais seulement de déterminer la probabilité d'erreur la plus petite possible afin de réaliser une comparaison des performances atteintes avec des dispositifs de technologie courante. Ces dispositifs correspondent, dans notre cas, aux deux détections discrète et continue.

Pour ce récepteur idéal, nous considérons un canal binaire symétrique tel que la voie d'entrée est caractérisée par deux états purs :  $\hat{\rho}_0 (|0\rangle \langle 0|)$  et  $\hat{\rho}_1 (|\psi\rangle \langle \psi|)$  avec respectivement  $p(0)$  et  $p(1)$  les probabilités *a priori*,  $p(0) + p(1) = 1$ . Nous caractérisons la voie de sortie par  $\hat{\pi}_0$  et  $\hat{\pi}_1$  (opérateurs de mesure du projecteur  $A$ ) avec  $\hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 = 1$ .

La probabilité d'erreur

$$\begin{aligned} Q_{er} &= p(0)Tr(\hat{\rho}_0\hat{\pi}_1) + p(1)Tr(\hat{\rho}_1\hat{\pi}_0) \\ &= (1 - p(0)) [1 - Tr[(\hat{\rho}_1 - \Lambda\hat{\rho}_0)\hat{\pi}_1]] \end{aligned} \quad (5.15)$$

avec  $\Lambda = \frac{p(0)}{1-p(0)}$ , est minimale lorsque  $Tr[(\hat{\rho}_1 - \Lambda\hat{\rho}_0)\hat{\pi}_1]$  est maximal. Nous sommes alors amenés à résoudre l'équation aux valeurs propres

$$(\hat{\rho}_1 - \Lambda\hat{\rho}_0)|\eta_k\rangle = \eta|\eta_k\rangle \quad (5.16)$$

ce qui revient à écrire

$$Tr[(\hat{\rho}_1 - \Lambda\hat{\rho}_0)\hat{\pi}_1] = \sum_k \eta_k \langle \eta_k | \pi_1 | \eta_k \rangle \quad (5.17)$$

Le maximum de (5.17) s'obtient lorsque

$$\begin{cases} \eta_k \geq 0 \rightarrow \langle \eta_k | \pi_1 | \eta_k \rangle = 1 \\ \eta_k < 0 \rightarrow \langle \eta_k | \pi_1 | \eta_k \rangle = 0 \end{cases}$$

Or, il suffit dans notre cas de déterminer l'expression de la probabilité d'erreur. Pour simplifier les calculs, nous prendrons  $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$  (hypothèses équiprobables) et l'équation (5.16) s'écrit comme

$$|\psi\rangle\langle\psi|\eta\rangle - |0\rangle\langle 0|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle \quad (5.18)$$

En multipliant successivement par  $\langle\psi|$  et  $\langle 0|$  et en posant  $\gamma = \langle 0|\psi\rangle$ ,  $\gamma^* = \langle\psi|0\rangle$ , nous obtenons un système d'équation à deux inconnues

$$(1 - \eta)\langle\psi|\eta\rangle - \gamma^*\langle 0|\eta\rangle = 0 \quad (5.19)$$

$$\gamma\langle\psi|\eta\rangle - (1 + \eta)\langle 0|\eta\rangle = 0 \quad (5.20)$$

qui admet comme solutions  $\eta^+ = \sqrt{1 - |\gamma|^2}$ ,  $\eta^- = -\sqrt{1 - |\gamma|^2}$ .

Sachant que  $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$  et  $|\alpha|^2 = S$ , nous déduisons

$$|\gamma|^2 = \frac{e^{-S}(1 + \cos\varphi)}{1 + e^{-2S}\cos\varphi} \quad (5.21)$$

et par la suite

$$\eta^\pm = \pm \sqrt{1 - \frac{1 + \cos\varphi}{e^S + e^{-S}\cos\varphi}} \quad (5.22)$$

Pour  $\eta^+$ , nous avons  $|\langle 0|\eta^+\rangle|^2 = \frac{|\gamma|^2}{(1+\eta^+)^2} |\langle\psi|\eta^+\rangle|^2$  et  $|\langle 0|\eta^+\rangle|^2 + |\langle\psi|\eta^+\rangle|^2 = 1$ , ce qui nous permet de déduire

$$|\langle\psi|\eta^+\rangle|^2 = \frac{(1 + \eta^+)^2}{(1 + \eta^+)^2 + |\gamma|^2} \quad (5.23)$$

$$|\langle 0|\eta^+\rangle|^2 = \frac{|\gamma|^2}{(1 + \eta^+)^2 + |\gamma|^2} \quad (5.24)$$

d'où

$$\begin{aligned} Q_{er} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - |\gamma|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \cos \varphi}{e^S + e^{-S} \cos \varphi}} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Calculons, à présent, la probabilité d'erreur minimale pour l'état  $|\theta\rangle$  où la constante de normalisation (voir Annexe E) est

$$d = \sqrt{\frac{1}{2(1 + e^{-S \cos \varphi} \cos(S \sin \varphi))}} \quad (5.26)$$

Nous procédons de la même manière que ci dessus et nous trouvons

$$Q_{er}^\theta = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - |\gamma'|^2} \right) \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{(e^S + e^{-S \cos \varphi} \cos(S \sin \varphi))}} \right) \quad (5.28)$$

où  $\gamma' = \langle 0 | \theta \rangle$ . Dans les deux cas, nous avons  $Q_{er}$  et  $Q_{er}^\theta$  des fonctions décroissantes lorsque  $\varphi \in [0, \pi]$ . De même, pour des valeurs de  $\varphi$  fixées,  $Q_{er}$  et  $Q_{er}^\theta$  décroissent avec  $S$ . Cependant, nous remarquons que  $Q_{er}^\theta > Q_{er}$  quelle que soit la valeur de  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , comme le montre la figure 5.3. Ceci nous indique que même si  $|\theta\rangle$  est un état aussi pur que  $|\psi\rangle$  ( $Tr \rho_\theta^2 = Tr \rho_\psi^2 = 1$ ) et que sa densité de probabilité présente aussi des oscillations quantiques (voir figure 5.4), la probabilité d'erreur minimale obtenue ne garantit pas une meilleure efficacité pour la détection par rapport à celle de l'état  $|\psi\rangle$ .

D'autre part, nous ne pouvons pas calculer  $Q_{er}$  pour l'état décrit par un mélange incohérent  $\rho_m = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$  car les hypothèses permettant de déduire cette grandeur supposent la pureté des états décrivant les signaux d'entrée. Or,  $Tr(\rho_m^2) < 1$  (voir annexe E), ce qui montre que cet état est un mélange statistique. Néanmoins, on peut borner la probabilité d'erreur minimale dans le cas de la superposition d'opérateurs densité. On montre alors que la superposition incohérente dégrade les performances de détection [56].

### 5.1.3 Détection à variable discrète

Le comptage de photons est réalisé par la mesure de l'opérateur  $\hat{N} = a^\dagger a$  respectivement dans l'état  $|\psi\rangle$ , l'état  $|\theta\rangle = d(|\alpha\rangle + |-e^{i\varphi}\alpha\rangle)$  et l'état d'opérateur densité  $\rho_m = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$ . L'observable mesurée correspond au nombre  $n$  d'évènements enregistrés dans un temps fini. Les impulsions enregistrées correspondent aux temps d'interaction photon-détecteur et représentent

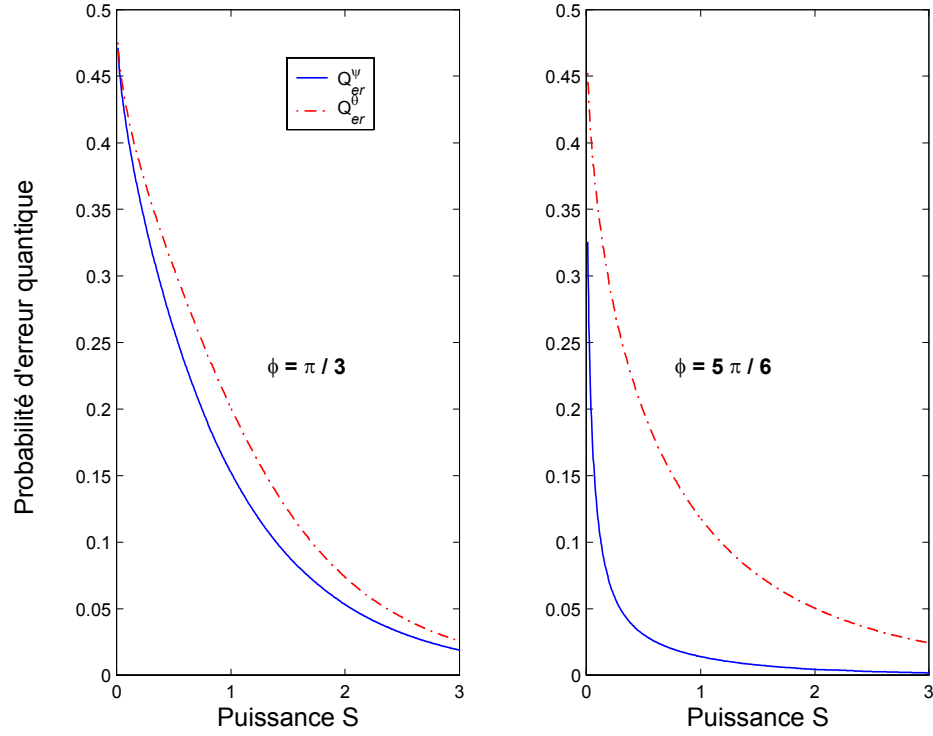


FIG. 5.3 – Comparaison des probabilités d’erreur  $Q_{er}$  (courbe pleine) et  $Q_{er}^{\theta}$  (courbe en pointillés) pour différentes valeurs de la phase. Ces probabilités d’erreur sont obtenues lors d’une détection quantique pour un signal d’entrée décrit respectivement par les états  $|\psi\rangle$  et  $|\theta\rangle$ .

le signal contenant l’information qui sera traitée par la suite par un décodeur. Nous donnons ci dessous leurs densités de probabilité (cf annexe E) tels que pour :

- $\rho_{\varphi} = |\psi\rangle \langle \psi|$  :

$$P_{\varphi}(n) = \frac{(1 + (-1)^n \cos \varphi)}{(1 + e^{-2S} \cos \varphi)} e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (5.29)$$

Dans le cas où  $\varphi = 0, \pi$ ,  $P_{\varphi}(n)$  s’annule respectivement pour  $n$  pair et  $n$  impair. On note la présence d’oscillations dues aux effets quantiques à l’exception des cas  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  pour lesquels la d.d.p. est une distribution de Poisson. Un exemple de  $P_{\varphi}(n)$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  est présenté sur la figure 5.4.

- $\rho_{\theta} = |\theta\rangle \langle \theta|$  :

$$P_{\theta}(n) = \frac{(1 + (-1)^n \cos(n\varphi))}{1 + e^{-S(1+\cos \varphi)} \cos(S \sin \varphi)} e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (5.30)$$

Pour  $(S \sin \varphi) = 0, \pi$ , le dénominateur  $(1 - e^{-S(1+\cos \varphi)})$  ne s’annule pas. Cependant  $P_{\theta}(n)$  s’annule pour  $n$  pair,  $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  et  $n$  impair,  $\varphi = 2k\pi$ . Des

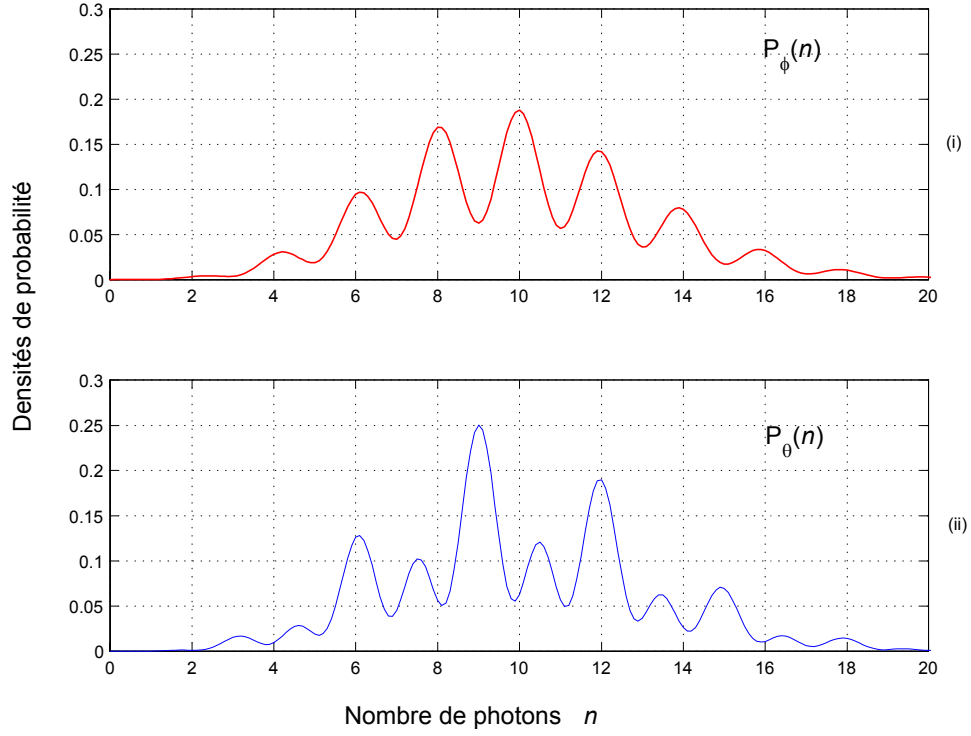


FIG. 5.4 – Densités de probabilité de mesurer  $n$  photons dans les états  $|\psi\rangle$  et  $|\theta\rangle$  (respectivement (i) et (ii)) pour  $\varphi = \pi/3$ . Cette figure illustre les oscillations que présentent les deux d.d.p.

oscillations apparaissent aussi dans ce cas comme le montre la figure (5.4), révélant l'aspect quantique de l'état  $|\theta\rangle$ , mais l'expression diffère notablement de  $P_\varphi(n)$ .

Si les deux états  $|\psi\rangle$  et  $|\theta\rangle$  présentent des propriétés quantiques, il n'en va pas de même pour le mélange statistique d'états cohérents qui à la limite peut être interprété par la théorie classique. En effet, pour

- $\rho_m = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$ , la d.d.p. est

$$P_m(n) = e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (5.31)$$

qui représente la d.d.p. de Poisson.

Les probabilités d'erreur pour tous ces cas sont déduites respectivement des équations (5.29 ; 5.30 ; 5.31) pour  $n = 0$  telles que :

$$P_\varphi(0) = \frac{(1 + \cos \varphi)}{(e^S + e^{-S} \cos \varphi)} \quad (5.32)$$

$$P_\theta(0) = \frac{2}{(e^S + e^{-S \cos \varphi} \cos(S \sin \varphi))} \quad (5.33)$$

$$P_m(0) = e^{-S} \quad (5.34)$$

Nous remarquons que  $Q_{er} \leq P_\varphi(0)$  et  $Q_{er}^\theta \leq P_\theta(0)$ . De même,  $P_m(0)$  est bien la borne supérieure. Cette analyse montre que la valeur minimale de la probabilité d'erreur est atteinte pour la détection quantique dans les trois cas.

### 5.1.4 Détection homodyne

Lors de la détection homodyne, on mesure l'opérateur position  $\hat{X} = \frac{a^+ + a}{\sqrt{2}}$  dans les états d'opérateurs densité  $\rho_\varphi$  et  $\rho_m$ . Cette observable est reliée directement au champ électrique  $E$  se propageant linéairement suivant une direction (l'axe  $z$  par exemple) [57] :

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x}(t) \sin(kz) \quad (5.35)$$

Le vecteur d'onde de la radiation à un seul mode est  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide et  $V$  le volume quantifié de la cavité contenant la radiation. L'équation (5.35) montre que la mesure de l'opérateur position  $\hat{X}$  nous permet d'accéder directement à la composante réelle du champ électrique.

#### Densité de probabilité pour $\alpha \in \mathbb{C}$

Le calcul détaillé de la densité de probabilité pour l'état  $|\psi\rangle$  est présenté dans l'Annexe E. Pour simplifier les calculs, nous avons pris le cas où  $\alpha = \alpha_r(1 + i)$ , ( $\alpha_r \in \mathbb{R}$ ) et nous obtenons :

$$P_\varphi(x, \alpha_r) = \frac{e^{2\alpha_r^2}}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos\varphi)} \left[ \cosh(2\alpha_r\sqrt{2}x) + \cos(\varphi + 2\alpha_r\sqrt{2}x) \right] P(x; 0) \quad (5.36)$$

Notons que  $P(x; 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  représente la distribution gaussienne dans le cas de l'absence du signal.

Afin de mieux caractériser  $P_\varphi(x, \alpha_r)$ , nous déterminons les premiers moments de  $x$  lorsque  $\varphi \neq \pi$  :

$$\langle x \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_\varphi(x, \alpha_r) dx = -\frac{\alpha_r\sqrt{2} \sin \varphi}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} \quad (5.37)$$

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_\varphi(x, \alpha_r) dx = \frac{1}{2} + 2\alpha_r^2 \frac{(e^{4\alpha_r^2} - \cos \varphi)}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} \quad (5.38)$$

Le premier terme de  $\langle x^2 \rangle_\varphi$  est dû aux fluctuations du vide tandis que le second terme décrit la variance du signal transmis.

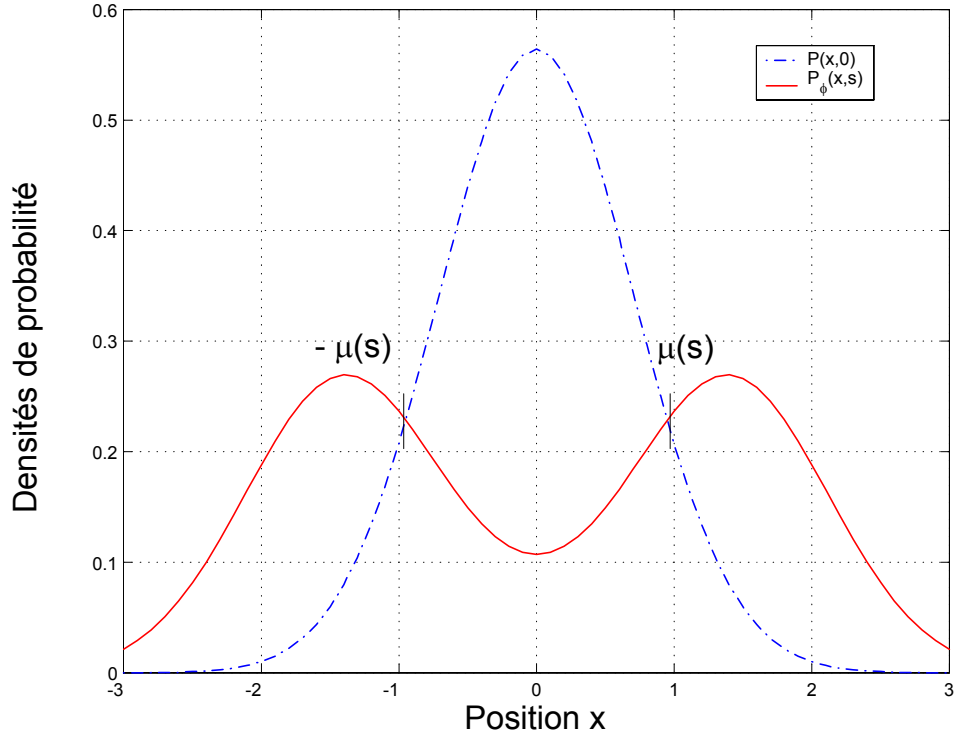


FIG. 5.5 – Densités de probabilité de mesurer  $x$  dans les états  $|\psi\rangle$  (courbe pleine) et  $|0\rangle$  (courbe en pointillés) dans le cas où  $\varphi = 0$  et  $S = 1$ . Ce tracé montre comment l'on détermine le seuil de détection pour la mesure homodyne (seuil : intersection des densités de probabilité des états correspondant au signal et au vide).

Déterminons à présent les deux premiers moments de  $x$  pour un mélange statistique et comparons les à ceux déjà calculés. La densité de probabilité dans l'état décrit par l'opérateur  $\rho_m$  est

$$P_m(x, \alpha_r) = e^{-2\alpha_r^2} \cosh\left(2\alpha_r\sqrt{2}x\right) p(x; 0) \quad (5.39)$$

expression dans laquelle nous notons l'absence d'oscillations caractérisant ainsi l'absence de corrélations quantiques dans un mélange statistique des états. Cet état se prête en effet à avoir une description classique. Les deux premiers moments sont :

$$\langle x \rangle_m = 0, \quad \langle x^2 \rangle_m = \frac{1}{2} + 2\alpha_r^2$$

D'après ces calculs, nous remarquons que  $\langle x^2 \rangle_\varphi = \langle x^2 \rangle_m$  quel que soit  $\alpha_r$  quand  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou lorsque  $\alpha_r \gg 1$ . Cependant, pour  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons  $\langle x^2 \rangle_\varphi \leq \langle x^2 \rangle_m$ .

**Densité de probabilité pour  $\alpha \in \mathbb{R}$** 

Considérons à présent le cas où  $\alpha = \alpha_r$  avec  $S = \alpha_r^2$  désignant la puissance du signal. La probabilité de mesurer l'opérateur position dans cet état s'écrit :

$$P_\varphi(x, S) = \frac{1}{e^{2S} + \cos \varphi} \left( \cos \varphi + \cosh \left( 2\sqrt{2S}x \right) \right) P(x; 0) \quad (5.40)$$

à partir de laquelle, nous déduisons le premier moment

$$\langle x \rangle_\varphi = 0 \quad (5.41)$$

et la variance :

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \frac{1}{2} + \frac{2S}{1 + e^{-2S} \cos \varphi} \quad (5.42)$$

La courbe de  $P_\varphi(x, \alpha)$  pour  $\varphi = \pi/3$  et  $\alpha^2 = 1$ , est représentée sur la figure 5.5 sur laquelle nous n'observons que deux maxima pour la détection homodyne. Notons que le caractère quantique de l'état  $|\psi\rangle$  est plus nettement mis en évidence par la détection discrète que par la détection homodyne. En effet, nous observons clairement les interférences induites par les deux états  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha\rangle$  lors d'un comptage discret.

Calculons à présent la probabilité d'erreur de détection pour ce type de récepteur. Soient  $P_\varphi(x, S)$  et  $P_\varphi(x, 0)$  les probabilités de mesurer  $x$  dans l'état  $|\psi\rangle$  et le vide  $|0\rangle$ . On définit la probabilité d'erreur pour une mesure continue d'un champ électrique sous la forme

$$P_{er} = \frac{1}{2} (P_f + 1 - P_d) \quad (5.43)$$

où  $P_f$  et  $P_d$  sont les probabilités de fausse alarme et de détection. Ceci nous amène à chercher le seuil  $\mu(S)$  déduit à partir de  $\frac{p_\varphi(x, S)}{p_\varphi(x, 0)} = 1$  (voir figure 5.5).

En effet pour  $\mu(S) = \frac{\arg \cosh(e^{2S})}{2\sqrt{2S}}$ , nous délimitons un domaine de décision  $]-\infty, -\mu(S); \mu(S), \infty[$  tels que :

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\mu(S)} P_\varphi(x, 0) dx + \int_{\mu(S)}^{\infty} P_\varphi(x, 0) dx = \operatorname{erfc}(\mu(S)) \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} P_d &= \int_{-\infty}^{-\mu(S)} P_\varphi(x, S) dx + \int_{\mu(S)}^{\infty} P_\varphi(x, S) dx \\ &= \frac{\cos \varphi}{e^S + \cos \varphi} \operatorname{erfc}(\mu(S)) \\ &\quad + \frac{e^S}{2(e^S + \cos \varphi)} [\operatorname{erfc}(\mu(S) - \sqrt{S}) + \operatorname{erfc}(\mu(S) + \sqrt{S})] \end{aligned} \quad (5.45)$$

d'où l'expression finale

$$P_{er} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \operatorname{erf}(\mu(S) - \sqrt{S}) + \operatorname{erf}(\mu(S) + \sqrt{S}) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\mu(S)) \right] \quad (5.46)$$



$\text{erfc}(x)$  est la fonction erreur complémentaire [58]

$$\text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (5.47)$$

Pour  $S \lesssim 1$ ,  $\varphi = 0$  et  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{S}{4}$ , l'expression précédente se simplifie et se met sous la forme

$$P_{er} \sim \frac{1}{2} \left( 1 - S \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \right) \quad (5.48)$$

## 5.2 Capacité de canal

### 5.2.1 Définition

La capacité, grandeur caractéristique d'un canal, s'obtient par un calcul classique. Seuls, les canaux sans mémoire sont considérés dans ce travail. Toutes les questions concernant la réalisation pratique des éléments composant le système de communication, telles que la synchronisation des divers éléments, le non recouvrement des signaux ..., ne sont pas abordées ici.

Soit la séquence d'entrée  $\{x_i\}_{i=1}^M \in X$  donnée avec la probabilité  $q(x_i)$  et la séquence de sortie  $\{y_j\}_{j=1}^N \in Y$ . Le canal est entièrement défini par la matrice  $\Pi$  de dimension  $N \times M$  dont les termes sont les diverses probabilités conditionnelles  $p(y_j | x_i)$ .

On appelle information mutuelle, la différence entre l'incertitude *a priori* sur  $X$  et l'incertitude sur la même variable aléatoire dans l'hypothèse où une mesure sur une autre variable aléatoire  $Y$  est connue. Son expression est :

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= S(X) - S(X | Y) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N q(x_i) p(y_j | x_i) \log \frac{p(y_j | x_i)}{\sum_k q(x_k) p(y_j | x_k)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

La capacité d'un tel canal, sous les contraintes (la normalisation des probabilités, la contrainte de puissance, de bande passante,...)  $Q$  formant un ensemble convexe, est le maximum de l'information mutuelle

$$C = \max_Q I(X, Y) \quad (5.50)$$

où  $Q : \sum_{i=1}^n q(x_i) = 1; q(x_i) \geq 0$  (probabilité *a priori*). Les théorèmes démontrant l'existence de ce maximum, c'est à dire prouvant la convexité de  $I(X, Y)$ , sont démontrés dans de nombreux ouvrages ([59], par exemple) tel que  $I(X, Y)$  est convexe  $\cap$  sur  $q(x_i), \forall i$  et convexe  $\cup$  sur  $p(y_j | x_i), \forall i, j$ .

### 5.2.2 Capacité du canal dans le cas binaire

Le calcul de la capacité d'un système de détection à deux entrées est détaillé dans l'annexe E où nous obtenons pour un canal *symétrique*, la formule suivante

$$C_i = \log(2) + p_i \log(p_i) + (1 - p_i) \log(1 - p_i); \quad i = q, c \quad (5.51)$$

et pour un canal en  $Z$

$$C_N^i = \log 2 - \frac{1}{2} \log(1 + P_i(0)) + \frac{P_i(0)}{2} \log\left(\frac{P_i(0)}{1 + P_i(0)}\right); \quad i \equiv \varphi, \theta \quad (5.52)$$

Appliquons ce résultat au cas où la voie d'entrée est représentée par les états  $|\psi_1\rangle = c(|\alpha\rangle + e^{-i\varphi}|- \alpha\rangle)$  et  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$  caractérisant respectivement le signal et le vide et symbolisés par 1 et 0.

#### Capacité du canal quantique

Pour la détection quantique, nous considérons un canal symétrique dont la capacité est donnée par (5.51). En effet, pour  $i = q$ ,  $p_q = Q_{er}$  est la probabilité d'erreur quantique minimale dont l'expression est déjà donnée par l'équation (5.25). La matrice des probabilités de transition est

$$\begin{pmatrix} 1 - Q_{er} & Q_{er} \\ Q_{er} & 1 - Q_{er} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Notons que  $C_q$ , tout comme  $Q_{er}$ , est fonction de la puissance et de la phase  $\varphi$  et les approximations que nous pouvons déduire sont telles que [25] :

$$\text{pour } \varphi = 0, \quad C_q \leq \frac{S^2}{2} \text{ si } S \ll 1 \text{ et } C_q \leq \log 2 - \frac{S}{2}e^{-S} \text{ si } S \gg 1 \quad (5.54)$$

$$\text{pour } \varphi \neq 0, \pi; \quad C_q \leq \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} S \text{ si } S \ll 1 \quad (5.55)$$

$$\text{pour } \varphi \neq 0, \pi; \quad C_q \leq \log 2 - (1 + \cos \varphi) \frac{S}{4}e^{-S} \text{ si } S \gg 1 \quad (5.56)$$

#### Capacité du canal semi-classique

Examinons le compteur de photons dont le canal est semi classique (canal en  $Z$ ). Les probabilités de transition sont  $P(0 | 0) = 1$ ;  $P(0 | 1) = P_\varphi(0)$ ;  $P(1 | 0) = 0$ ;  $P(1 | 1) = 1 - P_\varphi(0)$  où  $P_\varphi(0)$  est donnée par (5.32). La capacité d'un tel canal est

$$C_N(S, \varphi) = \log 2 - \frac{1}{2} \log(1 + P_\varphi(0)) + \frac{P_\varphi(0)}{2} \log\left(\frac{P_\varphi(0)}{1 + P_\varphi(0)}\right) \quad (5.57)$$

expression qui devient pour  $\varphi = 0$

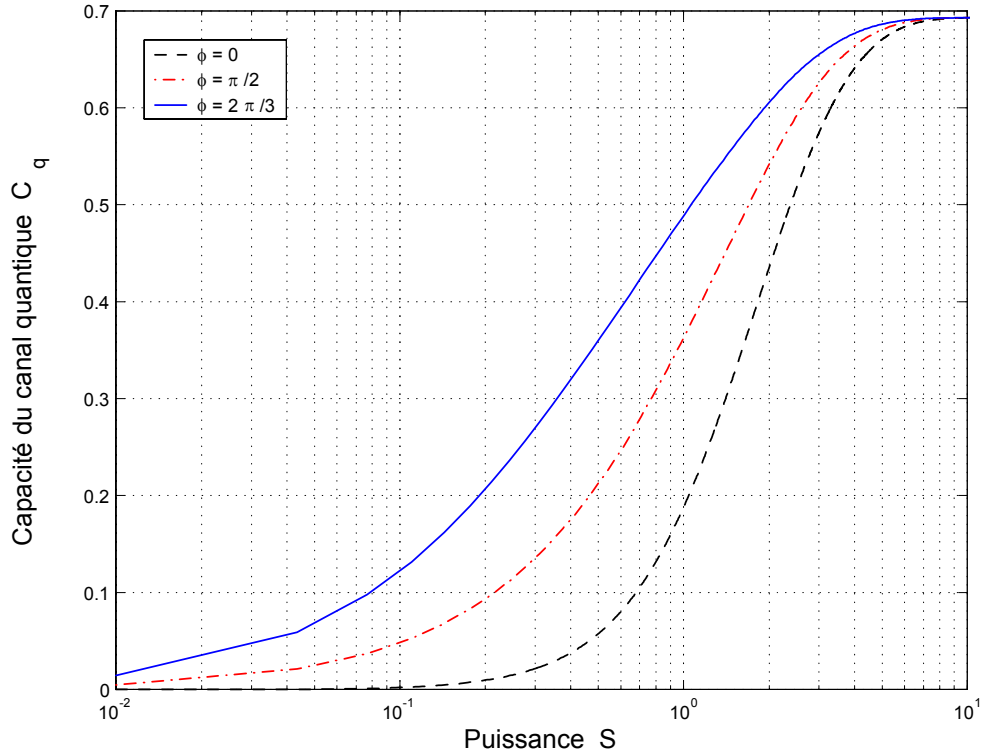


FIG. 5.6 – Capacité du canal quantique  $C_q$  pour différentes valeurs de la phase lorsque le signal d'entrée est décrit par  $|\psi\rangle$ .

$$C_N \leq \frac{S^2}{4} \log 2 \quad \text{si } S \ll 1 \quad \text{et} \quad (5.58)$$

$$C_N \leq \log 2 - S e^{-S} \quad \text{si } S \gg 1 \quad (5.59)$$

et pour  $\varphi \neq 0$  et  $\neq \pi$

$$C_N \leq \left( \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \frac{\log 2}{2} S \quad \text{si } S \ll 1 \quad (5.60)$$

$$C_N \leq \log 2 - (1 + \cos \varphi) S e^{-S} \quad \text{si } S \gg 1 \quad (5.61)$$

### Capacité du canal classique

Dans le cas où  $i = c$ ,  $p_c = \frac{1}{2}(1 + P_f - P_d)$  est la probabilité d'erreur lors de la mesure d'un champ électrique. Les probabilités de transition pour le canal classique et symétrique sont  $P(0 | 0) \leftrightarrow P_\varphi(x, 0)$ ;  $P(0 | 1) = P(1 | 0) = p_c$ ;  $P(1 | 1) \leftrightarrow P_\varphi(x, S)$ . Les expressions de  $P_\varphi(x, 0)$ ,  $P_\varphi(x, S)$  et  $p_c \equiv P_{er}$  sont données dans le paragraphe précédent. Des approximations peuvent être faites également pour la capacité du canal classique

$$C_C = \log(2) + p_{er} \log(p_{er}) + (1 - p_{er}) \log(1 - p_{er}) \quad (5.62)$$

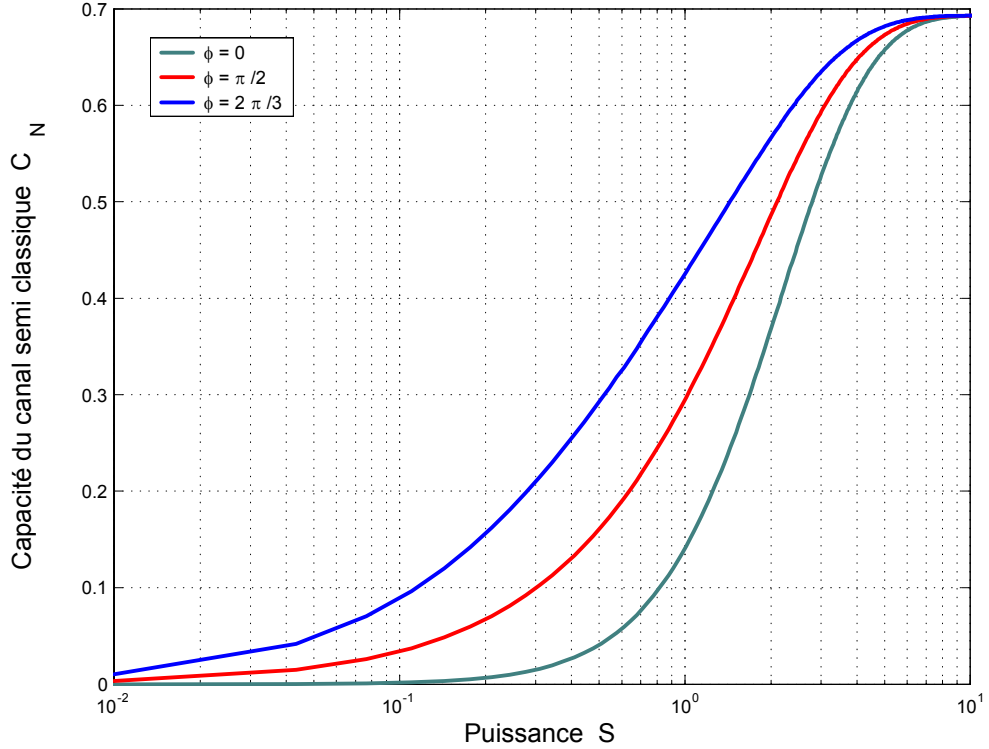


FIG. 5.7 – Capacité de canal à comptage de photons  $C_N$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  lorsque le signal d'entrée est décrit par une superposition d'états cohérents. Notons que pour  $\varphi = \pi/2$ , la capacité de canal est confondue avec celle de l'état décrit par un mélange statistique d'états cohérents.

tel que pour  $0 \leq \varphi \lesssim \frac{\pi}{2}$ , nous avons

$$C_c \leq \frac{1}{2} \left( \frac{S^2}{1 + \cos \varphi} \right)^2 \quad S \ll 1 \quad (5.63)$$

$$C_c \leq \log 2 - e^{-\frac{S}{2}} \quad S \gg 1 \quad (5.64)$$

### 5.2.3 Discussion

Nous considérons pour les différents canaux une région de puissance peu élevée. Cette région est intéressante car elle correspond à l'utilisation la plus avantageuse pour les systèmes de communication envisagés ici. De plus, elle constitue un cas limite dont les performances peuvent être comparées au cas quantique, et dont la phase  $\varphi$  peut être arbitraire. Sur les figures 5.6, 5.7 et 5.8, nous représentons les capacités des trois canaux en fonction de la phase. Le calcul montre que la capacité est une fonction croissante de  $\varphi$ , ce qui nous permet

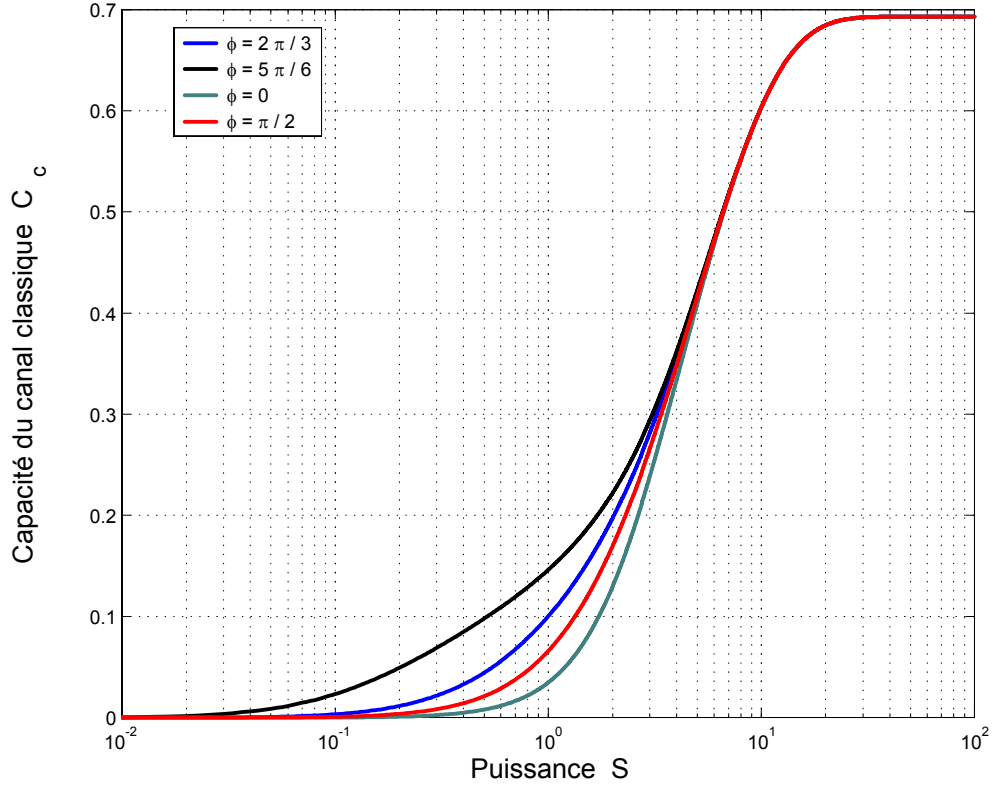


FIG. 5.8 – Capacité de canal à mesure continue  $C_c$  pour différentes valeurs de la phase  $\varphi$  lorsque le signal d'entrée est décrit par l'état  $|\psi\rangle$ . Pour  $\varphi = \pi/2$ , la capacité est confondue avec celle de l'état décrit par un mélange statistique d'états cohérents.

d'utiliser avantageusement ce paramètre pour se rapprocher des performances optimales.

La capacité du canal  $Z$ , lorsque la voie d'entrée est décrite par l'état  $|\psi\rangle$  est supérieure à celle déduite de l'état  $|\theta\rangle = c(|\alpha\rangle + |-e^{i\varphi}\alpha\rangle)$  comme le montre la figure 5.9, tandis qu'elle est pratiquement confondue avec celle décrite par un mélange incohérent d'états  $\hat{\rho}_m = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |- \alpha\rangle\langle - \alpha|)$  quand  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

D'autre part, on note une meilleure sensibilité de la capacité du canal pour  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  lorsque  $1 \leq S \leq 10$ , aussi bien pour le canal quantique que pour le canal à comptage de photons. La capacité de canal à réception homodyne devient quasiment indépendante de la phase  $\varphi$  à partir de  $S \gtrsim 3$ .

Par ailleurs, il est intéressant de comparer les canaux pour les trois récepteurs : récepteur quantique, compteur de photons et récepteur homodyne, dans le cas où  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  (voir figure 5.10). Notons qu'il est nécessaire de normaliser la puissance pour la réception homodyne afin de pouvoir faire la comparaison avec les autres capacités.

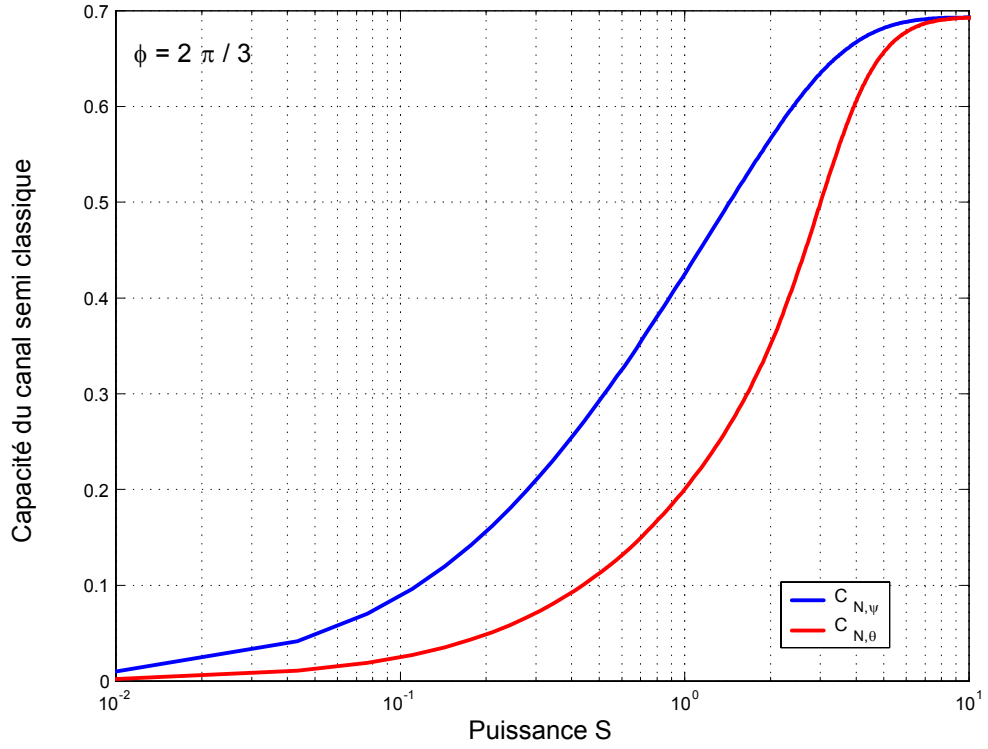


FIG. 5.9 – Capacité du canal semi classique pour une source décrite par  $|\psi\rangle$  (courbe pleine) et  $|\theta\rangle$  (courbe en pointillés).

Il est clair que la réception quantique conduit à des performances supérieures à tous les autres récepteurs, mais le compteur de photons s'en rapproche le plus. Celui ci est très sensible à la variation de  $\varphi$  par rapport au récepteur homodyne. Ainsi, ce paramètre offre une possibilité d'acquérir une meilleure efficacité pour la transmission de l'information.

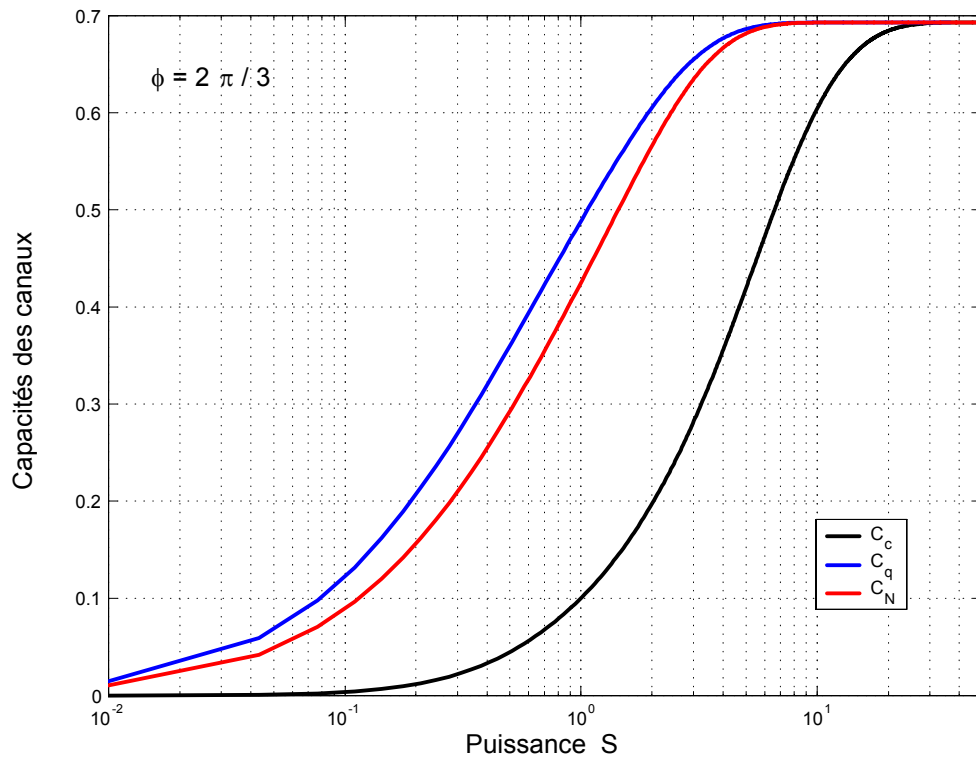


FIG. 5.10 – Comparaison des capacités des canaux classique, semi classique et quantique (respectivement  $C_c$ ,  $C_N$  et  $C_q$ ) lorsque l'état est décrit par l'état  $|\psi\rangle$ . Les performances de détection à variable discrète se rapprochent le plus des performances optimales.





# Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des propriétés (intrication et statistiques) de l'état d'un système physique d'une part et d'autre part, au calcul des performances d'un système de détection lorsque le signal d'entrée est décrit par un état superposé.

L'intrication qui est l'une des caractéristiques fondamentales de la mécanique quantique peut être réalisée par interaction d'une source de rayonnement électromagnétique avec un atome à deux niveaux (niveaux fondamental et excité). Un modèle simple, proposé par Jaynes-Cummings, s'est avéré un excellent outil tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental pour générer des états intriqués.

Avant d'étudier les états intriqués des deux sous systèmes atome et champ, nous avons analysé en détail les propriétés statistiques du champ avant toute interaction avec un autre système physique. L'étude de ces propriétés en parallèle avec celles des états cohérent et thermique nous a permis de constater l'aspect quantique des états comprimé et superposé. Les interférences entre états décrits à l'aide de leurs densités de probabilité et caractérisant cet effet quantique, sont absentes pour les états cohérent et thermique préalablement à toute interaction. En effet, de tels états peuvent être traités dans un cadre classique tandis que les états superposé et comprimé ne peuvent être décrits que dans le cadre de la théorie quantique.

Le champ et l'atome étant préparés indépendamment l'un de l'autre, sont mis en présence pendant un très court instant. Leurs états sont alors modifiés par la perturbation et deviennent, au cours du temps, partiellement ou totalement intriqués. Afin de caractériser le degré d'intrication, nous avons élaboré un nouveau critère, basé sur la différence de variations des distances. Les propriétés de ce critère sont comparées avec celles des trois autres critères qui sont l'entropie conditionnelle, le rayon de la sphère de Bloch et le critère de réduction.

Cette analyse nous a permis de mettre en évidence des temps caractéristiques : une intrication du système apparaît au bout de chaque oscillation de Rabi, une première séparabilité des états pour une première demi-période de Rabi et l'inséparabilité qui disparaît au bout de la troisième période de l'oscillation de Rabi. Nous avons constaté également que pendant ce temps de cohérence, un échange d'information a lieu entre l'atome et le champ comprimé : ainsi lorsque

l'entropie du champ est maximale (respectivement minimale), l'entropie de l'atome est minimale (respectivement maximale).

Par ailleurs, les résultats obtenus à l'aide de ce nouveau critère sont en parfait accord avec ceux des trois autres critères dans un très grand intervalle de temps et quelles que soient les valeurs de nombre moyen de photons du champ avant intrication.

Nous avons observé un temps de cohérence plus long pour un champ comprimé que pour un champ cohérent, confirmant ainsi que l'intrication est de plus longue durée avec un système quantique qu'avec un système classique. Cette remarque s'appuie aussi sur le fait qu'une intrication est difficilement décelable avec un champ thermique du fait du fort couplage des différents états composant ce champ avec l'environnement et détruisant ainsi toute cohérence de phase.

À partir de l'analyse des trois critères en fonction de la valeur moyenne du nombre de photons  $\langle n \rangle$  avant interaction, nous notons une intrication du champ comprimé à un temps égal à la demi période de Rabi pour des valeurs de  $\langle n \rangle$  faibles. D'autre part, les variations dynamiques des quatre critères sont différentes. Aucun critère ne présente une condition nécessaire et suffisante pour toutes les valeurs de  $\langle n \rangle$ . Les quatre critères sont donc complémentaires. En outre, ces critères nous ont permis de constater des propriétés non classiques pour un champ cohérent ayant déjà interagi avec un atome, à l'instant correspondant à la demi-période de l'oscillation de Rabi. Il s'agit du premier instant où les états de l'atome et du champ ne sont plus intriqués. Le tracé de sa densité de probabilité à cet instant, révèle les mêmes oscillations que celles observées dans le cas d'un champ superposé indépendant. Nous pouvons donc concevoir un champ généré par la superposition des états cohérents (à une phase), grâce au modèle de Jaynes-Cummings et aux critères de séparabilité (inséparabilité). La norme de la sphère de Bloch est un critère qui nous a permis de déterminer l'instant où la radiation est pure.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous avons montré que l'intrication générée par la superposition macroscopique de ces deux états cohérents peut être utilisée en vue d'améliorer les performances tant en détection qu'en information. En effet, nous avons montré que lorsque nous tenons compte de la phase, nous nous rapprochons des performances optimales lors d'une détection discrète. Nous avons déduit ces performances ultimes de la détection quantique (détection idéale) qui constitue une référence pour tout système de détection. Finalement, notre analyse nous a permis d'observer une amélioration des performances en information-détection pour certaines valeurs de la phase, résultat qui peut être facilement exploité pour transmettre de l'information avec une meilleure efficacité.

Au cours de cette étude, seule la dynamique des propriétés statistiques du champ comprimé a été considérée à l'occasion de l'étude des critères de séparabilité (inséparabilité). Comme perspective, il serait intéressant de compléter cette étude par celle d'un champ superposé comme source de rayonnement. Celui ci, se trouvant dans un état quantique indépendant d'un autre sous système, présente des interférences dues aux corrélations des deux paquets d'ondes cohérents.

L'état superposé qui est déjà intriqué (superposition de deux champs cohérents déphasés et d'amplitude opposées) présenterait alors une deuxième intrication lorsqu'il interagit avec l'atome. Les temps caractéristiques qui s'en déduisent seraient à comparer avec ceux relevant de l'état comprimé.

En effet, nous pouvons envisager plusieurs hypothèses : si le couplage de l'état superposé avec un atome entraîne une décohérence, l'intrication devrait être détruite. Cependant, si nous arrivons à contrôler parfaitement l'état superposé c'est à dire à l'isoler de son environnement et considérer que le temps qu'il met pour être intriqué avec l'atome est inférieur à sa durée de vie, nous pourrions mettre en évidence l'intrication dont la durée serait intéressante à déterminer. D'autre part, il serait utile de refaire les calculs de performances avec des états d'amplitude complexe.

Enfin, le dispositif original à codage de phase que nous proposons en Annexe G, est susceptible d'une réalisation expérimentale à l'aide de techniques actuelles.



## Annexe A

### Loi de probabilité $P_{Sq}(n)$ d'un état comprimé

Pour calculer la densité de probabilité de mesurer  $n$  photons dans l'état comprimé, on définit un nouvel opérateur  $\widehat{b} = \mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^+$  (2.27) avec  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  et  $\mu^2 - \nu^2 = 1$ . L'équation aux éléments propres de  $\widehat{b}$  est

$$\widehat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad (\text{A.1})$$

Projetons l'état  $\widehat{b}|\beta\rangle$  suivant l'état cohérent  $\langle\alpha|$

$$\langle\alpha|\widehat{b}|\beta\rangle = \beta\langle\alpha|\beta\rangle \quad (\text{A.2})$$

D'autre part, on sait que [12], [44], [46] :

$$\langle\alpha|\widehat{F}(\widehat{a}^+, \widehat{a})|\beta\rangle = F\left(\alpha^*, \frac{\alpha}{2} + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle\alpha|\beta\rangle \quad (\text{A.3})$$

soit pour  $\widehat{F} \equiv \widehat{b}$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\alpha|\beta\rangle = \left(\frac{\beta}{\mu} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\nu}{\mu}\alpha^*\right)\langle\alpha|\beta\rangle \quad (\text{A.4})$$

dont la solution s'écrit [41]

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(\alpha^*\frac{\beta}{\mu} - \alpha^{*2}\frac{\nu}{2\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} + f(\beta^*, \beta)\right) \quad (\text{A.5})$$

L'expression de  $f(\beta^*, \beta)$ , s'obtient en tenant compte de  $\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\beta\rangle)^*$  et de

$$\langle\beta|\widehat{M}(\widehat{b}^+, \widehat{b})|\alpha\rangle = M\left(\beta^*, \frac{\beta}{2} + \frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)\langle\beta|\alpha\rangle \quad (\text{A.6})$$

pour  $\widehat{M} \equiv \widehat{b}$ . Il vient

$$\langle\beta|\widehat{b}|\alpha\rangle = \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)\langle\beta|\alpha\rangle \quad (\text{A.7})$$

De plus, utilisant l'équation (A.3) nous obtenons

$$\langle \beta | \hat{b} | \alpha \rangle = \left( \langle \alpha | \hat{b}^+ | \beta \rangle \right)^* = \left( \mu \alpha + \frac{\nu \alpha^*}{2} + \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \langle \beta | \alpha \rangle \quad (\text{A.8})$$

En notant que les expressions (A.7) et (A.8) sont égales, on pose

$$f(\beta^*, \beta) = C \left( -\frac{|\beta|^2}{2} + \frac{\nu}{2\mu} \beta^2 \right) \quad (\text{A.9})$$

où  $C$  est déterminée à partir de la normalisation

$$\frac{1}{\pi} \int |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 d^2 \alpha = 1 \quad (\text{A.10})$$

Nous obtenons finalement (à une phase près)

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp \left( \alpha^* \frac{\beta}{\mu} - \alpha^{*2} \frac{\nu}{2\mu} + \beta^2 \frac{\nu}{2\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Pour parvenir au produit scalaire état nombre état comprimé, on utilise les deux propriétés

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \sum_n \langle \alpha | n \rangle \langle n | \beta \rangle \quad (\text{A.12})$$

et [42]

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z), |t| < \infty \quad (\text{A.13})$$

d'où la forme finale pour la distribution du nombre de photons lorsque  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$P_{Sq}(n) = |\langle n | \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-\alpha^2(1+\tanh(r))}}{\cosh(r)} \frac{\left( \frac{\tanh(r)}{2} \right)^n}{n!} H_n^2(z) \quad (\text{A.14})$$

avec  $z^2 = \frac{\alpha^2 e^{2r}}{\sinh(2r)}$ ,  $\cosh(r) = \mu$ ,  $\sinh(r) = \nu$ ,  $\langle n \rangle_C = |\alpha|^2$ , et où  $H_n(z)$  désignent les polynômes de Hermite.

## Annexe B

# Le critère $D(\theta)$ et l'information de Fisher

### B.1 Relation entre $D(\theta)$ et l'information de Fisher

Nous montrons ci-dessous qu'il existe une relation entre le critère de la différence de variations des distances  $D(\theta)$  et l'information de Fisher. Cependant, avant d'établir cette relation nous montrons que l'information de Fisher est une entropie.

#### B.1.1 Entropie de Fisher

L'information de Fisher pour une d.d.p.  $P(x, t)$ , avec  $t$  considéré comme variable et  $\chi$  le domaine de variation de  $x$  est définie comme

$$J(t) = \int_{\chi} \frac{\left(\frac{\partial P(t;x)}{\partial x}\right)^2}{P(t;x)} dx, \quad J(t) \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

Cette grandeur est une entropie de sorte que :

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} J(t) \quad (\text{B.2})$$

$S(t) = - \int_{\chi} P(t;x) \ln P(t;x) dx$ ,  $\chi = ]-\infty, \infty[$  étant l'entropie différentielle de  $P(t;x)$  ou entropie de Shannon.

En effet, en dérivant  $S(t)$  par rapport au temps

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(t)}{\partial t} &= - \int_{\chi} \left( \frac{\partial P(t; x)}{\partial t} \ln P(t; x) + \int_{\chi} \frac{\partial P(t; x)}{\partial t} dx \right) dx \\ &= - \int_{\chi} \frac{\partial P(t; x)}{\partial t} \ln P(t; x) dx - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\chi} P(t; x) dx \\ &= - \int_{\chi} \frac{\partial P(t; x)}{\partial t} \ln P(t; x) dx\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

Pour des valeurs de  $n \equiv x$  voisines de  $\langle n \rangle$ , nous avons une distribution gaussienne de la d.d.p, donc  $\frac{\partial P(t, n)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial x^2}$  d'où

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_{\chi} \frac{\partial^2 P(t; x)}{\partial x^2} \ln P(t; x) dx \quad (\text{B.4})$$

Après une intégration par parties et normalisation de la distribution, nous obtenons

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\chi} \frac{\left( \frac{\partial P(t; x)}{\partial x} \right)^2}{P(t; x)} dx = \frac{1}{2} J(t) \quad (\text{B.5})$$

### B.1.2 $D(\theta)$ borné par l'entropie de Fisher

Considérons la quantité suivante [60]

$$F(n; t_1; t_2) = \left( \sqrt{P(n; t_2)} - \sqrt{P(n; t_1)} \right)^2 \sim \frac{1}{4} \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{\partial P(t; n)}{\partial n}}{\sqrt{P(n; t)}} dt \right)^2 \quad (\text{B.6})$$

qui relie la distance à l'entropie de Fisher. En appliquant l'inégalité de Cauchy et en remplaçant  $(t_2 - t_1)$  par  $\theta$

$$\left( \int_{\theta} \frac{\frac{\partial P(t; n)}{\partial n}}{\sqrt{P(n; t)}} dt \right)^2 \leq \theta^2 \int_{\theta} \frac{\left( \frac{\partial P(t; n)}{\partial n} \right)^2}{P(n; t)} dt \quad (\text{B.7})$$

nous obtenons

$$F(n; \theta; t_1) \leq \frac{\theta^2}{4} \int_0^1 \frac{\left( \frac{\partial P(t_1 + \theta u; n)}{\partial n} \right)^2}{P(t_1 + \theta u; n)} du \quad (\text{B.8})$$

où  $u$  est une variable d'échelle sans dimension. Après intégration de  $F(n; \theta; t_1)$  sur  $n$  et interversion des signes d'intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta(t_1, \theta) &= \int F(n; \theta; t_1) dn \leq \frac{\theta^2}{4} \int_0^1 du \int_{\chi} \frac{\left( \frac{\partial P(t_1 + \theta u; n)}{\partial n} \right)^2}{P(t_1 + \theta u; n)} dn \\ &\leq \frac{\theta^2}{4} \int_0^1 J(t_1 + \theta u) du\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$



Soit, pour  $t_1 = 0$  et  $\theta \rightarrow 0$

$$D(\theta) \leq \frac{\theta}{2} \left( \int_0^1 J(\theta u) du \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

résultat montrant que le critère que nous avons établi est borné par l'entropie de Fisher. De même, en combinant les expressions (B.5) et (B.10), il vient

$$D(\theta) \leq \sqrt{|S(\theta) - S(0)|} = \sqrt{|E(\theta)|} \quad (\text{B.11})$$

On voit également dans quel sens, ce nouveau critère est borné par la racine carrée de la valeur absolue de la différence des entropies.

Il est à noter que l'entropie de Fisher décrit, aussi bien que l'entropie de Shannon, les états d'un système physique. Nous citons ci dessous comme exemple deux états particuliers, thermique et cohérent, pour montrer que l'étude des deux entropies convergent vers les mêmes résultats.

En effet, l'entropie de Fisher d'un état thermique de densité de probabilité  $P(n) = (1 - \nu)\nu^n$  est

$$J(T) = (\log \nu)^2 \quad (\text{B.12})$$

avec  $\frac{\partial P(n)}{\partial n} = (1 - \nu)\nu^n \log \nu$  alors que l'entropie de Shannon est

$$H(T) = - \sum_n P(n) \log P(n) \quad (\text{B.13})$$

$$= - \left( \log(1 - \nu) + \frac{1 - \nu}{\nu} \log \nu \right) \quad (\text{B.14})$$

Pour  $S \gg 1$ ,  $\nu \sim 1 - \frac{1}{S}$ ; l'entropie de Fisher  $J(T) \leq \frac{1}{S^2}$  tandis que l'entropie de Shannon est  $H(T) \geq \ln(1 + S)$

D'autre part, lorsque la puissance  $S \gg 1$ , la densité de probabilité d'un état cohérent qui décrit une distribution de Poisson est une Gaussienne ( $n \rightarrow x$ ) :

$$G(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(x - S)^2}{2S} \right) \quad (\text{B.15})$$

On peut déduire l'entropie de Fisher

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = - \left( \frac{x - S}{S} \right) G(x) \quad (\text{B.16})$$

$$J(G) = \frac{1}{S\sqrt{S}} \quad (\text{B.17})$$

Comme  $S \gg 1$ ,  $J(G) \geq \frac{1}{S^2}$ . Par ailleurs, l'entropie de Shannon correspondant à cet état pour  $S \gg 1$  est

$$H(G) \sim \log S \quad (\text{B.18})$$

Finalement, on a

$$J(T) \leq \frac{1}{S^2} \leq J(G) \quad (\text{B.19})$$

$$H(T) \geq H(G) \quad (\text{B.20})$$

En effet, l'entropie de Shannon [33], grandeur liée à la thermodynamique montre que l'état le plus probable est celui dont l'entropie est la plus grande. Il s'agit de l'état thermique comme nous l'avons montré dans le paragraphe 2.5 du chapitre 2 et sur la figure 3.7. Par contre, l'entropie de Fischer est liée à la complexité analytique tel que l'état de complexité minimale est l'état le plus probable qui est bien sûr l'état thermique.

## B.2 Expression de l'Information de Fisher en mécanique quantique

Nous montrons ci dessous que l'entropie de Fisher décrite par la mécanique quantique impose à la fonction d'onde d'un système physique d'être la moins irrégulière possible. Par ailleurs, le critère de séparabilité  $D(\theta)$  (critère basé sur la différence de variations des distances) est borné par l'entropie de Fisher ; ce qui nous permet de conclure que le critère que nous avons établi est cohérent avec la mécanique quantique.

En effet, si nous partons de l'énergie cinétique d'une particule de masse  $m$  dans l'état  $\psi(x)$  (ici une fonction d'onde pour simplifier l'exposé) [61]

$$E_c = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Omega} \psi^*(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x)^*}{\partial x} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} dx \quad (\text{B.21})$$

avec  $\Omega = ]-\infty, \infty[$  et  $\psi(\pm\infty), \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} |_{\pm\infty} = 0$  et que nous supposons que l'on soit dans les conditions telles que  $\psi(x) = \sqrt{p(x)}$ , l'énergie cinétique devient alors

$$E_c = \frac{\hbar^2}{8m} \int \frac{\left(\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right)^2}{p(x)} dx \quad (\text{B.22})$$

Par ailleurs, nous rappelons que l'information de Fisher d'un processus défini par sa densité de probabilité (d.d.p.)  $p(x)$  s'écrit  $J(p) = \int_{\Omega} \frac{\left(\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right)^2}{p(x)} dx$  soit

$$E_c = \frac{\hbar^2}{8m} J(p) \quad (\text{B.23})$$

Nous cherchons  $p(x)$  en minimisant  $J(p)$  sous les contraintes

$$\mathcal{C} : p(x) \geq 0; \int_{\Omega} p(x) dx = 1; \int_{\Omega} V(x) p(x) dx \leq V_0; \quad (\text{B.24})$$

où  $V(x)$  est le potentiel auquel est soumise la particule. On utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange sur la fonctionnelle

$$L(\psi) = \frac{\hbar^2}{2m} \int \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 dx + \lambda \left( \int \psi^2(x) dx - 1 \right) - \mu \left( \int_{\Omega} V(x) \psi^2(x) dx - V_0 \right) \quad (\text{B.25})$$

plutôt que sur  $p(x)$ . La résolution de  $\frac{\partial L(\psi)}{\partial \psi} = 0$ , se ramène à

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \mu V(x) \psi(x) = \lambda \psi(x) \quad (\text{B.26})$$

qui est l'équation de Schrödinger avec  $\mu = 1$  et  $E = \lambda$ .

Il est clair que le minimum de l'énergie cinétique correspond au minimum de l'énergie totale pour un potentiel donné ; par conséquent la solution de l'équation de Schrödinger est une fonction d'onde décrivant l'état fondamental du système physique. D'autre part, l'entropie de Fisher s'exprimant en fonction de l'énergie cinétique est minimale lorsque  $p(x)$  est de complexité minimale. Nous pouvons vérifier ce résultat en prenant  $p_1$  plus compliqué que  $p_2$ . En effet, si nous prenons comme exemple les densités de probabilité des états thermique et cohérent, nous montrons que  $J(C) \geq J(T)$ . Donc sous une contrainte de potentiel, la mécanique quantique impose une fonction d'onde  $\psi(x)$  la moins irrégulière possible. Or la fonction  $D(\theta)$ , introduite comme critère d'intrication, est une information de Fisher ; par conséquent le critère de différence de variations de distances est un critère en cohérence avec la mécanique quantique.



# Annexe C

## Bornes du critère $D(\theta)$

### C.1 Norme $\ell_1$ et variation de distances

Dans cette annexe, nous définissons des bornes de  $D(\theta)$  à l'aide des inégalités relatives à la norme  $\ell_1$ . Pour simplifier la présentation, nous supposons que les probabilités  $P_F(n, \theta)$  et  $P_F(n, 0)$  sont des probabilités à valeurs binaires  $(p_1, p_2)$ . Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous écrirons  $p_1 = \{p, 1 - p\}$  et  $p_2 = \{q, 1 - q\}$  avec  $p, q \in [0, 1]$ . De plus, nous supposerons que  $p \geq q$  sans que cela limite la généralité de la démonstration. Par définition, la norme  $\ell_1$  d'une grandeur  $g$  est

$$\|g\|_1 \triangleq \sum_k |g(k)| \quad (\text{C.1})$$

Dans notre cas  $g = p_1 - p_2$  et la norme  $\ell_1$  devient

$$\|p_1 - p_2\|_1 = 2(p - q) \quad (\text{C.2})$$

De même, on définit la variation de distance des probabilités comme

$$d(p_1; p_2) = 1 - \sum \sqrt{p_1 p_2} = 1 - \sqrt{pq} - \sqrt{(1-p)(1-q)} \quad (\text{C.3})$$

Afin d'établir la relation entre la norme  $\ell_1$  et  $d(p_1; p_2)$ , nous considérons une grandeur qui décrit leur différence telle que

$$g(p, q) = d(p_1; p_2) - \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_1 \quad (\text{C.4})$$

et dont les propriétés sont les suivantes

- $g(p, 0) \leq 0$  pour  $0 \leq p \leq 1$ ;
- $\frac{dg(p, q)}{dq} \big|_{q=0} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dg(p, q)}{dq} \big|_{q=p} = 1$ ,  $\frac{dg(p, q)}{dq} \big|_{q=q_m} = 0$  pour  $q_m \sim \frac{p}{8}(1+p)$ ;
- $g(p, p) = 0$

Sachant que  $q(1-q) \leq \frac{1}{4}$  pour une valeur de  $p$  donnée; on montre à partir des propriétés brièvement exposées ci-dessus que  $g(p, q) \leq 0$ . Par conséquent

$$d(p_1; p_2) \leq \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_1 \quad (\text{C.5})$$

Ceci constitue la borne supérieure de la variation des distances d'une part. La borne inférieure sera déterminée, d'autre part, en se basant sur l'inégalité suivante

$$1 - \sin x \sin y - \cos x \cos y \geq \frac{1}{2} (\sin^2 x - \sin^2 y)^2, \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{C.6})$$

En effet, en posant  $\sin x = \sqrt{p}$ ,  $\sin y = \sqrt{q}$ , on déduit que

$$d(p_1; p_2) \geq \frac{1}{2} (p - q)^2 = \frac{1}{8} \|p_1 - p_2\|_1^2 \quad (\text{C.7})$$

La variation des distances est bien bornée :

$$\frac{1}{8} \|p_1 - p_2\|_1^2 \leq d(p_1; p_2) \leq \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_1 \quad (\text{C.8})$$

Pour calculer, par exemple, la variation des distances pour le champ comprimé, nous avons

$$d(p_1; p_2) = 1 - \sum \sqrt{p_1(n)p_2(n)} \quad (\text{C.9})$$

avec  $p_1(n) = P_{Sq}(n; 0)$  et  $p_2(n) = P_{Sq}(n; \theta)$ .

En utilisant  $\sum_n \frac{(\tau/2)^n}{n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp\left(\frac{2xy\tau - (x^2+y^2)\tau^2}{1-\tau^2}\right)$  [42], et supposant  $P_{Sq}(n; 0) \simeq P_{Sq}(n-1; 0)$

$$\begin{aligned} d_{Sq} &\simeq 1 - \sum_n P_{Sq}(n) \sqrt{\cos^2(\theta\sqrt{n+1}) + \sin^2(\theta\sqrt{n})} \\ &\simeq 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_{nSq}^2 \theta^2}{4\langle n \rangle_C}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

## C.2 Différence de variations des distances

En prenant la fonction  $g(m) = \delta_{mn}$  ( $= 1$  si  $n = m$  et  $= 0$  si  $n \neq m$ ) comme référence pour la variation des distances (celle-ci représente une distribution de photons mesurés à partir de l'opérateur  $\hat{N}$  dans l'état  $|m\rangle\langle m|$ ), nous pouvons déduire à partir de la différence des variations des distances  $d(P_F(n; \theta); g)$  et  $d(P_F(n; 0); g)$ , le critère  $D(\theta)$ .

En effet,

$$\begin{aligned}
d(P_F(n; \theta); g) - d(P_F(n; 0); g) &= 1 - \sum_{n,m} \sqrt{P_F(n; \theta)g(m)} \\
&\quad - 1 + \sum_{n,m} \sqrt{P_F(n; 0)g(m)} \\
&= \sum_n \left( \sqrt{P_F(n; 0)} - \sqrt{P_F(n; \theta)} \right) \\
&= D(\theta)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

quantité qui, élevée au carré, nous donne :

$$\begin{aligned}
D^2(\theta) &= \sum_n P_F(n; 0) + \sum_n P_F(n; \theta) - 2 \sum_n \sqrt{P_F(n; 0)P_F(n; \theta)} \\
&= 2 \left( 1 - \sum_n \sqrt{P_F(n; 0)P_F(n; \theta)} \right) \\
&= 2 d(P_F(n; 0), P_F(n; \theta))
\end{aligned} \tag{C.12}$$

ce qui montre bien que le critère de la différence des variations de distance est la racine carré de la variation des distances.

### C.3 Bornes de $D(\theta)$

Nous rappelons d'abord la densité de probabilité d'un champ ayant interagi avec des atomes à un seul état excité ( $a = 0$ )

$$P_F(n; \theta) = P_F(n, 0)(1 - \sin^2 \theta \sqrt{n+1}) + P_F(n-1; 0) \sin^2 \theta \sqrt{n} \tag{C.13}$$

Pour  $n \gg 1$  et  $n \simeq \langle n \rangle$ , on a  $P_F(n; 0) \simeq P_F(n-1; 0)$  et (C.13) devient

$$P_F(n; \theta) \simeq \mathcal{N} P_F(n; 0) \left[ 1 - \sin \left( \frac{\theta}{2\sqrt{\langle n \rangle}} \right) \sin \left( 2\theta \sqrt{\langle n \rangle} \right) \right] \tag{C.14}$$

avec  $\mathcal{N}$  une constante déterminée à partir de  $\sum_n P_F(n; \theta) = 1, \theta \in [0, \theta_R[$ . Pour déterminer les bornes de ce critère, nous cherchons tout d'abord les bornes de  $d(P_F(n; \theta); g)$  et  $d(P_F(n; 0); g)$  en appliquant l'équation (C.8). Ce qui conduit à écrire

$$\frac{1}{8} \left( \sum_n |P_F(n; \theta) - 1| \right)^2 \leq d(P_F(n; \theta); g) \leq \frac{1}{2} \sum_n |P_F(n; \theta) - 1| \tag{C.15}$$

et

$$-\frac{1}{2} \sum_n |P_F(n; 0) - 1| \leq -d(P_F(n; 0); g) \leq -\frac{1}{8} \left( \sum_n |P_F(n; 0) - 1| \right)^2 \tag{C.16}$$

d'où

$$D(\theta) \leq \frac{1}{2} \sum_n |p_F(n; \theta) - 1| - \frac{1}{8} \left( \sum_n |p_F(n; 0) - 1| \right)^2 \quad (\text{C.17})$$

et

$$D(\theta) \geq \frac{1}{8} \left( \sum_n |P_F(n; \theta) - 1| \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_n |P_F(n; 0) - 1| \quad (\text{C.18})$$

Cependant, ces limites sont très larges. D'autres limites que nous allons déterminer ci dessous bornent mieux  $D(\theta)$ . En effet, en partant de (C.13) et en considérant  $P_F(n, 0) \simeq P_F(n-1, 0)$  pour  $n \gg 1$  et  $n \simeq \langle n \rangle$ , nous pouvons déduire la borne supérieure comme suit :

$$\begin{aligned} D(\theta) &\simeq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{\cos^2(\theta\sqrt{n+1}) + \sin^2(\theta\sqrt{n})} \right) \\ &\leq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{\cos^2(\theta\sqrt{n+1})} \right) \\ &= \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \cos(\theta\sqrt{n+1}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Quant à la borne inférieure, nous l'obtenons sous la forme

$$\begin{aligned} D(\theta) &\simeq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{\cos^2(\theta\sqrt{n+1}) + \sin^2(\theta\sqrt{n})} \right) \\ &\simeq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{1 - \cos^2(\theta\sqrt{n}) + \cos^2(\theta\sqrt{n+1})} \right) \\ &\geq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{1 + \cos^2(\theta\sqrt{n+1})} \right) \\ &\simeq \sum_n \sqrt{P_F(n, 0)} \left( 1 - \sqrt{\frac{n}{\langle n \rangle} + \cos^2(\theta\sqrt{n+1})} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Ces nouvelles bornes sont en effet moins larges que celles données par (C.17) et (C.18).



## Annexe D

### Expression approchée de $D(\theta)$

Nous pouvons déduire une expression analytique de  $D(\theta)$  en se plaçant dans les conditions suivantes :  $(n - \langle n \rangle) \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{\langle n \rangle} \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\theta\sqrt{\langle n \rangle} \rightarrow 0$ , d'une part. D'autre part, la densité de probabilité du champ comprimé au voisinage de  $\langle n \rangle \gg 1$ , peut être considérée, pour ce calcul, comme une distribution Gaussienne centrée autour de  $\langle n \rangle$  et de variance  $\langle n \rangle$ .

$$P_{Sq}(n; 0) \simeq \left( \frac{1}{2\pi \langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2 \langle n \rangle} \right) \quad (\text{D.1})$$

Comme nous avons également  $P_{Sq}(n) \simeq P_{Sq}(n - 1)$ ,

$$P_{Sq}(n; \theta) \simeq P_{Sq}(n; 0) \left[ \cos^2 \left( \theta\sqrt{n+1} \right) + \sin^2 \left( \theta\sqrt{n} \right) \right]$$

le critère  $D(\theta)$  s'écrit

$$\begin{aligned} D(\theta) &\simeq \sum_n \sqrt{P_{Sq}(n)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \left( \theta\sqrt{n+1} \right) + \sin^2 \left( \theta\sqrt{n} \right)} \right] \\ &\simeq \sum_n \sqrt{P_{Sq}(n)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \sin^2 \left( \theta\sqrt{n+1} \right) - \sin^2 \left( \theta\sqrt{n} \right) \right) \right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_n \sqrt{P_{Sq}(n)} \left( \cos^2 \left( \theta\sqrt{n} \right) - \cos^2 \left( \theta\sqrt{n+1} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Nous utilisons les développements élémentaires suivants :

$$\sqrt{n} \sim \sqrt{\langle n \rangle} + \frac{n - \langle n \rangle}{2\sqrt{\langle n \rangle}} \quad (\text{D.3})$$

$$\sqrt{\langle n \rangle + 1} - \sqrt{\langle n \rangle} \sim \frac{1}{2\sqrt{\langle n \rangle}} \quad (\text{D.4})$$

$$\cos^2 x \sim \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 \sim 1 - x^2 \sim e^{-x^2} \quad (\text{D.5})$$

$$\cos^2(\theta\sqrt{n}) \sim \cos^2(\theta\sqrt{\langle n \rangle}) \cos^2\left(\frac{\theta(n - \langle n \rangle)}{2\sqrt{\langle n \rangle}}\right) \quad (\text{D.6})$$

$$+ \sin^2(\theta\sqrt{\langle n \rangle}) \sin^2\left(\frac{\theta(n - \langle n \rangle)}{2\sqrt{\langle n \rangle}}\right) \quad (\text{D.7})$$

$$- 2 \sin(\theta\sqrt{\langle n \rangle}) \cos(\theta\sqrt{\langle n \rangle}) \quad (\text{D.8})$$

$$\sin\left(\frac{\theta(n - \langle n \rangle)}{2\sqrt{\langle n \rangle}}\right) \cos\left(\frac{\theta(n - \langle n \rangle)}{2\sqrt{\langle n \rangle}}\right) \quad (\text{D.9})$$

Nous procédons de la même manière pour  $\cos^2(\theta\sqrt{n+1})$ . Ensuite, nous faisons la différence entre les différents termes pour aboutir à l'expression

$$\begin{aligned} D(\theta) \simeq & \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \left[ 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2\sqrt{\langle n \rangle}}\right) + e^{-\frac{\sigma^2(\theta - \theta_0)^2}{4\langle n \rangle}} \cos(4\theta\sqrt{\langle n \rangle}) \right] \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi\langle n \rangle}} \left[ \cos(2\theta\sqrt{\langle n \rangle}) - \cos(2\theta\sqrt{\langle n \rangle + 1}) \right] \left( e^{-\frac{\sigma^2\theta^2}{4\langle n \rangle}} + e^{-\frac{\sigma^2(\theta - \theta_R)^2}{4\langle n \rangle}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Noter que cette méthode d'approximation, fondée sur des arguments simples, s'est révélée, par comparaison avec les calculs numériques exacts, très efficace dans le domaine de validité  $\theta \in [0, \theta_R]$ .

# Annexe E

## Détection du champ superposé

### E.1 Propriétés statistiques des états superposés

Nous exposons ci-dessous un calcul détaillé des densités de probabilité de deux états superposés différents avec celle d'un mélange statistique d'états cohérents dans les bases  $\{|n\rangle\}$  et  $\{|x\rangle\}$ .

#### E.1.1 Calcul des constantes de normalisation

Considérons trois opérateurs densité différents décrivant chacun une source d'information d'un système physique. L'utilisation des opérateurs densité présente toutefois une simplification pour les calculs entrepris par la suite.

**L'état**  $|\psi\rangle$

Soit l'état superposé suivant

$$|\psi\rangle = b(|\alpha\rangle + e^{-i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (\text{E.1})$$

et son état conjugué  $\langle\psi| = b^*(\langle\alpha| + e^{i\varphi} \langle-\alpha|)$  tel que  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . L'opérateur densité  $\rho_\psi$  est un projecteur dont la trace (la somme de tous les éléments diagonaux de la matrice densité) est égale à 1. Son expression est

$$\begin{aligned} \rho_\psi &= |\psi\rangle \langle\psi| \\ &= bb^*(|\alpha\rangle \langle\alpha| + |-\alpha\rangle \langle-\alpha|) + bb^*(e^{i\varphi} |\alpha\rangle \langle-\alpha| + e^{-i\varphi} |-\alpha\rangle \langle\alpha|) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Par ailleurs, comme l'état  $|\psi\rangle$  est pur,  $\rho_\psi^2 = |\psi\rangle \langle\psi| \psi\rangle \langle\psi| = |\psi\rangle \langle\psi|$ , par conséquent :

$$\text{Tr}\rho_\psi = \text{Tr}\rho_\psi^2 = 1 \quad (\text{E.3})$$

Dans la suite, on se restreint au cas où  $b$  est une constante réelle ; celle-ci est déduite en normalisant l'état  $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\psi\rangle = b^2 [\langle\alpha|\alpha\rangle + e^{-i\varphi} \langle-\alpha|\alpha\rangle + e^{i\varphi} \langle\alpha|-\alpha\rangle + \langle-\alpha|-\alpha\rangle] = 1 \quad (\text{E.4})$$

Afin de déterminer les différents produits scalaires, nous rappelons d'abord l'expression de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  définie dans la base orthonormée  $\{|n\rangle\}$ . Les éléments de cette base sont les kets propres de l'opérateur  $\hat{N}$  :

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} |n\rangle, \quad \langle\alpha| = \sum_m \frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \langle m| \quad (\text{E.5})$$

Rappelons que l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  est l'état propre de l'opérateur d'annihilation  $a$  de l'oscillateur harmonique  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ,  $\langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$ . et que les états cohérents étant normés mais ne sont pas orthogonaux.

Nous limiterons cette étude au cas où  $\alpha$  est réel et  $\varphi$  la phase comprise entre 0 et  $2\pi$ . La condition de normalisation devient :

$$2b^2 \left[ 1 + \sum_n (-1)^n \alpha^{2n} \frac{e^{-\alpha^2}}{n!} (\cos \varphi) \right] = 1$$

En posant  $S = \alpha^2$  et  $\sum_n (-1)^n \frac{S^n}{n!} = e^{-S}$ , nous obtenons

$$b^2 = \frac{1}{2(1 + e^{-2S} \cos \varphi)} \quad (\text{E.6})$$

### L'état $|\theta\rangle$

Considérons un autre état généré toujours par la superposition des états cohérents :

$$|\theta\rangle = c (|\alpha\rangle + |-e^{i\varphi}\alpha\rangle) \quad (\text{E.7})$$

tel que l'état conjugué est  $\langle\theta| = c^*(\langle\alpha| + \langle -e^{-i\varphi}\alpha|)$ . L'opérateur densité :

$$\begin{aligned} \rho_\theta = |\theta\rangle \langle\theta| &= cc^* (|\alpha\rangle \langle\alpha| + |-e^{i\varphi}\alpha\rangle \langle -e^{-i\varphi}\alpha|) \\ &+ cc^* (|\alpha\rangle \langle -e^{-i\varphi}\alpha| + |-e^{i\varphi}\alpha\rangle \langle\alpha|) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Il est à noter que cet état quantique est aussi un état pur puisque  $\text{Tr} \rho_\theta = \text{Tr} \rho_\theta^2 = 1$ . L'état  $|-e^{i\varphi}\alpha\rangle$  s'exprime de la manière suivante :

$$|-e^{i\varphi}\alpha\rangle = \sum_n \frac{(-e^{i\varphi}\alpha)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} |n\rangle \quad (\text{E.9})$$

La constante  $c$  (réelle) est déterminée également par la normalisation de l'état  $|\theta\rangle$

$$\langle\theta|\theta\rangle = c^2 [\langle\alpha|\alpha\rangle + \langle -\alpha e^{-i\varphi} | \alpha e^{i\varphi} \rangle + \langle\alpha| -e^{i\varphi}\alpha\rangle + \langle -\alpha e^{-i\varphi} | \alpha \rangle] = 1 \quad (\text{E.10})$$

En calculant les produits scalaires mixtes qui en résultent :

$$\begin{aligned}\langle \alpha | -e^{i\varphi} \alpha \rangle &= e^{-e^{i\varphi} \alpha^2} e^{-\alpha^2} \\ \langle -\alpha e^{-i\varphi} | \alpha \rangle &= e^{-e^{-i\varphi} \alpha^2} e^{-\alpha^2}\end{aligned}$$

nous obtenons

$$c^2 = \frac{1}{2(1 + e^{-S(1+\cos\varphi)} \cos(S \sin\varphi))} \quad (\text{E.11})$$

### Mélange statistique d'états cohérents

Pour décrire la source d'information, nous envisageons une autre classe d'états correspondants à un mélange statistique des états cohérents où les termes dus aux effets d'interférences sont nuls.

Soit l'opérateur densité :

$$\rho_m = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha|) \quad (\text{E.12})$$

tel que  $\text{Tr} \rho_m = \frac{1}{2} [\text{Tr} (|\alpha\rangle \langle \alpha|) + \text{Tr} (|-\alpha\rangle \langle -\alpha|)]$ . Dans la base orthonormée  $\{|n\rangle\}$  de l'oscillateur harmonique, la trace s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Tr} \rho_m &= \frac{1}{2} \left[ \sum_n \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle + \sum_n \langle n | -\alpha \rangle \langle -\alpha | n \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_n \langle \alpha | n \rangle \langle n | \alpha \rangle + \sum_n \langle -\alpha | n \rangle \langle n | -\alpha \rangle \right] \quad (\text{E.13})\end{aligned}$$

En utilisant la relation de fermeture  $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$  et en tenant compte de la normalisation des états cohérents  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle -\alpha | -\alpha \rangle = 1$ , nous déduisons que  $\text{Tr} \rho_m = 1$ . D'autre part, le système est décrit par un état non pur  $\text{Tr} \rho_m^2 \leq 1$ . En effet, le développement des termes entre parenthèses de

$$\text{Tr} \rho_m^2 = \text{Tr} \left[ \frac{1}{4} (|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha|) (|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha|) \right] \quad (\text{E.14})$$

et le calcul des produits scalaires mixtes des deux états cohérents  $\langle \alpha | -\alpha \rangle = \langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2\alpha^2} = e^{-2S}$ , aboutit à

$$\text{Tr} \rho_m^2 = \frac{1}{2} (1 + e^{-4\alpha^2}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-4S}) \leq 1 \text{ avec } S \geq 0 \quad (\text{E.15})$$

### E.1.2 Distributions de probabilité

Nous détaillons ci-dessous le calcul des densités de probabilité des différents états. La statistique de détection discrète ou continue, déterminée à partir d'un calcul de la densité de probabilité, nous permet en effet de déterminer les performances du récepteur choisi.

### a) Comptage de photons

Calculons la d.d.p. de mesurer  $n$ , le nombre de photons lorsque la source est décrite par les états  $|\psi\rangle$ ,  $|\theta\rangle$  et par le mélange statistique des états cohérents. La probabilité de mesurer  $n$  photons dans l'état  $|\psi\rangle$  est  $P_\varphi(n) = \text{Tr}(\hat{\pi}_n \rho_\psi) = |\langle n|\psi\rangle|^2$  où  $\hat{\pi}_n = |n\rangle\langle n|$  est un opérateur de mesure. Afin de déterminer son expression, nous avons calculé les projections de l'état  $|n\rangle$  respectivement sur les états  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha\rangle$  :

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}, \quad \langle n|-\alpha\rangle = \frac{(-\alpha)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (\text{E.16})$$

ainsi que les produits mixtes de ces projections. Nous déduisons alors la densité de probabilité en fonction du nombre de photons  $n$ , de la phase  $\varphi$  et du signal  $S$  :

$$P_\varphi(n) = \frac{(1 + (-1)^n \cos \varphi)}{(1 + e^{-2S} \cos \varphi)} P_C(n) \quad (\text{E.17})$$

avec  $P_C(n) = e^{-S} \frac{S^n}{n!}$  la loi de Poisson. Dans le cas où  $\varphi = 0, \pi$ ,  $P_\varphi(n)$  présente des oscillations soit constructives soit destructives, sauf pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ . Pour ces deux valeurs de la phase, la probabilité de mesure est analogue à celle d'un état cohérent. D'autre part, à partir de cette d.d.p., nous calculons le coefficient de corrélation réduit :

$$h = \frac{(\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)}{\langle n \rangle^2} \quad (\text{E.18})$$

Le nombre moyen de photons s'écrit

$$\langle n \rangle = \text{Tr}(\rho_\psi N) = \sum_n n P_\varphi(n) = \sum_n n \frac{(1 + (-1)^n \cos \varphi)}{(1 + e^{-2S} \cos \varphi)} e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (\text{E.19})$$

ainsi que le moment d'ordre 2

$$\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 P_\varphi(n) = \sum_n n^2 \frac{(1 + (-1)^n \cos \varphi)}{(1 + e^{-2S} \cos \varphi)} e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (\text{E.20})$$

L'équation (E.18) devient

$$h = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left( e^{-S} \frac{S^n}{n!} \right) [1 + (-1)^n \cos \varphi]}{\left[ \sum_{n=0}^{\infty} n \left( e^{-S} \frac{S^n}{n!} \right) [1 + (-1)^n \cos \varphi] \right]^2} (1 + e^{-2S} \cos \varphi) \quad (\text{E.21})$$

Après avoir effectué la sommation sur  $n$ , l'expression se simplifie

$$h = \left( \frac{e^{2S} + \cos \varphi}{e^{2S} - \cos \varphi} \right)^2 \quad (\text{E.22})$$

Examinons à présent ce que deviennent ces quantités pour l'état  $|\theta\rangle$ . La probabilité de mesurer  $n$  photons dans cet état s'exprime de la même manière que pour  $|\psi\rangle$  :  $P_\theta(n) = |\langle n|\theta\rangle|^2$  avec

$$\langle n|\theta\rangle = c(\langle n|\alpha\rangle + \langle n|-e^{i\varphi}\alpha\rangle) \quad (\text{E.23})$$

et

$$\langle\theta|n\rangle = c(\langle\alpha|n\rangle + \langle -e^{-i\varphi}\alpha|n\rangle) \quad (\text{E.24})$$

Les probabilités de mesurer  $n$  dans les états  $|\alpha\rangle$  et  $|-e^{i\varphi}\alpha\rangle$  sont

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = |\langle n|-e^{i\varphi}\alpha\rangle|^2 = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \quad (\text{E.25})$$

d'une part et d'autre part

$$\langle n|-e^{i\varphi}\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle + \langle -e^{-i\varphi}\alpha|n\rangle\langle n|\alpha\rangle = 2e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} (-1)^n \cos(n\varphi) \quad (\text{E.26})$$

La constante  $c^2$  a déjà été exprimée (cf E.11), d'où :

$$P_\theta(n) = \frac{(1 + (-1)^n \cos(n\varphi))}{1 + e^{-S(1+\cos\varphi)} \cos(S \sin\varphi)} P_C(n) \quad (\text{E.27})$$

expression présentant des oscillations mais qui diffère beaucoup de  $P_\varphi(n)$ . Pour le mélange statistique d'états cohérents, on peut l'interpréter à la limite par la théorie classique. En effet, dans la base orthonormée  $\{|m\rangle\}$  de l'oscillateur harmonique nous avons :

$$\text{Tr}(\hat{\pi}_n \rho_m) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=0} \langle m|n\rangle \langle n|\alpha\rangle \langle\alpha|m\rangle + \sum_{m=0} \langle m|n\rangle \langle n|-\alpha\rangle \langle-\alpha|m\rangle \right] \quad (\text{E.28})$$

expression qui nous amène à conclure que

$$P_m(n) = \frac{1}{2} [|\langle n|\alpha\rangle|^2 + |\langle n|-\alpha\rangle|^2] = e^{-S} \frac{S^n}{n!} \quad (\text{E.29})$$

est une distribution de Poisson.

### Détection homodyne

La densité de probabilité de mesurer  $x$  dans l'état  $|\psi\rangle$  est

$$P_\varphi(x, \alpha_r) = \text{Tr}(\hat{\pi}_x \rho_\psi) = |\langle x|\psi\rangle|^2 \quad (\text{E.30})$$

tel que  $\hat{\pi}_x = |x\rangle\langle x|$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x| dx = 1$ . Pour déterminer son expression, explicitons  $|\langle x|\psi\rangle|^2$  en fonction de  $\langle x|\alpha\rangle$ ,  $\langle x|-\alpha\rangle$  et de la phase  $\varphi$  :

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 = b^2 [|\langle x|\alpha\rangle|^2 + |\langle x|-\alpha\rangle|^2 + e^{i\varphi} \langle x|-\alpha\rangle \langle\alpha|x\rangle + e^{-i\varphi} \langle-\alpha|x\rangle \langle x|\alpha\rangle] \quad (\text{E.31})$$

**Cas où  $\alpha \in \mathbb{C}$** 

Pour simplifier les calculs, nous prendrons le cas où  $\alpha = \alpha_r (1 + i)$ . Ainsi, les produits scalaires de l'état  $|x\rangle$  sur l'état  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha\rangle$  sont les suivants :

$$\langle x | \alpha \rangle = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2} + \alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2} e^{i(\alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2)} \quad (\text{E.32})$$

et

$$\langle x | -\alpha \rangle = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2} - \alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2} e^{i(-\alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2)} \quad (\text{E.33})$$

Avec l'expression de  $b^2$  donnée par (E.6) et  $|\alpha^2| = |\alpha_r^2 (1 + i)^2| = 2\alpha_r^2$ , nous aurons :

$$P_\varphi(x, \alpha_r) = \frac{e^{2\alpha_r^2}}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} \left[ \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) + \cos(\varphi + 2\alpha_r \sqrt{2}x) \right] P(x; 0) \quad (\text{E.34})$$

Notons que  $P(x; 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  représente la distribution gaussienne dans le vide. Par ailleurs, afin de mieux caractériser  $P_\varphi(x, \alpha_r)$ , déterminons les premiers moments de  $x$  lorsque  $\varphi \neq \pi$  :

$$\langle x \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\varphi(x, \alpha_r) dx \quad (\text{E.35})$$

et

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\varphi(x, \alpha_r) dx \quad (\text{E.36})$$

Les fonctions  $x e^{-x^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x)$  et  $x e^{-x^2} \cos(2\alpha_r \sqrt{2}x)$  sont impaires, le premier moment s'exprime comme suit [39] :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_\varphi &= -A \sin \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \sin(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx \\ &= -A \sqrt{\pi} \left( \alpha_r \sqrt{2} e^{-2\alpha_r^2} \right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

avec  $A = \frac{e^{2\alpha_r^2}}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)}$ , d'où

$$\langle x \rangle_\varphi = -\frac{\alpha_r \sqrt{2} \sin \varphi}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} \quad (\text{E.38})$$



D'autre part, calculons de la même manière le deuxième moment de  $x$  :

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \frac{e^{2\alpha_r^2}}{(\pi)^{\frac{1}{2}} (e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (\text{E.39})$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 4\alpha_r^2) e^{2\alpha_r^2} \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cos(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx = 2 \cos \varphi \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cos(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - 4\alpha_r^2) e^{-2\alpha_r^2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

$$I_3 = \sin \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \sin(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx = 0 \quad (\text{E.42})$$

finalemt,

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \frac{1}{2} + 2\alpha_r^2 \frac{(e^{4\alpha_r^2} - \cos \varphi)}{(e^{4\alpha_r^2} + \cos \varphi)} \quad (\text{E.43})$$

Le premier terme de  $\langle x^2 \rangle_\varphi$  est dû aux fluctuations du vide tandis que le second terme décrit la variance du signal transmis.

Déterminons à présent les deux premiers moments de  $x$  pour un mélange statistique et comparons les à ceux déjà calculés. La densité de probabilité dans l'état décrit par l'opérateur  $\rho_m$  est

$$P_m(x, \alpha_r) = \text{Tr}(\hat{\pi}_x \rho_m) = \frac{1}{2} [|\langle x | \alpha \rangle|^2 + |\langle x | -\alpha \rangle|^2] \quad (\text{E.44})$$

À partir des équations (E.32) et (E.33), nous déduisons facilement :

$$P_m(x, \alpha_r) = e^{-2\alpha_r^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) P(x; 0) \quad (\text{E.45})$$

Cette probabilité fonction de la puissance et de la position, montre l'absence d'oscillations caractérisant ainsi l'effet d'un mélange statistique. Cet état, en effet, peut avoir une description classique.

Les deux premiers moments correspondants sont :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} x P_m(x, \alpha_r) dx \\ &= \frac{e^{-2\alpha_r^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx = 0\end{aligned}\quad (\text{E.46})$$

et

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_m(x, \alpha_r) dx \\ &= \frac{e^{-2\alpha_r^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cosh(2\alpha_r \sqrt{2}x) dx = \frac{1}{2} + 2\alpha_r^2\end{aligned}\quad (\text{E.47})$$

### Cas où $\alpha \in \mathbb{R}$

L'état  $|\psi\rangle$  que nous avons choisi, est une superposition linéaire d'états cohérents où  $\alpha$  est un réel ( $\alpha = \alpha_r$ ) et  $S = \alpha_r^2$  la puissance du signal. La probabilité de mesurer l'opérateur position dans cet état est la même que  $P_\varphi(x, \alpha_r)$ . À l'exception toutefois des projections de  $|x\rangle$  sur  $|\alpha\rangle$  qui auront pour expressions :

$$\langle x | \alpha \rangle = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2} + \alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2} = \langle \alpha | x \rangle \quad (\text{E.48})$$

et

$$\langle x | -\alpha \rangle = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2} - \alpha_r \sqrt{2}x - \alpha_r^2} = \langle -\alpha | x \rangle \quad (\text{E.49})$$

d'où

$$P_\varphi(x, S) = \frac{1}{e^{2S} + \cos \varphi} \left( \cos \varphi + \cosh(2\sqrt{2S}x) \right) P(x; 0) \quad (\text{E.50})$$

Nous déduisons le premier moment

$$\langle x \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\varphi(x, S) dx = 0 \quad (\text{E.51})$$

et la variance :

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\varphi(x, S) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} (e^{2S} + \cos \varphi)} (A_1 + A_2) \quad (\text{E.52})$$

avec

$$A_1 = \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cos \varphi \quad (\text{E.53})$$

et

$$A_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cosh(2\sqrt{2S}x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 4S) e^{2S} \quad (\text{E.54})$$

ceci nous conduit à :

$$\langle x^2 \rangle_\varphi = \frac{1}{2} + \frac{2S}{1 + e^{-2S} \cos \varphi} \quad (\text{E.55})$$

Nous retrouvons de même la somme de deux termes dont le premier terme est dû aux fluctuations du vide et le second à celles du signal.

## E.2 Calcul de la phase $\varphi$ en fonction de la puissance $S$

Nous avons montré, dans le chapitre 2, que la variance de l'intensité intégrée  $W$  pour un état superposé  $|\psi\rangle$  est positive lorsque la phase  $\varphi$  est comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Cependant, cette condition est retenue uniquement pour  $\alpha^2 < 5$ . Dans ce paragraphe, nous montrons à partir d'un calcul très approximatif de  $V_W$  que la valeur de la phase imposant  $V_W \geq 0$  dépend, en général, de  $\alpha^2$ . Pour cela, nous considérons un état superposé sous la forme

$$|\psi\rangle = c(|\alpha\rangle + f |\beta\rangle) \quad (\text{E.56})$$

où

$$\lambda = 1, f = e^{i\varphi}, \beta = -(\alpha + \Delta)$$

avec  $\alpha, \beta, \Delta \in \mathcal{R}$  pour simplifier les calculs. La constante  $c$  s'obtient en posant que  $|\psi\rangle$  est normé ( $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ ) soit

$$c^2 = \frac{1}{2(1 + r \cos \varphi)} \quad (\text{E.57})$$

Nous avons noté  $r = \langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta}$ . Nous calculons successivement

$$p(n) = |\langle n | \psi \rangle|^2 \quad (\text{E.58})$$

$$G(\xi) = \sum_n g^n p(n) \stackrel{\Delta}{=} \langle e^{-\xi W(t)} \rangle \quad (\text{E.59})$$

avec  $g = 1 - A\xi$ ,  $A = 1 - e^{-t}$ . Nous trouvons

$$p(n) = c^2 \left( e^{-\alpha^2} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} + 2 \cos \varphi e^{-\beta^2} \frac{(\beta^2)^n}{n!} + 2 \cos \varphi e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}} \frac{(\alpha\beta)^n}{n!} \right) \quad (\text{E.60})$$

$$G(\xi) = c^2 \left( e^{-\alpha^2 A \xi} + 2 \cos \varphi e^{-\beta^2 A \xi} + 2 \cos \varphi e^{-\frac{(\alpha - \beta)^2}{2}} e^{-\alpha\beta A \xi} \right) \quad (\text{E.61})$$

Par définition, on a

$$\langle W(t)^k \rangle = (-1)^k \frac{d^k}{d\xi^k} G(\xi) \Big|_{\xi=0}$$

Nous calculons, maintenant, la variance de l'intensité intégrée, à partir de (E.60), soit pour  $k = 1, 2$

$$\langle W(t) \rangle = c^2 \left( \alpha^2 A + 2\beta^2 A \cos \varphi + 2\alpha\beta A \cos \varphi e^{-\frac{(\alpha - \beta)^2}{2}} \right) \quad (\text{E.62})$$

$$\langle W(t)^2 \rangle = c^2 \left( (\alpha^2 A)^2 + 2(\beta^2 A)^2 \cos \varphi + 2(\alpha\beta A)^2 \cos \varphi e^{-\frac{(\alpha - \beta)^2}{2}} \right) \quad (\text{E.63})$$

Nous obtenons ainsi  $V_W = \langle W(t)^2 \rangle - \langle W(t) \rangle^2$ . Montrons que  $V_W \geq 0$  pour  $\varphi(\alpha)$ . Pour cela, nous supposons que  $A = t$  (voir Rappel chapitre 2) et l'on écrit que  $\langle n \rangle = \alpha^2 t \stackrel{\Delta}{=} \alpha^2$  pour un intervalle de temps unité. De plus, nous supposons que  $\beta = -(\alpha + \Delta) \sim -\alpha(1 + \epsilon)$ .

Une première approximation pour  $\alpha^2 \ll 1$ , donne au premier ordre en  $\epsilon$

$$\langle W(t) \rangle \sim c^2 \alpha^2 (1 + 4\alpha^2 \cos \varphi + 2 \cos \varphi \epsilon) \quad (\text{E.64})$$

$$\langle W(t)^2 \rangle \sim c^2 \alpha^4 (1 + 4 \cos \varphi + 12 \cos \varphi \epsilon) \quad (\text{E.65})$$

Nous calculons  $V_W$  avec  $c$  donné par (E.57) et  $r \sim e^{-2\alpha^2}$  et nous montrons que

$$V_W \sim c^2 \alpha^4 (1 - c^2 + 4(1 - 2c^2 \alpha^2) \cos \varphi) \quad (\text{E.66})$$

Nous vérifions sur (E.66) que la condition retenue  $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$  dépend de la valeur de  $\alpha^2$ .

### E.3 Capacité d'un canal discret

L'information mutuelle définie à partir des probabilités est

$$I(x, y) = \sum_{x, y} p(x, y) \log \left( \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) \quad (\text{E.67})$$

avec  $p(x, y) = p(y | x) p(x)$  la probabilité conjointe et  $p(y | x)$  la probabilité conditionnelle. La capacité du canal correspond à un maximum d'un ensemble convexe résumant toutes les contraintes de la source. Soit  $\{\mathcal{C}\}$  l'ensemble de ces contraintes telles que normalisation des probabilités, contrainte de puissance, de bande passante,...

$$C = \max_{\mathcal{C}} I(x, y) \quad (\text{E.68})$$

L'expression de la capacité d'un canal symétrique diffère de celle d'un canal en  $Z$ . Pour montrer ceci, prenons d'abord le canal quantique (ou le canal classique) que nous considérons symétrique. Les probabilités qui le caractérisent sont

$$p(0, 0) = p(0 | 0) p(0) = \frac{1}{2} (1 - P_{er}) \quad (\text{E.69})$$

$$p(0, 1) = p(1 | 0) p(0) = \frac{1}{2} P_{er} \quad (\text{E.70})$$

$$p(1, 0) = p(0 | 1) p(1) = \frac{1}{2} P_{er} \quad (\text{E.71})$$

$$p(1, 1) = p(1 | 1) p(1) = \frac{1}{2} (1 - P_{er}) \quad (\text{E.72})$$

avec  $P_{er}$  la probabilité d'erreur minimale pour une détection quantique ou homodyne. L'information mutuelle s'écrit alors

$$\begin{aligned} I(x, y) = & p(0, 0) \log \frac{p(0 | 0)}{p_y(0)} + p(0, 1) \log \frac{p(1 | 0)}{p_y(1)} + \\ & p(1, 0) \log \frac{p(0 | 1)}{p_y(0)} + p(1, 1) \log \frac{p(1 | 1)}{p_y(1)} \end{aligned} \quad (\text{E.73})$$

en remplaçant les probabilités conjointes et conditionnelles par leur expression et en prenant  $p_y(1) = 1 - p_y(0)$ , l'équation (E.73) devient

$$\begin{aligned} I(x, y) = & (1 - P_{er}) \log (1 - P_{er}) + P_{er} \log P_{er} \\ & - \frac{1}{2} \log p_y(0) - \frac{1}{2} \log (1 - p_y(0)) \end{aligned} \quad (\text{E.74})$$

La capacité est déterminée pour  $\frac{\partial I(x, y)}{\partial p_y(0)} = 0 \Rightarrow p_y(0) = \frac{1}{2}$

$$C_S = \log 2 + (1 - P_{er}) \log (1 - P_{er}) + P_{er} \log P_{er} \quad (\text{E.75})$$

Un calcul similaire ne peut être appliqué aux états décrits par un mélange statistique. Seulement, on peut borner la probabilité d'erreur minimale correspondante par la méthode décrite par [54] et la capacité de canal classique-quantique avec un signal arbitraire (comme par exemple un mélange d'états) a déjà été formulée par [62].

À présent, déterminons la capacité d'un canal en  $Z$ , qui correspond au canal semi classique (comptage de photons). Les probabilités de transition sont

$$p(0, 0) = p(0 | 0) p(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{E.76})$$

$$p(0, 1) = p(1 | 0) p(0) = \frac{1}{2} P_\varphi(0) \quad (\text{E.77})$$

$$p(1, 0) = p(0 | 1) p(1) = 0 \quad (\text{E.78})$$

$$p(1, 1) = p(1 | 1) p(1) = \frac{1}{2} (1 - P_\varphi(0)) \quad (\text{E.79})$$

avec  $p_\varphi(0) = \delta = \frac{1+\cos\varphi}{e^S+e^{-S}\cos\varphi}$  et  $p_y(1) = 1 - p_y(0)$ . L'équation (E.73) devient

$$I(x, y) = p(0, 0) \log \frac{p(0 | 0)}{p_y(0)} + p(1, 0) \log \frac{p(0 | 1)}{p_y(0)} + p(1, 1) \log \frac{p(1 | 1)}{p_y(1)} \quad (\text{E.80})$$

Le maximum de l'information mutuelle sous la contrainte de  $p_y(0)$ ,  $p_y(1)$  est atteint pour  $p_y(0) = \frac{1}{2}$ , ce qui nous permet d'écrire

$$C_Z = \log 2 - \frac{1}{2} \log (1 + P_\varphi(0)) + \frac{P_\varphi(0)}{2} \log \left( \frac{P_\varphi(0)}{1 + P_\varphi(0)} \right) \quad (\text{E.81})$$

## Annexe F

# Schéma de principe d'une transmission quantique

Dans cette Annexe, nous décrivons brièvement la téléportation qui représente l'un des traitements quantiques de l'information [7, 63, 64].

La téléportation est la transmission à distance d'un état inconnu, de manière quasi instantanée entre deux régions de l'espace. Un traitement quantique de l'information se distingue des autres techniques, qu'elles soient classiques ou semi-classiques, par le rôle joué par l'intrication.

Pour réaliser une expérience de téléportation, il faut disposer d'états intriqués, par exemple une superposition de deux états cohérents (voir l'étude de l'interaction photon-atome suivant le modèle de Jaynes–Cummings) ou des états de Bell issus d'une source EPR, d'une part et d'une liaison classique entre deux correspondants  $A$  et  $B$  d'autre part, comme l'indique le schéma [65].

On part de deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , que l'on considère dans la suite comme les états propres de l'opérateur  $\hat{\sigma}_z$ , et l'on forme les quatre états

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (\text{F.1})$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (\text{F.2})$$

relatifs à deux systèmes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , dont on connaît les matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_x^{\mathcal{A}}, \hat{\sigma}_y^{\mathcal{A}}$ , et  $\hat{\sigma}_z^{\mathcal{A}}, \dots$ .

On rappelle les relations utiles pour les calculs qui suivent

$$\hat{\sigma}_x|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{\sigma}_x|1\rangle = |0\rangle \quad (\text{F.3})$$

$$\hat{\sigma}_z|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{\sigma}_z|1\rangle = -|1\rangle \quad (\text{F.4})$$

$$\hat{\sigma}_x|\phi^+\rangle = |\psi^+\rangle, \quad \hat{\sigma}_x|\psi^+\rangle = |\phi^+\rangle \quad (\text{F.5})$$

$$\hat{\sigma}_z|\phi^+\rangle = |\phi^-\rangle, \quad \hat{\sigma}_z|\psi^+\rangle = |\psi^-\rangle \quad (\text{F.6})$$

$$\hat{\sigma}_z^{\mathcal{A}}\hat{\sigma}_z^{\mathcal{B}}|\phi^\pm\rangle = |\phi^\pm\rangle, \quad \hat{\sigma}_z^{\mathcal{A}}\hat{\sigma}_z^{\mathcal{B}}|\psi^\pm\rangle = -|\psi^\pm\rangle \quad (\text{F.7})$$

$$\hat{\sigma}_x^{\mathcal{A}}\hat{\sigma}_x^{\mathcal{B}}|\phi^\pm\rangle = \pm|\phi^\pm\rangle, \quad \hat{\sigma}_x^{\mathcal{A}}\hat{\sigma}_x^{\mathcal{B}}|\psi^\pm\rangle = \pm|\psi^\pm\rangle \quad (\text{F.8})$$

L'opérateur  $\hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_z^B$  est donc un opérateur de parité et l'opérateur  $\hat{\sigma}_x^A \hat{\sigma}_x^B$  joue le rôle d'un opérateur de phase. La procédure de téléportation se déroule en quatre étapes :

- $A$  et  $B$  se partagent une paire d'états intriqués, un état de Bell  $|\phi^+\rangle$  par exemple

$$|\phi^+\rangle_{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (\text{F.9})$$

"véhiculé" par les particules  $b$  et  $c$  ;

- $A$  reçoit l'état  $|\psi\rangle_a$  qui est inconnu ( $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas donnés)

$$|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a$$

- $A$  réalise l'opération quantique  $\hat{U}|\Phi\rangle$  (sans mesure) sur  $|\Phi\rangle = |\psi\rangle_a \otimes |\phi^+\rangle_{bc}$  où  $\hat{U}$  est l'opérateur unitaire  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)$ . Le résultat est :

$$\hat{U}|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi^+\rangle_{ab} [\alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c] \quad (\text{F.10})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi^-\rangle_{ab} [\alpha|0\rangle_c - \beta|1\rangle_c] \quad (\text{F.11})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi^+\rangle_{ab} [\alpha|1\rangle_c + \beta|0\rangle_c] \quad (\text{F.12})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi^-\rangle_{ab} [\alpha|1\rangle_c - \beta|0\rangle_c] \quad (\text{F.13})$$

- $B$  reçoit l'information par liaison classique (codée de façon habituelle) lui permettant de savoir auquel des blocs (F.10)–(F.13) il doit s'intéresser. Il effectue, selon le cas, l'une des quatre transformations suivantes  $\hat{1}, \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x$ . On montre, en effet,

$$\hat{1}[\alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c] = \alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c = |\psi\rangle_c \quad (\text{F.14})$$

$$\hat{\sigma}_z[\alpha|0\rangle_c - \beta|1\rangle_c] = \alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c = |\psi\rangle_c \quad (\text{F.15})$$

$$\hat{\sigma}_x[\alpha|1\rangle_c + \beta|0\rangle_c] = \alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c = |\psi\rangle_c \quad (\text{F.16})$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x [\alpha|1\rangle_c - \beta|0\rangle_c] &= \hat{\sigma}_z [\alpha|0\rangle_c - \beta|1\rangle_c] \\ &= \alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c = |\psi\rangle_c \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

### Remarques.

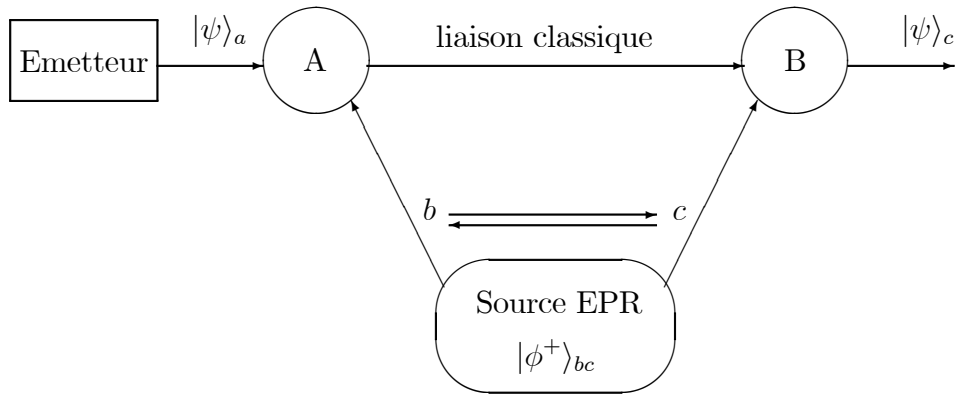
- L'une des quatre transformations redonne l'état  $|\psi\rangle$  sur  $c$ .
- On ne connaît toujours pas  $\alpha$  et  $\beta$ , donc on ne reproduit pas  $|\psi\rangle_a$ .
- Par la liaison classique,  $A$  ne transmet que l'information nécessaire (il informe son correspondant de la parité et de la phase de l'état de Bell  $a$ - $b$ ). Un



symbole déjà convenu entre  $A$  et  $B$  pour désigner la parité et un autre symbole déjà convenu aussi pour désigner la phase. Par exemple,  $A$  choisit  $|\psi\rangle_{ab}^+$ , et  $B$  sait alors qu'il doit appliquer  $\hat{\sigma}_x$ .

- $|\psi\rangle_a$  est détruit par  $A$  lors de l'opération par  $\hat{U}$ .
- La téléportation n'est pas instantanée car la liaison classique requiert un temps de transmission.

En résumé, on peut représenter la procédure de téléportation comme un transfert d'information contenue dans  $|\psi\rangle_a$  de la particule  $a$  vers l'état  $|\psi\rangle_c$  de la particule  $c$ .





## Annexe G

# Proposition d'une liaison semi quantique

Nous supposons dans le dispositif schématisé ci-dessous que les éléments qui le constituent sont parfaits et réalisent idéalement les fonctions qui leur sont attribuées.

Dans la cavité, au centre du dispositif, a lieu l'interaction du champ cohérent et des atomes excités. Ce champ est obtenu à partir d'un laser monomode, très stable en intensité. L'intensité laser est modulée par une porte qui délivre une intensité nulle (ou unité) :  $|\alpha\rangle$ . Des atomes dans la partie du spectre d'énergie appropriée, sont utilisés pour servir de sous système couplé au sous-système formé par le champ  $|\alpha\rangle$ , pour générer les états intriqués  $|\psi\rangle$ .

La réception par photodétection  $\hat{N}$  est suivie du traitement de détection lequel conduit à l'évaluation de la probabilité d'erreur  $P_e$ .

Un traitement numérique effectué sur les diverses réalisations de  $\hat{N}$  et de leurs probabilités permet par ailleurs, le calcul de la capacité  $C$ . On dispose ainsi du dispositif de mesure total des performances.

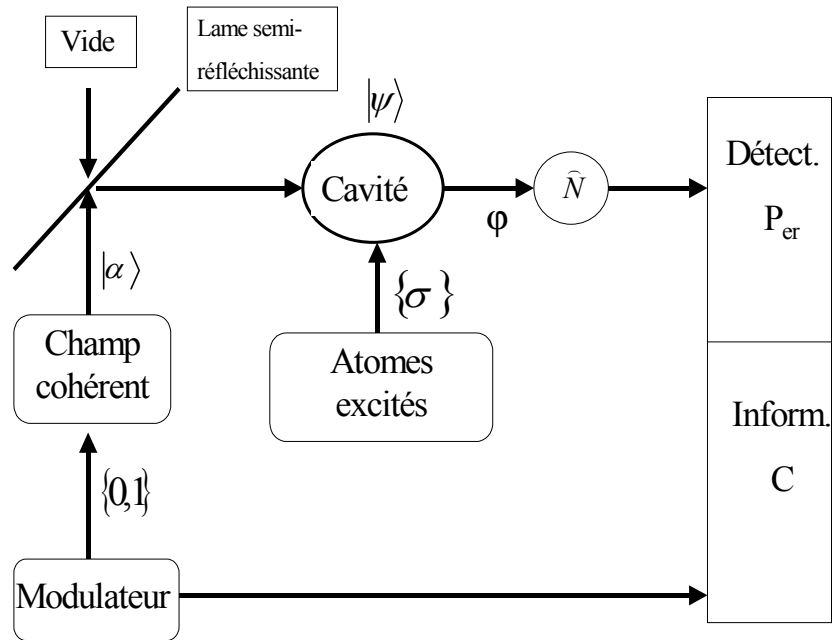


FIG. G.1 – Schéma de principe d'une liaison semi quantique.

# Bibliographie

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. **47**, (1935) 777.
- [2] D.J. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables", Phys. Rev. **85**, 66 (Part I), 180 (Part II) 1952.
- [3] J.S. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics", Rev. Mod. Phys. **38**, (1966) 447.
- [4] J.F. Clauser, "Experimental investigation of a polarisation correlation anomaly", Phys. Rev. Lett. **36**, (1976) 1223.
- [5] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger. "Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem", Phys. Rev. Lett. **47**, (1981) 460.
- [6] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, "Experimental realisation of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of Bell's inequalities", Phys. Rev. Lett. **49**, (1982) 91.
- [7] C.H. Bennett, S.J. Wiesner, "Communication via One and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States", Phys. Rev. Lett. **69**, (1992) 2881.
- [8] W.G. Unruh, "Maintaining coherence in quantum computers", Phys. Rev. **A51**, (1995) 992.
- [9] A. Zeilinger, "Experiment and the foundations of quantum physics", Review of Modern Physics **71**, (1999) 288.
- [10] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden, "Quantum cryptography", Review of Modern Physics **74**, 145 (2002).
- [11] E.T. Jaynes, F. W. Cummings, " Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Applications to the Beam Maser", Proc. IEEE **51**, (1963) 89.
- [12] W.H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, (Wiley, New York, 1990).
- [13] R.F. Werner, "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model", Phys. Rev. **A40**, (1989) 4277.
- [14] A. Peres, "Separability Criterion for Density Matrices", Phys. Rev. Lett. **77**, (1996) 1413.

- [15] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horedecki, "Separability of mixed states : necessary and sufficient conditions ", quant-physics/9605038 v2 (1996).
- [16] N.J. Cerf, C. Adami, "Negative Entropy and Information in Quantum Mechanics", Phys. Rev. Lett. **79**, (1997) 5194.
- [17] N.J. Cerf, C. Adami, "Quantum extension of conditional probability", Phys. Rev. **A60**, (1999) 893.
- [18] N.J. Cerf, C. Adami, R.M. Gingrich, "Reduction criterion for separability", Phys. Rev. **A60**, (1999) 898.
- [19] A.K. Rajagopal, K.L. Jensen, F.W. Cummings, "Quantum entangled supercorrelated states in the Jaynes-Cummings model", Phys. Lett. **A259**, (1999) 285.
- [20] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, Infinitely Divisible Point Processes, (John Wiley & Sons, New York 1978).
- [21] A. Vourdas, "Superpositions of macroscopically distinguishable states in the presence of thermal noise", Optics Communications **91**, (1992) 236.
- [22] V. Buzek, P.L. Knight, "Quantum Interference, superposition states of light, and nonclassical effects", Progress in Optics, Elsevier, Vol. XXXIX (1995) 1.
- [23] A. Eckert, P. L. Knight, "Entangled quantum system and the Schmidt decomposition", American Journal of Physics **63**, (1995) 415.
- [24] N. Alioui, A. Amroun-Frahi, C. Bendjaballah, "Comparison of some criteria for the state separability of mixed states in the Jaynes-Cummings model", Europhys. Lett. **59**, (2002) 28.
- [25] N. Alioui, C. Bendjaballah, "Communication with a superposition of two coherent states", Journal of Optics Communications **22**, (2001) 4.
- [26] A. Messiah, Mécanique Quantique, (Dunod, Paris 1959).
- [27] J. Schwinger, "Unitary operator bases", Proc. Nat. Acad. (USA) **46**, (1960) 570.
- [28] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Mécanique quantique, (Hermann, Paris 1977), partie I.
- [29] R.J. Glauber, Quantum Optics and Quantum Electronics, edited by C. de Witt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, (Gordon and Breach, New York 1964).
- [30] W. H. Zurek, "Decoherence and the transition from quantum to classical", Phys. Today **44**, (1991) 36.
- [31] E. Schrödinger, "Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik", Naturwissenschaften **23**, (1935) 807, in Quantum Theory and Measurement, edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek (Princeton University, Princeton, 1983), 152.

- [32] M. Brune, S. Haroche, J.M. Raimond, L. Davidovich, N. Zagury, "Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling : quantum non-demolition measurements and generating "Schrödinger cat" states", *Phys. Rev.* **A45**, (1992) 5193.
- [33] C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal* **27**, (1948) 379.
- [34] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique Statistique*, (Hermann, 1989).
- [35] A. Wehrl, "General properties of entropy", *Rev. Mod. Phys.* **50**, (1978) 221.
- [36] R. Balian, Physique Statistique, (Cours de l'École polytechnique, Palaiseau 1982).
- [37] T.S. Santhanam, A.R. Tekumalla, "Quantum mechanics in finite dimension", *Found. of Physics* **6**, (1976) 583.
- [38] R.J. Glauber, Quantum Theory of Coherence, edited by S.M. Kay, A. Maitland (Academic Press, London and New York 1970).
- [39] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, (Academic Press, New York 1965).
- [40] C. Caves, "Quantum limits on noise in linear amplifiers", *Phys. Rev.* **D26**, (1982) 1817.
- [41] H.P. Yuen, "Two-photon coherent states of the radiation field", *Phys. Rev.* **A13**, (1976) 2226.
- [42] L.C. Andrews, Special functions of Mathematics for Engineers, 2nd Edition, (Oxford University Press 1998).
- [43] J. Rai, C.L. Mehta, "Coordinate representation of squeezed states", *Phys. Rev.* **A37**, (1988) 4497.
- [44] J.R. Klauder, E.C.G. Sudarshan, Fundamental of Quantum Optics, (Benjamin, New York 1968).
- [45] C. Bendjaballah, "Time interval distributions of a random point process in the detection of classical and nonclassical states of light", *Quantum Semiclass. Opt.* **5**, (2003) 370.
- [46] W. H. Louisell, Radiation and Noise in Quantum Electronics, (McGraw-Hill Book Company, 1964).
- [47] S. D. Phoenix and P. L. Knight, "Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model", *Phys. Rev.* **A44**, (1991) 6023.
- [48] J. Gea-Banacloche, "Loss of state purity and regularity in the Jaynes-Cummings model", *Phys. Rev.* **A46**, (1992) 7307.
- [49] J. Gea-Banacloche, "Atom and field-state in the Jaynes-Cummings model for large initial fields", *Phys. Rev.* **A44**, (1991) 5913.

- [50] M. Horodecki, P. Horodecki, "Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols", Phys. Rev. **A59**, (1999) 4206.
- [51] M. Sargent III, M. Scully, W.E. Lamb Jr., Laser Physics, (Addison-Wesley, New York, 1977).
- [52] C. Cohen-Tannoudji, *Cours du Collège de France*, (Paris 1990).
- [53] C. Bendjaballah, Introduction to photon communication, (Springer-Verlag, Heidelberg 1995).
- [54] C.W. Helstrom, Quantum Detection and Estimation Theory, (Academic Press, New York 1976).
- [55] A. Holevo, Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, (North-Holland, Amsterdam 1982).
- [56] M. Charbit, *Analyse des performances de systèmes de communication optique à détection par comptage de photons*, (Thèse de l'Université de Paris-Orsay, 1983).
- [57] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, (Clarendon Press, London 1973).
- [58] H.L. van Trees, Detection, estimation and modulation theory, (John Wiley & Sons, New York 1968), part I.
- [59] R.G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, (Academic Press, New York 1965).
- [60] A. Borovkov, Statistique mathématique, (Edition Mir, Moscou 1987).
- [61] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Quantum Mechanics, (Pergamon Press, Oxford 1991).
- [62] A.S. Holevo, "The Capacity of the Quantum Channel with General Signal States", IEEE Transactions on Information Theory **IT-44**, (1998) 269.
- [63] C.H. Bennett, "Quantum cryptography using any two nonorthogonal states", Phys. Rev. Lett. **68**, (1992) 3121.
- [64] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", Phys. Rev. Lett. **70**, (1993) 1895.
- [65] S. Haroche, *Cours du Collège de France*, (Paris 2002).