

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène**

**Faculté de Mathématiques**



**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE**

Présentée pour l'obtention du **grade de Docteur**

**En MATHEMATIQUES**

Spécialité : R.O : Mathématiques discrètes et optimisation

Par

**Laouar Amel**

**Etude de processus complexes  $\alpha$ -stables : Application actuarielle**

Soutenue publiquement le 12 juin 2025, devant le jury composé de :

<b>M. Moulai</b>	Professeur, à l'USTHB	Président
<b>K. Boukhetala</b>	Professeur, à l'USTHB	Directeur de thèse
<b>R. Sabre</b>	HDR, à AgroSup, Dijon, France	Co-Directeur de thèse
<b>A. Latreche</b>	Professeur, à l'ENSSEA	Examineur
<b>O. Sadki</b>	Professeur, à l'USTHB	Examinatrice
<b>M. R. Remita</b>	Professeur, à ENSIA	Examineur

# Remerciements

C'est avec un immense plaisir que j'exprime ici ma gratitude envers Monsieur Kamal Boukhetala mon Directeur de thèse, pour m'avoir guidé et initié à la recherche scientifique et principalement aux processus stochastiques appliqués en finance et en assurance. Je tiens aussi à le remercier pour son aide précieuse, ses encouragements et ses conseils avisés tout au long mon parcours et plus particulièrement pour sa patience et pour avoir fait preuve à plusieurs reprises, de sa confiance en moi.

Je témoigne ma profonde reconnaissance à mon Co-directeur de thèse, Monsieur Rachid Sabre, je le remercie également pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire durant mes deux stages d'un mois, pour l'excellent environnement de travail qui a été mis à ma disposition, pour sa compréhension, son aide et ses explications enrichissantes sur les distributions  $\alpha$ -stables.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Moulai Mustapha pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Mes remerciements vont aussi aux autres membres du jury de ma thèse Messieurs Abdelouahab Latreche et Mohamed Riad Remita, ainsi que Madame Ourdia Sadki, pour l'effort qu'ils ont accepté de fournir pour lire et juger ce travail. Vous compter parmi les membres de jury est un immense plaisir pour moi et je vous en remercie vivement.

Mes remerciements vont aussi aux membres de l'agence Alliance Assurance de ben Omar, je tiens particulièrement à exprimer ma profonde gratitude envers feu monsieur Djaaffar Ferrahi, ancien directeur de l'agence qui m'a accueilli durant un mois au sein de cette agence, et m'a permis de recueillir les données nécessaires pour mener à bien mon travail, qu'il repose en paix.

Enfin tous mes remerciements pour ma famille, mes amis pour leur soutien moral et leurs encouragements tout au long de mon parcours.

## Résumé :

Ces dernières années, la théorie des variables stables a connu de nombreux développements passionnants, du fait qu'il s'agit d'une classe très riche de lois de probabilités capables de représenter différentes asymétries, et des queues lourdes, modélisant ainsi des phénomènes complexes ; contrairement à la loi normale, qui sous-estime très souvent les événements extrêmes que cela soit en finance ou en assurance.

Le but de cette thèse est d'examiner l'utilisation de la distribution stable pour la modélisation des sinistres automobile et d'étudier l'effet des différents paramètres stable sur l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance non-vie.

Nous avons commencé par valider notre hypothèse, en confirmant que la distribution stable représente bien les montants des sinistres automobiles issus de données réelles d'une agence de la compagnie d'assurance Algérienne 'Alliance Assurance', à travers différents tests graphiques, nous avons confirmé que l'ajustement est significatif en appliquant le test de Kolmogorov pour tester la qualité de l'ajustement.

Ensuite, nous proposons de modéliser la richesse d'une compagnie d'assurance non-vie par un processus de réserve couplé ; Le processus de risque est décrit selon le modèle classique de risque, où nous proposons de décrire le montant global (cumulé) des sinistres par un processus  $\alpha$ -stable, car nos montants des sinistres sont distribués selon une loi stable ; Nous supposons que la compagnie a la possibilité d'investir une partie de son capital dans un actif risqué et le reste dans un actif sans risque, nous avons supposé que le taux de rendement instantané évolue comme un processus stochastique à coefficients constants, et nous avons choisis deux modèles importants de taux courts, à savoir les modèles Vasicek et CIR. Sachant, que le modèle est assez complexe, pour avoir des formules explicites, nous proposons d'étudier par simulation avec Maple la sensibilité du modèle, en première partie par rapport aux changements du processus de rendement instantané et enfin par rapport aux paramètres du processus  $\alpha$ -stable.

**Mots clés :** *Processus  $\alpha$ -stable, théorie du risque, probabilité de ruine, équation différentielle stochastique, Simulation.*

# Table des matières

Table des matières.....	iii
Liste des notations.....	i
Liste des figures.....	i
Liste des tableaux.....	i
Introduction.....	1
<b>1. Distributions <math>\alpha</math>-stables.....</b>	<b>7</b>
<b>1.1. Lois indéfiniment divisibles.....</b>	<b>7</b>
1.1.1. Préliminaire.....	8
1.1.2. Représentation des distributions infiniment divisibles.....	11
1.1.3. Distribution infiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$ .....	17
<b>1.2. Caractéristiques des lois Stables Univariées.....</b>	<b>19</b>
1.2.1. Définitions et concepts.....	20
1.2.2. Domaine d'attraction et fonction caractéristique.....	22
1.2.3. Différentes formes de fonction caractéristique $\alpha$ -stable.....	32
1.2.4. Distribution et propriétés de variable $\alpha$ -stable.....	39
<b>1.3. Caractéristique des distributions <math>\alpha</math>-stables sur <math>\mathbb{R}^d</math>.....</b>	<b>46</b>
1.3.1. Définitions et propriétés.....	46
1.3.2. Fonction caractéristique stable sur $\mathbb{R}^d$ .....	47
<b>2. Inférence statistique des distributions stables et application en assurance auto.....</b>	<b>49</b>
<b>2.1. Simulation de variable stable.....</b>	<b>50</b>
2.1.1. Simulation de variable $\alpha$ -stable (dans $\mathbb{R}^1$ ).....	50
2.1.2. Simulation de vecteur $\alpha$ -stable (dans $\mathbb{R}^d$ ).....	52
<b>2.2. Techniques d'estimation des paramètres d'une distribution stable.....</b>	<b>52</b>
2.2.1. Méthodes fondées sur les quantiles dans $\mathbb{R}^1$ .....	52
2.2.2. Méthodes fondées sur la fonction caractéristique dans $\mathbb{R}^1$ .....	60
2.2.3. Autres méthodes d'estimation dans $\mathbb{R}^1$ .....	71
2.2.4. Techniques d'estimation des paramètres d'une distribution stable dans $\mathbb{R}^d$ .....	73
<b>2.3. Tests Statistiques sur les variables stables dans <math>\mathbb{R}^1</math>.....</b>	<b>77</b>
2.3.1. Test de la variance pas à pas.....	78
2.3.2. Test basé sur le comportement asymptotique de la queue de distribution.....	79
2.3.3. Test de Kolmogorov.....	80
<b>2.4. Application : Analyse statistique des montant de sinistre automobile.....</b>	<b>82</b>
2.4.1. Tests graphiques.....	82
2.4.2. Résultat du test de Kolmogorov.....	85

<b>3. Processus <math>\alpha</math>-stable et application en assurance auto.....</b>	<b>88</b>
<b>3.1. Processus <math>\alpha</math>-stables.....</b>	<b>88</b>
3.1.1. Définitions et propriétés .....	88
3.1.2. Construction des intégrales stochastiques d'Itô par rapport à un mouvement $\alpha$ -stable .....	92
3.1.3. Processus de diffusion par rapport à un mouvement $\alpha$ -stable .....	94
3.1.4. Approximation et simulation des $\alpha$ -EDS.....	95
<b>3.2. Processus de risque.....</b>	<b>97</b>
3.2.1. Processus de risque classique .....	97
3.2.2. Processus $\alpha$ -stable de Lévy dans la théorie du risque.....	102
3.2.3. Description du modèle de risque avec un processus de sinistre $\alpha$ -stable.....	105
<b>3.3. Portefeuille d'une compagnie d'assurance avec un processus de sinistre <math>\alpha</math>-stable ...</b>	<b>107</b>
3.3.1. Processus d'investissement : .....	107
3.3.2. Processus de réserve couplé .....	110
3.3.3. Simulation et analyse de sensibilité du processus de réserve.....	112
<b>Conclusion et perspectives.....</b>	<b>118</b>
<b>Références .....</b>	<b>120</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>127</b>
<b>Annexe 1.</b> Tables pour estimation des paramètres des distributions stables. ....	127
<b>Annexe 2.</b> Procédure de simulation d'un processus $\alpha$ -stable avec Maple.....	129
<b>Annexe 3.</b> Procédure de simulation d'un processus d'investissement couplé avec Maple .....	130

## Liste des notations

Abréviation	Signification
$\stackrel{d}{=}$	Egalité en distribution.
$\stackrel{d}{\rightarrow}$	Convergence en distribution
$\star$	Produit de convolution
$\Im m(.)$	Partie imaginaire
$\Re e(.)$	Partie réelle
$\mathfrak{S}$	La famille des lois stables (de paramètre $\alpha, \beta, \mu$ et $\gamma$ )
$\mathfrak{S}_0$	La famille des lois stables standards ( $\mu = 0$ et $\gamma = 1$ )
$\mathfrak{B}$	La famille des lois strictement stables ( $\mu = 0$ )
$S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$	Loi stable de paramètres $\alpha, \beta, \mu$ et $\gamma$ (où $\gamma =$ paramètre d'échelle)
$S_{\alpha}(\beta, \mu, \delta)$	Loi stable de paramètres $\alpha, \beta, \mu$ et $\delta$ ( $\delta = \gamma^{\alpha} =$ paramètre de dispersion)
$S\alpha S$	$\alpha$ -stable symétrique ( $S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$ avec $\beta = 0$ )
$StaS$	$\alpha$ -strictement stable symétrique ( $\beta = \mu = 0$ )
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

## Liste des figures

Fig.2.3. 1. Histogramme de v.a $S\alpha_{1,0,1}$	78
Fig.2.3. 2. Test 1 pour une v.a $S\alpha_{1,0,1}$	79
Fig.2.3. 3. Test 2 pour une v.a $S\alpha_{1,0,1}$	80
Fig.2.4. 1. Montants des sinistres.	82
Fig.2.4. 2. Increment of Claims Amount $X_{i+1} - X_i$	82
Fig.2.4. 3. Histogramme des données empiriques	83
Fig.2.4. 4. Test 1 pour les données empiriques des montants de sinistre	83
Fig.2.4. 5. Test 2 pour les données empiriques des montants de sinistre	84
Fig.2.4. 6. Comparaison entre densité $\alpha$ -stable et densité empirique année 2018	85
Fig.2.4. 7. Comparaison entre densité $\alpha$ -stable et densité empirique année 2017	85
Fig.2.4. 8. Comparaison entre FDC Stable et FDCE pour l'année 2018	86
Fig.3.1. 1. Mouvement $\alpha$ -stable (en haut) et Accroissements	96
Fig.3.2. 1. Distributions ordonnées par rapport à leurs queues droites	99
Fig.3.2. 2. Processus de sinistre (en haut) et Accroissements	106
Fig.3.2. 3. Processus de sinistre pour différentes valeurs de $\alpha$ .	107
Fig.3.3. 1. Taux de Vasicek (à droite) et Accroissement	109
Fig.3.3. 2. Processus de d'investissement $Z_t$ avec un taux de Vasicek et Accroissements	109
Fig.3.3. 3. Processus de d'investissement $Z_t$ pour différents taux $r_t$	110
Fig.3.3. 4. Processus de réserve en fonction de différents modèles de taux	112
Fig.3.3. 5. Processus de réserve pour différentes valeurs de $\alpha$	113
Fig.3.3. 6. Accroissement du processus de réserve pour différentes valeurs de $\alpha$	113
Fig.3.3. 7. Processus de sinistre pour différentes valeurs de $\beta$	114
Fig.3.3. 8. Accroissement du processus de sinistre pour différentes valeurs de $\beta$	114
Fig.3.3. 9. Processus de réserve (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de $\beta$	115
Fig.3.3. 10. Processus de sinistre (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de $\gamma$	115
Fig.3.3. 11. Processus de réserve pour différentes valeurs de $\gamma$	116
Fig.3.3. 12. Processus de sinistre (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de $\mu$	116
Fig.3.3. 13. Processus de réserve pour différentes valeurs de $\mu$	117

## Liste des tableaux

Tableau. 2.2 1. Valeur optimale de $k$ (pour la moyenne tronquée) en fonction de $\alpha$ .	55
Tableau. 2.2 2. Nombre $i$ en fonction de la taille de l'échantillon et de $\alpha$ pour $u_i = \pi i/25$	67
Tableau. 2.2 3. Nombre $i$ de $u_i = \pi i/25, i = 1, \dots, I$	68
Tableau. 2.2 4. $L$ en fonction de la taille de l'échantillon et de $\alpha$ pour la régression (2.2.65)	69
Tableau 2. 4. 1. Estimation des paramètres de la v.a montant de sinistre pour l'année 2018	84
Tableau 2. 4. 2. Estimation des paramètres de la v.a montant de sinistre pour l'année 2017	84
Tableau 2. 4. 3. Résultat du test de Kolmogorov (1 <sup>ère</sup> version)	86
Tableau 2. 4. 4. Résultat du test de Kolmogorov (2 <sup>ème</sup> version)	87
Tableau 3.3. 1. Modèle de taux d'intérêt.	108

## Introduction

Dans une économie ouverte, souvent il est indispensable de mettre en place des stratégies adéquates, pour une gestion rationnelle des portefeuilles et faire face aux risques probables adjacents. Ces stratégies devraient être attachées à un système structurellement cohérent et robuste. Pour de tels systèmes, on cherche souvent à leur concevoir des modèles ou prototypes représentatifs, afin d'être utilisés comme outils d'analyse, de prévision et de simulation, pour l'aide à la décision. Particulièrement pour les compagnies d'assurance qui ont un cycle de production inversé, ce qui a un impact important sur leur bilan, car les primes sont encaissées avant que les prestations correspondantes (les sinistres occasionnés) ne soient payées. Ils ont donc besoin pour les compagnies d'assurance de mieux identifier, mesurer et gérer les risques auxquels elles sont soumises.

Ces dernières années, les actuaires sont devenus de plus en plus conscients du risque potentiel inhérent aux sinistres très importants dus à des événements catastrophiques. Un assureur doit compenser les pertes dues au paiement des sinistres des assurés au moyen d'une prime appropriée. Ainsi, un actuaire s'intéresse avant tout à estimer la prime nette qui est la moyenne du montant total des sinistres pour un individu ou un portefeuille (collection) de risques. Cela ne peut se faire sans une bonne estimation de la sinistralité. Il est donc essentiel de déterminer le processus de risque le plus représentatif possible de la réalité, en tenant compte de toutes les situations possibles (événements rares...etc.). Dans notre travail, on s'intéresse à la modélisation du portefeuille d'une compagnie d'assurance non-vie pour la branche automobile et particulièrement à la théorie du risque collectif. Cette dernière ne cesse de se développer essentiellement motivés par le besoin croissant de modélisation d'événements extrêmes.

Le but premier de la théorie du risque est de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, afin de pouvoir évaluer la probabilité de ruine ; où le concept de ruine peut se traduire d'une façon assez simple, comme la survenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie, de faire face à certains de ses engagements.

Dans le modèle le plus simple, une compagnie d'assurance non-vie dispose d'un capital initial  $u$  positif, chiffré dans une unité quelconque, c'est le montant du capital mis de côté pour couvrir les coûts, survenant pendant la période initiale du portefeuille lorsque l'entreprise n'a pas encore reçu les primes annuelles. Au cours du temps, le capital de cette compagnie peut évoluer en fonction des cotisations des assurés, de la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés et des montants à rembourser que ces sinistres occasionnent.

Ainsi, nous pouvons décrire la réserve de certaine branche de l'assurance non-vie comme suit :

$$\text{La réserve (L'excédent)} = \text{Le capital initial} + \text{Le Revenu} - \text{l'Écoulement}$$

On convient de noter par la suite :

- $X_t$  : Le capital au temps  $t$  ;
- $\Pi_t$  : Le montant total des cotisations (primes) reçues jusqu'au temps  $t$  ;
- $S_t$  : Le montant total des sinistres au temps  $t$ .

Alors le surplus (Le capital au temps  $t$ ) peut être décrit comme suit :

$$X(t) = u + \Pi(t) - S(t). \quad (1)$$

Le risque est donc généré par le couple  $(\Pi_t, S_t)$ . Dans notre travail, nous considérons que  $S_t$  est stochastique et que  $\Pi_t$  est indépendant du hasard et nous supposons que  $\Pi_t$  est une fonction déterministe, cependant, il existe des cas où  $\Pi_t$  est également un processus stochastique (le cas de primes qui dépendent de commission sur bénéfice, bonus-malus, etc.).

Le processus de risque  $\{X_t, t \geq 0\}$  dépend de la fonction de prime et du processus de sinistralité (accumulated claim process)  $\{S_t, t \geq 0\}$  qui représente le montant cumulé des sinistres (Dans la littérature, ce processus est très souvent également appelé processus de risque.). Ce dernier est généralement décomposé en un certain nombre de processus, qui donnent le nombre de sinistres survenus jusqu'à l'instant  $t$ , et un montant de sinistre aléatoire  $Y_i$ , lié à un sinistre survenu à l'instant  $t$ . Les sinistres accumulés jusqu'à l'instant  $t$  peuvent alors être représentés comme une somme aléatoire  $S_t = \sum Y_{t_i}$  ( $t_i \in A_t$ ), où  $A_t$  représente l'ensemble aléatoire des instants où les sinistres surviennent jusqu'à l'instant  $t$  au plus tard. Il est à noter que le montant cumulé des sinistres  $\sum Y_{t_i}$  ( $t_i \in A_t$ ) est aléatoire à deux égards. Elle comporte un nombre aléatoire de termes  $Y_{t_i}$ , qui est déterminé par  $A_t$ , et chacun d'eux représente à son tour une variable aléatoire (Bühlmann, 1970). Dans notre travail, nous nous concentrerons sur l'étude du processus de risque et principalement le processus de sinistres cumulés dans le cadre d'un modèle collectif du risque pour une branche d'assurance automobile (une classe d'individus homogènes), dans notre cas ça sera l'assurance auto.

Le premier à avoir utilisé le modèle décrit par l'éq. (1) dans l'assurance non-vie est Filip Lundberg en 1903. Effectivement, la théorie du risque a débuté au début du 20ème siècle avec les travaux du pionnier Filip Lundberg, qui a introduit le modèle de risque collective en assurance non vie (Lundberg, 1903). Ce n'est que plus tard, que le mathématicien et actuaire Harald Cramér a incorporé les idées de Lundberg avec des contextes mathématiques plus rigoureux (il a établi la relation entre la théorie du risque et les processus stochastiques généraux) dans son document de recherche sur la théorie du risque collectif (Cramér, 1955). Par conséquent, le modèle résultant est appelé **modèle Cramér-Lundberg**, ou **le modèle classique de risque**. Et dans ce cas le processus de risque est défini comme suit

$$X(t) = u + \Pi(t) - S(t) = u + c t - S(t). \quad (2)$$

Où  $u$  Est la réserve de risque initiale,  $c$  est le taux de prime qui est constant, et  $S(t)$  représente le processus de sinistralité (Montant cumulé des sinistres), définie par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)} \quad (3)$$

Avec

- $N(t)$  : Le nombre de sinistre sur l'intervalle  $(0, t]$ .
- $Y_i$  : le montant de sinistre (la perte occasionnée par le sinistre  $i$ )

Dans le modèle de Cramér Lundberg, on suppose que :

- (a)  $Y_1, Y_2, \dots$  sont des v.a *i.i.d* de distribution  $G$
- (b)  $N(t)$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$
- (c)  $N(t)$  et  $Y_i$  sont supposés indépendants.
- (d)  $c$  : le taux de prime qui est constant

Il est à noter que le processus de Poisson homogène est un processus stationnaire, ce qui implique que la taille du portefeuille ne peut pas augmenter ou diminuer. Donc le modèle classique de risque ne prend pas vraiment en considération le cas de grande fluctuation ce qui peut être le cas dans l'assurance automobile. Le modèle de Cramér-Lundberg reste comme même la base de la théorie du risque collectif en assurance non vie, et il a donné lieu à plusieurs généralisations, pour plus de détails voir (Asmussen, 2000; Asmussen & Albrecher, 2010; Rolski et al., 1999), les exemples les plus simples se basent sur le choix du processus de comptage  $N_t$ , par exemple on peut prendre un processus de poisson non homogène d'intensité  $\lambda(t)$ , ou un processus de renouvellement et dans ce dernier cas on retrouve le modèle de risque de Sparre Andersen (Andersen, 1957).

Il y a eu plusieurs autres généralisations du modèle telles que :

- Des modèles avec une prime d'assurance stochastique ou dépendante de la réserve (Asmussen, 2000; Asmussen & Albrecher, 2010).
- Approximation du processus de risque classique par un mouvement Brownien ou d'autres processus de diffusion (ce qui était inspiré de la modélisation mathématique en finance). Voir (Bohman, 1972; Grandell, 1972, 1991; Iglehart, 1969)
- Des modèles de risque perturbé : on ajoute une perturbation ou une composante de diffusion au processus de risque classique qui aura alors la forme suivante :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + \eta Z_t \quad (4)$$

Où  $\eta$  est un paramètre de dérive.  $Z_t$  est la composante qui ajoute une incertitude de plus au processus de risque qui peut être interprété (ou liée) par fluctuation des nombres d'assuré ou de la prime ou bien le taux de retour sur investissement de la réserve de la compagnie d'assurance.  $Z_t$  Peut-être un processus de saut, un mouvement brownien (Gerber, 1970), un processus de diffusion (Dufresne et al., 1991; Dufresne & Gerber, 1991).

Plus récemment, la famille des processus de Lévy fut énormément exploitée dans la théorie du risque, par exemple le processus gaussien inverse (Chaubey et al., 1998),

processus gamma (Dufresne et al., 1991). Pour plus de détails sur ses différents modèles se référer à (Asmussen & Albrecher, 2010; Rolski et al., 1999).

Plus particulièrement pour des modèles avec de plus grande variabilité Furrer s'est intéressé à une classe particulièrement complexe et importante des processus de Lévy dans sa thèse « Risk Theory and Heavy-Tailed Lévy Processes » soutenu en 1997, c'est la classe des processus stable, Cette dernière semble être plus adéquate dans le cas distributions de sinistre à queue lourdes (Heavy tailed claims). Furrer, Michna and Weron proposent alors d'approximer le processus de risque par un mouvement  $\alpha$ -stable de Lévy (Furrer et al., 1997). C'était la première fois où cette classe fut utilisée dans la théorie du risque, puis en 1998 Furrer considère un processus de risque perturbé par un mouvement stable de Lévy (Furrer, 1998).

Les recherches ne cessent d'évoluer dans la théorie du risque et on peut toujours penser à diverse autres généralisation afin d'obtenir une description plus raisonnable et adéquate de la réalité.

Dans notre travail, on propose de modéliser le processus de sinistre  $S(t)$  par un processus  $\alpha$ -stable, avec des montants de sinistre  $Y_i$  distribués selon une distribution  $\alpha$ -stable. Il y a plusieurs raisons qui nous ont poussés à choisir les distributions stables pour notre modélisation, elles constituent une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter et d'expliquer différentes asymétries et des queues très lourdes (Permet de décrire des fluctuations de grande amplitude) observées dans les distributions empiriques des montants de sinistre. D'autant plus que les distributions  $\alpha$ -stables sont stables par combinaison linéaire et sont les seules qui s'obtiennent comme limites des sommes linéairement normées de variables *i.i.d*, ce qui fait que cette famille de loi constitue une alternative intéressante à la distribution normale quand l'aléa observé résulte d'une somme de plusieurs effets élémentaires aléatoires de distributions leptokurtiques.

Cette classe a été caractérisée par Lévy en 1925 dans ces travaux sur la somme de variables indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*). L'absence de formules explicites des densités de ces distributions a limité leur utilisation. Les distributions de cette classe ont un comportement asymptotique de Pareto avec  $0 < \alpha \leq 2$ . Lorsque  $\alpha = 2$  on retrouve la loi Normale ; La queue de distribution d'une loi stable décroît selon une loi de puissance, contrairement à la loi normale dont la queue décroît selon une loi exponentielle, de ce fait la queue de la distribution d'une loi stable décroît asymptotiquement plus lentement que la loi Gaussienne. Le taux de décroissance dépend d'un paramètre  $\alpha$  qui prend ses valeurs entre 0 et 2 plus  $\alpha$  est petit, plus les queues de distributions sont épaisses (lepto-kurtiques). Cependant pour  $\alpha < 2$  le moment d'ordre  $r \geq \alpha$  n'est pas fini, ces distributions ont donc une variance infinie, et par conséquent une queue très lourde. Pour  $\alpha = 1$  on retrouve la loi de Cauchy (avec une moyenne et une variance infinie). Cette classe a une grande importance dans la théorie des valeurs extrêmes, puisque les distributions stables peuvent être caractérisées à partir du théorème central limite généralisé. En effet, le théorème de la limite centrale indique que la somme de  $n$  variables aléatoires (iid) de variance finie tend vers une distribution normale lorsque  $n$  tend vers l'infini. Une généralisation de ce théorème par Gnedenko et Kolmogorov en 1954, indique que si la condition de variance finie n'est pas respectée, la seule loi limite possible de la somme de  $n$  variables aléatoire (iid), est une loi stable (Gnedenko & Kolmogorov, 1954).

Toutefois, une compagnie d'assurance, peut ne pas se reposer seulement sur les revenus émanent des primes encaissées et penser à augmenter ses revenus en faisant des

investissements. En notant par  $I(t)$  le processus d'investissement, le processus de réserve  $R(t)$  sera donc défini par l'équation suivante :

$$R(t) = X(t) + I(t) = u + \Pi(t) - S(t) + I(t). \quad (5)$$

Dans notre travail, on se place dans un marché complet (sans opportunité d'arbitrage), et nous supposons que la compagnie a la possibilité d'investir dans un actif sans risque et un actif risqué selon le modèle de Black et Scholes modifié, où nous supposons que le rendement instantané de l'actif risqué est stochastique, car l'hypothèse que les paramètres du modèle de Black et Scholes soient constants implique une sous-évaluation du prix de l'actif risqué.

Notre but est donc de se placer dans le cas de situations extrêmes, afin de d'étudier le comportement dynamique d'un processus de réserve représenté par une équation différentielle couplée, et exposé au risque de ruine, lié à des montants de sinistre  $\alpha$ -stable ; Le montant total des sinistres est modélisé par équation différentielle stochastique  $\alpha$ -stable ( $\alpha$ -EDS). Pour cela, nous commencerons par vérifier notre hypothèse, en montrant que nous avons bien des montants de sinistre automobile à queue lourde distribué selon une loi  $\alpha$ -stable, pour enfin analyser la sensibilité du modèle par rapport aux différents paramètres

Cette thèse se décompose en trois chapitres qui détaillent l'évolution de notre travail

Le premier chapitre est consacré aux variables  $\alpha$ -stables, où nous commencerons par présenter brièvement la famille des lois infiniment divisible dans la première section. C'est une famille de loi plus générale qui va nous permettre de déterminer la classe des distributions qui s'expriment comme limite d'une somme de  $n$  variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*), et de ce fait se rapprocher du théorème de la limite centrale, afin d'obtenir une forme explicite de la fonction caractéristique d'une distribution  $\alpha$ -stable. Puis dans la seconde section, nous présenterons quelques concepts importants et des définitions concernant la famille des lois  $\alpha$ -stables unidimensionnelles, qui n'est qu'une sous famille des distributions infiniment divisibles, pour pouvoir donner ensuite les différentes formes de paramétrisation de la fonction caractéristique d'une variable  $\alpha$ -stable et compléter tout cela par leur principales propriétés analytiques, qui seront utilisées dans la suite de la thèse, et finalement nous passons aux vecteurs  $\alpha$ -stables

Dans le chapitre deux, nous passons à l'inférence statistique des distributions stables, nous commençons par donner les différentes techniques d'estimation des quatre paramètres d'une distribution stable univariée, puis l'estimation de sa densité. Ensuite, on se place dans cas unidimensionnel pour introduire les différents tests statistiques utilisés pour détecter si nous sommes en présence de variable a variance infinie ou non et plus particulièrement des distributions stables. Pour finir avec une application sur les données réelles issues d'une agence de la compagnie Alliance assurance pour la branche automobile. Où nous avons montrés que la distribution stable est la plus appropriés pour modéliser les montants de sinistres automobiles. Habituellement, les données relatives à un portefeuille d'assurance se réfèrent à une période d'un an conformément à la comptabilité de l'entreprise. C'est pour cette raison, que nous avons étudié deux échantillons pour les années 2017 et 2018

Dans le chapitre trois, on s'intéresse à la théorie du risque, plus particulièrement à l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance non-vie régie par un processus de sinistre  $\alpha$ -stable. C'est pour cette raison, que nous commençons par introduire les processus

$\alpha$ -stables dans la première section, en donnant les propriétés les plus importantes, puis la construction des intégrales d'Itô par rapport à un mouvement  $\alpha$ -stable, pour enfin définir les processus de diffusion par rapport à un mouvement stables, ainsi que la méthode d'approximation et de simulation des  $\alpha$ -EDS. Ensuite dans la section deux nous présenterons notre modèle à savoir le processus de risque avec sinistre  $\alpha$ -stable, après une brève introduction du processus de risque classique, pour finir avec des résultats de base en assurances tels que la probabilité de ruine et le coefficient de Lundberg pour des sinistres à queue légère et à queue lourde. Pour finir dans la section 3, par la modélisation de la richesse d'une compagnie d'assurance par une équation différentielle stochastique couplée, avec un processus de sinistre stable et rendement instantané stochastique. À travers plusieurs simulations, nous étudions l'évolution de la richesse en fonction des différents modèles de taux proposés (Vasicek et CIR), puis l'effet des changements des paramètres de la loi  $\alpha$ -stable sur la dynamique de la richesse.

## 1. Distributions $\alpha$ -stables

La théorie générale des distributions stables a été initiée par P. Lévy (1924), qui a trouvé les transformées de Fourier de toutes les distributions strictement stables (qui étaient à l'origine appelés quasi-stables. Comme on va le voir, elles ne jouent un rôle que lorsque  $\alpha = 1$ , et ce cas a été analysé conjointement par P. Lévy et H. Khintchine.) Une approche nouvelle et plus simple de l'ensemble de la théorie a été rendue possible par la découverte de distributions infiniment divisibles. Cette nouvelle approche (toujours basée sur l'analyse de Fourier) est également due à P. Lévy (1937). L'intérêt pour la théorie des distributions stables a été stimulé par l'analyse magistrale de W. Doblin sur les domaines d'attraction (1939). Ses critères furent les premiers à impliquer des fonctions à variations régulières. La théorie moderne porte encore l'empreinte de ces travaux pionniers. Après les travaux de P. Lévy et A. Ya. Khintchine, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des lois stables ; dont le but principal était de savoir comment étudier indirectement les propriétés analytiques des distributions stables. Et effectivement aux cours des dernières décennies, un grand nombre d'idées nouvelles sont apparues et nous en savons maintenant beaucoup plus sur leurs particularités. Le concept de lois stables a même été étendu au cas des distributions multidimensionnelles et même à dimension infinie. Nous suggérons aux lecteurs principalement la littérature suivante (Lévy, 1954), (Feller, 1971), (Zolotarev, 1986), (Samorodnitsky & Taquq, 1994), (Janicki & Weron, 1994), (Uchaikin & Zolotarev, 1999)

Les distributions stables constituent une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter différentes asymétries et des queues très lourdes et la notion de stabilité vient du fait que toute combinaison linéaire de variables aléatoires stables donne aussi une loi stable, c'est principalement pour ces raisons, que nous avons retenues les distributions  $\alpha$ -stables dans le cadre de notre travail pour la modélisation des sinistres automobile.

Dans ce chapitre, nous allons, d'abord commencer par introduire les distributions infiniment divisibles qui sont à la base de la représentation de la mesure de Lévy-Khintchine, puis nous étalerons cette théorie aux variables stables, pour présenter la notion de stabilité ainsi que l'expression de la fonction caractéristiques d'une distribution  $\alpha$ -stables. Pour terminer ce chapitre avec l'introduction des vecteurs  $\alpha$ -stables

### 1.1. Lois indéfiniment divisibles

Jusque vers les années 30, les recherches en probabilité avaient comme objectif principal de déterminer sous quelles conditions (aussi générales que possibles) des sommes de variables indépendantes ou faiblement corrélées convergent en loi vers une loi de Gauss ou une autre loi limite. Cette théorie « l'Arithmétique des lois de probabilités » était née avec une série d'articles de Paul Lévy, plus précisément, en 1934, P. Lévy énonce un théorème (sans pouvoir le démontrer) affirmant que la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes ne peut être gaussienne sans que les lois de chacune des deux variables le soient ; H. Cramér démontre ce théorème en 1936 en utilisant la notion de fonction caractéristique (i.e. la transformée de Fourier). Ce résultat a suscité de nombreux travaux ultérieurs de Dmitry Raikov et de Yury Linnik, notamment sur l'arithmétique des lois infiniment divisibles. Mais en réalité la notion de divisibilité infinie remonte à B. de Finetti (1929), tandis que la transformée de Fourier des distributions infiniment divisibles à variance finie ont été trouvées par A. Kolmogorov (1932), et celles des distributions infiniment divisibles générales par P. Lévy (1934), qui a également traité le problème du point de vue

des processus stochastiques. Toutes les recherches ultérieures ont été fortement influencées par les travaux de ces pionniers. Les premières dérivations purement analytiques de la formule générale ont été données en 1937 indépendamment par Feller et Khintchine (Feller, 1971, p. 179).

Dans cette section, nous allons commencer par introduire les lois infiniment divisibles. C'est une famille de loi plus générale qui va nous permettre de déterminer la classe des distributions qui s'expriment comme limite d'une somme de  $n$  variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*), et de ce fait se rapprocher du théorème de la limite centrale, afin d'obtenir une forme explicite de la fonction caractéristique d'une distribution  $\alpha$ -stable.

### 1.1.1. Préliminaire

D'une façon générale, on cherche à représenter une variable aléatoire  $X$  de loi  $f_X$  comme somme de variables aléatoires indépendantes  $X = X_1 + X_2 + \dots$ , cette somme de variables aléatoires, peut éventuellement contenir un nombre infini de termes. Dans ce cas, la somme infinie est prise au sens de la convergence presque sûre (*i.e.*  $X = \lim_{k \rightarrow \infty} (X_1 + \dots + X_k)$  p.s.). En effet, des résultats bien connus dû à Paul Lévy (Lévy, 1954) énoncent d'une part qu'une série de variables aléatoires indépendantes converge en loi si et seulement si elle converge presque sûrement, et d'autre part que la convergence étroite des lois de probabilités est équivalente à la convergence simple des fonctions caractéristiques. Ces considérations conduisent naturellement à la notion de loi indéfiniment divisible.

Cette section repose en grande partie sur livre de William Feller 1971 « An Introduction to Probability Theory and Its Application Vol II »

**Définition 1.1.1.** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  est infiniment divisible, si pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $n$  variables aléatoire  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$  indépendantes et de même distribution  $f_n$  (*idd*), telles que  $X$  ait la même loi que  $X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$ , et on note :

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$$

Où  $\stackrel{d}{=}$  signifie l'égalité en distribution.

Il faut rappeler que la variable aléatoire  $X$ , n'a pas forcément la même loi que  $(X_{k,n})_{k=1,\dots,n}$ .

Autrement dit : Une distribution (où Fonction de répartition  $F$ ) est infiniment divisible si pour tout  $n$  il existe une distribution  $F_n$  telle que  $F = F_n^{*n}$  (la fonction de répartition  $F$  de la variable  $X$  peut être représentée comme la fonction de répartition de la somme  $S_n = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$  de  $n$  variables aléatoires *i.i.d*)

Cette définition est valable pour n'importe quelle dimension, mais dans la suite de cette section, nous limiterons notre attention aux distributions infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$ , pour introduire seulement à la fin leurs représentation dans  $\mathbb{R}^d$ , largement connue sous le nom de la formule de Lévy-Khintchine.

**Remarque 1.1.1.** Il faut comprendre que les variables aléatoires  $X_{k,n}$  servent simplement à rendre les notations plus simples et plus intuitives. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixe, les variables  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$  sont supposées être mutuellement indépendantes, mais les variables  $X_{j,m}$  et

$X_{k,n}$  avec  $m \neq n$  n'ont pas besoin d'être définies sur le même espace de probabilité. (En d'autres termes, une distribution conjointe pour  $X_{j,m}$  et  $X_{k,n}$  n'a pas besoin d'exister.)

La définition 1.2.1 est celle communément adoptée de nos jours, mais voyons ce qui se passe si nous abandonnons l'exigence selon laquelle les  $X_{k,n}$  ont la même distribution.

**Définition 1.1.2.**(Feller, 1971, p. 177) Une variable aléatoire  $X$  de Fonction de répartition  $F$  est infiniment divisible si pour tout  $n$  il existe  $n$  fonctions de répartition  $F_{1,n}, \dots, F_{n,n}$  telles que

$$F = F_{1,n} \star \dots \star F_{n,n} \quad (1.1.1)$$

Et que les composantes individuelles  $X_{k,n}$  deviennent asymptotiquement négligeables au sens où :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\{|X_{k,n}| > \epsilon\} < \epsilon \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.1.2)$$

Pour  $n$  suffisamment grand. Cela signifie que les  $X_{k,n}$  tendent en probabilité vers zéro uniformément pour  $k = 1, \dots, n$ ). Les systèmes de variables de ce type apparaissent si souvent qu'il est commode de leur donner un nom.

Pour mieux comprendre la définition 1.1.2, il est plus simple de l'illustrer par des exemples

**Exemples :**

- (a) Si  $F$  est infiniment divisible et  $U$  quelconque, alors  $G = U \star F$  peut s'écrire sous la forme (1.1) avec  $G_{1,n} = U$  et tous les autres  $G_{k,n}$  doivent être égaux à  $F_{n-1}$ . Dans ce cas, la première composante joue un rôle entièrement différent des autres composantes.
- (b) Considérons une série convergente  $X = \sum X_k$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes. La distribution  $F$  de  $X$  est la convolution des distributions de  $X_1, \dots, X_n$  et du reste  $X_n + X_{n+1} + \dots$  et donc  $F$  est de la forme (1.1.1).

La caractéristique distinctive de ces exemples est que la contribution d'une composante individuelle  $X_{1,n}$  à  $S_n$  est essentielle, alors que dans le cas de variable de même distribution, la contribution de chacune tend vers zéro. Le but étant de relier les distributions infiniment divisibles aux théorèmes limites impliquant « de nombreuses petites composantes ».

**Définition 1.1.3.** Une fonction caractéristique  $\omega$  est infiniment divisible si et seulement si pour chaque  $n$ , il existe une fonction caractéristique  $\omega_n$  telle que :

$$\omega_n^n = \omega \quad (1.1.3)$$

Nous verrons plus loin que la divisibilité infinie peut être caractérisée par d'autres propriétés frappantes qui expliquent pourquoi cette notion joue un rôle important en théorie des probabilités.

**Remarque 1.1.2.** Il est tentant de désigner  $\omega_n$  dans (1.1.3) comme la racine nième de  $\omega$ , mais pour que cela ait un sens, il faut que cette racine soit *unique*.

Feller a indiqué que la fonction caractéristique  $\omega$  admet une unique représentation polaire  $\omega(\xi) = r(\xi)e^{i\theta(\xi)}$  seulement dans le cas où  $\omega(\xi) \neq 0$ , avec  $\theta$  continue et  $\theta(0) = 0$ . Dans ce cas, pour tout intervalle  $|\xi| < \xi_0$ , on peut écrire sans ambiguïté :

$$\omega^{1/n}(\xi) = (r(\xi)e^{i\theta(\xi)})^{1/n} = r^{1/n}(\xi)e^{i\theta(\xi)/n};$$

En ce sens  $\log \omega$  et  $\omega^{1/n}$  sont déterminés de manière unique dans tout intervalle  $|\xi| < \xi_0$ , et (1.1.3) peut être reformulé par  $\omega_n = \omega^{1/n}$ . Cette définition n'est plus valable dès que  $\omega(\xi_0) = 0$ .

**Théorème 1.1.1.** Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite de fonctions caractéristiques. Pour qu'il existe une limite continue :

$$\omega(\xi) = \lim \varphi_n^n(\xi) \quad (1.1.4)$$

Il est nécessaire et suffisant que

$$n[\varphi_n(\xi) - 1] \rightarrow \psi(\xi) \quad (1.1.5)$$

Avec  $\psi$  continue. Dans ce cas :

$$\omega = e^\psi \quad (1.1.6)$$

Démonstration du théorème (Feller, 1971, p. 556-557) .

Le théorème 1.1. 1 a de nombreuses conséquences. En multipliant (1.1.6) par  $t > 0$  on voit que cette relation est équivalente à :

$$\exp\{tn[\varphi_n(\xi) - 1]\} \rightarrow \exp\{t\psi(\xi)\} = \omega^t(\xi) \quad (1.1.7)$$

Où le côté gauche représente une fonction caractéristique du type Poisson composé, et donc  $e^{t\psi(\xi)}$  est une fonction caractéristique pour tout  $t > 0$ .

En particulier, nous pouvons conclure que,  $\omega = e^\psi$  est nécessairement infiniment divisible. En d'autres termes, **toute fonction caractéristique  $\omega$  apparaissant comme limite d'une suite  $\{\varphi_n^n\}$  de fonctions caractéristiques est infiniment divisible**. Cela peut être considéré comme un élargissement de la définition de la divisibilité infinie en remplaçant la relation (1.1.3) par la relation limite plus général (1.1.4).

En conclusion, la distribution de Poisson composée joue un rôle important dans la théorie des distributions infiniment divisibles car toute distribution infiniment divisible est une limite d'une suite de distributions de Poisson composées. Si on considère une distribution de probabilité arbitraire  $F$  et  $\varphi$  sa fonction caractéristique, alors  $F$  génère la famille des distributions de Poisson composées(Feller, 1971, p. 555) :

$$e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} F^{k*}$$

Avec des fonctions caractéristiques de la forme  $e^{-c(\varphi-1)}$  où  $c > 0$  choisit arbitrairement. Alors  $\omega = e^{-c(\varphi-1)}$  est infiniment divisible car  $\omega^{1/n}$  existe, et elle est de même forme  $(\omega^{1/n} = e^{-\frac{c}{n}(\varphi-1)})$ .

**Théorème 1.1.2.** La classe des distributions infiniment divisibles coïncide avec la classe des distributions limites des distributions de Poisson composées.

**Théorème 1.1.3.** Une fonction caractéristique  $\omega$  est infiniment divisible s'il existe une suite  $\{\varphi_n\}$  de fonctions caractéristiques telles que  $\varphi_n^n \rightarrow \omega$

Dans ce cas  $\omega^t$  est une fonction caractéristique pour tout  $t > 0$  et  $\omega(\xi) \neq 0$ , pour tout  $\xi$ .

**Corollaire 1.1.1.** La limite continue d'une suite de fonctions caractéristiques infiniment divisibles  $\{\varphi_n\}$  est elle-même infiniment divisible.

Démonstration du théorème (Feller, 1971, p. 557)

### Exemples de distributions infiniment divisibles :

Beaucoup de lois connues sont indéfiniment divisibles. Nous allons seulement en citer quelques-unes. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, Si  $X$  suit :

– **La loi normale :**

La fonction caractéristique  $\varphi_X(\xi)$  d'une distribution normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  s'écrit comme puissance  $n^{\text{ième}}$  de la fonction caractéristique d'une loi normale  $\mathcal{N}\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , comme suit :

$$\varphi_X(\xi) = \exp\left\{im\xi - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2\right\} = \left[\exp\left\{i\left(\frac{m}{n}\right)\xi - \frac{\sigma^2}{2n}\xi^2\right\}\right]^n$$

– **La loi de Cauchy standard :**

La fonction caractéristique d'une loi de Cauchy  $C(a)$  de paramètre  $a \in \mathbb{R}_+^*$  s'écrit comme puissance  $n^{\text{ième}}$  de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy  $C\left(\frac{a}{n}\right)$ .

$$\varphi_X(\xi) = \exp\{-a|\xi|\} = \left[\exp\left\{-\frac{a}{n}|\xi|\right\}\right]^n$$

– **La loi de poisson**

La fonction caractéristique d'une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  s'écrit comme puissance  $n^{\text{ième}}$  de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda/n)$

$$\varphi_X(\xi) = \exp\{\lambda(e^{i\xi} - 1)\} = \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}(e^{i\xi} - 1)\right\}\right]^n$$

### 1.1.2. Représentation des distributions infiniment divisibles

Pour trouver la forme la plus générale des fonctions caractéristiques infiniment divisibles  $\omega = e^\nu$ , il suffit de déterminer la forme générale des limites possibles des suites de fonctions caractéristiques  $\exp c_n(\xi_n - 1)$  du type Poisson composé (Feller, 1971). Pour diverses applications, il est préférable d'énoncer le problème d'une façon plus générale en admettant des centrages arbitraires, et nous cherchons donc les limites possibles des fonctions caractéristiques de la forme  $\omega_n = e^{\nu_n}$ , où nous posons pour abréviation :

$$\psi_n(\xi) = c_n[\varphi_n(\xi) - 1 - i\beta_n\xi] \tag{1.1.8}$$

Où  $\varphi_n$  est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F_n$ ,  $c_n$  sont des constantes positives, et  $\beta_n \in \mathbb{R}$  des constantes de centrage.

Les  $\omega_n$  sont infiniment divisibles, et il en est donc de même pour leurs limites continues.

**Le but de cette sous-section est de présenter les conditions dans lesquelles il existe une limite continue :**

$$\psi(\xi) = \lim \psi_n(\xi) \tag{1.1.9}$$

Autrement dit, pour pouvoir présenter une forme canonique de la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible, il faut définir la forme du centrage (la fonction de centrage), ainsi que la forme de la mesure associée pour que (1.19) soit vérifiée.

Pour cela, nous allons commencer par trouver la forme du centrage. Il est connu que pour les distributions avec espérances, le centrage naturel est à espérance nulle (il faut choisir  $\beta_n$  en conséquence quand c'est possible). Cependant, nous avons besoin d'un centrage universellement applicable avec des propriétés similaires. Il s'avère que le centrage le plus simple est obtenu par la condition que pour  $\xi = 1$  toutes les valeurs de  $\psi_n$  soient réelles.

Posons  $u_n$  et  $v_n$  respectivement la partie réelle et imaginaire de  $\varphi_n$ , la condition devient :

$$\beta_n = v_n(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dF_n(x) \quad (1.1.10)$$

Ceci montre que notre centrage est toujours possible. Ce qui donne :

$$\psi_n(\xi) = c_n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x) dF_n(x) \quad (1.1.11)$$

Près de l'origine, l'intégrant se comporte comme  $-\frac{1}{2}\xi^2 x^2$ , tout comme c'est le cas avec le centrage plus familier vers l'espérance nulle. L'utilité du centrage (1.1.10) est due en grande partie au lemme suivant :

**Lemme 1.1.1.** Soient  $\{c_n\}$  et  $\{\varphi_n\}$  donnés. S'il existe des constantes de centrage  $\beta_n$  telles que  $\psi_n$  tend vers une limite continue  $\psi$ , alors  $\beta_n$  (définie par (1.1.10)) tend aussi vers une limite finie.

**Preuve.** Définissons  $\psi_n$  par (1.1.8) avec  $\beta_n$  arbitraire, et supposons que  $\psi_n \rightarrow \psi$ .

Si  $b$  désigne la partie imaginaire de  $\psi(1)$  nous pouvons conclure pour  $\xi = 1$ , on a :

$$c_n(v_n(1) - \beta_n) \rightarrow b \quad (1.1.12)$$

En multipliant par  $i\xi$  et en soustrayant, de  $\psi_n \rightarrow \psi$ . Nous obtenons

$$c_n(\varphi_n(\xi) - 1 - iv_n(1)\xi) \rightarrow \psi(\xi) - ib\xi \quad (1.1.13)$$

Et ceci prouve l'assertion.

Après avoir donné une forme du centrage, il nous reste à déterminer la forme de la mesure qui permettra de définir une distribution infiniment divisible (qui vérifie (1.1.9)). Pour mieux comprendre notre problème de convergence, nous allons traiter un cas particulier dont la solution est particulièrement simple.

Supposons que les fonctions  $\psi_n$  et  $\psi$  soient deux fois continûment différentiables (ce qui signifie que les distributions correspondantes ont des variances). Supposons que non seulement  $\psi_n \rightarrow \psi$ , mais aussi  $\psi_n'' \rightarrow \psi''$ . Au vu de (1.1.8) cela signifie que :

$$c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} x^2 F_n(dx) \rightarrow \psi''(\xi) \quad (1.1.14)$$

Par hypothèse  $c_n x^2 dF_n(x)$  définit une mesure finie, et nous désignons sa masse totale par  $\mu_n$ . D'après (1.1.14), pour  $\xi = 0$ , on a  $\mu_n \rightarrow -\psi''(0)$ . En divisant (1.1.14) par  $\mu_n$ , nous obtenons à gauche la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité propre, et

lorsque  $n \rightarrow \infty$  elle tend vers  $\psi''(\xi)/\psi''(0)$ . Il s'ensuit que  $\psi''(\xi)/\psi''(0)$  est la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité, et donc :

$$-\psi''(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} dM(x) \quad (1.1.15)$$

Où  $M$  est une mesure finie. De là, nous obtenons  $\psi$  par intégration par partie. Gardant à l'esprit que  $\psi(0) = 0$  et qu'avec la condition de centrage  $\psi(1)$  doit être réel, nous obtenons :

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM(x) \quad (1.1.16)$$

Cette intégrale a un sens, l'intégrant étant une fonction continue bornée supposant à l'origine la valeur  $-\frac{1}{2}\xi^2$ .

La limite  $\psi$  est nécessairement de la forme (1.1.16) selon les conditions de différentiabilité, le problème de la limite étant résolu, il reste maintenant, les conditions concernant la mesure  $M$ . On peut retrouver dans (Feller, 1971, p. 560-561) la démonstration détaillée qu'avec une mesure finie  $M$  choisie arbitrairement l'intégrale (1.1.16) définit bien une fonction caractéristique  $e^\psi$  infiniment divisible ( lemme 1.2.1) ; et qu'il n'est pas nécessaire que la mesure  $M$  soit finie, pour que l'intégrale ait un sens ; Il suffit que  $M$  attribue des masses finies à des intervalles finis

**Définition 1.1.4.** Une mesure  $M$  sera dite canonique si elle attribue des masses finies à des intervalles finis et les intégrales (1.1.17)

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} dM(y), \quad M^-(-x) = \int_{-\infty}^{-x} y^{-2} dM(y) \quad (1.1.17)$$

Convergent pour tous  $x > 0$  (i.e.  $M\{(-x, x)\}$  augmente suffisamment lentement).

Les mesures définies par les densités  $|x|^p dx$  avec  $0 < p < 1$  sont des exemples typiques de mesure attribuant des masses finies à des intervalles finis (intervalles d'intégration fermés.).

**Lemme 1.1.2** Si  $M$  est une mesure canonique et  $\psi$  définie par (1.1.16) alors  $e^\psi$  est une fonction caractéristique infiniment divisible.

**Preuve.** (Feller, 1971, p. 560) Nous considérons en premier lieu deux cas particuliers importants, puis, nous verrons le cas général :

- a) Supposons que  $M$  soit concentré à l'origine et on lui attribue une masse  $m > 0$ . Alors  $\psi(\xi) = -m\xi^2/2$ , et donc  $e^\psi$  est une fonction caractéristique normale de variance  $m^{-1}$ .
- b) Supposons que  $M$  soit concentré sur  $|x| > \eta$  où  $\eta > 0$ . Dans ce cas (1.1.9) peut être réécrit en une forme plus simple :  $x^{-2}M\{dx\}$ , maintenant on définit une mesure finie de masse totale  $\mu = M^+(\eta) + M^-(-\eta)$ .

En conséquence  $x^{-2}M\{dx\}/\mu = F\{dx\}$  définit une mesure de probabilité de fonction caractéristique  $\varphi$ , et évidemment  $\psi(\xi) = c_n[\varphi(\xi) - 1 - ib\xi]$  , où  $b$  est

une constante réelle. Ainsi, dans ce cas,  $e^\psi$  est une fonction caractéristique du type Poisson composé, et donc infiniment divisible.

c) *Le cas général* : soit  $m \geq 0$  la masse attribuée par  $M$  à l'origine, et posons :

$$\psi_n(\xi) = \int_{|x|>\eta} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM(y) \quad (1.1.18)$$

Alors :

$$\psi(\xi) = -\frac{m}{2}\xi^2 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_n(\xi) \quad (1.1.19)$$

Nous avons vu que  $e^{\psi_n(\xi)}$  est la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible  $U_n$ . Si  $m > 0$  l'addition de  $-m\xi^2/2$  à  $\psi_n(\xi)$  correspond à une convolution de  $U_n$ , avec une distribution normale. Ainsi (1.1.19) représente  $e^\psi$  comme la limite d'une suite de fonctions caractéristiques infiniment divisibles, et donc  $e^\psi$  est infiniment divisible comme affirmé.

Le lemme suivant montre que la représentation (1.1.16) est unique dans le sens où des mesures canoniques distinctes donnent lieu à des intégrales distinctes.

**Lemme 1.1.3.** La représentation (1.1.16) de  $\psi$  est unique.

La démonstration est détaillée dans (Feller, 1971, p. 561).

**Théorème 1.1.4.** La classe des fonctions caractéristiques infiniment divisibles est identique à la classe des fonctions de la forme  $e^\psi$  avec  $\psi$  définies par

$$\psi(\xi) = ib\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM(y) \quad (1.1.20)$$

Où  $M$  est une mesure canonique et  $b$  un nombre réel.

Le théorème 1.1.4 complète le lemme 1.1.2 en donnant la forme de toutes les fonctions caractéristiques infiniment divisibles, pour plus de détails sur la preuve se référer à la démonstration dans (Feller 1971, 561-563), nous allons seulement citer des éléments essentiels de cette démonstration.

**Théorème 1.1.5.** Soit  $M_n$  une mesure canonique définit par :

$$\psi_n(\xi) = ib_n\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM_n(x) \quad (1.1.21)$$

Pour que  $\psi_n$  tende vers une limite continue  $\psi$ , il faut et il suffit qu'il existe une mesure canonique  $M$  telle que  $M_n \rightarrow M$ , et que  $b_n \rightarrow b$ . Dans ce cas  $\psi$  est donné par (1.2.20).

$$\psi(\xi) = ib\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM(x) \quad (1.1.22)$$

**Définition 1.1.5.** On dit qu'une suite  $\{M_n\}$  de mesures canoniques converge vers la mesure canonique  $M$  et on note  $M_n \rightarrow M$  si et seulement si :

$$\text{Pour tout intervalle fini } I : \quad M_n\{I\} \rightarrow M\{I\} \quad (1.1.23)$$

$$\text{Et} \quad M_n^+(x) \rightarrow M^+(x), \quad M_n^-(x) \rightarrow M^-(x) \quad (1.1.24)$$

Où  $M^+(x)$  et  $M^-(x)$  sont définies par (1.1.17)

**Cas particulier :** Pour des mesures canoniques de la forme  $M_n\{dx\} = c_n x^2 F_n\{dx\}$  (avec  $F_n$  une fonction de répartition). En tout point  $x > 0$  de continuité, ces relations sont reformulées comme suit :

$$\text{Pour tout intervalle fini } I : \quad c_n \int_I x^2 F_n\{dx\} \rightarrow M\{I\} \quad (1.1.25)$$

$$\text{Et} \quad c_n [1 - F_n(x)] \rightarrow M^+(x), \quad c_n F_n(-x) \rightarrow M^-(-x) \quad (1.1.26)$$

Si  $I = [a, b]$  est un intervalle fermé ne contenant pas l'origine, alors (1.1.25) implique évidemment que  $c_n F_n\{I\} \rightarrow M^+(a) - M^+(b)$  et donc (1.1.26) peut être considérée comme une extension de (1.1.25) aux intervalles semi-infinis. Une condition équivalente est qu'aucune masse ne s'écoule vers l'infini dans le sens où à chaque  $\varepsilon > 0$ , correspond un  $\tau$  tel que :

$$\text{Pour tout } n \text{ suffisamment grand :} \quad c_n [1 - F_n(\tau) + F_n(-\tau)] < \varepsilon \quad (1.1.27)$$

En vertu du théorème 1.1.5, les conditions de la définition 1.1.5, s'appliquent non seulement aux suites de distributions de Poisson composées, mais aussi à des suites plus générales de la forme  $\{\varphi_n^n\}$ .

Nous pouvons résumer tout cela, par le théorème suivant, qui est le plus souvent cité dans différents travaux de recherche sous le nom du théorème de Lévy-Khintchine (la différence est dans la fonction de centrage seulement) comme dans (D'Estampes, 2003, p. 8):

**Théorème 1.1.6 :** Si  $X$  à une distribution indéfiniment divisible, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\psi(\xi) = ib\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dM(x)$$

Où  $b$  est un réel et  $M$  est une mesure qui attribue une masse finie à tout intervalle fini et telle que les deux intégrales suivantes

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} dM(y), \quad M^-(-x) = \int_{-\infty}^{-x} y^{-2} dM(y)$$

Sont convergentes pour tout  $x > 0$ .

**Autres représentations canoniques** (Feller, 1971, p. 564-565):

La mesure  $M$  n'est pas celle que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature, on va voir maintenant les deux représentations les plus utilisées.

- Dans son travail pionnier **P. Lévy** a utilisé la mesure  $\Lambda$  définie à côté de l'origine par :

$$d\Lambda(x) = x^{-2}dM(x) \quad (1.1.28)$$

Elle représente la limite de  $ndF_n(x)$ . Elle est finie sur les intervalles  $|x| > \delta > 0$  mais non bornée près de l'origine. Elle ne tient pas compte de l'atome de  $M$  à l'origine, s'il y en a un.  $\Lambda$  est souvent appelée dans la littérature *mesure spectrale des distributions infiniment divisible*, ou *mesure de Lévy*. En termes de cette mesure (1.1.16) prend la forme suivante :

$$\psi(\xi) = ib\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\delta} [e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x]d\Lambda(x) \quad (1.1.29)$$

C'est la **représentation canonique originale de P. Lévy** (à l'exception d'un choix différent de la fonction de centrage, qui est  $\sin x$  dans la formule (1.29)). Son principal inconvénient est que la description complète de toutes les propriétés requises de la mesure  $\Lambda$  soit complexe (Feller, 1971, p. 564-565). En changeant la fonction de centrage, on a une autre **représentation canonique de P. Lévy** (Lévy, 1938, p. 27) :

$$\psi(\xi) = ib\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\delta} \left[ e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2} \right] d\Lambda(x) \quad (1.1.30)$$

$\Lambda(x)$  est non décroissant dans chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ ; cette fonction doit naturellement être telle que l'expression écrite ait un sens pour toutes les valeurs réelles de  $\xi$  ce qui revient à dire que la fonction :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \Lambda\{dx\} = \int g(x)d\Lambda(x) \quad (1.1.31)$$

Doit être à variation bornée de  $-\infty$  à  $+\infty$  (Lévy, 1938, p. 27).

- **M. Khintchine** a introduit la mesure bornée  $K$  (Feller, 1971, p. 564-565), qui doit être bornée et peut être choisie arbitrairement, elle définit par :

$$K\{dx\} = \frac{1}{1+x^2} dM(x) \quad (1.1.32)$$

Qui donne **représentation canonique de Khintchine** sous la forme :

$$\psi(\xi) = ib\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2} \right] \frac{1+x^2}{x^2} dK \quad (1.1.33)$$

Plus précisément, Khintchine avait observé que l'introduction de la fonction  $g(x)$  définie par intégrale (1.1.31) de  $-\infty$  à zéro, et de zéro à  $+\infty$ , mais qui augmente brusquement de  $\lambda$  quand  $x$  franchit la valeur zéro (Lévy, 1938, p. 28). Ce qui lui permet de récrire plus simplement (1.1.30) sous la forme (1.1.33). À partir de là, nous avons la représentation qui est le plus souvent utilisées et citées dans la littérature, sous le nom de la **représentation canonique de Lévy–Khintchine**.

$$\psi(\xi) = ib\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int \left( e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dK(x) \quad (1.1.34)$$

Où  $d\Lambda(x) = \frac{1+x^2}{x^2} dK(x)$ , avec  $K$  une fonction non décroissante à variation bornée.

Toutes les formules de  $\psi(\xi)$  que nous avons présentées sont des généralisations de la formule de Kolmogorov, trouvée par lui-même dès 1932 (Kolmogorov, 1932) pour des lois infiniment divisibles de variance finie et dont la forme est la suivante

$$\psi(\xi) = ib\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\xi x} - 1 - i\xi x] \frac{1}{x^2} dN(x)$$

Où  $N$  est une fonction non décroissante de variation bornée, avec  $N(-\infty) = 0$ .

Pour les lecteurs intéressés, la démonstration détaillée que  $\psi(\xi)$  définie (1.1.33) est bien la représentation du logarithme de la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible et que cette représentation est unique se référer à (Gnedenko & Kolmogorov, 1954, p. 76-80).

**Remarque 1.1.3.** Comme, on peut le constater, on préfère généralement considérer l'exposant caractéristique  $\psi(\xi)$  d'une loi indéfiniment divisible, plutôt que sa fonction caractéristique. L'exposant  $\psi(\xi)$  est encore appelé symbole de Lévy dans la littérature.

Parfois c'est  $\Psi(\xi) = -\psi(\xi)$  qui est désigné comme l'exposant caractéristique de Lévy,  $\Psi(\xi)$  est aussi parfois appelé exposant de Laplace.

### 1.1.3. Distribution infiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$

Jusqu'à présent, nous avons présenté les différentes représentations des fonctions caractéristiques des distributions infiniment divisibles dans  $\mathbb{R}$ , et comme nous l'avons cité plus haut, la présentation de Lévy est la plus générale, elle a été simplifiée et démontré par Khintchine, puis élargie dans  $\mathbb{R}^d$ , ce qui a donné lieu à la formule de Lévy-Khintchine, qui permet de caractériser l'ensemble des lois indéfiniment divisibles via leur exposant caractéristique, comme on peut le voir ci-après

Dans ce cas l'exposant caractéristique  $\psi$  d'une loi indéfiniment divisible est l'unique fonction continue  $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que :

$$\psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(\xi) = \exp\{\psi(\xi)\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad (1.1.35)$$

On retrouve aussi dans la littérature  $\Psi(\xi) = -\psi(\xi)$ , qui est connu sous le nom *d'exposant de Lévy-Khintchine*.

**Théorème 1.1.6.**(Sato, 1999, p. 37)

Une fonction  $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  est l'exposant caractéristique d'une mesure de probabilité infiniment divisible (ou d'une distribution infiniment divisible  $\omega$ ) sur  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si il existe  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $A$  une matrice symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\Lambda$  une mesure sur  $\mathbb{R}^d$  appelée mesure caractéristique de Lévy, vérifiant  $\Lambda\{\{0\}\} = 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x|^2) d\Lambda(x) < \infty$ , tels que :

$$\psi(\xi) = i\langle b, \xi \rangle - \frac{1}{2}i\langle \xi, A\xi \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}) d\Lambda(x) \quad (1.1.36)$$

Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Où  $A$  est la matrice de covariance gaussienne (où la composante gaussienne de la mesure associée). Lorsque  $A = 0$ ,  $\omega$  est dit purement non gaussien.

Le triplet des paramètres  $(b, A, \Lambda)$  sont liés entre eux par le choix de l'intégrant à savoir  $e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ . La fonction type la plus utilisé par les auteurs est  $e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle l(x)$ , où  $l(x)$  est une fonction bornée et équivalente à 1 (tend vers 1) au voisinage de 0. Dans ce cas les paramètres  $A$  et  $\Lambda$  restent inchangés et seul  $b$  dépend de  $l(x)$ .

**Remarque 1.1.3.** Le triplet des paramètres  $(b, A, \Lambda)$  sont liés entre eux par le choix de L'intégrant de l'intégrale du membre droit de l'équation (1.1.36) l'intégrant à savoir  $(e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})$  qui est intégrable par rapport à  $\Lambda$ , car il est borné en dehors du voisinage de 0 et  $e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x|<1\}} = O(|x|^2)$ , quand  $|x| \rightarrow 0$  pour  $\xi$  fixé. Il existe de nombreuses autres façons d'obtenir un intégrant intégrable.

La fonction type la plus utilisé par les auteurs est  $e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle l(x)$ , où  $l(x)$  est une fonction bornée et équivalente à 1 (tend vers 1) au voisinage de 0. Dans ce cas les paramètres  $A$  et  $\Lambda$  restent inchangés et seulement  $b$  dépend de  $l(x)$ .

Plus précisément (Sato, 1999, p. 38), si  $l(x)$  est une fonction mesurable bornée de  $\mathbb{R}^d$  à  $\mathbb{R}$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} l(x) &= 1 + o(|x|) && \text{quand } |x| \rightarrow 0, \\ l(x) &= O(1/|x|) && \text{quand } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Alors la représentation de *Lévy-Khintchine* (1.1.36), peut être reformulée comme suit :

$$\psi(\xi) = i\langle b', \xi \rangle - \frac{1}{2}i\langle \xi, A\xi \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle l(x)] d\Lambda(x) \quad (1.1.37)$$

Où  $b \in \mathbb{R}^d$ , et il est défini par la formule suivante :

$$b' = b + \int_{\mathbb{R}^d} x(l(x) - \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})d\Lambda(x)$$

Pour plus de détails sur les différentes fonctions  $l(x)$ , ainsi que les différentes manières d'exprimer la formule de Lévy Khintchine comme par exemple dans le cas stable que nous verrons dans la section (1.2), Nous renvoyons les lecteurs à (Sato, 1999).

**Exemples (Cas particuliers) :**

a) Pour  $d = 1$  (i.e. pour  $\xi \in \mathbb{R}$ ), la formule (1.1.33), devient :

$$\psi(\xi) = ib\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\xi x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})d\Lambda(x) \quad (1.1.38)$$

La formule (1.1.34), devient :

$$\psi(\xi) = ib'\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\xi x l(x))d\Lambda(x) \quad (1.1.39)$$

Pour  $l(x) = \frac{\sin x}{x}$  on retrouve la représentation de Lévy donnée précédemment par la formule (1.1.28), et on a bien  $l(x)$  une fonction bornée et qui tend vers 1 au voisinage de 0.

b) Il arrive aussi que l'on choisisse pour intégrant une fonction du type  $|x|^{-2} (e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi,x\rangle l(x))$ , où  $l(x)$  est comme ci-dessus. Cette fonction est équivalente à  $-\frac{1}{2}t^2$  au voisinage de 0 et si l'on remplace  $\Lambda\{dx\}$  par la mesure  $dM(x)$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $M\{0\} = \langle 1, A1 \rangle$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\{|x|<1\}} |x|^{-2} dM(x) < \infty$ , alors la matrice  $A$  se trouve 'absorbée' dans l'intégrale et la formule (1.1.33) devient :

$$\psi(\xi) = i\langle b', \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 [e^{i\langle\xi,x\rangle} - 1 - i\langle\xi,x\rangle l(x)]dM(x) \quad (1.1.40)$$

Si on remplace  $M\{dx\}$  par  $K\{dx\} = (1 + x^2)^{-1}dM(x)$ , on retrouve la représentation de Khintchine dans le cas unidimensionnel  $d = 1$  donnée par la formule (1.1.30), avec  $l(x) = 1/1 + x^2$ .

**1.2. Caractéristiques des lois Stables Univariées**

Dans cette section, nous concentrons notre attention sur la classe des variables aléatoires  $\alpha$ -stables. Cette section repose essentiellement sur les livres : (Lévy, 1954), (Feller, 1971), (Zolotarev, 1986), (Samorodnitsky & Taquq, 1994), (Janicki & Weron, 1994), (Uchaikin & Zolotarev, 1999) et (Čížek et al., 2005).

### 1.2.1. Définitions et concepts

On peut définir La famille des distributions stables univariées, que nous allons noter  $\mathfrak{S}$  de plusieurs manières équivalentes, comme on va le voir ci-après. Tout au long de cette sous-section :  $X_1, X_2, \dots$  désignent des variables aléatoires mutuellement indépendantes avec une distribution commune  $R$  et on pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**Définition 1.2.1.** (Feller, 1971) La distribution  $R$  est stable (au sens large) si pour tout  $n$ , il existe des constantes  $c_n$  et  $\kappa_n$  tel que

$$S_n \stackrel{d}{=} c_n X + \kappa_n \quad (1.2.1)$$

Où  $c_n$  est une constante de normalisation et  $\kappa_n$  la constante de centrage.  $R$  est non concentrée en un point.

On dit que  $R$  est stable au sens strict si (3.1) est vraie pour  $\kappa_n = 0$ .

**Remarque 1.2.1.** Dans la littérature récente et la plus courante, on retrouve surtout les termes « stable » et « strictement stable », mais dans la littérature plus ancienne par ex. Lévy (1954) et Feller (1966), on retrouve respectivement « *quasi-stable* » et « stable ». Feller (1971) utilise respectivement « *stable au sens large* » et « *stable au sens strict* ».

La famille des distributions strictement stable que nous allons noter  $\mathfrak{B}$  est donc une sous famille de la famille des lois stable  $\mathfrak{S}$ .

**Théorème 1.2.1.**(Feller, 1971, p. 170) : Les constantes de normalisation sont de la forme  $c_n = n^{1/\alpha}$  avec  $0 < \alpha \leq 2$ . La constante  $\alpha$  sera appelé *l'exposant caractéristique de  $R$* .

Pour la démonstration détaillée, voir (Feller, 1971, p. 170), où il conclut que la théorie des distributions stables se simplifie grandement par le fait **que les constantes de centrage  $\kappa_n$  peuvent être négligées dans la pratique**. Il en est ainsi parce que nous sommes libres de centrer la distribution  $R$  de manière arbitraire, c'est-à-dire que nous pouvons remplacer  $R(x)$  par  $R(x + b)$ . Feller a montré qu'à l'exception du cas  $\alpha = 1$ , nous pouvons utiliser cette propriété librement pour éliminer  $\kappa_n$  de (1.2.1), voir théorème 2(Feller, 1971, p. 171).

**Théorème 1.2.2.**  $R$  est strictement stable (appartient à  $\mathfrak{B}$ ) avec un exposant  $\alpha$  si et seulement si pour tout  $s > 0$  et  $t > 0$ , on a :

$$s^{1/\alpha} X_2 + t^{1/\alpha} X_2 \stackrel{d}{=} (s + t)^{1/\alpha} X \quad (1.2.2)$$

La démonstration détaillé est dans (Feller, 1971, p. 171-172)

**Exemples** (Feller, 1971, p. 173-174) :

- a) La distribution normale centrée réduite est strictement stable avec  $c_n = \sqrt{n}$ .
- b) La distribution de Cauchy avec des paramètres de localisation arbitraires avec une densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + (x + \kappa)^2}$$

Est stable avec  $\alpha = 1$ .

c) **Le champ gravitationnel des étoiles (distribution de Holtsmark)** : En termes astronomiques, le problème est de calculer la composante  $x$  de la force gravitationnelle exercée par le système stellaire en un point choisi au hasard  $O$ . L'idée sous-jacente est que le système stellaire apparaît comme un « agrégat aléatoire » de points avec des « masses variant aléatoirement ».

Considérons la densité du système stellaire comme un paramètre libre et soit  $X_\lambda$  la représentation de la composante de la force gravitationnelle  $x$  d'un système stellaire de densité  $\lambda$ . Nous recherchons les types concevables de telles distributions. Maintenant, la notion intuitive d'un « agrégat aléatoire d'étoiles » présuppose que deux agrégats indépendants de densités  $s$  et  $t$  peuvent être combiné en un seul agrégat de densité  $s + t$ . Ceci revient probablement au principe que la somme de deux variables indépendantes  $X_t$ , et  $X_s$  devrait avoir la même distribution que  $X_{t+s}$ . On peut noter cela symboliquement comme suit :

$$X_t + X_s \stackrel{d}{=} X_{t+s} \quad (1.2.3)$$

Considérant qu'un changement de densité de 1 à  $\lambda$  équivaut à un changement de l'unité de longueur allant de 1 à  $1/\sqrt[3]{\lambda}$  et que la force gravitationnelle varie inversement avec le carré de la distance on voit que  $X_t$  doit avoir la même distribution que  $t^{2/3}X_1$ . Cela signifie que la distribution de  $X_t$  ne diffèrent que par un paramètre d'échelle et (1.2.3) se réduit à (1.2.2) avec  $\alpha = 3/2$ . Autrement dit,  $X_\lambda$  a une distribution stable symétrique avec une exposant égal à  $3/2$ . Il s'avère qu'il existe exactement une telle distribution. L'astronome *Holtsmark* a obtenu une réponse équivalente par d'autres méthodes et **remarquablement, avant les travaux de P. Lévy.**

### Définitions équivalentes des distributions $\alpha$ -stables

La définition 1.3.1 est équivalente à la définition du domaine d'attraction d'une variable aléatoire stable donnée par (Janicki & Weron, 1994, p. 23), qui résume en réalité toutes les définitions données par Feller (1971), nous verrons cela plus en détails dans la sous-section (1.2.2) domaine d'attraction et fonction caractéristiques

**Définition 1.2.2. Domaine d'attraction** (Janicki & Weron, 1994, p. 23): une variable aléatoire  $X$  a une distribution stable si et seulement si elle a un domaine d'attraction, i.e., si il existe une suite de variables aléatoire i.i.d  $X_1, X_2, \dots$  et des suites  $\{c_n\}$  et  $\{d_n\}$  de nombres réels positifs tels que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{c_n} + d_n \stackrel{d}{\rightarrow} X$$

Où  $\stackrel{d}{\rightarrow}$  signifie convergence en distribution. Selon Feller (1971),  $c_n = n^{1/\alpha}h(x)$ , avec la fonction  $h = h(x)$  varie lentement à l'infini pour  $x \geq 0$  (ou fonction a variation lente). On dit que la suite de variable  $\{X_n\}$  appartient au domaine d'attraction normale de  $X$  quand  $c_n = n^{1/\alpha}$ .

Si  $\{X_n\}$  est une suite de variable i.i.d avec une variance finie, Alors la variable  $X$  est Gaussienne, et on obtient la version ordinaire du théorème central limite.

**Définition 1.2.3. (stabilité de distribution** (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 2) ) On dit qu'une variable aléatoire  $X$  a une distribution stable, si pour tout nombre positif  $a$  et  $b$ , il existe un nombre positif  $c$  et un nombre réel  $\kappa$ , tel que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + \kappa \quad (1.2.4)$$

Où,  $X_1$  et  $X_2$  sont des copies indépendantes de  $X$ .

Si la variable aléatoire  $X$  est stable, Le nombre  $c$  vérifie  $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ , pour un nombre  $\alpha \in ]0,2]$ , théorème 1.1.2 (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 3). On rappelle, que si  $\kappa = 0$ , on dit que  $X$  est strictement stable et dans ce cas la condition (1.2.4) devient (1.2.2).

**Exemple :** Si  $X$  est une variable aléatoire gaussienne avec *moyenne*  $m$  et écart  $\sigma^2$

( $X \sim N(m, \sigma^2)$ ), alors  $X$  est stable avec  $\alpha = 2$  parce que

$$aX_1 + bX_2 \sim N((a+b)m, (a^2 + b^2)\sigma^2)$$

i.e. (1.2.4) est valable avec  $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$  et  $\kappa = (a + b - c)m$

### 1.2.2. Domaine d'attraction et fonction caractéristique

Les définitions données dans la première sous-section (1.2.1) sont essentiellement basées sur la notion de stabilité seulement et ne donne aucune information sur la représentation ou la paramétrisation des distributions  $\alpha$ -stables. La manière la plus courante et la plus pratique de décrire une variable aléatoire stable est de définir sa fonction caractéristique, comme on va le voir dans cette sous-section.

Soit  $\{X_k\}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de distribution commune  $F$  et posons  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , et soit  $U$  une distribution non concentrée en un point.

**Définition 1.2.4.** La distribution  $F$  (Fonction de répartition) des variables aléatoires indépendantes  $(X_k)_{k=1,\dots,n}$  appartient au domaine d'attraction d'une distribution  $U$  si il existe des constantes de normalisation  $a_n > 0$  et  $b_n$ , de telle sorte que la fonction de répartition de  $a_n^{-1}(S_n - b_n)$  tend vers  $U$ . Cette dernière affirmation peut maintenant être reformulée de la manière suivante :

*Une distribution  $R$  possède un domaine d'attraction si et seulement si elle est stable.*

L'exclusion des distributions limites concentrées en un seul point sert à éliminer la situation triviale quand  $b_n \rightarrow b$ , alors que  $a_n$  augmente si rapidement que  $a_n^{-1}S_n$  tend en probabilité vers zéro.

En effet, selon la définition même, chaque distribution stable  $U$  appartient à son propre domaine d'attraction. Qu'aucune autre distribution n'apparaisse comme limite devient plausible par l'argument utilisé dans le théorème 1.2.1.

Le but de cette partie est de reformuler la définition 1.2.4 en termes de fonctions caractéristiques  $\varphi$  et  $\omega$  des distributions  $F$  et  $U$ . L'expression de la fonction caractéristique pour les distributions stables est déduite de la fonction caractéristique d'une loi infiniment divisible.

On commence par rappeler que la distribution  $U$  est dite concentrée en un point si et seulement si  $|\omega(\xi)| = 1$  pour tout  $\xi$  (d'après le lemme 4 chapitre XV, 1 de (Feller, 1971, p. 501)).

Par conséquent  $\varphi$  appartient au domaine d'attraction de la fonction caractéristique  $\omega$  si  $|\omega|$  n'est pas identiquement un, et il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n$  tel que

$$(\varphi(\xi/a_n)e^{-ib_n\xi})^n \rightarrow \omega(\xi) \quad (1.2.5)$$

Nous avons vu dans section (1.1) que la limite  $\omega$  est nécessairement stable. Nous n'allons pas développer à nouveau toute la théorie de base de la section (1.2), nous allons seulement donner quelques élément introductif qui vont nous permettre de comprendre comment la fonction caractéristiques des distributions stables découle de la théorie des distribution infiniment divisible, et nous renvoyons à (Feller, 1971) pour des démonstration plus détaillées.

Posons :

$$\varphi_n(\xi) = \varphi(\xi/a_n)e^{-ib_n\xi}, \quad F_n(x) = F(a_n(x + b_n)) \quad (1.2.6)$$

D'après le théorème 1.2.1 de la section (1.2), la relation (1.3.5) est valable si et seulement si

$$n[\varphi_n(\xi) - 1] \rightarrow \psi(\xi), \quad \text{Pour tout } \xi \quad (1.2.7)$$

Où  $\omega = e^\psi$ .

Nous savons à partir du théorème 1.1.1 de la section (1.1) que (1.2.7) implique l'existence d'une mesure canonique  $M$ . En utilisant le théorème central limite, les notions introduite dans la section (1.2), ainsi que la notion de fonction à variation régulière, Feller a développé en détail la démarche à suivre pour trouver la représentation de cette mesure canonique dans les cas des distributions stable, en commençant d'abord par le cas des distribution symétrique puis les distribution stable en générale, pour finalement donner l'expression de la fonction, caractéristique des distribution stable (Feller, 1971, p. 574-580).

### Mesure canonique

Nous allons, tout d'abord présenter la forme de mesure canonique dans le cas symétrique, pour la généraliser après au cas des distributions asymétrique.

#### a) Distribution symétrique

On considère, une distribution  $F$  symétrique, dans ce cas  $b_n = 0$ . On rappelle que (1.2.7) est vraie si et seulement si : il existe une mesure canonique  $M$ . tel que

$$nx^2 F_n\{dx\} \rightarrow M\{x\}$$

(Voir démonstration du théorème 1.1.1 de la section (1.1)).

Soit  $\mu$  la fonction de moment tronqué, définit par :

$$\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF_n(x) \quad (1.2.8)$$

Alors en tous points de continuité, nous avons :

$$\frac{n}{a_n^2} \mu(a_n x) \rightarrow M\{-x, x\} \quad (1.2.9)$$

et 
$$n[1 - F(a_n x)] \rightarrow M^+(x) \quad (1.2.10)$$

Où 
$$M^+\{x\} = \int_x^\infty y^{-2} dM(x) \quad (1.2.11)$$

On rappelle, que (1.2.11) et la même que (1.1.17) de la section (1.1), où nous avons montré qu'une fonction caractéristique  $e^\psi$  est infiniment divisible, avec un exposant  $\psi$  de la forme (1.1.16), avec la condition que  $M$  soit une mesure qui attribue une masse finie à tout intervalle fini et telle que les intégrales dans (1.1.17) converges pour tout  $x > 0$ .

Avons d'aller plus loin, Nous rappelons un résultat fondamental concernant **les fonction à variation régulière** (Feller, 1971, p. 276-277). Une fonction  $L$  varie *lentement* à l'infini si pour tout  $x > 0$  fixe, on a :

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty \quad (1.2.12)$$

Dans ce cas, nous avons pour un nombre arbitraire  $\delta > 0$  et pour tout  $x$  suffisamment grand

$$x^{-\delta} < L(x) < x^\delta \quad (1.2.13)$$

**Lemme 1.2.1.** (Feller, 1971, p. 277) Supposons, que nous avons  $u_{n+1}/u_n$  tend vers 1 et  $k_n$  tend vers  $\infty$ , alors s'il existe une fonction monotone  $G$ , telle que :

$$\lim u_n G(k_n x) = \chi(x) \leq \infty$$

Existe sur un ensemble consistant, et est finie et positive sur un certain intervalle, alors  $G$  est à **variation régulière**, et s'écrit de la forme suivante :

$$G(x) = x^\rho L(x)$$

Où  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $L(x)$  une fonction à variation lente.

Revenons, à notre équation (1.2.9). On a, la relation  $\varphi(\xi/a_n) \rightarrow 1$ , qui implique que  $a_n \rightarrow \infty$ , et donc  $S_n/a_n$  et  $S_n/a_{n+1}$  ont la même distribution limite  $U$ . Il s'ensuit que le rapport  $a_n/a_{n+1}$  tend vers 1. De ce fait, on peut appliquer le lemme 1.2.1 à (1.2.9) avec  $k_n = a_n$  et  $u_n = n/a_n^2$ . Nous pouvons donc conclure que  $\mu$  varie *régulièrement* et de ce fait, elle est de la forme  $\mu(x) = x^\rho L(x)$  et que la mesure canonique  $M$  est de la forme :

$$M\{-x, x\} = Cx^{2-\alpha}, \quad x > 0 \quad (1.2.14)$$

Avec  $\alpha \leq 2$  (L'exposant est noté  $2 - \alpha$  conformément à un usage introduit par P. Lévy.) Si  $\alpha = 2$  la mesure  $M$  est concentrée à l'origine. La convergence de l'intégrale dans (1.2.11) nécessite que  $\alpha > 0$ ;

Pour  $0 < \alpha < 2$  on trouve

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} dM(x) = C \frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha}, \quad x > 0 \quad (1.2.15)$$

### b) Cas général des distributions stables

Dans le cas de distributions asymétriques  $F$ , un argument similaire est appliqué, mais au lieu de (1.2.10) on obtient des relations moins attractives, comme suit :

$$n[1 - F(a_n(x + b_n))] \rightarrow M^+(x), \quad nF(a_n(-x + b_n)) \rightarrow M^-(-x)$$

Et une modification analogue s'applique à (1.2.14). Cependant, le fait que  $\varphi(\xi/a_n) \rightarrow 1$  et  $a_n \rightarrow \infty$ , implique que  $b_n \rightarrow \infty$ , et donc la relations  $n[1 - F(a_n(x + b_n))] \rightarrow M^+(x)$  est en fait entièrement équivalente à (1.2.15) et on a la relation analogue pour la queue gauche. Lorsque  $\alpha < 2$  la mesure canonique  $M$  est uniquement déterminé par ses densités sur les deux demi-axes et celles-ci sont proportionnelles à  $|x|^{1-\alpha}$ . Pour les intervalles  $(-y, x)$  contenant l'origine nous avons donc :

$$M\{(-y, x)\} = C(qy^{2-\alpha} + px^{2-\alpha})$$

Autrement dit :

$$M(x) = \begin{cases} Cq(-x)^{2-\alpha} & \text{si } x < 0 \\ Cpx^{2-\alpha} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} Cq|x|^{2-\alpha} & \text{si } x < 0 \\ Cpx^{2-\alpha} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

Où  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $C > 0$  et  $p + q = 1$ .

Conformément à (1.2.16), cela équivaut à

$$M^+(x) = Cp \frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha}, \quad M^-(-x) = Cq \frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha}$$

### Fonction caractéristique (Feller, 1971, p. 568-569)

Avant de présenter le théorème qui donne la forme générale d'une fonction caractéristique  $\alpha$ -stable, nous allons d'abord donner un exemple qui est d'une grande importance car la forme générale des fonctions caractéristiques stables en découle directement. Nous allons procéder au calcul de la fonction caractéristique  $e^\psi$  pour une mesure  $M$  concentrées sur  $(0, +\infty)$ . (one sided stable densities)

Nous allons calculer  $\psi(\xi)$  à partir de la forme canonique des distributions infiniment divisibles (1.1.16), que nous avons définies dans section (1.1), avec une mesure qui vérifie (1.2.16). On a alors  $M$  de la forme :

$$M\{(0, x)\} = cx^{2-\alpha}, \quad x > 0 \text{ et } c > 0 \quad (1.2.17)$$

Pour  $\xi > 0$ , on obtient donc la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 + l(x)}{x^2} dM(x) = \int_0^{+\infty} (e^{i\xi x} - 1 + l(x)) x^{-2} dM(x) \\ &= c(2 - \alpha) \int_0^{+\infty} (e^{i\xi x} - 1 + l(x)) \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx\end{aligned}\tag{1.2.18}$$

Où  $l(x)$  représente la fonction de centrage, qui peut être choisi différemment selon la situation (voir remarque 1.1.3, on rappelle aussi que  $x^{-2}dM(x) = d\Lambda(x)$ , qui est la mesure de Lévy). Nous allons maintenant

*i.* Si  $0 < \alpha < 1$  on considère la fonction caractéristique  $\omega = e^{\psi_\alpha}$  avec

$$\psi(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1}{x^2} dM(x) = c(2 - \alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1}{x^{\alpha+1}} dx\tag{1.2.19}$$

Elle diffère de la forme canonique (1.1.16) de la section (1.1) par l'omission du terme de centrage, qui n'est pas indispensable dans ce cas, puisque l'intégrale converge sans lui.

Pour calculer l'intégrale, on suppose que  $\xi > 0$ , et on considère l'intégrale (1.2.16) comme la limite quand  $\lambda \rightarrow 0_+$  de l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1}{x^{\alpha+1}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\lambda - i\xi)x} - 1}{x^{\alpha+1}} dx$$

Par intégration par partie, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\lambda - i\xi)x} - 1}{x^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{\alpha}(\lambda - i\xi) \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - i\xi)x} x^{-\alpha} dx$$

Maintenant, nous allons utiliser la fonction Gamma, définie par  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy$

Il suffit maintenant d'effectuer le changement de variable suivant  $y = (\lambda - i\xi)x$ , et donc  $dy = (\lambda - i\xi)dx$ . Notre intégrale devient :

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{\alpha}(\lambda - i\xi) \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - i\xi)x} x^{-\alpha} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}(\lambda - i\xi) \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - i\xi)x} (\lambda - i\xi)^\alpha ((\lambda - i\xi)x)^{-\alpha} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}(\lambda - i\xi)^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{(1-\alpha)-1} dy \\ &= -\frac{1}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha) (\lambda - i\xi)^\alpha\end{aligned}$$

Soit  $\theta$  l'argument de  $\lambda - i\xi$  (i. e.  $\lambda - i\xi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ ), Évidemment  $\theta \rightarrow -\pi/2$ , car  $\lambda \rightarrow 0_+$  et  $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}$ , de ce fait on a :

$$(\lambda - i\xi)^\alpha = (\lambda^2 + \xi^2)^{\alpha/2} e^{i\theta\alpha}$$

Et obtient :

$$(\lambda - i\xi)^\alpha \rightarrow \xi^\alpha e^{-i\pi\alpha/2} \Rightarrow I = -\frac{1}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha) \xi^\alpha e^{-i\pi\alpha/2}$$

Avec la propriété  $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ , on  $(2 - \alpha)(2 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(3 - \alpha)$ . Cela donne le résultat final suivant :

$$\psi_\alpha(\xi) = -\xi^\alpha c(2 - \alpha) \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} = \xi^\alpha c \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} e^{-i\pi\alpha/2} \quad (1.2.20)$$

Afin de pouvoir comparer cette représentation (1.2.20) donnée par Feller à d'autre forme de fonction caractéristique de distribution stable symétrique, on peut la réécrire autrement pour se rapprocher des représentations couramment inutilisées dans la littérature.

On a :

$$e^{-i\pi\alpha/2} = e^{i(\theta\alpha)} = 1 \left( \cos \frac{-\pi\alpha}{2} + i \sin \frac{-\pi\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\pi\alpha}{2} - i \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

On obtient donc :

$$\psi_\alpha(\xi) = \xi^\alpha c \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} \left( \cos \frac{\pi\alpha}{2} - i \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (1.2.21)$$

En utilisant la propriété  $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$  et en prenant le cos en facteur, on peut avoir (1.2.20) sous la forme :

$$\psi_\alpha(\xi) = \xi^\alpha c(2 - \alpha) \Gamma(-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right)$$

On a aussi

$$\cos \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{e^{i\pi\alpha/2} + e^{-i\pi\alpha/2}}{2} = \frac{e^{i\pi\alpha/2} + e^{-i\pi\alpha/2}}{2} \left( \frac{e^{i\pi\alpha/2} - e^{-i\pi\alpha/2}}{e^{i\pi\alpha/2} - e^{-i\pi\alpha/2}} \right) = \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2(e^{i\pi\alpha/2} - e^{-i\pi\alpha/2})}$$

$$\cos \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha/2)} = \frac{1}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}$$

$$\psi_\alpha(\xi) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{c(2 - \alpha) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)} \xi^\alpha \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right)$$

On obtient donc :

$$\psi_\alpha(\xi) = - \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{c(2 - \alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \xi^\alpha \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (1.2.22)$$

Pour  $\xi < 0$ , on obtient  $\psi_\alpha(\xi)$  comme le conjugué de  $\psi_\alpha(-\xi)$  (avec la relation  $\psi_\alpha(\xi) = \overline{\psi_\alpha(-\xi)}$ ).

ii. Quand  $1 < \alpha < 2$  on pose

$$\psi(\xi) = C \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi x}{x^{\alpha+1}} dx \quad (1.2.23)$$

Où cette fois, aussi  $\psi$  diffère de la forme canonique (1.1.16) par le centrage car c'est plus commode dans ce cas de considérer un centrage d'espérance nulle. Une intégration par parties réduit l'exposant au dénominateur et nous permet d'utiliser le résultat précédent. Un calcul de routine montre que  $\psi_\alpha$  est à nouveau donné par (1.2.20). (La partie réelle est à nouveau négative, car maintenant  $\cos \pi/2 < 0$ )

iii. Lorsque  $\alpha = 1$ . C'est la forme standard qui est utilisée (i.e.  $l(x) = \sin x$ ):

On a  $M(x) = cx$  et  $dM(x) = cdx$

$$\psi(\xi) = C \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi \sin x}{x^2} dx$$

Ce qui donne :

$$\psi_1(\xi) = \xi C \left( -\frac{1}{2}\pi - i \ln \xi \right) \quad (1.2.24)$$

En résumé, pour  $\xi > 0$ , on obtient :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \xi^\alpha c \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} e^{-i\pi\alpha/2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \xi c \left( -\frac{1}{2}\pi - i \ln \xi \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} -c \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{(2-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \xi^\alpha \left( 1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -c \frac{\pi}{2} \xi \left( 1 + i \frac{2}{\pi} \ln \xi \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Pour  $\xi < 0$ , on obtient  $\psi(\xi)$  comme le conjugué de  $\psi(-\xi)$  (avec la relation  $\psi(\xi) = \overline{\psi(-\xi)}$ ).

Lorsque  $\alpha \neq 1$  la fonction caractéristique  $\omega = e^{\psi_\alpha}$  jouit de la propriété que  $\omega^n = \omega(n^{1/\alpha}\xi)$ . Cela signifie que  $\omega$  est strictement stable. La somme des variables indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  de fonction caractéristique  $\omega$  a la même distribution que  $n^{1/\alpha}X_1$ . Lorsque  $\alpha = 1$ , nous avons  $\omega^n(\xi) = \omega(n\xi)e^{-i\xi \log n}$ , et donc la distribution de la somme diffère de celle de  $n^{1/\alpha}X_1$  par son centrage. Ainsi  $\psi_1$  est *stable au sens large*.

Dans le cas général des distributions stable (bilatérale), le calcul de  $\psi(\xi)$  se fait aussi à partir de la forme canonique des distributions infiniment divisibles (1.1.16) ou (1.1.22), avec une mesure qui vérifie (1.2.16). La forme canonique de  $\psi$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= ib\xi + \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} - 1 + l(x)}{x^2} dM(x) \\ &= ib\xi + Cp(2 - \alpha) \int_0^{+\infty} (e^{i\xi x} - 1 + l(x)) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + Cq(2 - \alpha) \int_{-\infty}^0 (e^{i\xi x} - 1 + l(x)) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}\end{aligned}\quad (1.2.26)$$

**Théorème 1.2.3.**(Feller, 1971, p. 576) Une distribution  $F$  possède un domaine d'attraction si et seulement si elle est stable.

(i) La classe des distributions stables coïncident avec la classe des distributions infiniment divisibles avec des mesures canoniques données par

$$M\{-y, x\} = C(qy^{2-\alpha} + px^{2-\alpha}) \quad (1.2.27)$$

Où  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $C > 0$  et  $p + q = 1$ .

(ii) Les fonctions caractéristiques correspondantes sont de la forme  $\omega(\xi) = e^{\psi(\xi)}$  avec  $0 < \alpha \leq 2$  et  $\psi$  définie par :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} ib\xi + |\xi|^\alpha C \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} \left( \cos \frac{\pi\alpha}{2} \pm i(p - q) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ ib\xi - |\xi| C \left( \frac{\pi}{2} \pm i(p - q) \ln|\xi| \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.28)$$

(iii) Quand  $x \rightarrow \infty$ , la queue de la distribution correspondante à  $U$  satisfait

$$x^\alpha [1 - F(x)] = Cp \frac{2 - \alpha}{\alpha}, \quad x^\alpha F(-x) = Cq \frac{2 - \alpha}{\alpha} \quad (1.2.29)$$

Notons que pour  $\alpha = 2$  on obtient  $\psi(\xi) = -\frac{1}{2}(p + q)\xi^2$ , c'est-à-dire la distribution normale. Elle correspond à une mesure  $M$  concentrée à l'origine.

**Remarque. 1.2.2.** Dans la formule (1.2.28), on peut remplacer  $(\pm)$ , par la fonction  $\xi/|\xi|$ , ou bien la fonction *sign* (qui attribue le signe supérieur lorsque  $\xi > 0$  et le signe inférieur pour  $\xi < 0$ ) comme il est couramment utilisé dans la littérature. Et (1.2.28) peut être réécrite de la forme :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} ib\xi + |\xi|^\alpha C \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} \left( \cos \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\xi}{|\xi|} i(p - q) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ ib\xi - |\xi| C \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{|\xi|} \ln|\xi| \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.30)$$

Car, pour  $\alpha = 1$ , le signe supérieur s'applique lorsque  $\xi > 0$ , le signe inférieur pour  $\xi < 0$  et inversement pour  $\alpha \neq 1$ . Et on retrouve bien formules (1.2.21) et (1.2.25) avec  $p - q = 1$  (qui représente distribution stable totalement asymétrique à droite).

Nous allons réécrire (1.2.30) différemment, pour faciliter la comparaison avec les différentes formes de paramétrisation dans la sous-section 1.23, de la manière suivante :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} ib\xi - |\xi|^\alpha C \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{(2-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \left( 1 - \frac{\xi}{|\xi|} i(p-q) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ ib\xi - |\xi| C \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} i(p-q) \frac{2}{\pi} \ln|\xi| \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.31)$$

**Note importante :** On peut remarquer que dans le côté droit de la formule (1.2.31), que  $\xi/|\xi|$  est précédé par un signe négatif quand  $\alpha \neq 1$  et par un signe positif quand  $\alpha = 1$ . Ce petit élément a été la source d'énorme confusion dans la littérature (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 6). Dans (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 102), ils expliquent que le choix inverse quand  $\alpha \neq 1$  contredit l'hypothèse (communément admise) que les lois stables avec un paramètre d'asymétrie égale à 1 (i.e.  $p - q = 1$ , plus de détail dans la sous-section.1.2.3) apparaissant comme des distributions limites des sommes normalisées  $S_n$  avec des termes positifs. Ils précisent que cette erreur particulière s'est répétée dans un assez grand nombre d'articles et que l'erreur s'était manifestement répandue car malheureusement elle avait trouvé son chemin dans la monographie bien connue (Gnedenko & Kolmogorov, 1954). Cependant, elle a été remarquée à la même époque, et des remarques spéciales ont été faites à ce sujet dans (Skorokhod, 1954) et (Zolotarev, 1961). Et en général, il existe plus d'un certain nombre d'articles et de livres dont les auteurs ont été suffisamment attentifs et n'ont pas commis cette « erreur ». ils citent pour exemple (Linnik, 1965), (Feller, 1971), En ajoutant que c'était un peu exagérer l'article fait à ce sujet par (Hall, 1980) surtout en lui donnant le titre de « comédie d'erreurs ».

Nous passons maintenant aux conditions dans lesquelles une distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction d'une distribution stable, qui sont donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.2.4. (Domaine d'attraction (Feller, 1971, p. 577))**

- (i) Pour qu'une distribution  $F$  appartienne à un domaine d'attraction, il faut que sa fonction de moment tronqué  $\mu$  varie régulièrement avec un exposant égal à  $2 - \alpha$  (où  $0 < \alpha \leq 2$ ). i.e. elle doit vérifier :

$$\mu(x) \sim x^{2-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2.32)$$

- (ii) Si  $\alpha = 2$ , cette condition est également suffisante à condition que  $F$  ne soit pas concentré en un point.
- (iii) Si (1.2.31) est vérifiée pour ( $0 < \alpha < 2$ ). Alors  $F$  appartient à un domaine d'attraction si et seulement si les queues sont équilibrées de telle sorte que pour  $x \rightarrow \infty$ , on a

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow p, \quad \frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow q \quad (1.2.33)$$

Notons qu'il n'y a aucune hypothèse concernant le centrage de  $F$ . Cela signifie que le que (1.2.32) est valable soit avec un centrage arbitraire, soit sans centrage. Le théorème a été reformulé (Feller, 1971, p. 578) de manière à couvrir également la convergence vers les distributions normales. Quand  $\alpha < 2$ , il semble plus naturel d'exprimer la condition principale en termes de somme de la queue de  $F$  plutôt que  $\infty$ . Les corollaires suivants reformulent le théorème sous des formes équivalentes.

**Corollaire 1.2.1. (Domaine d'attraction de la distribution normale)** Une distribution  $F$  non concentrée en un point appartient au domaine d'attraction de la distribution normale si et seulement sa fonction de moment tronqué  $\mu$  varie lentement.

i.e. C'est le cas, si et seulement si

$$\frac{x^2[1 - F(x) + F(-x)]}{\mu(x)} \rightarrow \frac{2 - \alpha}{\alpha} \quad (1.2.34)$$

Cette relation est vraie pour  $\alpha = 2$  (distribution Normale). Il va sans dire que  $\mu$  varie lentement à chaque fois  $F$  à une variance finie.

**Corollaire 1.2.2.** Une distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction d'une distribution stable d'exposant  $\alpha < 2$  si ses queues satisfont à la condition d'équilibrage (1.2.29) et la somme de la queue varie régulièrement avec l'exposant  $\alpha$ . Cette condition est tout à fait équivalente à (1.2.34)

On rappelle, que le but de cette partie était de reformuler la définition 1.2.4 en termes de fonctions caractéristiques  $\varphi$  et  $\omega$  des distributions  $F$  et  $U$ . Où nous avons précisé au début que  $\varphi$  appartient au domaine d'attraction de la fonction caractéristique  $\omega$  si il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n$  tel que  $(\varphi(\xi/a_n)e^{-ib_n\xi})^n \rightarrow \omega(\xi)$  (i.e. il faut vérifier que pour tout  $\xi$ ,  $n[\varphi_n(\xi) - 1] \rightarrow \psi(\xi)$ , où  $\omega = e^\psi$ . Voir condition (1.2.5) et (1.2.7)), après avoir donné les représentations des fonctions caractéristiques (théorème 1.2.3), nous allons le compléter par le théorème 1.2.5, qui nous permettra de préciser les constantes de normalisation  $a_n$  et  $b_n$  pour garantir la convergence vers une distribution stable.

**Théorème 1.2.5.** (Feller, 1971, p. 580) Soit  $U$  une distribution  $\alpha$ -stable défini par la fonction caractéristique (1.3.28). Soit la distribution  $F$  satisfaisant aux conditions du théorème 1.3.3 et soit  $\{a_n\}$  telle que  $n\mu(a_n/a_n^2) \rightarrow C$  (où  $\mu$  est la fonction de moment tronqué)

- (i) Si  $0 < \alpha < 1$  alors  $\varphi^n(\xi/a_n) \rightarrow \omega(\xi) = e^{\psi(\xi)}$ .
- (ii) Si  $1 < \alpha \leq 2$ , il en est de même à condition que  $F$  soit centré autour d'une espérance nulle.
- (iii) Si  $\alpha = 1$ , alors

$$(\varphi(\xi/a_n)e^{-ib_n\xi})^n \rightarrow \omega(\xi) = e^{\psi(\xi)}$$

Avec  $b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{x}{a_n} dF(x)$

Nous avons le résultat final, que lorsque  $\alpha < 1$  aucune procédure de centrage n'est requise, tandis que pour  $\alpha > 1$ , il suffit d'avoir un centrage naturel à espérance nulle. Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur à (Feller, 1971, p. 580-581).

### Remarque 1.2.3

La formulation du théorème 3 suppose que les distributions dans tout domaine d'attraction avec  $\alpha > 1$  possède des espérances. Cependant, il faut noter que pour  $\alpha < 2$  le moment d'ordre  $r \geq \alpha$  n'est pas fini, ces distributions ont donc une variance infinie, et par conséquent une queue très lourde. Nous avons le cas particulier  $\alpha = 1$ , où on retrouve la loi de Cauchy (avec une moyenne et une variance infinie). Le lemme suivant, nous donne plus de précision concernant le moment d'ordre  $r$  pour des distributions stables.

**Lemme.2.2.2.** Une distribution  $F$  appartenant à un domaine d'attraction avec un exposant  $\alpha$  possède des moments absolus  $m_r$  de tous les ordres  $r < \alpha$ . Si  $\alpha < 2$ , il n'existe aucun moment d'ordre  $r > \alpha$ . Plus précisément, quand  $t \rightarrow \infty$ , on a :

$$\text{Si } r < \alpha : \quad \frac{t^{2-r}}{\mu(t)} \int_{|x|>t} |x|^r dF(x) \rightarrow \frac{2-\alpha}{\alpha-r} \quad (1.2.35)$$

$$\text{Si } r > \alpha \text{ et } \alpha < 2 : \quad \int_{|x|<t} |x|^r dF(x) \sim \frac{\alpha}{r-\alpha} t^r [1 - F(t) + F(-F)] \quad (1.2.36)$$

Notez que dans chaque cas l'intégrale est une fonction à variation régulière avec un exposant  $r - \alpha$ .

**Remarque 1.2.4.**(Feller, 1971, p. 581) Le domaine d'attraction de la distribution normale ne doit pas être confondu avec la notion de « domaine d'attraction normale d'une distribution stable »  $U$  avec exposant  $a^\alpha$  introduit par B. V. Gnedenko. On dit qu'une distribution  $F$  appartient à ce domaine s'il appartient au domaine d'attraction de  $U$  avec un coefficient de normalisation  $a_n = n^{1/\alpha}$ . La délimitation de ce domaine posait initialement un problème sérieux, mais dans le cadre actuel, la solution est fournie par la condition sur les constantes de normalisation  $n\mu(a_n/a_n^2) \rightarrow C$  (voir théorème 1.2.5). Une distribution  $F$  appartient au domaine « normal » d'attraction de  $U$  si et seulement si  $x^\alpha[1 - F(x)] \rightarrow Cp$  et  $x^\alpha F(-x) \rightarrow Cq$ . Ici  $C > 0$  est une constante. (Notons, d'ailleurs, que dans ce cas selon la terminologie, la distribution normale possède un domaine d'attraction non normale.)

### 1.2.3. Différentes formes de fonction caractéristique $\alpha$ -stable

Sachant que les lois stables n'ont pas d'expressions explicites pour leurs densités ou leurs fonctions de répartition (à quelques exceptions près). Il fallait trouver un moyen pour d'étudier indirectement les propriétés analytiques des distributions stables. C'est pour cette raison qu'il existe dans la littérature, différentes paramétrisations de la fonction caractéristique pour distributions stables, afin de pouvoir choisir dans chaque situation spécifique celle qui assure le moins de complexité dans les énoncés et les preuves. Effectivement, la complexité de l'étude des diverses propriétés des distributions stable, dépend en grande partie du choix fortuit du système de paramètres. Cela peut donc être plus simple ou plus compliqué selon le paramétrage employé.

Dans cette partie, nous allons donc exposer les paramétrisations les plus utilisées et les plus connues à savoir la paramétrisation de la Samorodnitsky et Taquq et celles de Zolotarev, nous n'allons pas donner les détails de calcul, mais nous présenterons aussi les formules de passage d'un système de paramètres à un autre. Pour plus de détails, nous renvoyons les lecteurs intéressés à (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 93-97; Zolotarev, 1986, p. 9-12)

Les différentes paramétrisations sont essentiellement basées sur les travaux de P. Lévy, il avait montré qu'il existe des types de lois  $\alpha$ -stables, (plus précisément strictement stable, comme décrit dans la définition 1.2.3) dépendant de **deux paramètres**  $\alpha$  et  $\beta$ , qui sont définies par la formule (Lévy, 1934, p. 56):

$$\psi(\xi) = \log E(e^{i\xi x}) = -|\xi|^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[ 1 + i \frac{\xi}{|\xi|} \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right]$$

Avec  $0 < \alpha \leq 2$  et  $|\beta| \leq 1$

Il avait appelé cette famille de loi par  $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$  (où  $\mathcal{L}_\alpha$  pour  $\beta = 0$ ) ;  $\mathcal{L}_2$  est la loi de Gauss ; pour  $\alpha = 1$ ,  $\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}$  est une, constante quelconque, qu'on peut ramener à zéro par l'addition à  $x$  d'une constante convenable ; on est alors ramené à la loi  $\mathcal{L}_1$  ou loi de Cauchy, pour laquelle à chaque intervalle  $dx$  correspond la probabilité  $dx/\pi(1+x^2)$ . Cauchy avait vu dès 1853 que dans le cas  $\beta = 0$ , la formule (1.2.31) entraîne la propriété de stabilité ; mais il n'avait pas établi que le second membre est une valeur acceptable pour le logarithme d'une fonction caractéristique ; il s'agissait de démontrer que la densité de probabilité, qu'on déduit de la fonction caractéristique par la formule de Fourier, n'est jamais négative. M. G. Pôlya a signalé la difficulté et l'a résolue pour  $\alpha < 1$  ; puis Lévy l'a résolue dans le cas général et il a montré en même temps l'existence des lois stables asymétriques, celles pour lesquelles  $\beta \neq 0$  (Lévy, 1934, p. 57), la collaboration de Lévy et Khintchine a énormément fait évoluer les choses, ça a permis de définir la fonction caractéristique d'une variable stable à travers quatre paramètres (Khintchine & Lévy, 1936), On peut aussi retrouver le théorème et la démonstration détaillée dans (Gnedenko & Kolmogorov, 1954, p. 164-171); cependant, il faut faire attention au signe qui précède  $\xi/|\xi|$  quand  $\alpha \neq 1$  (voir la note importante suite à la remarque 1.2.2). Et dans ce cas (en mettant un signe négatif devant  $\xi/|\xi|$ ), la fonction caractéristique d'une distribution stable est de la forme  $\varphi_X(\xi) = e^{\psi(\xi)}$  avec :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} i\mu\xi - \delta|\xi|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{\xi}{|\xi|} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ i\mu\xi - \delta|\xi|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\xi}{|\xi|} \frac{2}{\pi} \ln|\xi|\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.37)$$

Avant de présenter les formes des fonctions caractéristiques stables (qui forment une famille à quatre paramètres) les plus connues ou les plus utilisées, nous allons commencer par définir les quatre paramètres qui les caractérisent :

➤ **Paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable**

- (i) **Un paramètre de stabilité** :  $\alpha \in (0,2]$  appelé aussi indice de queue. Il caractérise les queues de distribution en mesurant leurs épaisseurs (Il décrit la forme de la distribution ou son degré de leptokurticité). C'est pourquoi on parle des distributions  $\alpha$ -stables à queues lourdes ou à queue épaisse. Quand  $\alpha$  est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible, le paramètre  $\beta$  perd son effet et la distribution s'approche de la distribution Gaussienne indépendamment de  $\beta$ .

Une valeur proche de 0 de l'indice  $\alpha$  signifie que la masse de la queue a une probabilité considérable, alors que  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$  correspond à la loi de Cauchy ; Quand  $\alpha < 2$  la variance est infinie. Et quand  $\alpha > 1$ , la moyenne de la distribution existe et est égale à  $\mu$ . On rappelle aussi, que le moment d'ordre  $r$  d'une variable aléatoire stable est fini si et seulement si  $r < \alpha$ .

- (ii) **Un paramètre d'asymétrie**  $\beta \in [-1,1]$  si  $\beta$  est positif (négatif), la distribution est biaisée à droite (à gauche), i.e. la queue à droite (à gauche) est plus épaisse. Pour  $\beta = 1$  ( $\beta = -1$ ) on dit que la distribution est totalement asymétrique à droite (à gauche).

Quand  $\beta = 0$  la distribution est symétrique par rapport au paramètre de position  $\mu$ , dans ce cas la distribution est dite  $\alpha$ -stable symétrique. Si  $\mu = 0$  en même temps, dans ce cas la distribution est dite *strictement*  $\alpha$ -stable symétrique.

(iii) **Un paramètre de dispersion**  $\delta > 0$  : Lorsque  $\alpha = 2$ , la variance existe et  $\delta = \sigma_X^2/2$ . Où  $\sigma_X^2$  est la variance de la variable stable  $X$ .

Il est à noter qu'il est assez courant dans la littérature d'utiliser le **paramètre d'échelle**, que nous allons noter  $\gamma$  au lieu du paramètre dispersion, où  $\delta = \gamma^\alpha$ .

Dans ce cas lorsque  $\alpha = 2$ , on a  $\gamma = \sigma_X/\sqrt{2}$ .

(iv) **Un paramètre de localisation**  $\mu \in \mathbb{R}$  : appelé aussi **paramètre de position**, c'est un paramètre de « centralisation », il mesure la tendance centrale de la distribution. Lorsque  $\alpha > 1$  ce paramètre est égal à la moyenne et si  $\alpha < 1$ , alors il représente la médiane ;

**Définition 1.2.2.** (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 5). On dit qu'une variable aléatoire  $X$  a une distribution  $\alpha$ -stable s'il existe des paramètres uniques  $0 < \alpha \leq 2$  et  $|\beta| \leq 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\gamma \geq 0$  si et seulement si sa fonction caractéristique  $\varphi_X(\xi) = E(e^{i\xi x})$  s'écrit de la façon suivante  $e^{\psi(\xi)}$  avec :

$$\psi_{ST}(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma) = \begin{cases} i\mu\xi - \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta(\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ i\mu\xi - \gamma |\xi| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(\text{sign } \xi) \ln|\xi|\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.38)$$

Avec

$$\text{sign } \xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \\ -1 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

Où  $\gamma^\alpha = \delta$ . De ce fait (1.2.38) est exactement la même que (1.2.37).

On note  $\psi_{ST}$ , seulement pour différencier entre les différentes formes de représentation.

**Notations :**

- $X \stackrel{d}{=} S_{\alpha,\beta}(\mu, \gamma)$  Signifie que  $X$  est distribuée selon une loi stable de paramètres  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\gamma$ . (Comme, on peut aussi utiliser cette notation  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  pour différencier entre le paramètre d'échelle  $\gamma$  et le paramètre de dispersion  $\delta$ ).
- Si  $\beta = 0$ , on rappelle que la distribution est symétrique par rapport au paramètre de position  $\mu$  et note souvent  $X \stackrel{d}{=} S\alpha S(\mu, \gamma)$ .
- Si  $\beta = \mu = 0$  la distribution est dite *strictement*  $\alpha$ -stable symétrique et on note  $X \stackrel{d}{=} St\alpha S(\gamma)$ .

**Remarque 1.2.5.** La paramétrisation donnée dans la définition 1.2.2 par la formule (1.2.38) que nous avons notée  $\psi_{ST}$  est souvent appelé paramétrisation de Samorodnitsky et Taqqu, cela est sûrement dû à leur ouvrage (Samorodnitsky & Taqqu, 1994). Cependant, on la retrouve dans différents ouvrages sous le nom de paramétrisation de Zolotarev, comme dans (McCulloch, 1986, p. 1111), ainsi que dans (Zolotarev, 1957, p. 441), où on la retrouve sous le nom de forme A, avec  $\delta$  le paramètre de dispersion dans la formule à la place de  $\gamma^\alpha$ , autrement dit, on retrouve la formule (1.2.37), qui n'est rien d'autre que la paramétrisation Gnedenko et Kolmogorov amélioré ou corrigé (Gnedenko & Kolmogorov, 1954).

Nous allons, faire maintenant, une comparaison entre la représentation de Feller que nous allons noter  $\psi_F$  (théorème 1.2.3) et  $\psi_{ST}$  (formule 1.2.38).

La formule (1.2.37), ainsi que (1.2.38), ont été obtenue à partir de la forme canonique de Lévy-Khintchine (1.1.31) :

$$\psi(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int \left( e^{i\xi x} - 1 - i\xi x l(x) \right) \Lambda\{dx\}$$

On rappelle que,  $l(x)$  est la fonction de centrage. Les fonctions les plus utilisées généralement sont  $1/(1+x^2)$  ou  $\sin x/x$ ,

$\Lambda$  est la mesure de Lévy, définie comme suit pour les lois stables :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} -c_1 x^{-\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ c_2 |x|^{-\alpha} & \text{pour } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow d\Lambda(x) = \begin{cases} \alpha c_1 x^{-1-\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ \alpha c_2 |x|^{-1-\alpha} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Où  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$ . En posant  $P = \alpha c_1$ ,  $Q = \alpha c_2$  et la condition  $P + Q > 0$

$$d\Lambda(x) = \frac{P}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)dx + \frac{Q}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)dx$$

La représentation canonique peut être réécrite de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + Q \int_{-\infty}^0 \left( e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \\ + P \int_0^{+\infty} \left( e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

Dans le cas  $0 < \alpha < 2$ , On a :

$$\beta = \frac{P - Q}{P + Q}$$

Pour plus de détail (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 6) ou (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 89-92)

Nous, allons comparer maintenant avec le théorème 1.2.3 :

- ✓ A partir des formules (1.2.16) et (1.2.26), qui donnent respectivement la forme de la mesure  $M$ , et la forme canonique de l'exposant de la fonction caractéristique des distributions  $\alpha$ -stable, on obtient par identification :

$$P = Cp(2 - \alpha) \text{ et } Q = Cq(2 - \alpha) \text{ ce qui donne } \frac{P - Q}{P + Q} = \frac{p - q}{p + q}$$

Avec la condition imposée, qui est  $p + q = 1$ , on obtient donc :

$$(P - Q)/(P + Q) = p - q = \beta \quad (1.2.40)$$

- ✓ La représentation  $\psi_F$ , est donnée par (1.2.28), que nous avons réécrits différemment par (1.2.31) pour faciliter la comparaison, comme suit :

$$\psi_F(\xi) = \begin{cases} ib\xi - |\xi|^\alpha C \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{(2-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \left( 1 - \frac{\xi}{|\xi|} i(p-q) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ ib\xi - |\xi| C \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} i(p-q) \frac{2}{\pi} \ln|\xi| \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On peut constater clairement, que nous avons le même indice de stabilité, ainsi que le même paramètre de localisation, pour les deux autres, on obtient par identification :

$$\beta = p - q \text{ (Cela confirme (1.2.40))}$$

$$\gamma^\alpha = \delta = C \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{(2-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right)$$

Et pour  $\alpha = 1$ , on a bien  $\gamma^\alpha = \delta = C \left( \frac{\pi}{2 \sin(\pi/2)} \frac{(2-1)}{\Gamma(1)} \right) = C\pi/2$ .

Sachant que les paramètres sont uniques, il était simple de de les identifier dans ce cas et de constater que  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  avec :

- Un paramètre de stabilité :  $0 < \alpha \leq 2$
- Un paramètre de localisation  $\mu = b \in \mathbb{R}$
- Un paramètre d'asymétrie  $|\beta| = |p - q| \leq 1$
- Un paramètre de dispersion  $\delta = C \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha/2)} \frac{(2-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \geq 0$

Avant de présenter d'autres paramétrisations, nous d'abord réécrire la  $\psi_{ST}(\xi)$  sous une autre forme  $\psi_A$  en prenant  $\gamma^\alpha$  en facteur.

$$\psi_{ST}(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma) = \begin{cases} \gamma^\alpha \left( i \left( \frac{\mu}{\gamma^\alpha} \right) \xi - |\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta(\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma \left( ib \left( \frac{\mu}{\gamma} \right) \xi - |\xi| \left( 1 + i \frac{2}{\pi} \beta(\text{sign } \xi) \ln|\xi| \right) \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\psi_A(\xi, \alpha, \beta, \mu_A, \delta) = \begin{cases} \delta \left( i\mu_A \xi - |\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta(\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \delta \left( i\mu_A \xi - |\xi| \left( 1 + i \frac{2}{\pi} \beta(\text{sign } \xi) \ln|\xi| \right) \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.41)$$

Où  $\mu = \gamma^\alpha \mu_A$ , et on rappelle que  $\delta = \gamma^\alpha$  qui est le paramètre de dispersion.

La forme (1.2.41) est aussi connue sous le nom de paramétrisation de Zolotarev, elle est énormément utilisée, et principalement dans (Zolotarev, 1986, p. 9) et (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 93), où on la retrouve sous le nom de **forme (A)** ( car elle est identique à (1.2.37) et (1.2.38), aucun de changement de paramètre), et c'est l'élément principale de comparaison entre les différentes paramétrisations dans les ouvrages de Zolotarev. Car, comme nous allons le voir ci-après, pour chaque forme de paramétrisation, il existe un domaine de

variation des paramètres correspondant à cette forme, appelé domaine des valeurs admissibles des paramètres, que nous allons noter  $\mathfrak{D}$ . Pour toutes les formes de paramétrisation le paramètre de stabilité  $\alpha$  reste le même, mais le domaine d'admissibilité des autres paramètres change d'une paramétrisation à une autre.

Nous passons maintenant aux différentes forme proposées par (Zolotarev, 1986). On commence par la forme notée B, qui semble être plus pratique pour l'étude des propriétés analytiques de la famille de lois stables (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 93). Avec cette forme, il n'y a que l'indice de queue qui ne change pas (*i.e.*  $\alpha = \alpha_B$ ), et  $\varphi_X(\xi) = e^{\psi_B(\xi)}$  et telle que :

$$\psi_B(\xi, \alpha, \beta_B, \mu_B, \delta_B) = \delta_B (i\mu_B \xi - |\xi|^\alpha v_B(\xi, \alpha, \beta_B)) \quad (1.2.42)$$

avec

$$v_B(\xi, \alpha, \beta_B) = \begin{cases} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\beta_B\phi(\alpha)\text{sign}\xi\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} + i\beta_B \ln|\xi| \text{sign}\xi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Et

$$\phi(\alpha) = (\alpha - 1 - \text{sign}(\alpha - 1)) = \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \alpha - 2 & \text{si } 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Les paramètres ont le même domaine de variation que sous la forme (A) et  $\psi_{ST}$ , et on peut dire que  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$ , avec les paramètres  $0 < \alpha \leq 2$  et  $|\beta| \leq 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\delta \geq 0$ , qui sont définies par :

Pour  $\alpha \neq 1$

$$\begin{cases} \beta = \beta_A = \tan(\beta_B \phi(\alpha) \pi / 2) / \tan(\alpha \pi / 2) \\ \mu = \delta \mu_A = \delta \mu_B (\cos(\beta_B \phi(\alpha) \pi / 2))^{-1} = \delta \mu_B (1 + \beta^2 (\tan \alpha \pi / 2)^2)^{1/2} \\ \delta = \delta_A = \delta_B \cos(\beta_B \phi(\alpha) \pi / 2) = \delta_B (1 + \beta^2 (\tan \alpha \pi / 2)^2)^{-1/2} \end{cases}$$

Pour  $\alpha = 1$ , On a  $\beta = \beta_B$ ,  $\mu = \delta(2/\pi)\mu_B$  et  $\delta = (\pi/2)\delta_B$ .

On rappelle que l'identification des paramètres dans notre travail, se fait en comparaison avec la paramétrisation de Samorodnitsky et Taquq  $\psi_{ST}(\xi)$  donnée par la formule (1.2.38).

Pour plus de détails se référer à (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 93-94), (Zolotarev, 1986, p. 12) ou (Weron, 1996).

**Remarque 1.2.6.** Les  $\psi_F$ ,  $\psi_{ST}$ ,  $\psi_A$  ainsi que  $\psi_B$  présentent un inconvénient, elles ne sont pas continues en tous point pour toutes les valeurs possibles des paramètres, plus précisément la fonction caractéristique présente des discontinuités quand  $\alpha = 1$  et  $\beta \neq 0$ . Zolotarev a résolu ce problème avec une autre paramétrisation (Zolotarev, 1986, p. 11).

Nous allons donc présenter maintenant la paramétrisation  $\psi_Z$  proposée par Zolotarev pour éliminer le problème de discontinuité. Où il a proposé une légère modification de  $\psi_{ST}$  (ou de la forme (A)), qui est de changer seulement le paramètre de localisation de la façon suivante :

$$\mu_A = \begin{cases} \mu_Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu_Z & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu = \begin{cases} \delta \mu_Z - \delta \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu_Z & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a encore le domaine de variation des paramètres et  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  avec  $\psi_z(\xi)$  de la forme suivante

$$\psi_z(\xi, \alpha, \beta, \mu_z, \delta) = \delta(i\mu_z\xi - |\xi|^\alpha + i\xi v_z(\xi, \alpha, \beta)) \quad (1.2.43)$$

$$v_z(\xi, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta(|\xi|^{\alpha-1} - 1)\tan\frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\beta\frac{2}{\pi}\ln|\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$\psi_z$  est donc une fonction continue pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  admissibles. Cependant, l'inconvénient de cette forme est que  $\mu_z$  n'a plus l'interprétation naturelle comme paramètre de localisation. C'est pour cette raison que la plupart des auteurs utilisent donc la forme  $\psi_{ST}$  formule (1.2.37) de Samorodnitsky et Taqqu.

On passe maintenant à la forme (C), qui décrit la fonction caractéristique d'une variable **strictement** stable, mais avant cela, nous allons énoncer la propriété dont découle cette paramétrisation.

**Propriété 1.2.1.** Une fonction de répartition  $F$  appartient à la famille des lois stable  $\mathfrak{S}$  si et seulement si pour tout nombres positifs  $b_1$  et  $b_2$ , il existe un nombre  $b$  positif et  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$F\left(\frac{x}{b_1}\right) * F\left(\frac{x}{b_2}\right) = \left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$F$  Appartient à la famille des lois strictement stable  $\mathfrak{B}$  si et seulement si  $a = 0$  et on a :

$$F\left(\frac{x}{b_1}\right) * F\left(\frac{x}{b_2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)$$

La classe  $\mathfrak{B}$  est généralement caractérisée par trois paramètres. Mais elle peut être décrite formellement par quatre paramètres. En changeant le système d'origine  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ , on peut passer à un système de trois paramètres et c'est le plus pratique pour faire le lien avec d'autre forme et principalement la forme (B). Nous allons maintenant énoncer le théorème qui décrit une variable strictement stable par sa fonction caractéristique.

**Théorème 1.2.6.** (Zolotarev, 1986, p. 17) La fonction caractéristique  $\varphi_X(\xi)$  d'une variable  $X$  de la famille des lois strictement stables  $\mathfrak{B}$  est de la forme  $e^{\psi_c(\xi)}$

$$\psi_c(\xi, \alpha, \theta, \delta_c) = -\delta_c|\xi|^\alpha \exp\left(-i\frac{\alpha\theta\pi}{2}\text{sign}\xi\right) \quad (1.2.44)$$

Où  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\delta_c > 0$  et  $|\theta| \leq \theta_\alpha = \min\{1, \alpha/2 - 1\}$  où  $\theta$  est le paramètre d'asymétrie.

$$\text{Pour } \alpha \neq 1 \quad \begin{cases} \theta = \beta_B\phi(\alpha)/\alpha \\ \delta_c = \delta_B \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{pour } \alpha = 1 \quad \begin{cases} \theta = (2/\pi)\arctan(2\mu_B/\pi) \\ \delta_c = \delta_B\sqrt{\pi^2/4 + \mu_B^2} \end{cases}$$

Le lien entre les paramètres de la forme (C) et ceux de la forme (B) a été obtenu par Zolotarev en excluant, le cas qui correspond à une distribution dégénérée quand on a  $|\lambda| = \alpha = 1$ .

Nous pouvons utiliser un autre système de paramétrage, qui semble être plus pratique pour réécrire  $\psi_c$ , en posant  $\rho = (1 + \theta)/2$ , dans ce cas on aura l'exponentielle dans (1.2.44) :

$$\exp(-i\alpha\theta(\pi/2)) = e^{-i\alpha\pi(\rho-\frac{1}{2})} = e^{-i\alpha\pi\rho} (e^{i\pi/2})^\alpha e^{-i\alpha\pi\rho} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^\alpha$$

Et on obtient :

$$\psi_c(\xi, \alpha, \rho, \delta_c) = -\delta_c(i\xi)^\alpha \exp(-i\alpha\rho\pi \operatorname{sign} \xi) \quad (1.2.45)$$

Avec et  $|\rho| \leq \rho_\alpha = \min\{1, \alpha/4\}$ .

Nous allons finir cette partie, par la forme (E) qui est importante car elle est nécessaire pour résoudre le problème de l'estimation statistique des paramètres de ces lois. Elle découle d'une modification supplémentaire de la forme (C). Le logarithme de la fonction caractéristique de chaque distribution en  $\mathfrak{B}$  peut s'écrire sous la forme

$$\psi_E(\xi, \nu, \theta_E, \tau) = \exp\left(\nu^{-1/2} \left(\ln|\xi| + \tau - i\frac{\pi\theta_E}{2} \operatorname{sgn} \xi\right) + \mathbb{C}(\nu^{-1/2} - 1)\right) \quad (1.2.46)$$

Où  $\mathbb{C}=0.577\dots$  est la constante d'Euler, et le domaine de variation des paramètres est comme suit :

$$\nu \geq 1/4, |\theta_E| \leq \min\{1, 2\sqrt{\nu} - 1\}, |\tau| < \infty.$$

Les paramètres  $(\nu, \theta_E, \tau)$  sont liés aux paramètres  $(\alpha, \theta, \delta_c)$  de la forme(C), par les égalités :

$$\nu = \alpha^{-2}, \quad \theta_E = \theta \quad \text{et} \quad \tau = (1/\alpha) \ln \delta_c + \mathbb{C}(1/\alpha - 1)$$

**Remarque 1.2.7.** Quand  $\alpha = 1$ , seulement les distributions symétriques ( $\beta = 0$ ) (Distribution de Cauchy) appartiennent à la classe des distribution strictement stables.

#### 1.2.4. Distribution et propriétés de variable $\alpha$ -stable

##### Propriétés arithmétiques :

Nous allons dans cette partie donner quelques propriétés importantes des distributions stables (la famille  $\mathfrak{S}$ ). Il est important de noter que la formulation d'une propriété dépend de la forme spécifique de la paramétrisation de la fonction caractéristique. Et nous rappelons qu'il n'est pas difficile d'établir les valeurs des paramètres des lois stables en utilisant les formules de passage d'une forme à une autre.

Nous rappelons aussi que  $\mathfrak{B}$  est une sous famille de  $\mathfrak{S}$ . Pour la suite, nous allons introduire une autre sous famille de  $\mathfrak{S}$ , qui est la famille des lois stables standards, notée  $\mathfrak{S}_0$  et qui correspond aux lois stables avec des valeurs de paramètres  $\mu = 0$  et  $\delta = \gamma = 1$ . D'un point de vue analytique, il est plus pratique d'étudier la famille  $\mathfrak{S}_0$  sous la forme (B), car les ensembles de lois standards ne coïncident pas sous les différentes formes citées plus haut.

Nous allons commencer par des priorités importantes issues de la paramétrisation de Samorodnitsky et Taquq  $\psi_{ST}$  (propriétés 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4), pour passer à d'autres propriétés introduites par Zolotarev.

**Propriété 1.2.2.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variable aléatoire indépendante de la famille  $\mathfrak{S}$  avec  $X_i \sim S_\alpha(\beta_i, \mu_i, \delta_i)$   $i = 1, 2$ . Alors

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$$

Avec

$$\beta = \frac{\beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 \quad \text{et} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

**Démonstration :** En utilisant la paramétrisation de Samorodnitsky et Taquq  $\psi_{ST}$  formule (1.2.37), On obtient pour  $\alpha \neq 1$  :

$$\begin{aligned} \ln \exp(i\xi(X_1 + X_2)) &= \ln \exp(i\xi X_1) + \ln \exp(i\xi X_2) \\ &= i\mu_1 \xi - \delta_1 |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta_1 (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu_2 \xi - \delta_2 |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta_2 (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) \\ &= i(\mu_1 + \mu_2)\xi - |\xi|^\alpha \left(\delta_1 + \delta_2 - i(\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2) \left((\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \\ &= (\mu_1 + \mu_2)\xi - (\delta_1 + \delta_2) |\xi|^\alpha \left(1 - i \frac{(\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2)}{\delta_1 + \delta_2} \left((\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \\ &= \mu \xi - \delta |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta \left((\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Sous d'autres formes les valeurs des paramètres changent. Par exemple pour la forme(A), nous avons seulement le paramètre de position qui change, alors si  $X_1$  et  $X_2$  deux variable aléatoire indépendante de la famille  $\mathfrak{S}$  avec  $X_i \sim S_\alpha^A(\beta_i, \mu_i^A, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , alors

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha^A(\beta, \mu^A, \delta)$$

Avec

$$\beta = \frac{\beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 \quad \text{et} \quad \mu^A = \frac{\delta_1 \mu_1^A + \mu_2^A \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

On rappelle que l'indice (ici c'est A) correspondant à la forme de la fonction caractéristique utilisée (les différentes formes de Zolotarev). Pour la forme  $\psi_{ST}$  de Samorodnitsky et Taquq, nous n'utiliserons aucun indice dans la suite.

**Démonstration :** En utilisant la forme (A) de Zolotarev, formule (1.2.42), pour  $\alpha \neq 1$  :

$$\begin{aligned} \ln \exp(i\xi(X_1 + X_2)) &= \ln \exp(i\xi X_1) + \ln \exp(i\xi X_2) \\ &= i\delta_1 \mu_1^A \xi - \delta_1 |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta_1 (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu_2^A \delta_2 \xi - \delta_2 |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta_2 (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\delta_1 \mu_1^A + \mu_2^A \delta_2) \xi - (\delta_1 + \delta_2) |\xi|^\alpha \left( 1 - i \frac{(\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2)}{\delta_1 + \delta_2} \left( (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \\
 &= (\delta_1 + \delta_2) \left( \left( \frac{\delta_1 \mu_1^A + \mu_2^A \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \xi - |\xi|^\alpha \left( 1 - i \left( \frac{\delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left( (\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

**Propriété 1.2.3.** Soit  $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  et  $a \in \mathcal{R}$  alors :

$$X + a \sim S_\alpha(\beta, \mu + a, \delta) \quad (1.2.47)$$

**Propriété 1.2.4.** Soit  $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  et  $a \in \mathcal{R}^*$  alors

$$\begin{cases} aX \sim S_\alpha(\text{sign}(a)\beta, a\mu, |a|^\alpha \delta) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ aX \sim S_\alpha\left(\text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} a\beta \delta^{\frac{1}{\alpha}} \ln|a|, |a|^\alpha \delta\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2.48)$$

Pour la démonstration, voir (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 12)

**Propriété 1.2.5.** (Zolotarev, 1986, p. 60) Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de la famille  $\mathfrak{S}$  caractérisées respectivement par les quadruplets de paramètres admissibles  $(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$  et  $(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$ . Alors il existe un unique  $a > 0$  et un unique  $b \in \mathcal{R}$  tels que :

$$X_1 \stackrel{d}{=} aX_2 + b\delta_1 \quad (1.2.49)$$

Sous la forme (A) les constantes sont déterminées par la relation suivante

$$a = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = \mu_1^A - \mu_2^A \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha - 1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ b = \mu_1^A - \mu_2^A \frac{2}{\pi} \beta \ln \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Avec  $X_1 \sim S_\alpha^A(\beta, \mu_1^A, \delta_1)$  et  $X_2 \sim S_\alpha^A(\beta, \mu_2^A, \delta_2)$ . On rappelle que sous la forme (A), il n'y a que le paramètre de position qui change par rapport à la paramétrisation de Samorodnitsky et Taqqu, c'est pour cette raison, que l'indice est seulement sur ce paramètre-là.

**Démonstration :** En utilisant la forme (A) de Zolotarev, formule (1.2.40), pour  $\alpha \neq 1$

Soit  $X_1 \sim S_\alpha^A(\beta, \mu_1^A, \delta_1)$  et  $X_2 \sim S_\alpha^A(\beta, \mu_2^A, \delta_2)$ . On rappelle que sous la forme (A), il n'y a que le paramètre de position qui change par rapport à la paramétrisation de Samorodnitsky et Taqqu, c'est pour cette raison, que l'indice est seulement sur ce paramètre-là.

$$\ln \exp(i\xi(aX_2 + \delta_1 b)) = \ln \exp(i\xi aX_2) + \ln \exp(i\xi \delta_1 b)$$

$$= i\xi \delta_1 b + \delta_2 i \mu_2^A (a\xi) - \delta_2 |a\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta (\text{sign}(a\xi)) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right)$$

$$= \delta_2 |a|^\alpha \left( i\xi |a|^{-\alpha} \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} b + \mu_2^A a \right) - |\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta (\text{sign}(\xi)) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right)$$

Par identification avec :

$$\ln \exp(i\xi X_1) = \psi_{X_1}^A(\xi, \alpha, \beta, \mu_1^A, \delta_1) = \delta_1 \left( i\xi \mu_1^A - |\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta(\text{sign}(\xi)) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_2 |a|^\alpha \\ \mu_1^A = |a|^{-\alpha} \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} b + \mu_2^A a \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta_1}{\delta_2} = a^\alpha \\ \mu_1^A - \mu_2^A a^{1-\alpha} = a^{-\alpha} \frac{\delta_1}{\delta_2} b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha} \\ b = \mu_1^A - \mu_2^A \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha-1} \end{cases}$$

Sous la forme  $\psi_{ST}$  de Samorodnitsky et Taquq, il suffit seulement d'utiliser les relations suivantes  $\mu_1^A = \mu_1/\delta_1$  et  $\mu_2^A = \mu_2/\delta_2$

$$a = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = \frac{\mu_1}{\delta_1} - \frac{\mu_2}{\delta_2} \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ b = \frac{\mu_1}{\delta_1} - \frac{\mu_2}{\delta_2} \frac{2}{\pi} \beta \ln \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Avec  $X_1 \sim S_\alpha(\beta, \mu_1, \delta_1)$  et  $X_2 \sim S_\alpha(\beta, \mu_2, \delta_2)$ . On retrouve exactement le même résultat avec une démonstration analogue, en utilisant la paramétrisation de Samorodnitsky et Taquq  $\psi_{ST}$  formule (1.2.37).

La propriété 1.2.5 est valable sous la forme de (A), (B) et celle de Samorodnitsky et Taquq.

Cas particulier : Pour  $\mu_2^A = \mu_2 = 0$  et  $\delta_2 = 1$  ( $X_2$  appartient a la famille des distributions stable standard  $\mathfrak{S}_0$ ), la relation (1.2.49), est reformulée comme suit :

$$X_1 \stackrel{d}{=} \delta_1^{1/\alpha} X_2 + \delta_1 (\mu_1^A + b_0) \quad (1.2.50)$$

Où  $b_0 = 0$  si  $\alpha \neq 1$ , et  $b_0 = \frac{2}{\pi} \beta \ln \delta_1$  si  $\alpha = 1$ .

Ce cas particulier est important car il nous donne le lien entre une variable stable (de la famille  $\mathfrak{S}$ ) et une variable d'une sous famille de  $\mathfrak{S}$  qui est  $\mathfrak{S}_0$ .

**Propriété 1.2.6.** Soit  $X$  une variable aléatoire de la famille  $\mathfrak{S}$  caractérisées par un quadruplet de paramètres admissibles  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ , et on note  $X_{(\alpha, \beta, \mu, \delta)}$ , alors :

$$-X_{(\alpha, \beta, \mu, \delta)} \stackrel{d}{=} X_{(\alpha, -\beta, -\mu, \delta)} \quad (1.2.51)$$

Pour plus de détails et d'autres propriétés arithmétiques, nous renvoyons les lecteurs intéressés a (Zolotarev, 1986, p. 60-65) et (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 10-20)

**Propriété 1.2.7.** Soit  $X$  une variable aléatoire de la famille  $\mathfrak{S}$  caractérisée par un quadruplet de paramètres admissibles  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ , alors il existe des constantes uniques  $a_1, a_2 > 0$  et  $l \in \mathcal{R}$  tels que

$$X \stackrel{d}{=} a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + l \quad (1.2.52)$$

Où  $Y_i$  sont des variables de la famille  $\mathfrak{S}_0$  caractérisées par des paramètres admissibles  $(\alpha, \beta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , avec  $-1 \leq \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \leq 1$ .

$a, b$  et  $c$  sont déterminés de façon unique, sous la **forme (A)**, nous avons les relations suivantes avec les paramètres :

$$a_1 = \left( \delta \frac{\beta_2 - \beta}{\beta_2 - \beta_1} \right)^{1/\alpha}, a_2 = \left( \delta \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 - \beta_2} \right)^{1/\alpha}, l = \begin{cases} \mu\delta & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu\delta + \frac{2}{\pi} (\beta_1 a_1 \ln a_1 + \beta_2 a_2 \ln a_2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

En choisissant  $\beta_1 = -1$  et  $\beta_2 = 1$  et en utilisant l'égalité (propriété 1.2.6)  $-Y(\alpha, 1) \stackrel{d}{=} Y(\alpha, -1)$ . On obtient que n'importe quelle variable aléatoire  $X(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  puisse être exprimée comme une combinaison linéaire de deux variables aléatoires indépendantes de la forme  $Y(\alpha, 1)$ , comme suit :

$$X_{(\alpha, \beta, \mu, \delta)} \stackrel{d}{=} \delta^{1/\alpha} \left( \left( \frac{1 + \beta}{2} \right)^{1/\alpha} Y_{(\alpha, 1)} + \left( \frac{1 - \beta}{2} \right)^{1/\alpha} Y_{(\alpha, 1)} \right) + b \quad (1.2.53)$$

Pour plus de détails et d'autres propriétés arithmétiques, nous renvoyons les lecteurs intéressés à (Zolotarev, 1986, p. 60-65) et (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 10-20)

### Densité de probabilité et fonction de répartition

Les fonctions caractéristiques déterminent de manière unique les densités correspondantes des lois stables, par le biais du théorème d'inversion (la transformé de Fourier inverse de la fonction caractéristique), qui donne :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt \quad (1.2.54)$$

Cependant, il est difficile et compliquer de calculer la densité d'une v.a stable par l'application directe de la formule (1.2.42), comme on peut le voir la fonction à intégrer est complexe et les bornes de l'intégrale sont infinies. Les calculs numériques de densités sont généralement basés sur d'autres représentations issues de la formule d'inversion quelque peu transformées (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 103). Nous avons une forme explicite de la densité seulement pour les trois lois  $\alpha$ -stables connues, à savoir : la distribution normale  $S_2(1, b, \delta)$ , la distribution de Cauchy  $S_1(0, b, \delta)$  et la distribution de Lévy  $S_{1/2}(1, b, \delta)$ . Dans le cas général, la densité reste sous forme d'intégrale (1.2.42), où  $\varphi_X(t)$  peut être décrite avec une des différentes paramétrisations. En utilisant la paramétrisation de Samorodnitsky et Taquq  $\psi_{ST}$  (1.2.37), on peut réécrire (1.2.4), de la forme suivante :

$$f_X(x, \alpha, \beta, b, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \exp\{ibt - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i(\text{sign } t)v(\xi, \alpha, \beta))\} dt \quad (1.2.55)$$

$$\text{Où : } v(\xi, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \beta \ln|\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Beaucoup, d'auteur se sont intéressé à la classe des distributions strictement stables symétriques  $S\alpha S(\gamma)$  (i. e.  $X \sim S_\alpha(0,0,\gamma)$ ), car l'intégrale se simplifie, comme suit :

$$f_X(x, \alpha, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-itx} e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \cos(tx) dt \quad (1.2.56)$$

Cependant, aucune solution analytique n'a été trouvée à ce jour.

Zolotarev c'est intéressé particulièrement la classe des distributions stable standard (la sous famille  $\mathfrak{S}_0$ ), car grâce à la propriété 1.2.5, il est possible sans perte de généralité de considérer uniquement les distributions stables standards (la sous famille  $\mathfrak{S}_0$ ). De plus, avec la propriété 1.2.6, il suffit de résoudre le problème de la représentation la densité, que nous allons noter  $f_X(x, \alpha, \beta, 0, 1) = f_X(x, \alpha, \beta)$  (ou la fonction de répartition  $F_X(x, \alpha, \beta)$ ) pour  $x \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  car :

$$\begin{aligned} f_X(-x, \alpha, \beta) &= f_X(x, \alpha, -\beta) \\ F_X(-x, \alpha, \beta) &= 1 - F_X(x, \alpha, -\beta) \end{aligned}$$

Il donnée une représentation par intégrale de la densité d'une variable stable standard en utilisant la forme (B) (Zolotarev, 1986, p. 74), Puis il s'est intéressé à sa représentation par série convergente. Effectivement, le développement en séries entières de la transformé de fourrier inverse de la fonction caractéristique des distributions stables qui a été donné indépendamment par Feller et Bergström en 1952 (Bergström, 1953; Feller, 1971, p. 581) a permis de donner une expression analytique ou asymptotique dans des cas particulier. Par exemple, on peut trouver dans (Feller, 1971, p. 581-583), la densité d'une variable  $\alpha$ -stable pour  $\alpha \neq 0$ .

Nous allons présenter la représentation en série de la densité d'une variable stable standard (i. e.  $X \in \mathfrak{S}_0$ ), donnée par (Zolotarev, 1986, p. 89-90) en utilisant la forme (C) et le passage à la forme (B).

$$f_X(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \sin(k\rho\alpha\pi) x^{k\alpha-1} & \text{si } \alpha < 1, \beta \in [-1,1] \text{ et } x > 0 \\ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k b_n x^{k-1} & \text{si } \alpha = 1, \beta > 0 \text{ et } \forall x \in \mathcal{R} \\ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k/\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \sin(k\rho\pi) x^{k-1} & \text{si } \alpha > 1, \beta \in [-1,1] \text{ et } \forall x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Où

$$b_n = \frac{1}{\Gamma(k + 1)} \int_0^{\infty} \exp(-\beta u \ln u) u^{n-1} \sin\left((1 + \beta)u \frac{\pi}{2}\right) du$$

Et on rappelle que  $\rho = (1 + \theta)/2$  avec  $\theta = \beta_B \phi(\alpha)/\alpha$  quand  $\alpha \neq 1$  et  $|\theta| \leq \theta_\alpha = \min\{1, \alpha/2 - 1\}$

Pour une variable strictement stable  $X \sim S_\alpha S(1)$  (i. e.  $X \sim S_\alpha(0,0,1)$ ), on a la densité  $f_X$  et la fonction de répartition  $F_X$ , définies par :

$$f_X(x, \alpha, 0,0,1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(k\alpha + 1) \sin\left(k\alpha \frac{\pi}{2}\right) x^{-k\alpha-1} & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x, \alpha, 0,0,1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(k\alpha) \sin\left(k\alpha \frac{\pi}{2}\right) x^{-k\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k+1} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

La démonstration détaillée est dans (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 103-105). Pour plus de détail sur la représentation des variables stable en série se référer à (Janicki & Weron, 1994, p. 21-34; Zolotarev, 1986, p. 87-92), et pour les différentes représentations de la densité stable sous forme d'intégrale voir (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 115-120; Zolotarev, 1986, p. 65-82) .

**Propriété 1.2.8.** Soit  $X$  une variable aléatoire de la famille  $\mathfrak{S}$ , caractérisée par un quadruplet de paramètres admissibles  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ , alors

$$F_X(x, \alpha, \beta, b, \gamma) = F_X(\delta^{-1/\alpha}(x - l), \alpha, \beta, 0,1)$$

$$f_X(x, \alpha, \beta, b, \gamma) = \delta^{-1/\alpha} f_X(\delta^{-1/\alpha}(x - l), \alpha, \beta, 0,1)$$

Où  $l(\alpha, \beta, b, \gamma)$  une fonction déterminée de manière unique par les valeurs des paramètres. Cette propriété découle de la propriété 1.2.5 (comme on peut la déduire aussi de 1.2.7)

### Propriétés asymptotiques des queues de distribution $\alpha$ -stables

**Propriété 1.2.9.** (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 16). Soit  $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$ , alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X > x) &= C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \delta \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y^\alpha P(X < -x) &= C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \delta \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

Où

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 2/\pi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Les lois  $\alpha$ -stables sont asymptotiquement parétiennes. De ce fait, elles sont souvent caractérisées par un comportement de queue lourde.

**Propriété 1.2.10.** Soit  $X$  une variable aléatoire de la famille  $\mathfrak{S}_0$ , pour  $\alpha \neq 2$ , on a :

$$f_X(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} O(x^{-\alpha-1}) & \text{quand } x \rightarrow \infty \quad \beta \neq -1 \\ O(|x|^{-\alpha-1}) & \text{quand } x \rightarrow -\infty \quad \beta \neq 1 \end{cases}$$

### 1.3. Caractéristique des distributions $\alpha$ -stables sur $\mathbb{R}^d$

La définition des distributions stables multivariées (vecteurs aléatoires stables), s'étendent simplement de la définition d'une variable aléatoire stable univariée. Comme dans le cas gaussien, un vecteur gaussien peut être défini de la manière suivante : un vecteur aléatoire est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composants est une variable aléatoire gaussienne. Il est de même pour les distributions stables, toute combinaison linéaire des composantes d'un vecteur aléatoire stable est une variable aléatoire stable, mais l'inverse n'est pas toujours vrai. L'inverse est vrai seulement dans deux cas, soit les combinaisons linéaires sont strictement stables, soit lorsque  $\alpha \geq 1$ .

Comme dans le cas des distributions stables univariées, nous n'avons généralement pas forme explicite de la densité ou de la fonction de répartition des vecteurs aléatoires stables, ils sont donc définis par leurs fonctions caractéristiques. Cela implique une mesure finie  $\Gamma$  sur la sphère unitaire de  $\mathbb{R}^d$  et un vecteur de décalage  $\mu^0$  qui joue un rôle similaire au paramètre de localisation  $\mu$  dans le cas univariée. La mesure  $\Gamma$  est appelée la *mesure spectrale*. Elle remplace à la fois les paramètres d'échelle et d'asymétrie qui entrent dans la description de la distribution stable univariée.

Les principales définitions exposées dans cette sous-section, sont issues des ouvrages (Samorodnitsky & Taqqu, 1994; Uchaikin & Zolotarev, 1999)

#### 1.3.1. Définitions et propriétés

**Définition 1.3.1. (Stabilité (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 57) )** On dit qu'un vecteur aléatoire  $X$  est stable dans  $\mathbb{R}^d$ , si  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ , il existe un nombre positif  $c$  et  $D \in \mathbb{R}^d$ , tels que :

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + D \tag{1.3.1}$$

Où,  $X_1$  et  $X_2$  sont deux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués de même loi que  $X$ .

La définition de la stabilité dans  $\mathbb{R}^d$ , est analogue à la définition de la stabilité dans  $\mathbb{R}^1$ , donnée par la Définition 1.2.3. C'est la même chose pour la stabilité stricte. On dit alors, qu'un vecteur aléatoire  $X$  est *strictement stable* si (1.3. 1) est vraie avec  $D = 0$ .

**Théorème 1.3.1.** Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vecteur stable (respectivement strictement stable, symétrique stable) dans  $\mathbb{R}^d$ .

- Il existe alors une constante  $\alpha \in (0, 2]$  de telle sorte que, les constantes  $a, b$  et  $c$  de (1.3.1), vérifient la relation  $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}$ .
- Toute combinaison linéaire des composants de  $X$  de forme  $Y = \sum_{k=1}^d b_k X_k$  est une variable  $\alpha$ -stable (respectivement strictement  $\alpha$ -stable, symétrique  $\alpha$ -stable).

La démonstration du théorème est dans (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 57)

**Corollaire 1.3.1.** On dit qu'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  est  $\alpha$ -stable si et seulement si pour tout  $n \geq 2$ , il existe une constante  $\alpha \in (0, 2]$  et un vecteur  $D_n$  tel que

$$X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n \quad (1.3.2)$$

Où  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  sont des copies indépendantes de  $X$ .

A partir de ces résultats, nous avons la définition suivante :

**Définition 1.3.2.** On dit qu'un vecteur aléatoire  $X$  est  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$ , si  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $c$  et  $D \in \mathbb{R}^d$ , tel  $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}$  et que (1.3.1) est vérifiée.

Comme pour les distributions stables univariées,  $\alpha$  est appelé indice de stabilité ou l'exposant caractéristique du vecteur  $X$ .

**Théorème 1.3.2.** Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire dans  $\mathbb{R}^d$ , et  $Y$  une combinaison linéaire des composants de  $X$  de forme  $Y = \sum_{k=1}^d b_k X_k$  alors :

- (a) Si  $Y$  est une variable strictement stable alors  $X$  est strictement stable dans  $\mathbb{R}^d$ .
- (b) Si  $Y$  est une stable symétrique alors  $X$  est un vecteur stable symétrique dans  $\mathbb{R}^d$ .
- (c) Si  $Y$  est une variable  $\alpha$ -stable avec un indice de stabilité  $\alpha \geq 1$  alors  $X$  est aussi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$ .

La démonstration du théorème est dans (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 59).

**Définition 1.3.2.** Un vecteur  $X$  est dit de distribution  $\alpha$ -stable symétrique si  $X$  est un vecteur  $\alpha$ -stable et si les distributions de  $-X$  et  $X$  sont identiques. Autrement dit, pour tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  on a :  $P(X \in A) = P(-X \in A)$ .

### 1.3.2. Fonction caractéristique stable sur $\mathbb{R}^d$

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous allons dans cette partie donner l'expression de la fonction caractéristique de vecteur  $\varphi(\xi)$  du vecteur  $X$  pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = E[\exp(i\langle \xi, X \rangle)] = E \left[ \exp \left( i \sum_{k=1}^d \xi_k X_k \right) \right] \quad (1.3.3)$$

La fonction  $\varphi(\xi)$  est aussi appelé la fonction caractéristique conjointe des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_d$ .

**Théorème 1.3.3.** Soit  $0 < \alpha < 2$ , On dit que  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  est un vecteur  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$ , si et seulement si existe une mesure finie  $\Gamma$  définie sur la sphère unité  $S_d = \{s: \|s\| = 1\}$  dans  $\mathbb{R}^d$  et un vecteur  $\mu^0 \in \mathbb{R}^d$  tel que la fonction caractéristique de  $X$  est de la forme  $\varphi(\xi) = \exp(\psi(\xi))$  avec :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} i\langle \xi, \mu^0 \rangle - \int_{S_d} |\langle \xi, s \rangle|^\alpha \left( 1 - \text{sign}(\langle \xi, s \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\Gamma(s) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ i\langle \xi, \mu^0 \rangle - \int_{S_d} |\langle \xi, s \rangle|^\alpha (1 + \text{sign}(\langle \xi, s \rangle) \ln |\langle \xi, s \rangle|) d\Gamma(s) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Le couple  $(\Gamma, \mu^0)$  est unique, c'est la représentation spectrale du vecteur  $X$ . La mesure  $\Gamma$  est souvent appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire  $\alpha$ -stable  $X$  et elle contient toute l'information sur la structure de dépendance des composantes du vecteur.

Des éléments de la démonstration du théorème 1.3.3 sont présentés dans (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 66), et pour plus de détails, se référer à (Kuelbs, 1973).

**Remarque 1.3.1.** La sphère unité  $S_d = \{s: \|s\| = 1\}$  est de dimension  $(d - 1)$  :

- Dans le cas unidimensionnel, la sphère unité  $S_1$  ne contient que deux points  $\{-1, 1\}$ .
- Dans le cas bidimensionnel, la sphère unité  $S_2$  est le cercle unité

**Proposition 1.3.1.** La mesure spectrale  $\Gamma$  d'un vecteur  $\alpha$ -stable  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  est concentré sur un nombre fini de points du cercle unité  $S_d$  si et seulement si  $X$  peut être exprimé comme une transformation linéaire de variables aléatoires indépendantes  $\alpha$ -stables.

La représentation de la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire  $\alpha$ -stable donnée par (1.3.4) implique une intégration sur la sphère unitaire  $S_d = \{s: \|s\| = 1\}$  dans  $\mathbb{R}^d$  où  $\|\cdot\|$  désigne le Norme euclidienne. C'est la démarche usuelle pour représenter la fonction caractéristique conjointe d'un vecteur  $\alpha$ -stable. Cependant, il existe de nombreuses autres normes dans  $\mathbb{R}^d$ , et il est possible d'utiliser la sphère unitaire par rapport à l'une d'entre elles pour représenter la fonction caractéristique conjointe d'un vecteur aléatoire  $\alpha$ -stable. Pour plus de détails sur différentes formes des fonctions caractéristiques et les mesures associées, nous renvoyons les lecteurs intéressés à (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 70-72; Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 193-210).

En conclusion, chaque distribution stable multivariée est caractérisée par un indice de stabilité  $\alpha$ , une mesure spectrale sur la sphère  $\Gamma$  et vecteur  $\mu^0$  représentant le paramètre de localisation (position). Dans sa forme générale, une distribution  $\alpha$ -stable multivariée reste difficile à exploiter. Cependant il existe quelques sous-classes des distributions  $\alpha$ -stables multivariées avec une expression simplifiée de la fonction caractéristique, tels que vecteurs symétriques  $\alpha$ -stables, ou les vecteurs  $\alpha$ -stables sous-Gaussiens. Pour plus de détails sur les distributions stables multivariées voir (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 57-107) .

## 2. Inférence statistique des distributions stables et application en assurance auto

Le problème l'inférence statistique, ainsi que la construction d'estimateurs statistiques de lois stables est entré dans la statistique mathématique grâce aux travaux de Mandelbrot qui avait développé des modèles économiques contenant des distributions stables (en particulier la répartition des revenus décrite par des distributions stables ou « Lévy-Pareto »), dont les paramètres devaient être déterminés empiriquement (Mandelbrot, 1960, 1963). Cependant, l'absence d'une forme explicite de la densité, ainsi que la non existence d'un certain nombre particulier de moment (Dans certains cas, elles n'ont qu'un seul moment d'ordre 1), rendait cette tâche compliquée avec les méthodes statistiques existantes à l'époque; à partir de là, la recherche d'une solution efficace ou satisfaisante a débuté (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 229).

Nous pouvons distinguer maintenant deux catégories de méthode importantes. La première contient des méthodes qui n'utilisent pas d'informations sur l'expression analytique de la densité de distribution de l'échantillon (Beran, 1974), et les conditions de régularité qu'elles utilisent pour les distributions des éléments de l'échantillon sont plus faibles que les conditions qu'on peut trouver dans les méthodes de la seconde catégorie ; qui elle comprend les méthodes dans lesquelles on suppose une certaine connaissance de la forme de la densité de distribution seulement. Cependant, les méthodes de la première catégorie, été considérablement moins développées, ce qui a limité leurs utilisations à l'estimation du paramètre de localisation  $\mu$  et au paramètre de dispersion  $\delta$  (ou d'échelle  $\gamma$ ) seulement. Par conséquent, pour résoudre le problème d'estimations des quatre paramètres  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  d'une distribution stable, il faut recourir aux méthodes de la seconde catégorie. Parmi les nombreux articles concernant l'utilisation des méthodes de la seconde catégorie, nous citons (Dzhaparidze, 1975), dont les résultats avaient constitué une base pratique pour résoudre le problème général des estimateurs asymptotiquement efficaces pour les distributions stables.

Pour vérifier si des données empiriques sont à queues lourdes, différents tests statistiques et graphiques existent, essentiellement basées sur les queues de distribution. Pour les distributions stables, il n'existe pas de test spécifique, nous avons des tests graphiques pour nous aider à savoir si nous sommes ou non en présence de données à variance infinie ou non et pour tester la qualité de l'ajustement à une distribution stable, nous aurons recours à l'approche standard, qui consiste à mesurer la distance entre la distribution empirique et la distribution théorique, telle que le test de Kolmogorov.

Dans ce chapitre, nous allons nous allons donc commencer par présenter les méthodes de simulation de variables et de vecteurs  $\alpha$ -stables, puis les différentes techniques d'estimation des paramètres d'une loi stable, puis les différents tests d'ajustement, pour finir avec une application de certaines de ces méthodes en assurance non vie, plus précisément, nous allons montrer que les sinistres automobiles sont bien décrits par une distribution  $\alpha$ -stable.

## 2.1. Simulation de variable stable

### 2.1.1. Simulation de variable $\alpha$ -stable (dans $\mathbb{R}^1$ )

La génération de variables aléatoires stables est une affaire assez complexe, car il n'existe pas d'expressions analytiques pour l'inverse de la densité (de la fonction de répartition). La première solution a été trouvée par (Kanter, 1975), qui avait donné une méthode directe pour générer des variables stables standard ( $X \in \mathfrak{S}_0$ ) avec  $\beta = 1$  et  $0 < \alpha < 1$ . DuMouchel dans sa thèse de doctorat en 1971 a exposé un certain nombre de variantes de cette méthode, qui se sont avérées raisonnables, mais coûteuses lorsque le nombre de simulations est important pour  $(\alpha, \beta)$  (DuMouchel, 1973). Après cela (Chambers et al., 1976) ont proposé une extension de ces méthodes dans le cas général et ont été les premiers à donner une formule pour générer une variable stable ( $X \in \mathfrak{S}$ ). Cependant, ils n'ont pas fourni de preuve détaillées, ils ont seulement fait référence à un article de (Zolotarev, 1964). Le manque de preuves explicites de ces formules avait conduit à certaines inexactitudes dans la littérature, C'est pour cette raison, que (Weron, 1996) a voulu clarifier la situation et présenter la preuve dans son article intitulé « On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables ».

Grace à tous ces travaux de recherche, la simulation de variable stable est devenue assez simple. Il suffit de générer une variable stable standard symétrique ( $S_\alpha(0,0,1)$ ), puis grâce aux propriétés arithmétiques des distributions stables, avec un simple changement de variable, on peut construire une variable stable standard ( $S_\alpha(\beta, 0,1)$ ), pour arriver à la fin à une variable stable ( $S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$ ).

– **Générer une variable  $X_0$  strictement stable standard symétrique**

Pour générer une variable  $X_0 \sim \text{St}\alpha\mathfrak{S}(\gamma)$ . (i.e.  $X_0 \stackrel{d}{=} S_\alpha(0,0,1)$ ), avec  $\alpha \in (0,2]$ , il suffit de construire  $X_0$ , comme suit :

$$X_0 = \frac{\sin(\alpha\mathcal{V})}{(\cos(\mathcal{V}))^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(\mathcal{V} - \alpha\mathcal{V})}{\mathcal{W}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (2.1.1)$$

Où  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont deux variables indépendantes,  $\mathcal{V}$  suit une loi uniforme sur  $(-\pi/2, \pi/2)$  et  $\mathcal{W}$  une loi exponentielle de paramètre 1. (Chambers et al., 1976)

– **Générer une variable  $X_1$   $\alpha$ -stables standard ( $X_0 \in \mathfrak{S}_0$ )**

Chambers, Mallows et Stuck (1976) décrivent une méthode permettant de générer des variables aléatoires standard, en se basant sur la paramétrisation de Zolotarev  $\psi_B$  forme B formule (1.2.40), et la représentation de la densité d'une variable stable avec cette même paramétrisation, pour plus de détails voir théorème 3.1 et sa démonstration détaillée dans (Weron, 1996). À partir de ce théorème et les formules de passage d'une paramétrisation à une autre, il était facile de donner la formule pour générer une variable stable standard asymétrique. Dans (Janicki & Weron, 1994, p. 50), on peut trouver une formule pour générer une variable  $S_\alpha(\beta, 0,1)$  pour  $\alpha \in$

$(0,1) \cup (1,2]$  et  $\beta \in [-1,1]$ . Nous allons présenter maintenant la formule de (Weron, 1996) pour tout  $\alpha \in (0,2]$  et  $\beta \in [-1,1]$

Pour générer une variable  $X_1 \sim S_\alpha(\beta, 0, 1)$ , il suffit comme précédemment de générer deux variables aléatoires indépendantes  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$ , où  $\mathcal{V}$  suit une loi uniforme sur  $(-\pi/2, \pi/2)$  et la variable  $\mathcal{W}$  une loi exponentielle de paramètre 1, puis construire  $X_1$  avec la formule suivante :

Pour  $\alpha \neq 1$ , on a

$$X_1 = \mathcal{D}_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(\mathcal{V} + \mathcal{C}_{\alpha,\beta}))}{(\cos(\mathcal{V}))^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(\mathcal{V} - \alpha(\mathcal{V} + \mathcal{C}_{\alpha,\beta}))}{\mathcal{W}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (2.1.2)$$

Où

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta \tan(\alpha\pi/2))}{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\alpha,\beta} = \left( 1 + \beta^2 \left( \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 \right)^{1/(2\alpha)}$$

Pour  $\alpha = 1$ , on a

$$X_1 = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi}{2} + \beta\mathcal{V} \right) \tan \mathcal{V} - \beta \ln \left( \frac{\mathcal{W} \cos \mathcal{V}}{\frac{\pi}{2} + \beta\mathcal{V}} \right) \right) \quad (2.1.3)$$

$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$  Représente le changement de paramètre de  $\beta_B$  à  $\beta$ ;  $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$  représente le changement de paramètre de dispersion de  $\delta_B$  (ou le paramètre d'échelle  $\gamma_B = \delta_B^{1/\alpha}$ ) à  $\delta$  (resp.  $\gamma$ ).

La formule (2.1.2) a été initialement présentée par (Janicki & Weron, 1994, p. 50). Cependant, ils ont donné une forme incorrecte pour  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$  (il y'avait  $1 - |1 - \alpha|$  dans le dénominateur au lieu de  $\alpha$ ), et une et une forme plus compliquée en termes de calcul pour  $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ . La formule (2.1.2) est équivalente à celle donnée par (Chambers et al., 1976, p. 341), tandis que dans le cas  $\alpha = 1$ , (Weron, 1996) a constaté qu'il y'a une forme légèrement incorrecte dans le logarithme, on trouve  $\frac{\pi}{2} \mathcal{W} \cos \mathcal{V} / (\pi/2 + \beta\mathcal{V})$  qui aurait du être  $\mathcal{W} \cos \mathcal{V} / (\pi/2 + \beta\mathcal{V})$ , en précisant que cela n'a aucun impact sur leur algorithme numérique RSTAB, puisqu'il utilise une représentation continue de la fonction caractéristique, équivalente à la forme (Z) de Zolotarev (formule (1.2.43) au lieu d'utiliser la forme (B) et utilise donc uniquement une reparamétrisation de (2.1.2).

#### – Générateur d'une variable $\alpha$ -stable ( $X \in \mathfrak{S}$ )

En utilisant les propriétés des lois stables, on peut générer des variables stables pour toutes les valeurs admissibles des paramètres  $\alpha, \beta, \delta$  et  $\mu$ .

Soit  $X_1 \sim S_\alpha(\beta, 0, 1)$ , On pose :

$$X = \begin{cases} \gamma X_1 + \mu & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma X_1 + \mu + \frac{2}{\pi} \beta \gamma \ln \gamma & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Alors  $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \delta)$  où  $\delta = \gamma^\alpha$

### 2.1.2. Simulation de vecteur $\alpha$ -stable (dans $\mathbb{R}^d$ )

De manière générale, la simulation des vecteurs  $\alpha$ -stables est assez ardue, car elle nécessite la simulation de la mesure spectrale qui contient toute l'information sur la structure de dépendance du vecteur. Pour simplifier ce problème, il est possible de considérer une mesure spectrale discrète, comme proposée dans (Modarres & Nolan, 1994; Nolan, 1998).

Une mesure spectrale discrète s'exprime de la manière suivante :

$$\Gamma(\cdot) = \sum_{k=1}^{N_s} l_k \delta_{s_k}(\cdot) \quad (2.1.5)$$

Où  $l_k$  correspond à des poids et  $\delta_{s_k}$  est une mesure de Dirac aux points  $s_k$ .

Dans le cas d'une distribution  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $N_s$  points de masse, on a  $s_k = \{\cos \theta_k, \sin \theta_k\}$  avec  $\theta_k = 2\pi(k-1)/N_s$ .

Sous l'hypothèse d'une densité spectrale discrète, (Modarres & Nolan, 1994) proposent de générer un vecteur aléatoire stable dans  $\mathbb{R}^d$ , par la formule suivante :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_s} (\Gamma_k)^{1/\alpha} V_k s_k + \mu^0 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \sum_{k=1}^{N_s} \Gamma_k \left( V_k + \frac{2}{\pi} \ln(\Gamma_k) s_k \right) + \mu^0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Avec  $V_1, \dots, V_{N_s}$  sont des variables aléatoires  $\alpha$ -stables indépendantes et identiquement distribuées, normalisées et totalement asymétriques à droite (i.e.  $V_k \sim S_{\alpha,1}(0,1)$ ).

## 2.2. Techniques d'estimation des paramètres d'une distribution stable

Comme nous l'avons dit plus haut, il existe différentes techniques d'estimation des quatre paramètres des distributions stables univariées, il y'a celles qui sont fondées sur les fractiles (Fama & Roll, 1971; McCulloch, 1986), Celle fondés sur les fonctions caractéristiques ou leur transformée, on peut trouver la méthode de régression itérative simple ou pondéré qui a été développé parallèlement par (Koutrouvelis, 1980; Koutrouvelis & Kellermeier, 1981) et dans le cas des distribution stables symétriques par (Arad, 1980), la méthode des moments développé par (Press, 1972), la méthodes des polynômes hermitiens (Paulson et al., 1975), ou la transformation de fourrier par (Brockwell & Brown, 1981). Nous avons aussi l'estimation à partir de la méthode du maximum de vraisemblance développé initialement par (DuMouchel, 1971, 1975), etc.....

### 2.2.1. Méthodes fondées sur les quantiles dans $\mathbb{R}^1$

Comme le titre l'indique, Les méthodes présentées dans cette partie utilisent les quantiles afin d'estimer les paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable

**a) Méthode de Fama-Roll** (Fama & Roll, 1971)

Fama et Roll ont développé une méthode permettant d'estimer les paramètres des distributions  $\alpha$ -stables symétrique (i.e.  $\beta = 0$ ), dont la fonction caractéristique correspondante  $\varphi_X(\xi) = e^{\psi(\xi)}$  est définie par la forme A, comme suit :

$$\psi(\xi) = i\mu\xi - |\gamma\xi|^\alpha, \quad \alpha \geq 1. \quad (2.2.1)$$

Comme, on peut le constater, nous avons plusieurs contraintes dans ce cas, puisque les distributions doivent être symétriques  $S_\alpha(0, \mu, \gamma)$  et  $\alpha \in [1, 2]$ . Dans cette approche, Fama et Roll définissent des estimateurs de la composante caractéristique  $\alpha$  et du paramètre d'échelle  $\gamma$  simplement à partir des fractiles empiriques, tandis que l'estimation du paramètre de localisation est faite à partir des moyennes tronquées. Les résultats de cette méthode sont résumés comme suit (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 230-231) :

(i) **Estimation du paramètre d'échelle  $\gamma$**  : la démarche de Fama et Roll pour l'estimation du paramètre d'échelle est fondée sur et l'idée se choisir les quantiles appropriés  $x_q$  de tel sorte que l'estimation de  $\gamma$  ne soit pas dépendante de la caractéristique  $\alpha$  (ou du moins que légèrement). Ils ont pu observer que  $(x_{0.28} - x_{0.72})/\gamma$  se situe à 0.4% de 1.654 pour toutes les valeurs de  $\alpha \in [1, 2]$  lorsque  $\beta$  est au voisinage de 0, en particulier, le quantile 0,72 d'une distribution symétrique stable réduite se situe dans l'intervalle  $0.823 \pm 0.003$  pour  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Cela leur permet d'estimer  $\gamma$ , sans avoir besoin de connaître  $\alpha$  avec un biais asymptotique inférieur à 0.4%. Pour un échantillon aléatoire de  $n$  observations, nous avons l'estimateur suivant (Fama & Roll, 1971, p. 331):

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2(0.827)} (\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28})$$

Qui donne :

$$\hat{\gamma} = (\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28})/1.654 \quad (2.2.2)$$

où  $\hat{x}_q$  fait référence à la statistique d'ordre  $(q)(n + 1)$ , qui est utilisée pour estimer  $x_q$  (i.e.  $\hat{x}_q = x_{([nq]+1)}$ , avec  $x_{(i)}$  est la série ordonnée)

– *Propriété de l'estimateur de  $\gamma$*

- L'estimateur  $\hat{\gamma}$  a un biais asymptotique inférieur à 0.4%,
- $\hat{\gamma}$  est asymptotiquement distribué suivant une loi normale (étant une combinaison linéaire de statistiques d'ordre) avec une variance égale à :

$$Var(\hat{\gamma}) = \frac{2(0.72 - 0.28)0.28}{n(f(\alpha, 0.72))^2} \left( \frac{1}{1.654} \right)^2 \quad (2.2.3)$$

Et un écart type :

$$\sigma_{\hat{\gamma}} = \sqrt{Var(\hat{\gamma})} \approx \frac{0.300}{\sqrt{n}f(\alpha, 0.72)}$$

Où  $f(\alpha, q)$  est la densité symétrique stable de la distribution de  $Y$  évaluée au quantile  $q = 0.72$  de l'échantillon et  $n$  est le nombre d'observation. Comme la symétrie est supposée, la distribution de  $\gamma$  ne dépend pas du paramètre de localisation  $\mu$  de la variable aléatoire sous-jacente  $Y$ . L'échelle de  $Y$  affecte la variance asymptotique de  $\hat{\gamma}$  par l'intermédiaire de la densité  $f(\hat{x}_{0.72}, \alpha)$  qui apparaît au dénominateur de (2.2.3). Pour une distribution stable symétrique non réduite (i.e.  $\gamma \neq 1$ ),  $Var(\hat{\gamma})$  est, bien sûr,  $\gamma^2$  fois plus grande que  $Var(\hat{\gamma})$  pour  $\gamma = 1$ .

(ii) **Estimation de  $\alpha$**  : En ce qui concerne l'exposant  $\alpha$ , Fama et Roll affirment que plus  $\alpha$  est petit, plus les distributions stables sont « à queue épaisse ». Avec des distributions standardisées, par exemple, le quantile d'ordre 0,95 décroît de façon monotone de 6,31 pour  $\alpha = 1$  à 2,33 pour  $\alpha = 2$ .

Ce comportement des quantiles supérieurs suggère un estimateur simple de  $\alpha$  basé sur des statistiques d'ordre. L'estimateur de  $\hat{\alpha}_q$  dépend de  $q$  et le choix de  $q$  dépend de la vraie valeur de  $\alpha$ . Alors, pour des valeurs de quantiles  $q$  élevés (par exemple  $q = 0.95$ ), Fama et Roll proposent de commencer d'abord par calculer à partir de l'échantillon la quantité suivante :

$$\hat{z}_q = \frac{\hat{x}_q - \hat{x}_{1-q}}{2\hat{\gamma}} = 0.827 \frac{\hat{x}_q - \hat{x}_{1-q}}{\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28}} \quad (2.2.4)$$

Étant donné que  $Y$  est une variable symétrique stable, d'indice de queue  $\alpha$  et de paramètre d'échelle  $\gamma$ ,  $\hat{z}_q$  semble être un estimateur du  $q$ -fractile d'une distribution stable standard strictement symétrique  $S_\alpha(0,0,1)$  (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 231). Ainsi, une estimation de  $\alpha$  peut être obtenue à partir d'une « table » de fonctions de distribution cumulative de  $S_\alpha(0,0,1)$ , comme celle donnée par (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 598-601) ou (Brothers et al., 1983).

Soit  $H(\cdot)$  est une fonction qui associe de manière unique le fractile  $z_q$  et la probabilité cumulative  $q$  à  $\alpha$ , et notons par  $\hat{\alpha}_q$  l'estimateur de  $\alpha$ , dont le fractile correspond le plus étroitement possible à  $\hat{z}_q$  (où  $\hat{z}_q$  est le fractile d'échantillon donné par (2.2.4)), Alors on peut écrire :

$$\hat{\alpha}_q = H(q, \hat{z}_q)$$

Autrement dit, Fama et Roll, estiment  $\alpha$  en comparant la quantité  $(\hat{x}_q - \hat{x}_{1-q})/\hat{\gamma}$  à la table de  $(x_q - x_{1-q})/\gamma$  quand  $q$  est dans la région de la queue de distribution. Ils ont trouvé que plus la valeur du quantile  $q$  est élevée ( $q = 0.95, 0.96$  ou  $0.97$ ), plus l'estimation est meilleure. Les auteurs proposent comme estimateur robuste de  $\alpha$  le paramètre  $\hat{\alpha}_k$  défini comme suit :

$$\hat{\alpha}_k = \frac{\hat{\alpha}_{0.93} - \hat{\alpha}_{0.99}}{2} \quad (2.2.5)$$

**Estimation du paramètre de localisation  $\mu$**  : une variable stable à une moyenne finie quand  $\alpha \in [1,2]$ , et dans ce cas la moyenne de l'échantillon peut être considéré comme un estimateur classique et cohérent du paramètre de localisation  $\mu$ , et la moyenne de l'échantillon tronquée d'ordre  $k$  est considérée comme un estimateur plus robuste de  $\mu$ , elle

est obtenue en supprimant les  $[kn/2]$  premières et  $[kn/2]$  dernières observations de l'échantillon trié, définies par :

$$\bar{X}_{tr}(k, n) = \frac{1}{n - kn} \sum_{i=(kn/2)+1}^{n-(kn/2)} x_{(i)} [kn/2]$$

Fama et Roll, propose pour les distributions stables, d'estimer le paramètre de localisation par la moyenne d'échantillon tronquée à 50% (localisation à l'égard de la médiane). Ils ont montré que pour une taille d'échantillon  $n = 100$ , la moyenne tronquée à 50 pour cent fonctionne à peu près aussi bien que les moyennes tronquées à 25 et 75 pour cent pour les distributions stables symétriques pour  $1.1 \leq \alpha \leq 1.7$ . Le calcul de  $\hat{\mu}$  pour 301 échantillons indépendants de taille 101 de  $Y \sim S_{\alpha,0}(3/2, 0)$  a produit l'estimation de 0,144 pour l'écart-type de  $\hat{\mu}$  (Uchaikin & Zolotarev, 1999, p. 230). Comme indiqué dans (Essama & Mai, 1994), la valeur de  $k$  dépend du paramètre de position  $\alpha$  (voir tableau 2.2.1).

Tableau. 2.2 1. Valeur optimale de  $k$  (pour la moyenne tronquée) en fonction de  $\alpha$ .

$\alpha$	$k$
[1; 1.3]	75%
(1.3;1.7]	50%
(1.7;2]	25%

Source (Essama & Mai, 1994, p. 142)

En conclusion, la méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle présente certains handicaps ou désavantages tels que : l'interdépendance des estimateurs et le fait que les estimateurs obtenus soient légèrement asymptotiquement biaisés ; sans oublier que les conditions imposées aux paramètres sont très restrictives.

**b) Méthode de McCulloch** (McCulloch, 1986)

Cette méthode est une généralisation de l'approche de Fama-Roll, son avantage est qu'elle peut être utilisée pour toutes les distributions stables, pas seulement les distributions symétrique (*i. e.*  $\beta \in [-1,1]$ ), d'autant plus qu'elle permet d'éliminer le petit biais asymptotique dans les estimateurs Fama et Roll. McCulloch a proposé d'estimer les quatre paramètres d'une distribution stable d'une manière cohérente à partir de cinq quantiles d'échantillons prédéterminés à l'aide des tableaux exposé dans son article 'Simple consistent estimators of stable distribution parameters' (McCulloch, 1986). Les estimateurs sont asymptotiquement Normalement distribués avec des erreurs types asymptotiques calculables. La seule contrainte de cette méthode est qu'elle est valable seulement pour  $\alpha \in [0.6,2)$ .

Dans son article, McCulloch , a aussi adopté la définition proposée par (Zolotarev, 1957, p. 441), dans laquelle le log des fonctions caractéristiques des distributions stables  $S_{\alpha}(\beta, \mu, \gamma)$  doit avoir la forme :

$$\psi(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma) = \begin{cases} i\mu\xi - \gamma|\xi|^{\alpha} \left(1 - i\beta(\text{sign } \xi) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ i\mu\xi - \gamma|\xi| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(\text{sign } \xi) \ln|\xi|\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Supposons maintenant que nous avons une suite d'observations  $(x_1, \dots, x_n)$  distribué suivant une loi stable  $S_\alpha(\beta, \mu, \gamma)$ , dont les paramètres sont à estimer. Notons par  $F(x; \alpha, \beta, \mu, \gamma)$  sa fonction de répartition, alors l'approche de McCulloch pour l'estimation de ces quatre paramètres est résumée comme suit :

**Etape 1 : estimation des quantiles**

Soit  $x_q$  le  $q$ -ème quantile de la population, Alors  $F(x_q ; \alpha, \beta, \mu, \gamma) = q$  et soit  $\hat{x}_q$  le quantile de l'échantillon empirique correspondant ( $\hat{x}_q$  l'estimateur du quantile  $x_q$ ), convenablement corrigé pour la continuité. Plus précisément, dans l'approche de McCulloch les quantiles utilisés pour l'estimation des paramètres sont corrigé d'un terme qui prend en compte la continuité entre deux valeurs adjacentes (les  $x_i$  sont classés par ordre croissant, une correction peut être effectuée en identifiant  $x_i$  avec  $\hat{x}_{l(i)}$ , où  $l(i) = (2i - 1)/(2n)$ , alors l'interpolation linéaire de  $q$  est obtenue à partir des deux valeurs adjacentes de  $q(i)$ , sans une telle correction, une fausse asymétrie serait présente dans des échantillons finis (McCulloch, 1986, p. 1114)) .

Soit  $x_{(i)}$  La série ordonnée, alors les quantiles d'ordre peuvent être estimés par :

$$\hat{x}_q = \begin{cases} x_{([nq]+1)} & \text{si } nq \in \mathbb{N} \\ x_{(n_1)} \frac{x_{(n_2)} - x_{(n_1)}}{n_2 - n_1} (nq - n_1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où  $\exists n_1, n_2$  deux nombres entiers consécutifs encadrant  $nq$  tels que  $n_1 < nq < n_2$ , i.e.  $n_1 = [nq]$  et  $n_2 = [nq] + 1$ . (Essama & Mai, 1994, p. 142)

**Etape 2 : Estimation de  $\alpha$  et de  $\beta$**

McCulloch, défini alors les deux quantités suivantes

$$v_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}} \tag{2.2.6}$$

$$v_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}} \tag{2.2.7}$$

Ces deux indices sont indépendants des deux paramètres  $\mu$  et  $\gamma$ . Les valeurs de  $v_\alpha$  sont définies en tant que fonction  $\phi_1(\alpha, \beta)$  qui est strictement décroissante en  $\alpha$  et  $v_\beta$  en tant que  $\phi_2(\alpha, \beta)$  qui est une fonction strictement croissante en  $\beta$  pour tout  $\alpha$ . Ces deux fonctions sont tabulées (voir Annexe 1), leurs tables (table I et II (McCulloch, 1986, p. 1115-1116)) sont dérivées de la tabulation de DuMouchel.

On a donc les deux relations suivantes

$$v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta) \tag{2.2.8}$$

$$v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta) \tag{2.2.9}$$

Qui peuvent être inversées, et on obtient :

$$\alpha = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta) \quad (2.2.10)$$

$$\beta = \Psi_2(v_\alpha, v_\beta) \quad (2.2.11)$$

A partir de là, on peut construire des estimateurs cohérents de  $\alpha$  et de  $\beta$ , comme suit :

$$\hat{\alpha} = \Psi_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta) \quad (2.2.12)$$

$$\hat{\beta} = \Psi_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta) \quad (2.2.13)$$

Où

$$\hat{v}_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \quad \text{et} \quad \hat{v}_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.5}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}} \quad (2.2.14)$$

Les fonctions  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont aussi données sous forme de table par (McCulloch, 1986, p. 1117-1118), table III pour l'estimation de  $\alpha$  et table IV pour l'estimation de  $\beta$ , voir aussi annexe 1. On commence donc par estimer  $\alpha$  en premier à partir de la table III, en utilisant l'interpolation linéaire bidimensionnelle, puis pour  $\hat{\alpha}$ , on estime  $\beta$  à partir de la table IV d'une façon analogue.

Pour réduire l'erreur d'échantillonnage des quantiles pour des échantillons finis, McCulloch s'est basé sur l'approche de Fama et Roll pour l'estimation de  $\alpha$  sur la plage interquartile 0.95 et 0.05, où il a choisi la plus petite valeur de  $q$  parmi les trois valeurs citées par eux comme satisfaisantes pour  $q$  ( $q = 0.95, 0.96$  ou  $0.97$ ). Il a précisé que d'autres quantiles peuvent être légèrement plus efficaces, mais que son objectif n'est pas une efficacité complète (qui peut être obtenue avec la vraisemblance maximale) mais plutôt la commodité et la simplicité.

### Remarques .2.2.1.

- Il est possible que  $\hat{v}_\alpha$  soit hors échelle, *i.e.* sa valeur est inférieure à la plus petite valeur admissible sur les tables qui est de 2,439, dans ce cas,  $\alpha$  doit être fixé et prendra la valeur 2.
- Il est également possible d'avoir des erreurs d'échantillonnage conduisant à ce que  $|\hat{v}_\beta|$  soit trop élevé pour être cohérent avec  $\hat{v}_\alpha$  dans ce cas  $\beta$  doit être aussi fixé à son tour et prendra la valeur  $\pm 1$  et  $\hat{\alpha}$  peut être placé de manière cohérente n'importe où entre la valeur la plus élevée et la plus basse de  $\alpha$  avec  $\hat{v}_\alpha$  à  $\beta \pm 1$ .
- Pour permettre une interpolation linéaire à partir des tables III et IV sans biais lorsque l'asymétrie est presque maximale, des « valeurs virtuelles » de  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être obtenus par extrapolation des tableaux I et II pour les paires adjacentes impropres (inadmissibles)  $(v_\alpha, v_\beta)$  aux paires admissibles dans les tableaux III et IV.
- Si  $|\hat{\beta}| > 1$ , où  $\hat{\beta}$  est l'estimateur de  $\beta$  à partir du tableau IV, alors  $\hat{\beta}$  doit donc être ramené (tronqué) à  $\pm 1$ .

**Etape 3 : Estimation du paramètre d'échelle  $\gamma$**

L'estimation de  $\gamma$  se déduit de  $\alpha$  et  $\beta$  obtenus précédemment. McCulloch, définit alors la quantité suivante :

$$v_\gamma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\gamma} \quad (2.2.15)$$

Par la fonction  $v_\gamma$  (fonction tabulée : voir Table V en annexe 1)

$$v_\gamma = \phi_3(\alpha, \beta) \quad (2.2.16)$$

Etant donné que  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  et  $\hat{x}_q$  sont tous des estimateurs consistants, on a alors l'estimateur du paramètre d'échelle défini comme suit :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (2.2.17)$$

La méthode de McCulloch d'estimation du paramètre d'échelle ne dépend pas de la constance de la plage interquartile utilisée pour l'estimation, c'est pour cette raison, que la plage interquartile 0.72-0.28 utilisée par Fama et Roll a été remplacée par 0.75-0.25.

**Etape 4 : Estimation du paramètre de localisation  $\mu$**

Au départ, McCulloch définit la quantité  $v_\mu$  par la fonction tabulée  $\phi_4(\alpha, \beta)$  (Table VI, Annexe 1) pour l'estimation du paramètre de localisation, par :

$$v_\mu = \phi_4(\alpha, \beta) = \frac{\mu - x_{0.5}}{\gamma} \quad (2.2.18)$$

Dans ce cas, le paramètre de localisation  $\mu$  peut facilement être estimé par

$$\hat{\mu} = \hat{\gamma}\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + \hat{x}_{0.5} \quad (2.2.19)$$

Cependant, dans ce cas l'interpolation peut être dénuée de sens entre  $\alpha = 0.9$  et  $\alpha = 1.1$  ( $\alpha$  au voisinage de 1), car les interpolations linéaires sont très imprécises dans ce cas, à moins que  $\alpha$  soit assez loin de 1. Pour mieux appréhender ce problème, McCulloch propose une réflexion sur la signification du paramètre de localisation (ou de position), par rapport à la notion de stabilité des distributions  $\alpha$ -stables.

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une suite de  $n$  variables aléatoires  $\alpha$ -stables indépendantes et identiquement distribuées de paramètres  $(\alpha, \beta, \mu, \gamma)$ , alors la moyenne résultante  $\sum_{i=1}^n X_i$  à une distribution stable de la même forme, *i.e.* avec les mêmes paramètres de stabilité et d'asymétrie que  $X_i$  (resp.  $\alpha$  et  $\beta$ ). McCulloch définit le point focal de la stabilité de distribution stable, par le fait que tout quantile doit rester stationnaire après une telle moyennisation.

Sachant que le paramètre d'échelle de  $\sum_{i=1}^n X_i$  est égale à  $\gamma n^{(1/\alpha)-1}$  (qui peut être facilement démontré à partir de la fonction caractéristique), McCulloch, indique alors, que pour  $\alpha > 1$  (resp.  $\alpha < 1$ ), il y a un centre de stabilité unique des quantiles des  $X_i$  et que les

quantiles de  $\sum_{i=1}^n X_i$  convergeront (*resp.* Divergent) vers ce même centre lorsque  $n$  augmente ; dans les deux cas, le foyer de stabilité est le paramètre de localisation traditionnel  $\mu$ , qui est invariant par moyennisation dans ce cas. Cependant, lorsque  $\alpha = 1$ , le paramètre d'échelle de  $\sum_{i=1}^n X_i$  est égale à  $\gamma$  donc le même que le paramètre d'échelle de  $X_i$ , ce qui implique soit que chaque quantile est un centre (foyer) de stabilité, ce qui est vrai dans le cas de la distribution de Cauchy  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . Ou bien que la distribution n'a aucun centre de stabilité, ce qui se produit lorsque  $\beta \neq 0$ . Lorsque  $\alpha = 1$  et  $\beta > 0$ , tous les quantiles se décalent d'une quantité égale vers la droite sous la moyenne, tandis qu'avec  $\alpha = 1$  et  $\beta < 0$ , tous les quantiles se décalent d'une quantité égale vers la gauche sous la moyenne. Dans ces cas, le paramètre de localisation traditionnel n'a pas de signification particulière. C'est simplement un quantile arbitraire qui sert à simplifier la fonction caractéristique

Le sens de la discontinuité ici, lorsque  $\alpha = 1$  et  $\beta \neq 0$  n'est pas tant une discontinuité dans la distribution qu'une discontinuité dans le centre de stabilité. Lorsque  $\alpha$  s'éloigne de la valeur 1, les quantiles changent légèrement. Cependant, lorsque  $\alpha$  est proche de 1, pour  $\beta > 0$  (*resp.*  $\beta < 0$ ) le centre de stabilité se déplace vers  $+\infty$  (*resp.*  $-\infty$ ) lorsque  $(\alpha \rightarrow 1^+)$  et vers  $-\infty$  (*resp.*  $+\infty$ ) lorsque  $(\alpha \rightarrow 1^-)$ , et pour  $\beta = 0$ , le centre de stabilité n'existe, soit il couvre toute la droite réelle lorsque  $\alpha = 1$ .

Pour remédier à ce problème, McCulloch se tourne vers la paramétrisation (Z) de Zolotarev. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.3, dans la remarque 1.2.6, Zolotarev a résolu le problème de discontinuité des paramétrisations que nous avons notées  $\psi_F$ ,  $\psi_{ST}$ ,  $\psi_A$  et  $\psi_B$  lorsque  $\alpha = 1$  et  $\beta \neq 0$  en effectuant une légère modification du paramètre de localisation de la façon suivante :

$$\mu_z = \begin{cases} \mu + \beta \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = \begin{cases} \delta\mu_z - \delta\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu_z & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

A partir de là, McCulloch, définit la nouvelle quantité  $v_{\mu_z}$  par la fonction  $\phi_5(\alpha, \beta)$  tabulé (Table VII, Annexe 1), par :

$$v_{\mu_z} = \phi_5(\alpha, \beta) = \frac{\mu_z - x_{0.5}}{\gamma} \quad (2.2.20)$$

Et  $\widehat{\mu}_z$  comme estimateur consistant de  $\mu_z$ , et il est défini par :

$$\widehat{\mu}_z = \widehat{\gamma} \phi_5(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) + \widehat{x}_{0.5} \quad (2.2.21)$$

Nous sommes en mesure maintenant de définir un estimateur consistant du paramètre de position  $\mu$  :

$$\widehat{\mu} = \begin{cases} \widehat{\mu}_z - \widehat{\beta} \widehat{\gamma} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \widehat{\mu}_z & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.22)$$

L'estimation du paramètre de localisation par la formule (2.2.22), donne pratiquement le même résultat que la formule (2.2.19), seulement dans le cas où  $\alpha$  s'éloigne suffisamment de la valeur 1. Dans le cas où  $\alpha$  est au voisinage de 1, le paramètre de localisation  $\mu$  peut devenir assez éloigné du centre de l'échantillon observé, et peut même se situer en dehors de

celui-ci. Si  $\alpha$  est sensiblement différente de 1, la valeur réelle des paramètres de localisation peut se situer n'importe où. En général,  $\mu_z$  n'a pas de signification particulière en soi. Il est préférable de le considérer comme un simple outil qui permet de passer facilement des quantiles de la distribution au point focal de la stabilité.

**Remarques .2.2.2.** Comme, nous l'avons vu plus haut, Fama et Roll utilisent la moyenne tronquée à 50% comme estimateur du paramètre de localisation. Cependant, lorsque  $\beta \neq 0$  et  $\alpha > 1$ , cette statistique n'est plus un estimateur sans biais de  $\mu$ . McCulloch, indique dans son article qu'un estimateur du paramètre de localisation en fonction de la moyenne tronquée à 50% serait sans doute un peu plus efficace que celui qu'il a proposé (du moins pour  $\alpha > 1$ ). Son choix c'est donc porté sur la médiane par souci de simplicité.

### 2.2.2. Méthodes fondées sur la fonction caractéristique dans $\mathbb{R}^1$

Pour l'estimation des paramètres de la loi  $\alpha$ -stable, d'autres méthodes sont fondées sur l'utilisation de la fonction caractéristique empirique  $\hat{\varphi}$  et ses propriétés. Plus particulièrement, la loi des grands nombres permet de dire que la fonction caractéristique empirique  $\hat{\varphi}$  est un estimateur cohérent de  $\varphi$ . Autrement dit, l'approche de ces méthodes repose sur l'idée d'obtenir la fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $\alpha$ -stable la plus proche possible de la fonction caractéristique empirique, qui quant à elle est définie par la formule suivante :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp(i\xi x_k) \quad (2.2.23)$$

Où  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une suite d'observations  $\alpha$ -stables de paramètres  $(\alpha, \beta, \mu, \gamma)$ . Notons que  $\{\hat{\varphi}(\xi), -\infty < \xi < +\infty\}$  est un processus stochastique et que  $\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{\varphi}(\xi)| < 1$  (borné par l'unité), et que les moments de  $\hat{\varphi}(\xi)$  sont finis.

La formule (2.2.23) peut être réécrite sous sa forme polaire comme suit :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\xi x_k) \right) + i \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\xi x_k) \right) \quad (2.2.24)$$

Dans la suite de cette sous-section, nous allons poser :

$$C(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\xi x_k) \quad \text{et} \quad D(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\xi x_k) \quad (2.2.25)$$

Alors :

$$\hat{\varphi}(\xi) = C(\xi) + i D(\xi) \quad (2.2.26)$$

Notons que dans le cas des distributions strictement stables symétrique *StaS* (i.e.  $\beta = \mu = 0$ ) que, la fonction caractéristique empirique est réelle et elle a la forme suivante (Weron, 1995) :

$$\hat{\varphi}(\xi) = C(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\xi x_k)$$

Dans cette partie, nous allons décrire par ordre chronologique les trois techniques les plus connues et utilisées, et qui ont servi de référence pour différentes extensions. Nous allons commencer par le critère de minimum de distance (Paulson et al., 1975; Press, 1972), puis la méthode des moment introduite par (Press, 1972), et on termine par la méthode des régressions itératives (simple ou pondérée) développée (Koutrouvelis, 1980)

Tous ces auteurs ont adopté la paramétrisation de (Gnedenko & Kolmogorov, 1954, p. 164), pour décrire la fonction caractéristique stable  $\varphi(\xi) = \exp \psi(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma)$ , dans leurs articles initiaux, où  $\psi$  est donc donnée par la formule :

$$\psi(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma) = i\mu\xi - \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \left( 1 + i\beta \frac{\xi}{|\xi|} v(\xi, \alpha) \right) \quad (2.2.27)$$

Où

$$v(\xi, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi}{2} \alpha & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.28)$$

On rappelle que dans cette paramétrisation que le signe qui précède  $\beta$  est inversé quand  $\alpha \neq 1$ . Dans ce cas  $\beta$  est positif (resp. Négatif) lorsque la distribution est asymétrique à gauche (resp. à droite), et que c'est cette convention qui prête à confusion (Weron, 1995, p. 2). C'est pour cette raison qu'il est préférable d'utiliser le signe (-) avant le terme  $\beta$ , ce qui donne la paramétrisation standard :

$$\psi(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma) = \begin{cases} i\mu\xi - \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \left( 1 - i\beta \frac{\xi}{|\xi|} \tan \frac{\pi}{2} \alpha \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ i\mu\xi - \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \left( 1 + i\beta \frac{\xi}{|\xi|} \frac{2}{\pi} \ln |\xi| \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.29)$$

Qui n'est donc que la formule (2.2.25) avec

$$v(\xi, \alpha) = \begin{cases} -\tan \frac{\pi}{2} \alpha & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.30)$$

Nous allons utiliser dans la suite de cette sous-section, la forme (2.2.29), en se basant sur le rapport de recherche de Rafal Weron intitulé 'Performance of the estimators of stable law parameters', où il fait une analyse constructif des différentes méthode d'estimation des paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable (Weron, 1995).

### a) L'approche de la distance minimale

#### (i) Méthode de Press (Press, 1972)

Press a été le premier à proposer une estimation implicite des quatre paramètres en utilisant la distance comme critère. Effectivement, on considère que deux fonctions de distribution sont égales si et seulement si leurs fonctions caractéristiques respectives coïncident sur  $-\infty < \xi < +\infty$ , ainsi que  $\hat{\varphi}(\xi)$  contient des informations utiles concernant la densité stable  $f(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma)$  et est, de plus, un estimateur cohérent de  $\varphi(\xi)$ . Il devrait être

possible d'extraire des informations sur  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\gamma$  à partir de  $\widehat{\varphi}(\xi)$  en déterminant les estimateurs respectifs  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}$  et  $\widehat{\gamma}$  qui minimisent la distance entre la fonction caractéristique théorique et la fonction caractéristique empirique.

Les deux mesures de distance les plus utilisés sont la distance minimale que nous allons noter  $g(\cdot)$  et la distance minimale d'ordre  $r$ , notée  $g_r(\cdot)$  (Essama & Mai, 1994, p. 145), définies par

$$g(\alpha, \beta, \mu, \gamma) = \text{Sup}_{\xi} \{ |\widehat{\varphi}(\xi) - \varphi(\xi)| \} \quad (2.2.31)$$

et

$$g_r(\alpha, \beta, \mu, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t) - \varphi(t)|^r W(t) dt, \quad r \geq 1 \quad (2.2.32)$$

$W(t)$  est une fonction de pondération (une fonction de poids qui permet de garantir la convergence de l'intégrale), il est possible de choisir entre les deux fonctions suivantes :

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) \quad \text{ou} \quad W(t) = \exp|t|$$

**Procédure d'estimation** : elle consiste à minimiser (2.2.31), ou (2.2.32) pour  $r \geq 1$ , selon le critère de distance.

Press a démontré que les estimateurs sont cohérents et que la loi asymptotique de ces estimateurs est une loi normale centrée réduite, mais il n'a pas analysé leurs efficacités. Cette méthode présente un l'avantage qu'elle peut être directement être généralisée pour l'estimation des paramètres des lois stables multivariées.

**(ii) Méthodes de polynômes hermitiens** (Paulson et al., 1975)

Paulson, Holcomb et Leitch tentent d'estimer les paramètres d'une distribution stable en utilisant le critère de minimum de distance par une approche polynomiale. Ils proposent donc d'utiliser la distance minimale d'ordre  $r$  avec  $r = 2$  (pour une plus grande flexibilité) et  $W(t) = \exp(-t^2)$  pour l'avantage de calcul qu'elle apporte en association aux polynômes d'Hermite (force la convergence de l'intégrale (2.2.32))

Dans ce cas la formule (2.2.30) devient :

$$g_r(\alpha, \beta, \mu, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t) - \varphi(t)|^2 e^{-t^2} dt \quad (2.2.33)$$

**Procédure d'estimation** : déterminer  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}$  et  $\widehat{\gamma}$  qui minimisent (2.2.33), i.e. qui vérifient :

$$I^* = \min_{\alpha, \beta, \mu, \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(t) - \varphi(t)|^2 e^{-t^2} dt \quad (2.2.34)$$

Pour simplifier la minimisation, Paulson et *all.* ont eu recours à une transformation algébrique élémentaire de  $g_r(\alpha, \beta, \mu, \gamma)$  qui a permis de réécrire la formule d'intégration (2.2.30) sous une forme plus pratique. Pour cela, on définit la fonction  $\lambda(t)$  par :

$$\lambda(t) = |\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)|^2 \quad (2.2.35)$$

Où  $|z|$  est le module du nombre complexe  $z = a + ib$  (i. e.  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ), Alors

$$|\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)|^2 = \left( \Re(\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)) \right)^2 + \left( \Im(\hat{\varphi}(t) - \varphi(t)) \right)^2 \quad (2.2.36)$$

A partir de (2.2.25) et (2.2.26). ; On a

$$\begin{cases} \Re(\hat{\varphi}(t)) = C(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(tx_k) \\ \Im(\hat{\varphi}(t)) = D(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(tx_k) \end{cases} \quad (2.2.37)$$

On a aussi  $\varphi(t) = \exp(\psi(t))$ , et à partir de (2.2.27), on peut réécrire,  $\psi(\xi)$  de la forme suivante

$$\psi(t) = -\gamma^\alpha |t|^\alpha + i \left( \mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{t}{|t|} v(t, \alpha) \right)$$

Où  $v(t, \alpha)$  est définie par la formule (2.2.28)

On pose maintenant,  $h(t) = -\gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{t}{|t|} v(t, \alpha)$ , on obtient alors

$$\psi(t) = -\gamma^\alpha |t|^\alpha + i(\mu t + h(t)) \quad (2.2.38)$$

et

$$\varphi(t) = \exp \left( -\gamma^\alpha |t|^\alpha + i(\mu t + h(t)) \right) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} e^{i(\mu t + h(t))} \quad (2.2.39)$$

On sait que  $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$ , alors (2.2.37) devient :

$$\varphi(t) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} (\cos(\mu t + h(t)) + i \sin(\mu t + h(t))) \quad (2.2.40)$$

Et on a :

$$\begin{cases} \Re(\varphi(t)) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \cos(\mu t + h(t)) \\ \Im(\varphi(t)) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \sin(\mu t + h(t)) \end{cases} \quad (2.2.41)$$

Maintenant, on est en mesure de réécrire la fonction  $\lambda(t)$  définie par la formule (2.2.35) d'une façon beaucoup plus pratique pour l'estimation. On a :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (C(t) - e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \cos(\mu t + h(t)))^2 \\ &\quad + (D(t) - e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \sin(\mu t + h(t)))^2 \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Où

$$h(t) = \begin{cases} \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi}{2} \alpha & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln|\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(tx_k) \\ D(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(tx_k) \end{cases}$$

Et le problème de minimisation (formule (2.2.32)) pour l'estimation des paramètres devient alors :

$$I^* = \min_{\alpha, \beta, \mu, \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) e^{-t^2} dt \quad (2.2.43)$$

Ce problème de minimisation a été résolu numériquement en utilisant le polynôme d'Hermite de degré 20 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) e^{-t^2} dt = \sum_{i=1}^{20} Y_i \lambda(t_i) \quad (2.2.44)$$

Où les  $t_i$  sont les zéros du polynôme d'Hermite de degré 20 et les  $Y_i$  sont les poids associés à ces zéros (Abramowitz & Stegun, 1964, p. 924; Paulson et al., 1975, p. 165) .

Pour déterminer  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\gamma}$ , il faut :

- 1) Attribuer des valeurs initiales  $\hat{\alpha}_0$ ,  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\mu}_0$  et  $\hat{\gamma}_0$  (Les valeurs initiales sont choisies de telle sorte à tenir compte de toute information antérieure).
- 2) Effectuer l'optimisation sans contrainte de (2.2.43) par une procédure de projection de gradient.

Comme indiqué dans (Paulson et al., 1975, p. 165-166), la procédure ci-dessus a bien fonctionné pour les échantillons  $S_{\alpha, \beta}(0,1)$ ,  $0 < \alpha \leq 2$  et  $-1 \leq \beta \leq 1$  ( pour un paramètre de localisation proche de l'origine et de dispersion avoisinant l'unité) , mais n'a pas réussi à donner des résultats raisonnables pour  $\mu \neq 0$  et  $\gamma \neq 1$  , même si des ordres de grandeur appropriés par rapport à zéro et 1 ont été obtenus. Pour contourner cela et améliorer la méthode, ils ont élaboré une procédure itérative, en commençant par standardiser les données  $x_k$  :

$$x_{ki} = \frac{x_{k0} - d_i}{c_i} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.2.45)$$

Où les  $d_i$  et  $c_i$  sont déterminés par une procédure de recherche. On pose  $\hat{\varphi}_i(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \exp(itx_{ki})$  . Maintenant, le problème revient donc à chercher via la procédure de projection de gradient les valeurs  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$ ,  $\hat{\mu}_i$  et  $\hat{\gamma}_i$  qui réalisent

$$I_i^* = \min_{\alpha, \beta, \mu, \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_i(t) - \varphi(t)|^2 e^{-t^2} dt \quad (2.2.46)$$

Pour plus de détails nous renvoyons les lecteurs intéressés à (Paulson et al., 1975)

### b) Méthode des moments

Press a proposé une méthode d'estimation simple basée sur la transformation de la fonction caractéristique  $\varphi(\xi)$  définie par (2.2.27) par la forme :

$$\varphi(\xi) = |\exp\{-\gamma^\alpha |\xi|^\alpha\}| \quad (2.2.47)$$

Cette approche consiste à utiliser la technique des moments en deux étapes, où la première étape revient à estimer les paramètres de position et d'échelle (resp.  $\alpha$  et  $\gamma$ ) à partir de (2.2.47) (ce qui revient à l'estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  pour une variable *Stas* (i. e.  $\beta = \mu = 0$ ), dont la fonction caractéristique est de la forme  $\varphi(\xi) = \exp\{-\gamma^\alpha |\xi|^\alpha\} = \exp\{-\delta |\xi|^\alpha\}$ , puis dans la seconde étape, estimer les paramètres d'asymétrie et de localisation. Comme indiqué dans (Weron, 1995), la procédure d'estimation par la méthode des moment est résumé comme suit :

**1<sup>er</sup> cas :  $\alpha \neq 1$**

#### *Etape 1 : estimation de $\alpha$ et $\gamma$*

Soient  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux valeurs non nulles de  $\xi$  tels que  $\xi_1 \neq \xi_2$ , alors à partir de (2.2.47), on a :

$$-\ln|\varphi(\xi_k)| = \gamma^\alpha |\xi_k|^\alpha, \quad k = 1,2 \quad (2.2.48)$$

Pour estimer  $\alpha$  et  $\gamma$ , il suffit de calculer :

$$\ln \hat{\gamma} = \frac{\ln|\xi_1| \ln(-\ln|\hat{\varphi}(\xi_2)|) - \ln|\xi_2| \ln(-\ln|\hat{\varphi}(\xi_1)|)}{\ln \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right|} \quad (2.2.49)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln \left| \frac{\ln|\hat{\varphi}(\xi_1)|}{\ln|\hat{\varphi}(\xi_2)|} \right|}{\ln \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right|} \quad (2.2.50)$$

#### *Etape 2 : estimation de $\beta$ et $\mu$*

On commence par définir la fonction  $u(\xi) = \Im m(\ln \varphi(\xi)) = \Im m(\psi(\xi))$ . En remplaçant  $\varphi(\xi)$  par sa valeur (formule (2.2.27)), on obtient

$$u(\xi) = \mu \xi + |\xi|^\alpha \left( \beta \frac{\xi}{|\xi|} \tan \frac{\pi}{2} \alpha \right) \quad (2.2.51)$$

Puis, on considère cette fois deux valeurs non nulles et différentes  $\xi_3$  et  $\xi_4$  ( $\xi_3 \neq \xi_4$ ), on a alors

$$\frac{u(\xi_k)}{\xi_k} = \mu + \beta \left( \gamma^\alpha |\xi_k|^{\alpha-1} \tan \frac{\pi}{2} \alpha \right) \quad (2.2.52)$$

Et

$$\hat{\varphi}(\xi_i) = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\xi_i x_k) \right) + i \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\xi_i x_k) \right), \quad i = 3,4 \quad (2.2.53)$$

En utilisant des opérations élémentaires sur des nombres complexes, on obtient :

$$\tan \hat{u}(\xi) = \frac{\sum_{k=1}^n \cos(\xi x_k)}{\sum_{k=1}^n \sin(\xi x_k)} \quad (2.2.54)$$

En remplaçant  $u(\xi)$  dans (2.2.52) par  $\hat{u}(\xi)$  de (2.2.54), et en remplaçant les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  par leurs estimateurs, puis en résolvant simultanément les deux équations linéaires pour  $\beta$  et  $\mu$ , on obtient les estimateurs

$$\hat{\beta} = \frac{(\hat{u}(\xi_4)/\xi_4) - (\hat{u}(\xi_3)/\xi_3)}{(|\xi_4|^{\hat{\alpha}-1} - |\xi_3|^{\hat{\alpha}-1}) \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \tan(\hat{\alpha}\pi/2)} \quad (2.2.55)$$

Et

$$\hat{\mu} = \frac{|\xi_4|^{\hat{\alpha}-1} (\hat{u}(\xi_3)/\xi_3) - |\xi_3|^{\hat{\alpha}-1} (\hat{u}(\xi_4)/\xi_4)}{|\xi_4|^{\hat{\alpha}-1} - |\xi_3|^{\hat{\alpha}-1}} \quad (2.2.56)$$

Avec :  $\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} = \hat{\delta}$

## 2<sup>nd</sup> cas : $\alpha = 1$

A partir de la formule (2.2.46), on obtient

$$\hat{\gamma} = \frac{-\ln|\hat{\varphi}(\xi_1)|}{|\xi_1|} \quad (2.2.57)$$

En utilisant un raisonnement similaire au cas précédent  $\alpha \neq 1$ , mais pour une forme différente de la fonction caractéristique, on a :

$$\hat{\beta} = \frac{(\hat{u}(\xi_3)/\xi_3) - (\hat{u}(\xi_4)/\xi_4)}{(2/\pi)\hat{\gamma} \ln|\xi_4/\xi_3|} \quad (2.2.58)$$

et

$$\hat{\mu} = \frac{\ln|\xi_4| (\hat{u}(\xi_3)/\xi_3) - \ln|\xi_3| (\hat{u}(\xi_4)/\xi_4)}{\ln|\xi_4| - \ln|\xi_3|} \quad (2.2.59)$$

Cette méthode donne des estimateurs cohérents car ils sont basés sur les estimateurs de  $\varphi(\xi)$ ,  $\Im m(\varphi(\xi))$  et  $\Re e(\varphi(\xi))$ , qui sont connus pour être cohérents. Cependant, la principale faiblesse de cette méthode réside dans le choix optimal des  $t_i$  pour  $i = 1,2,3,4$ . Il semblerait d'après les premiers essais que les résultats soient très sensibles à ces valeurs.

c) **Méthode de régression ou de Koutrouvelis** (Koutrouvelis, 1980, 1981)

Koutrouvelis propose deux méthodes d'estimation à partir de régressions linéaires : une méthode d'estimation économique en deux étapes et une méthode itérative plus coûteuse en temps de calculs. Il identifie les paramètres par des régressions déduites de l'expression du logarithme de la fonction caractéristique, et plus particulièrement à partir de la relation suivante (pour une variable  $St\alpha S$  (i. e.  $\beta = \mu = 0$ )) :

$$\ln(-\ln|\varphi(\xi)|^2) = \ln(2\gamma^\alpha) + \alpha \ln|\xi| \quad (2.2.60)$$

Qui ne dépendent que de  $\alpha$  et  $\gamma$ .

**Méthode 1 : Méthode en deux étapes** (Koutrouvelis, 1980)

L'estimation des paramètres se fait à partir de régressions linéaires non pondérées en deux étapes. Le fait que la formule (2.2.60) ne dépend que de  $\alpha$  et  $\gamma$ , Koutrouvelis suggère de commencer par l'estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  par régression, comme suit :

Pour  $i = 1, \dots, I$ , on pose :

$$y_i = \ln(-\ln|\varphi(u_i)|^2) \quad (2.2.61)$$

Et

$$\vartheta_i = \ln|u_i| \quad (2.2.62)$$

A partir de (2.2.58), on peut écrire le modèle de régression pour l'estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  :

$$y_i = a + \alpha \vartheta_i + \varepsilon_i = a + \alpha \ln|u_i| + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, I \quad (2.2.63)$$

Où  $a = \ln(2\gamma^\alpha)$  et  $\varepsilon_i$  désigne un terme d'erreur

Avec  $(u_i)$  un ensemble approprié de nombres réels, (Koutrouvelis, 1980) propose d'utiliser  $u_i = \pi i/25, i = 1, \dots, I$ , avec  $I$  compris entre 9 et 134 pour différentes estimations du paramètre  $\alpha$  et différentes tailles d'échantillon, car la valeur de  $I$  dépend du paramètre  $\alpha$  et de la taille des échantillons. La valeur de  $I$  peut être déterminée directement à partir du tableau 2.2.1, les valeurs manquantes sont obtenues par interpolation.

Tableau. 2.2.2. Nombre  $i$  en fonction de la taille de l'échantillon et de  $\alpha$  pour  $u_i = \pi i/25$

$\alpha$	$n = 200$	$n = 800$	$n = 1600$
1.9	9	9	10
1.5	11	11	11
1.3	22	16	14
1.1	24	18	15
0.9	28	22	18
0.7	30	24	20
0.5	86	68	56
0.3	134	124	118

Source (Essama & Mai, 1994, p. 164)

(Weron, 1995) a simplifié cette méthode de choix sans perte d'efficacité significative, présenté dans tableau suivant :

Tableau. 2.2 3. Nombre  $i$  de  $u_i = \pi i/25, i = 1, \dots, I$

Indice de queue $\alpha$	Choix de $I$
$< 0.4$	120
$0.4 - 0.6$	20
$0.6 - 1.5$	20
$1.5 - 2$	10

Source (Weron, 1995, p. 13)

Pour la seconde étape, un autre modèle de régression est nécessaire, nous aurons recours aux parties réelle et imaginaire de la fonction caractéristique  $\varphi(\xi)$ . À partir de (2.2.41), et en remplaçant  $\xi/|\xi|$  par la fonction  $sign(\xi)$ , pour  $\alpha \neq 1$ , nous avons :

$$\begin{cases} \Re e(\varphi(\xi)) = e^{-\gamma^\alpha |\xi|^\alpha} \cos\left(\mu\xi + \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \beta sign(\xi) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \\ \Im m(\varphi(\xi)) = e^{-\gamma^\alpha |\xi|^\alpha} \sin\left(\mu\xi + \gamma^\alpha |\xi|^\alpha \beta sign(\xi) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (2.2.64)$$

A partir de (2.2.64), on a la relation importante :

$$Arctan\left(\frac{\Im m(\varphi(\xi))}{\Re e(\varphi(\xi))}\right) = \mu\xi + \beta\gamma^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) sign(\xi)|\xi|^\alpha \quad (2.2.65)$$

Une fois que  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\gamma}_1$  ont été obtenus par le modèle de régression (2.2.63) et que  $\alpha$  et  $\gamma$  ont été fixés à ces valeurs, les estimations de  $\beta$  et  $\mu$  peuvent être obtenues en utilisant (2.2.65), On commence par définir :

$$g_n(t) = \arctan\left(\frac{\Im m(\varphi_n(t))}{\Re e(\varphi_n(t))}\right)$$

Puis, On pose :

$$z = g_n(t) + \pi S_n(t) \quad (2.2.66)$$

Où  $S_n(t)$  est un entier introduit pour tenir compte des éventuelles branches non principales de la fonction  $\arctan(\cdot)$ .

Nous sommes alors en mesure d'estimer  $\beta$  et  $\mu$  en effectuant le modèle de régression suivante :

$$z_l = \mu t_l + \beta\gamma^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) sign(t_l)|t_l|^\alpha + \eta_l \quad l = 1, \dots, L \quad (2.2.7)$$

Où  $\eta_l$  désigne un terme d'erreur. Koutrouvelis (1980) propose d'utiliser  $t_l = \pi l/50, l = 1, \dots, L$ , avec  $L$  compris entre 9 et 70 pour différentes estimations du paramètre  $\alpha$  et des tailles d'échantillon.

Tableau. 2.2 4.  $L$  en fonction de la taille de l'échantillon et de  $\alpha$  pour la régression (2.2.65)

$\alpha$	$n = 200$	$n = 800$	$n = 1600$
1.9	9	10	11
1.5	12	14	15
1.1	16	18	17
0.9	14	14	14
0.7	24	16	16
0.5	40	38	36
0.3	70	68	66

Source (Essama & Mai, 1994, p. 164)

### Procédure d'estimation

**Etape 1** : elle consiste à

- 1) *Initialisation* : on commence par estimer  $\mu$  et  $\gamma$  par une des méthodes fondées sur les quantiles : méthode de Fama et Roll ou méthode de McCulloch (sous-section 2.2.1). Notons par  $\hat{\alpha}_0$  et  $\hat{\gamma}_0$  ces estimateurs. En utilisant la méthode (Fama & Roll, 1971), on aura  $\hat{\gamma}_0 = (\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28})/1.654$  et  $\hat{\mu}_0$  est la moyenne d'échantillon tronquée à 50%.
- 2) Détermination de  $L$  à partir du tableau 2.2.2, puis estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  à partir d'une première régression non linéaire (formule (2.2.63)) sur les données standardisées pour  $k = 1, \dots, n$  :

$$x'_k = \frac{x_k - \mu_0}{\gamma_0} \quad (2.2.68)$$

Notons maintenant par  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\gamma}_1$  les estimateurs, obtenus à partir de la première régression non linéaire (2.2.63).

**Etape 2** : Détermination de  $L$  à partir du tableau 2.2.4, puis en fixant  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\gamma}_1$ , on estime  $\beta$  et  $\mu$  à partir du second modèle de régression non linéaire (formule (2.2.67)) sur les données modifiées :

$$x''_k = \frac{x'_k}{\hat{\gamma}_1} - \mu_c \quad (2.2.69)$$

Où  $\mu_c$  est le terme correctif de continuité du terme  $(g_n(\xi))$  sur l'intervalle  $[0, \pi L/50]$ .

Notons maintenant par  $\hat{\beta}_2$  et  $\hat{\mu}_2$ , les estimateurs, obtenus à partir de la 2<sup>nd</sup> régression non linéaire (2.2.67).

Les indices des paramètres ici (*i. e.*  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \mu_i, i = 1, 2$ ), font référence au modèle de régression utilisé, pour l'estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  on a l'indice 1, pour faire référence à l'étape 1 et donc au premier modèle de régression défini par la formule (2.2.63), pour  $\beta$  et  $\mu$ , on a l'indice 2, qui fait référence à l'étape 2, donc au second modèle de régression défini par la formule (2.2.63).

Les estimateurs de  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\gamma$  sont finalement donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}_2 \\ \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\mu} = \hat{\mu}_0 + \hat{\gamma}(\hat{\mu}_2 + \mu_c) \end{cases} \quad (2.2.70)$$

**Méthode 2 : Méthode itérative** (Koutrouvelis, 1981)

Koutrouvelis propose en 1981 de généraliser la procédure d'estimation par régression en deux étapes (décrite ci-dessus, par une estimation itérative afin de l'affiner et de l'améliorer. Il a montré à travers un certain nombre d'expériences de simulation que dans la plupart des cas, la méthode itérative présente une amélioration en termes d'erreur quadratique moyenne par rapport à la méthode en deux étapes.

En gardant les mêmes notations que dans la méthode de régression à deux étapes, on peut résumer la méthode itérative comme suit :

- **Phase 1 : initialisation**

Elle consiste à estimer  $\hat{\alpha}^{(0)}, \hat{\beta}^{(0)}, \hat{\gamma}^{(0)}$  et  $\hat{\mu}^{(0)}$  à partir des modèles de régression non linéaire (2.2.61) et (2.2.65) sur les données initiales  $x_k$ . *i.e.*, on applique la procédure d'estimation à deux étapes, en gardant les mêmes notations que dans la méthode de régression à deux étapes, on peut résumer :

- (a) Déterminer  $\hat{\alpha}_0$  et  $\hat{\gamma}_0$  par une des méthodes fondées sur les quantiles.
- (b) Déterminer  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\gamma}_1$  à partir de la première régression (2.2.63).
- (c) Déterminer  $\hat{\beta}_2$  et  $\hat{\mu}_2$ , à partir de la 2<sup>nd</sup> régression non linéaire (2.2.67).

Et enfin,  $\hat{\alpha}^{(0)}, \hat{\beta}^{(0)}, \hat{\gamma}^{(0)}$  et  $\hat{\mu}^{(0)}$  sont donc déterminés à partir de (2.2.70).

- **Phase 2**

On commence par modifier les données comme suit :

$$x_k^{(0)} = \frac{x_k - \mu_0}{\gamma_0 \hat{\gamma}^{(0)}} - \mu_c^{(0)} \quad (2.2.71)$$

Itération 1 : On estime  $\hat{\alpha}_1^{(1)}, \hat{\beta}_2^{(1)}, \hat{\gamma}_1^{(1)}$  et  $\hat{\mu}_2^{(1)}$  à partir des modèles de régression

Itération  $m$  :

$$x_k^{(m)} = \frac{x_k - \mu_0}{\gamma_0 \hat{\gamma}^{(m)}} - \mu_c^{(m)} \quad (2.2.72)$$

On estime  $\hat{\alpha}_1^{(m)}, \hat{\beta}_2^{(m)}, \hat{\gamma}_1^{(m)}$  et  $\hat{\mu}_2^{(m)}$  les estimateurs de  $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1$  et  $\hat{\mu}_2$  à l'étape  $m$ . Où  $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1$  et  $\hat{\mu}_2$  sont obtenus par la procédure d'estimation à deux étapes.

- **Critère d'arrêt :**

On commence par

- Fixer l'erreur admissible (un seuil fixé  $\varepsilon$ ) et

- Fixer le nombre maximal d'itérations que nous allons noter *itermax* (par exemple *itermax* = 10). Qui sera nécessaire dans le cas où l'erreur admissible n'est pas atteinte

Puis, on définit, le critère d'arrêt noté  $CR(m)$  par :

$$CR(m) = \left( \hat{\alpha}_1^{(m)} - \hat{\alpha}_1^{(m-1)} \right)^2 + \left( \hat{\mu}_1^{(m)} - \hat{\mu}_1^{(m-1)} \right)^2 \quad (2.2.73)$$

À chaque étape  $m$ , on vérifie que, le critère d'arrêt  $CR(m)$ , n'a pas dépassé le seuil fixé (par exemple  $\varepsilon = 0.01$ ), la convergence de la procédure n'est pas toujours assurée. Lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint, les estimateurs retenus sont ceux de l'étape dont le critère d'arrêt  $CR(m)$  est minimal.

Les estimateurs finaux sont alors :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1^{(m)} \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}_2^{(m)} \\ \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 \prod_{j=1}^m \hat{\gamma}_1^j \\ \hat{\mu} = \hat{\mu}_0 + \hat{\gamma}_0 \sum_{j=0}^m \mu_c^{(j)} \left( \prod_{j=1}^m \hat{\gamma}_1^j \right) + \hat{\gamma} \hat{\mu}_2^{(m)} \end{cases} \quad (2.2.74)$$

Une version modifiée de la méthode de régression itérative de Koutrouvelis a été développé par (Weron, 1995) dans le cas de la famille des loi strictement stables symétriques (*i. e.*  $\beta = \mu = 0$ ), le nombre d'itérations a été réduit à 1 et l'algorithme est sous une forme récursive avec des étapes faciles à suivre. La méthode proposée par Weron est beaucoup plus rapide, cependant en termes de performances (erreurs quadratiques moyennes), elle donne des résultats similaires à l'original.

L'un des avantages de ces méthodes d'estimation à partir des régressions non linéaires est qu'elles permettent de calculer simultanément les écarts types des estimateurs permettant de tester la significativité de ceux-ci mais également la normalité.

### 2.2.3. Autres méthodes d'estimation dans $\mathbb{R}^1$

#### a) *Maximum de vraisemblance*

Une des plus grandes difficultés de l'application de la méthode du maximum de vraisemblance aux distributions  $\alpha$ -stables est dû au manque d'expression analytique de de la densité de probabilité. C'est pour cette raison, que cette méthode a été principalement étudiée dans le cas symétrique. (DuMouchel, 1971) a été le premier à a développé une telle approche pour des variable *St $\alpha$ S*, il a pu obtenir des estimations du maximum de vraisemblance approximatives de  $\alpha$  et  $\gamma$  en utilisant une approximation multinomiale de la fonction de vraisemblance et certaines hypothèses supplémentaires la fonction de vraisemblance, ainsi que  $\hat{\alpha}$ , (DuMouchel, 1973) a montré que les estimations obtenues étaient cohérentes et asymptotiquement normalement distribuées. Cependant, l'effort de calcul impliqué était considérable (Weron, 1995).

Une méthode directe a été proposée par (Brosen & Yang, 1990), qui consiste à utiliser la technique de Monte Carlo pour approcher l'intégrale de l'expression de la densité d'une distribution stable, où ils ont adopté la représentation par intégrale de la densité d'une distribution stable standard symétrique de (Zolotarev, 1986, p. 74 Théorème 2.2.3). Ils ont considéré seulement le cas  $\alpha > 1$ , afin d'éviter la discontinuité et la non-différentiabilité de la fonction de densité. Les résultats obtenus étaient assez bons (Weron, 1995, p. 5). Cependant, cette méthode présente des inconvénients, c'est un problème d'optimisation hautement non linéaire et aucune analyse de convergence n'est disponible.

D'autres chercheurs ont utilisé d'autres techniques d'approximations pour approcher les intégrales de l'expression de la densité en généralisant les travaux de Zolotarev. Cependant, toutes ces méthodes nécessitent une grande complexité de calcul.

### b) Transformation de la fonction caractéristique

Une autre approche pour l'estimation des paramètres des lois stables, basée sur l'utilisation d'expressions explicites de la transformation de la fonction caractéristique est la méthode des moments logarithmique d'échantillonnage. Cette approche a été développée par (Zolotarev, 1978, 1980, 1986). Une caractéristique de l'approche proposée est que le problème de l'estimation des paramètres est résolu en premier lieu pour les distributions de la classe  $\mathfrak{B}$  (La famille des lois strictement stables), puis généralisé pour les distributions de classe  $\mathfrak{S}$  (la famille de toutes les lois stables). La nécessité de cette division du problème général s'explique par le fait que les formules explicites pour les transformations des fonctions caractéristiques des lois stables n'existent que dans le cas des distributions de classe  $\mathfrak{B}$ , et ce sont ces formules qui constituent la base analytique de cette méthode. Zolotarev indique que la forme d'expression la plus pratique des fonctions caractéristiques pour cette démarche s'avère être la forme (E) (sous-section 1.2.3, formule (1.2.45)), dont on rappelle l'expression de  $\psi_E$  où  $\varphi(\xi) = \exp(\psi_E(\xi))$ :

$$\psi_E(\xi, \nu, \theta_E, \tau) = \exp\left(\nu^{-1/2} \left(\ln|\xi| + \tau - i \frac{\pi\theta_E}{2} \operatorname{sgn} \xi\right) + \mathbb{C}(\nu^{-1/2} - 1)\right)$$

Où  $\mathbb{C}=0.577\dots$  est la constante d'Euler, et le domaine de variation des paramètres est comme suit :

$$\nu \geq 1/4, |\theta_E| \leq \min\{1, 2\sqrt{\nu} - 1\}, |\tau| < \infty.$$

Les paramètres  $(\nu, \theta_E, \tau)$  sont liés aux paramètres  $(\alpha, \theta, \delta_c)$  de la forme (C), par les égalités :

$$\nu = \alpha^{-2}, \theta_E = \theta \text{ et } \tau = (1/\alpha) \ln \delta_c + \mathbb{C}(1/\alpha - 1)$$

$$\text{Pour } \alpha \neq 1 : \begin{cases} \theta = \beta_B \phi(\alpha) / \alpha \\ \delta_c = \delta_B \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta = \beta_A = \tan(\beta_B \phi(\alpha) \pi / 2) / \tan(\alpha \pi / 2) \\ \mu = \delta \mu_A = \delta \mu_B (1 + \beta^2 (\tan \alpha \pi / 2)^2)^{1/2} \\ \delta = \delta_A = \delta_B (1 + \beta^2 (\tan \alpha \pi / 2)^2)^{-1/2} \end{cases}$$

$$\text{Pour } \alpha = 1 : \begin{cases} \theta = (2/\pi) \arctan(2\mu_B/\pi) \\ \delta_c = \delta_B \sqrt{\pi^2/4 + \mu_B^2} \end{cases} \text{ avec } \beta = \beta_B, \mu = \delta(2/\pi)\mu_B \text{ et } \delta = (\pi/2)\delta_B$$

La première étape est la construction des estimateurs des paramètres  $\nu, \theta_E$  et  $\tau$  par la méthode des moments, puis pour généraliser l'estimation aux distributions stables, l'idée clé est la transformation de l'échantillon initial  $(x_1, x_2, \dots; x_n)$  de distribution stable de paramètre  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\gamma$  de telle sorte que le résultat soit un autre ensemble  $(x'_1, x'_2, \dots; x'_m)$  de distribution strictement stable. La taille  $m$  du nouvel échantillon sera essentiellement plus petite que celle de l'échantillon d'origine ; cependant, cela doit être considéré comme le coût nécessaire pour que les distributions des variables aléatoires  $X'_j$  possèdent les propriétés nécessaires pour la méthode (être de classe  $\mathfrak{B}$ ).

Les estimateurs obtenus sont cohérents et asymptotiquement non biaisés, avec un biais et un écart quadratique moyen des paramètres estimés de l'ordre de grandeur  $O(n^{-1/2})$ . Pour plus de détails voir (Zolotarev, 1986, p. 217-248)

#### 2.2.4. Techniques d'estimation des paramètres d'une distribution stable dans $\mathbb{R}^d$

Le problème de l'estimation des paramètres dans le cas des distributions stables multivariées est beaucoup plus complexe que dans le cas univarié à cause de la mesure spectrale et principalement, lorsque cette mesure est continue ou absolument continue, dans ce cas, on a recourt à des techniques d'estimation dans des espaces de dimension infinie. Il y'a beaucoup de travaux qui portent sur l'estimation de la mesure spectrale tels que (Cheng & Rachev, 1995; Liu, 2009; Nagaev, 2001; Rachev & Xin, 1993) . Dans cette partie nous allons seulement introduire les deux méthodes les plus utilisées, la première fondée sur la fonction caractéristique (Nolan et al., 2001) , et la seconde appelé méthode de projection a été initialement développée par (McCulloch, 2000) pour des distributions dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est une extension de sa méthode dans le cas des distribution stables univariées, une généralisation aux distribution stables multivariées est proposée dans (Nolan et al., 2001).

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur de dimension  $d$ , sa fonction caractéristique  $\varphi(\xi) = E[\exp(i\langle \xi, X \rangle)] = \exp(\psi(\xi))$  est donnée par la formule (1.3.4) , qui est la paramétrisation standard des distributions stables multivariées (Samorodnitsky & Taqqu, 1994, p. 65 Théorème 2.3.1). La fonction d'exposant  $\psi(\xi)$  , peut-être reformulée comme suit :

$$\psi(\xi) = i\langle \xi, \mu^0 \rangle - \int_{S^d} \Psi_\alpha(\langle \xi, s \rangle) d\Gamma(s) \quad (2.2.75)$$

Avec :

$$\Psi_\alpha(\langle \xi, s \rangle) = \begin{cases} |\langle \xi, s \rangle|^\alpha \left(1 - \text{sign}(\langle \xi, s \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ |\langle \xi, s \rangle|^\alpha (1 + \text{sign}(\langle \xi, s \rangle) \ln|\langle \xi, s \rangle|) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.76)$$

On rappelle que chaque distribution stable multivariée est caractérisée par un indice de stabilité  $\alpha$ , une mesure spectrale  $\Gamma$  et vecteur  $\mu^0$  représentant le paramètre de localisation (position). Donc l'objectif est l'estimation de ce triplet.

**Remarque 2.2.3.** La paramétrisation standard des distributions stables multivariées donnée par la formule (1.3.4) (i.e.  $\varphi(\xi) = \exp(\psi(\xi))$  avec  $\psi(\xi)$  donnée par la formule (2.2.75)) est discontinue pour  $\alpha = 1$  (sauf dans le cas des distributions stables symétriques), car  $|\tan \pi\alpha/2|$  tend vers l'infini quand  $\alpha \rightarrow 1$ . Une conséquence de cela est que les estimations

de  $\Gamma$  et  $\mu^0$  sont susceptibles d'être médiocres chaque fois que  $\alpha$  est proche de 1. Ce problème peut être évité en utilisant comme dans le cas des distributions stables univariées, la paramétrisation de Zolotarev dans  $\mathbb{R}^d$ , cette paramétrisation est noté forme (M) dans (Zolotarev, 1986). Pour plus de détails voir (Nolan et al., 2001).

Comme indiqué dans (Nolan et al., 2001), les étapes d'estimation des paramètres d'une distribution stable multivariée est résumé comme suit :

### **Méthode de la fonction caractéristique FCE**

Comme dans le cas des distributions stable dans  $\mathbb{R}^1$  (sous-section 2.2.2), cette méthode consiste à minimiser la distance euclidienne entre les valeurs empiriques et les valeurs réelles de la fonction caractéristique. Cette méthode peut être résumée comme suit :

#### **a) Estimation de $\alpha$ et de $\mu^0$**

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur de dimension  $d$ , constitué de  $n$  échantillons ( $X_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^d)$ ). On considère que chaque dimension  $k$  de  $X$  (par exemple le vecteur  $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ ) est une variable aléatoire stable dont on estime les paramètres  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  et  $\mu_k$  pour  $k = 1, \dots, d$ , par une des méthodes utilisées dans  $\mathbb{R}^1$  ; Notons ces estimateurs par  $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\gamma}_k$  et  $\hat{\mu}_k$ . On définit alors respectivement les estimateurs du vecteur de décalage (position)  $\mu^0$  et de l'indice de stabilité  $\alpha$  par les formules :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \hat{\alpha}_k \quad (2.2.77)$$

et

$$\hat{\mu}^0 = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_d) \quad (2.2.78)$$

**Remarque 2.2.3.** Pour  $1 < \alpha \leq 2$ , la moyenne du vecteur  $X$  est un estimateur simple et cohérent de  $\mu^0$ .

#### **b) Estimation de la mesure spectrale $\Gamma$**

Pour, l'estimation de la mesure spectrale  $\Gamma$ , nous supposons que les données ont été décalées de sorte que  $\mu^0$  soit un vecteur nul et que  $\alpha$  soit connue (déjà estimé par (2.2.77)).

Dans ce cas (2.2.75) devient :

$$\psi(\xi) = - \int_{S^d} \Psi_\alpha(\langle \xi, s \rangle) d\Gamma(s) \quad (2.2.79)$$

Posons maintenant  $I(\xi) = -\psi(\xi)$ , alors

$$\varphi(\xi) = \exp(-I(\xi)) \quad (2.2.80)$$

Où  $I(\xi)$  est aussi appelée fonction exposant.

L'estimation de la mesure spectrale  $\Gamma$  passe par deux étapes, On commence par estimer  $I(\xi)$ , puis en passe à l'estimation de  $\Gamma$ . La différence entre les deux méthodes réside principalement dans la première étape.

### Phase 1 : Estimation de $I(\xi)$

La fonction caractéristique empirique  $\hat{\varphi}_n(\xi)$  et l'exposant  $\hat{I}_n(\xi)$  sont déterminés par

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\langle \xi, X_j \rangle) \quad (2.2.81)$$

Et

$$\hat{I}_n(\xi) = -\ln \hat{\varphi}_n(\xi) \quad (2.2.82)$$

(Nolan et al., 2001) proposent d'estimer  $I(\xi)$  sur une grille donnée  $\xi_1, \dots, \xi_d \in S^d$ , par :

$$\vec{I}_{FCEn} = \left( \hat{I}_n(\xi_1), \dots, \hat{I}_n(\xi_n) \right)^T \quad (2.2.83)$$

On définit  $\vec{I}_{FCEn} = \left( \hat{I}_n(\xi_1), \dots, \hat{I}_n(\xi_n) \right)^T$  l'estimateur de  $I(\cdot)$  par la méthode de la fonction caractéristique (FCE).

Pour simplifier la notation dans la suite, nous considérons la taille de l'échantillon  $n$  comme fixe et supposons que les estimateurs sont indépendants de la taille de l'échantillon. C'est-à-dire que nous pouvons écrire  $\vec{I}_{FCE}$  à la place de  $\vec{I}_{FCEn}$ , etc.

### Phase 2 : Approximation des poids

Dans le cas d'une mesure spectrale discrète de la forme :

$$\Gamma(\cdot) = \sum_{j=1}^n l_j \delta_{s_j}(\cdot) \quad (2.2.84)$$

Où  $l_j$  correspond à des poids et  $\delta_{s_j}$  représente les masses ponctuelles aux points  $s_j \in S^d, j = 1, \dots, n$ . Dans ce cas, on a

$$I(t) = \sum_{j=1}^n \Psi_\alpha(\langle \xi, s_j \rangle) l_j \quad (2.2.85)$$

Pour  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ , on définit la matrice  $n \times n$

$$\Phi = \Phi(\xi_1, \dots, \xi_n; s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} \Psi_\alpha(\langle \xi_1, s_1 \rangle) & \cdots & \Psi_\alpha(\langle \xi_1, s_n \rangle) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_\alpha(\langle \xi_n, s_1 \rangle) & \cdots & \Psi_\alpha(\langle \xi_n, s_n \rangle) \end{pmatrix} \quad (2.2.86)$$

Pour estimer les poids  $l_j, j = 1, \dots, n$ , il faut résoudre le système :

$$\vec{I} = \Phi \vec{l} \quad (2.2.87)$$

Avec  $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)^T$  et  $\vec{I} = \vec{I}_{FCE} = (\hat{I}(\xi_1), \dots, \hat{I}(\xi_n))^T$

Si  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$  sont choisis de telle sorte que  $\Phi^{-1}$  existe, alors

$$\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)^T = \Phi^{-1} \vec{I} \quad (2.2.88)$$

La formule (2.2.88), nous donne la solution exacte de (2.2.83), donc une approximation des poids.

**Généralisation :** Pour une mesure spectrale de forme générale (non discrète et/ou l'emplacement des masses ponctuelles est inconnu), il faut faire une approximation par une mesure spectrale discrète  $\Gamma^* = \sum_{j=1}^n l_j \delta_{s_j}(\cdot)$ , où  $l_j = \Gamma(A_j, k = 1, \dots, n)$  sont les poids. Quand  $d = 2$ , on a pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $s_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j) \in S^d$  avec  $\theta_j = 2\pi(j - 1)/n$ , et  $\arcsin A_j = ((2\pi(j - (3/2)) / n), (2\pi(j - (1/2)) / n))$ , pour  $d > 2$  supérieures, les  $A_j$  sont des éléments d'une partition de la sphère unité de centre "centre"  $s_j$ ; Dans ce cas, chacune des coordonnées de  $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)^T$  est une approximation de la masse des éléments contenant  $s_j, j = 1, \dots, n$ .

### Phase 3 : Détermination de mesure spectrale $\Gamma$

La mesure est déduite directement de la formule (2.2.84)

En résumé : Le principe de l'estimation de la mesure spectrale  $\Gamma$  est simple : étant donné une grille  $\xi_j = s_j, j = 1, \dots, n$ , on suit les étapes suivantes :

- 1) On détermine  $\vec{I}_{FCE}$  à partir de (2.2.83)
- 2) On approxime  $\vec{l}$  à partir de (2.2.88)
- 3) On définit  $\Gamma$  par (2.2.84), en utilisant ces poids et la grilles  $s_1, \dots, s_n$ ,

### Méthode de projection

La méthode de projection est basée sur des projections unidimensionnelles de l'ensemble de données. Considérons d'abord un vecteur stable  $X$  dont la fonction caractéristique est définie par la formule (2.2.80), sa projection unidimensionnelle est  $\langle \xi, X \rangle$  pour tout  $\xi \in S^d$ , qui est une variable  $\alpha$ -stable univariée de fonction caractéristique  $\varphi_\xi(u) = E \exp(iu \langle \xi, X \rangle) = \exp(-I(u\xi))$ , ses paramètres d'échelle, d'asymétrie et de localisation sont donnés par :

$$\gamma^\alpha(\xi) = \Re e(I(\xi)) = \int_{S^d} |\langle \xi, s \rangle|^\alpha d\Gamma(s)$$

$$\beta(\xi) = \gamma^\alpha(\xi) \int_{S^d} \langle \xi, s \rangle |\langle \xi, s \rangle|^\alpha d\Gamma(s) = \begin{cases} -\frac{\Im m(I(\xi))}{\gamma^\alpha(\xi) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} & \alpha \neq 1 \\ \frac{\Im m(I(2\xi) - 2I(\xi))}{4\gamma(\xi) \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)} & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\mu(\xi) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \int \langle \xi, s \rangle \ln|\langle \xi, s \rangle| d\Gamma(s) & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ -\frac{\Im m(I(\xi))}{\gamma(\xi)} & \alpha = 1 \end{cases}$$

Maintenant, considérons l'échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , et la grille  $\xi_1, \dots, \xi_k \in S^d$ . Pour chaque  $\xi_j$ , on définit l'échantillon  $\langle \xi_j, X_1 \rangle, \langle \xi_j, X_2 \rangle, \dots, \langle \xi_j, X_n \rangle$ , puis on estime  $\gamma(\xi_j)$ ,  $\beta(\xi_j)$  et  $\mu(\xi_j)$ . À partir de là, on peut déterminer l'estimateur de l'exposant de la fonction caractéristique, on définit d'abord  $\hat{I}_n(\xi_j)$  par :

$$\hat{I}_n(\xi_j) = \begin{cases} \hat{\gamma}^\alpha(\xi_j) \left(1 - \hat{\beta}(\xi_j) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) & \alpha \neq 1 \\ \hat{\gamma}(\xi_j) \left(1 - \hat{\mu}(\xi_j)\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2.89)$$

On obtient alors l'estimateur suivant :

$$\vec{I}_{PROJn} = \left(\hat{I}_n(\xi_1), \dots, \hat{I}_n(\xi_k)\right)^T \quad (2.2.90)$$

Pour l'indice de stabilité  $\alpha$ , (Nolan et al., 2001) proposent l'estimateur suivant :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}(\xi_j)$$

Ensuite la procédure est la même que celle de la méthode de la fonction caractéristique empirique. Autrement dit, la méthode de projection peut être résumée comme suit :

- 1) On détermine  $\vec{I}_{PROJ}$  à partir de (2.2.89)
- 2) On approxime  $\vec{l}$  à partir de (2.2.88) :  $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)^T = \Phi^{-1} \vec{I}_{PROJ}$
- 3) On définit  $\Gamma$  par (2.2.84).

Pour plus de détails voir (Nolan et al., 2001).

### 2.3. Tests Statistiques sur les variables stables dans $\mathbb{R}^1$

Nous présentons dans cette partie quelques tests pour vérifier l'ajustement avec une loi  $\alpha$ -stable. Nous commencerons par présenter deux tests graphiques qui peuvent nous permettre de savoir si on est présence d'une loi à variance infinie ou non, le premier basé sur la variance et le second sur le comportement de la queue de distribution, puis nous allons finir avec le test de la qualité de Kolmogorov.

Pour mieux comprendre les tests, nous avons simulé par la méthode de Chambers, Mallows et Stuck plusieurs échantillons de variable  $\alpha$ -stables standard pour différentes valeurs de  $\alpha$  : 0.7, 1.3, 1.7 et  $\alpha = 2$ , avec  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0$  et  $\gamma = 1$ . La v.a. est  $S_\alpha(1, 0, 1)$ , donc la distribution est asymétrique à droite. Dans un premier temps, nous présentons l'histogramme de la distribution stable pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans la Fig.2.3.1.

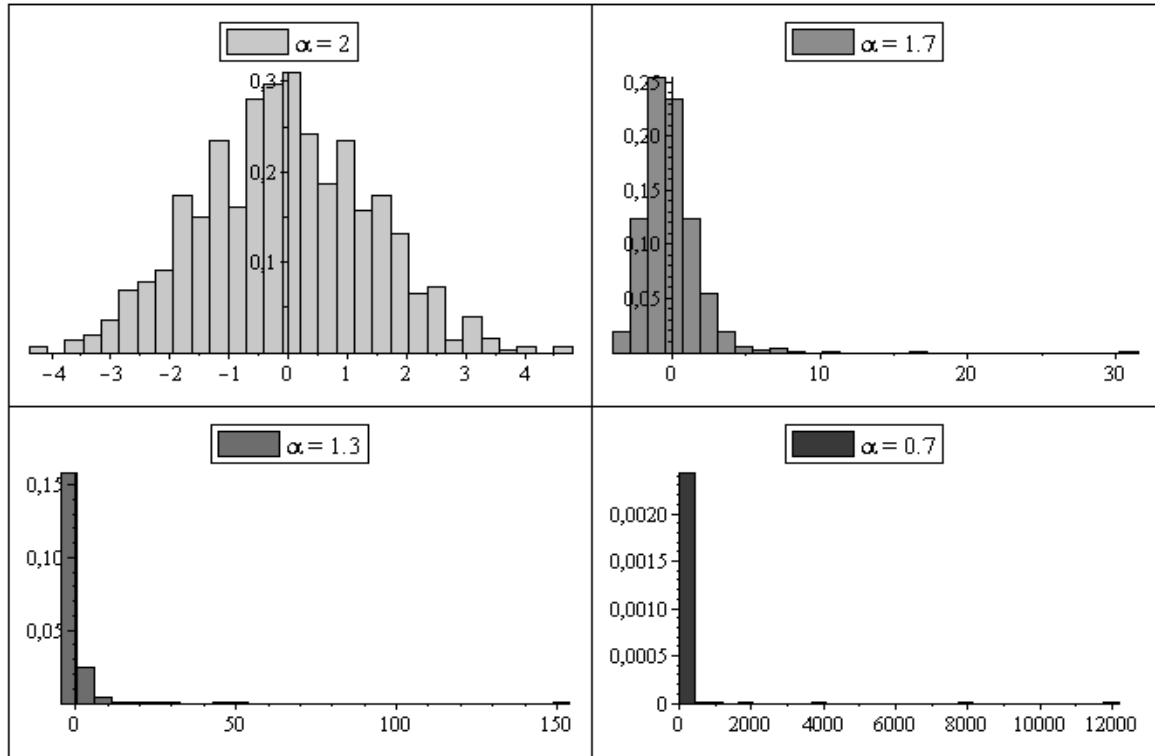


Fig.2.3. 1. Histogramme de v.a  $S_\alpha(1, 0, 1)$

### 2.3.1. Test de la variance pas à pas

Ce premier test est le plus simple et le plus utilisé. On suppose que nous avons une suite d'observations  $(x_1, \dots, x_n)$ , alors il suffit de :

- Calculer la variance empirique pour différentes valeurs de  $n$ .

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- Tracer le graphique  $(n, S_n^2)$ .

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow c \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a deux cas

- 1) Si le tracé converge (voir Fig.2.3.2 pour  $\alpha = 2$ ), alors nous sommes en présence d'une variable a variance finie.

2) Si le tracé diverge alors nous sommes en présence d'une variable à variance infinie. Autrement dit, on calcule la variance pas à pas de notre échantillon, et on vérifie si pour  $n$  assez grand elle devient stable (converge vers la même valeur) ou non, comme on peut le voir dans Fig.2.3.2.

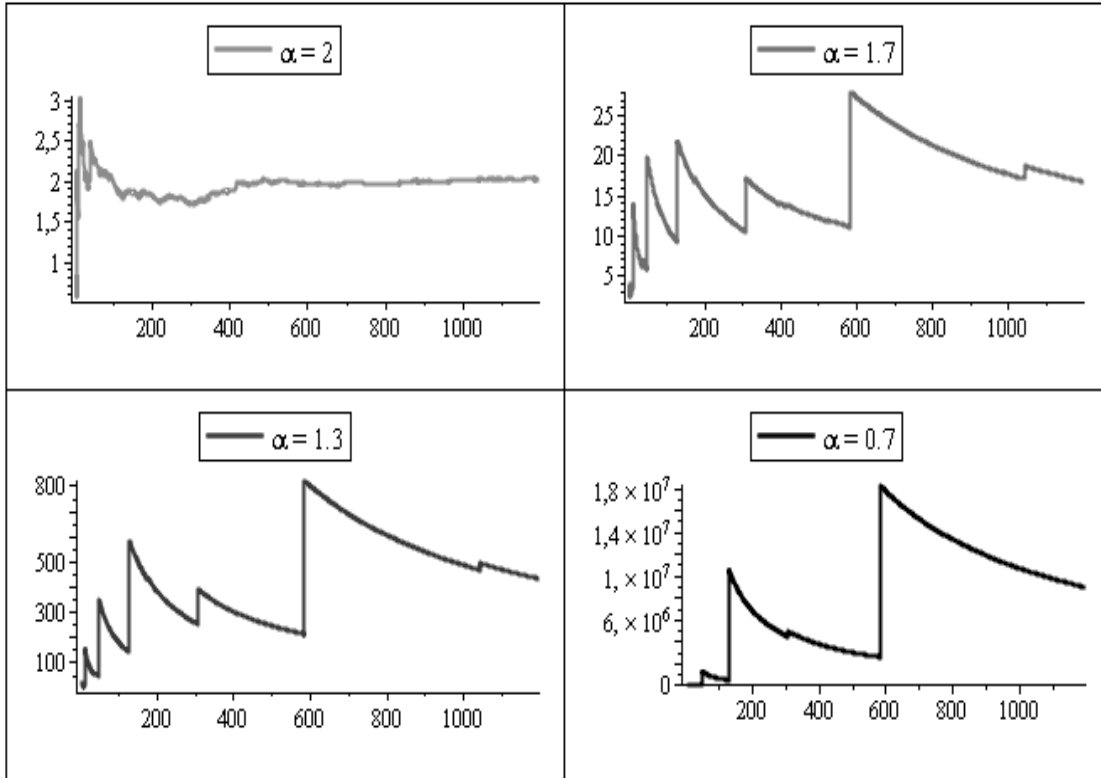


Fig.2.3. 2. Test 1 pour une v.a  $S_{\alpha}(1, 0, 1)$

Comme le montre la Fig.2.3.2, pour une variable à variance infinie ( $\alpha < 2$ ), nous observons des sauts de variance partielle suivis de baisses lentes jusqu'à ce que la prochaine valeur très élevée apparaisse dans l'échantillon. Lorsque,  $n$  augmente, la série de variance empirique non seulement diverge, mais oscille également avec une fréquence élevée à chaque fois que  $\alpha$  se rapproche de zéro. Tandis que pour une variable à variance finie (comme une distribution gaussienne pour  $\alpha = 2$ ), la série de variances (la variance pas à pas) se stabilise rapidement à proximité de la variance de la population (converge vers une constante)

### 2.3.2. Test basé sur le comportement asymptotique de la queue de distribution

Ce deuxième test est basé sur le fait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} P(|X| > t) = \gamma C(\alpha).$$

Donc à  $+\infty$  on a  $\frac{d \log P(|X|) > t}{d \log t}$  est équivalent à  $\alpha$

Là aussi nous avons deux étapes à suivre :

- Fixer  $t$  et calculer la quantité

$$g(t) = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{|x_i|>t}\right)$$

- Tracer le graphe  $(\log t, g(t))$  et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de  $t$ .

Ce test se base sur le fait que les lois stables sont asymptotiquement parétiennes.

Comme on peut le voir sur Fig.2.3.3, seulement le cas  $\alpha = 2$  donne une pente finie (la pente est une ligne verticale lorsque  $n \rightarrow \infty$ ).

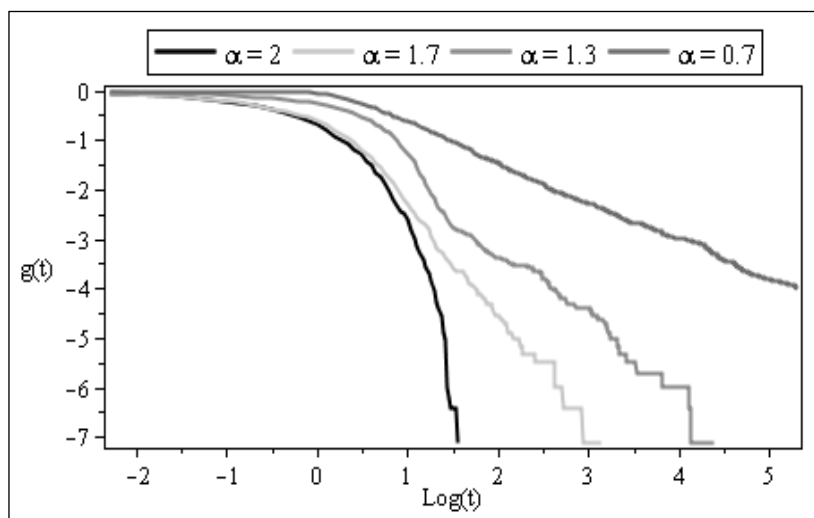


Fig.2.3. 3. Test 2 pour une v.a  $S_\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

### 2.3.3. Test de Kolmogorov

Il est difficile d'évaluer visuellement la qualité d'un modèle obtenu à partir d'un échantillon donné. Il est donc important de vérifier la validité du modèle en utilisant des critères permettant d'évaluer la pertinence d'un modèle. Nous nous intéressons dans cette partie aux mesures découlant de tests statistiques de qualité d'ajustement (test of goodness of fit), et plus particulièrement aux tests non paramétriques, car ces derniers se portent sur la loi elle-même et non sur les paramètres de la loi sous-jacente. L'objectif est de savoir si la loi choisie peut modéliser et représente au mieux les données empiriques. Les deux tests non paramétriques permettant d'évaluer la validité d'une hypothèse sont généralement le test du  $\chi_2$  et le test de Kolmogorov-Smirnov basés sur des mesures de similarité entre distributions observées et théoriques permettent de quantifier la validité d'un modèle telles que la distance du  $\chi_2$  ou la distance de Kolmogorov.

Nous avons préféré utiliser le test de Kolmogorov, car il présente l'avantage de n'imposer aucune contrainte sur la distribution de référence, et ne demande pas qu'elle soit connue sous forme analytique.

Le test de Kolmogorov permet de comparer la fonction de répartition empirique des échantillons (fonction de distribution cumulative empirique (FDCE))  $F_n(x)$  avec la fonction de répartition d'une distribution (DCE) spécifiée  $F(x)$ , comme suit

On suppose qu'on dispose :

- a) D'un échantillon de taille  $n$  d'observations  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'une v.a  $X$ ,
- b) Et d'une fonction de répartition de référence  $F(x)$ ,

Le test de Kolmogorov teste l'hypothèse  $H_0$  selon laquelle l'échantillon a été prélevé dans une population de fonction de répartition  $F(x)$ . Pour cela, il calcule sur l'échantillon une quantité ' $D_K$ ', appelée "statistique de Kolmogorov", dont la distribution est connue lorsque  $H_0$  est vraie.

$H_0: F_n(x) = F(x)$  Contre toutes les hypothèses alternatives possibles

$H_1: F_n(x) \neq F(x)$

L'hypothèse nulle suppose qu'il n'y a aucune différence entre la distribution observée et la distribution théorique et la valeur de la statistique de test ' $D_K$ ' est calculée comme suit :

$$D_k = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} \{ |F_n(x) - F(x)| \}$$

L'objectif du test est de mesurer la distance maximale (statistique de test  $D_k$ ) entre la FDCE  $F_n(x)$  et la FDC  $F(x)$ . On calcule  $D_k$  en prenant la valeur absolue de la plus grande différence entre les deux distributions cumulatives. Une valeur élevée de la distance de Kolmogorov  $D_k$  est une indication que la distribution de l'échantillon s'éloigne sensiblement de la distribution de référence  $F(x)$ , et qu'il est donc peu probable que  $H_0$  soit correcte.

**Règle de décision :**  $H_0$  est rejetée si  $D_K > D_\alpha(n)$ . Où  $D_\alpha(n)$  est la valeur critique, qui se lit dans la table de la loi de Kolmogorov

### **2<sup>nd</sup> version du test de Kolmogorov**

On suppose qu'on dispose seulement d'un échantillon de taille  $n$  d'observations et que nous n'avons pas de FDCE, alors, il faut d'abord chercher à obtenir une estimation de la fonction de répartition à partir de l'échantillon observé afin de la comparer ensuite à la fonction de répartition de la loi théorique.

*Estimation de la fonction de répartition empirique :* On commence par trier par ordre croissant les valeurs  $x_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  de l'échantillon. On les appelle traditionnellement des statistiques d'ordre. La fonction de répartition empirique est définie par :

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{si } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \\ 1 & \text{si } x > x_{(n)} \end{cases}$$

On estime donc  $F(x) = P[X \leq x]$  au moyen de la proportion  $\widehat{F}(x)$ .

Même chose que la 1<sup>ère</sup> version, il faut donner un sens à la “distance” entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition de la loi théorique. On mesure l’adéquation de la fonction  $\widehat{F}$  à la fonction  $F$  au moyen de la distance de Kolmogorov, qui est la distance de la norme uniforme entre fonctions de répartition. Graphiquement, c’est le plus grand écart vertical en valeur absolue entre la valeur empirique et la valeur théorique. Pour obtenir cette distance, on calcule la différence entre  $\widehat{F}$  et  $F$  aux points  $x_i$  et on cherche le maximum selon la formule suivante :

$$D_k = \max_{1, \dots, n} \left\{ \left| F(x_i) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}$$

Si  $D_K > D_\alpha(n)$ , on rejette l’hypothèse  $H_0$  avec un risque  $\alpha$  de se tromper. *i.e.* la distance de Kolmogorov-Smirnov est le plus grand de tous ces écarts

## 2.4. Application : Analyse statistique des montant de sinistre automobile

Pour une bonne modélisation du risque, il est important de connaître la distribution des montants de sinistres. Pour cela nous proposons d’étudier les données réelles quotidiennes d’une compagnie d’assurance sur une période d’un an (2017 et 2018) en utilisant Matlab R2021a. Les Fig. 2.4.1 et Fig.2.4.2 nous donnent les comportements des montants de sinistres.

### 2.4.1. Tests graphiques

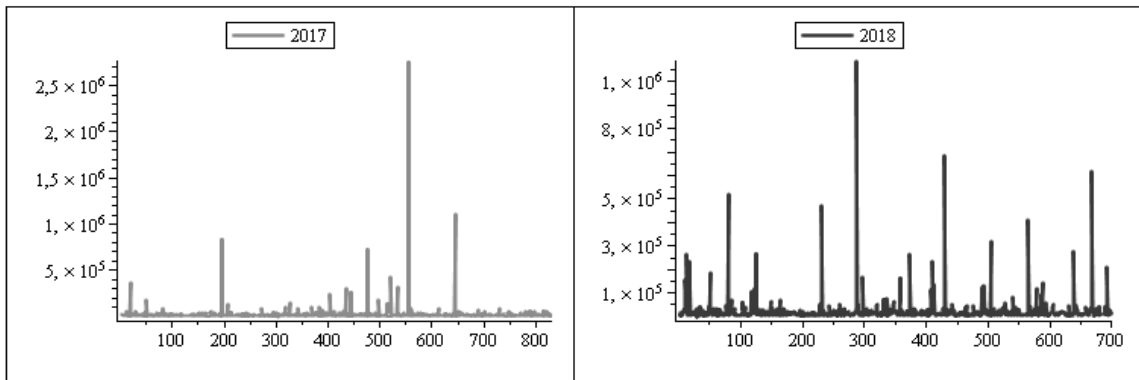


Fig.2.4. 1. Montants des sinistres.

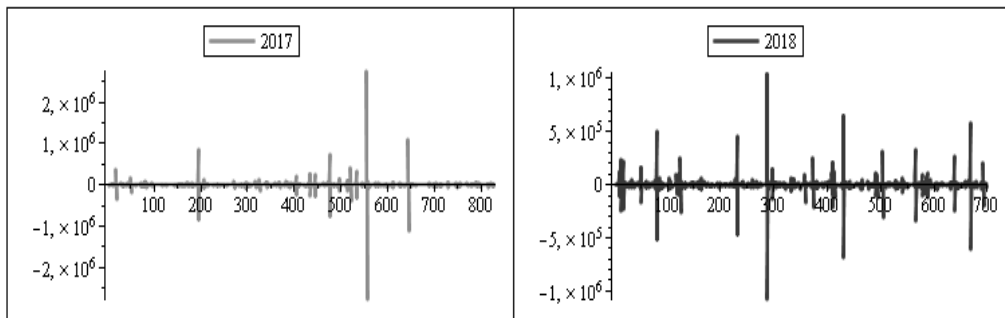


Fig.2.4. 2. Increment of Claims Amount ( $X_{i+1} - X_i$ )

Il est clair qu'il y a des sauts considérables du montant d'indemnisation.

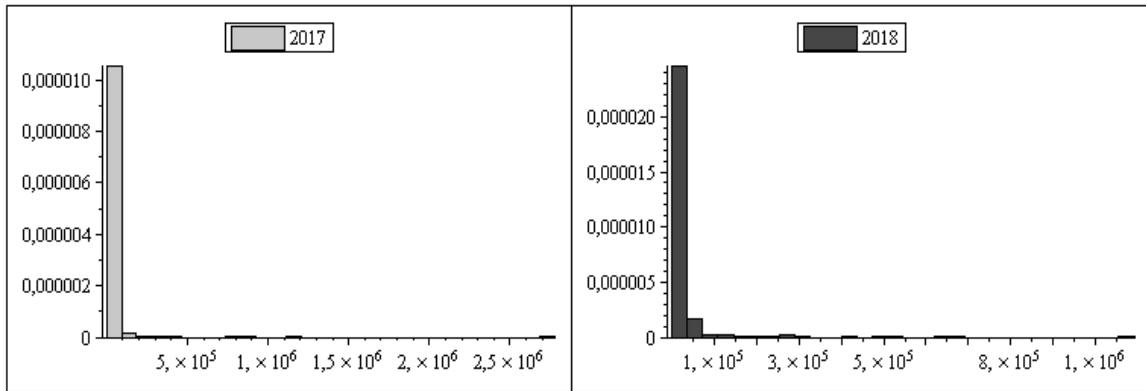


Fig.2.4. 3. Histogramme des données empiriques

Nous pouvons voir à travers les histogrammes que l'allure des montants de sinistres est similaire à l'histogramme de la distribution  $\alpha$ -stable pour  $\alpha < 2$  (Fig.2.3.1.). On peut donc penser directement à un ajustement avec une distribution  $\alpha$ -stable pour mieux capturer les caractéristiques de la distribution empirique des montants de sinistres qui semble être leptokurtiques et présente des queues plus épaisses que la normale. Pour vérifier cela, nous allons appliquer les deux tests graphiques que nous avons décrits dans la section 2.4, dont les résultats sont représentés par Fig.2.4.4 et Fig.2.4.5.

La distribution empirique des montants de sinistres est plutôt leptokurtiques et présente des queues plus épaisses que la normale.

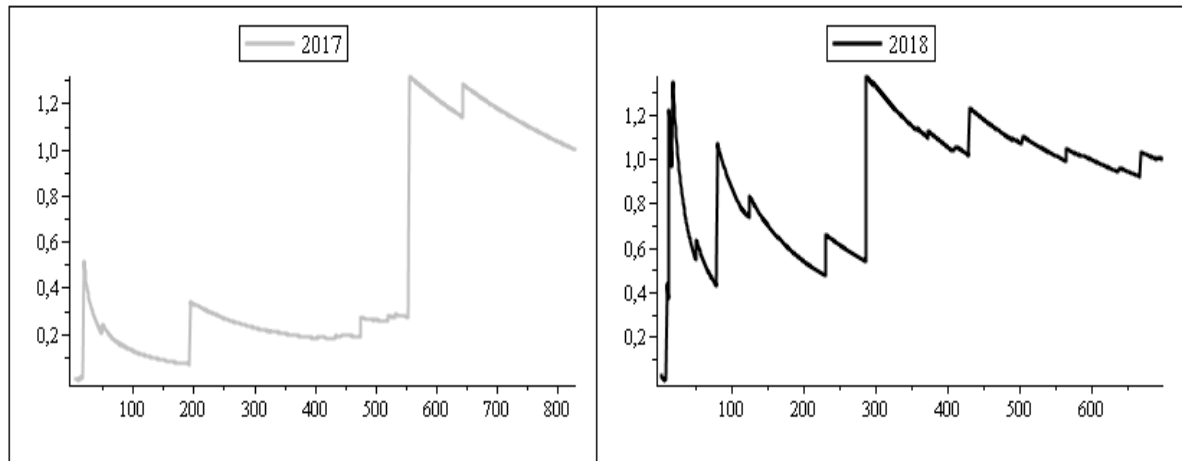


Fig.2.4. 4. Test 1 pour les données empiriques des montants de sinistres

A partir de Fig.2.4.4 et Fig.2.4.5, nous pouvons voir que le comportement de notre échantillon de données est plus proche de la loi stable. La variance empirique de tous nos ensembles de données oscille avec une fréquence élevée, et la pente de nos ensembles de données n'est pas finie.

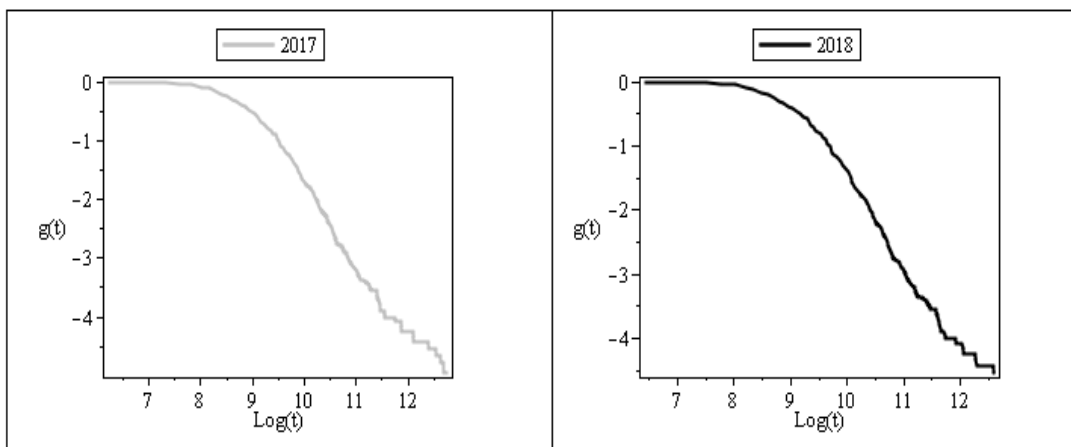


Fig.2.4. 5. Test 2 pour les données empiriques des montants de sinistre

### Estimation des paramètres et ajustement

Avant de pouvoir utiliser le test de Kolmogorov, nous avons besoin d’estimer les quatre paramètres, pour ce faire, nous avons utilisés deux méthodes, la première basée sur les quantiles est c’est la méthode de McCulloch (voir section 2.3.1) et la seconde basée sur la fonction caractéristique est celle de Koutrouvelis (voir section 2.3.2), les résultats sont donnés dans les tableaux 2.4.1 et 2.4.2, nous avons retenus ces méthodes pour les avantages relatifs qu’elles présentent en comparaison avec la complexité des calculs et l’imprécision des autres méthodes.

Pour vérifier si l’ajustement par une distribution  $\alpha$ -stable décrit bien les données de montant de sinistre, nous allons, dans cette partie estimer la densité de nos deux échantillons avec la méthode des noyaux, qui consiste à réaliser un tracé de densité lissé des données réelles, puis faire une comparaison avec les tracés de la densité d’une loi stable avec les paramètres estimés pour chaque échantillon.

Tableau 2. 4. 1. Estimation des paramètres de la v.a montant de sinistre pour l’année 2018

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$
Koutrouvelis	1.0571	1	5.7990e+03	7.2869e+04
McCulloch	0.9563	0.9836	4.9322e+03	-6.1482e+04

Tableau 2. 4. 2. Estimation des paramètres de la v.a montant de sinistre pour l’année 2017

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$
Koutrouvelis	1.0583	0.9	0.0369	0.2192
McCulloch	1.2194	1	0.0439	-0.0206

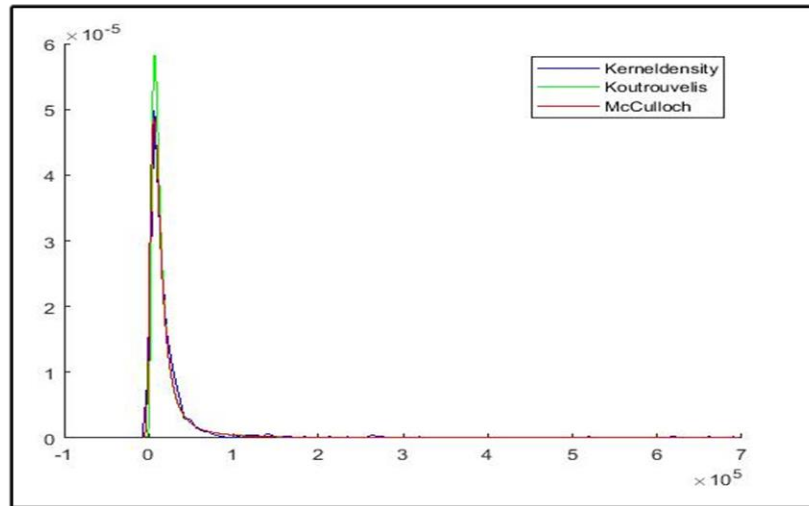


Fig.2.4. 6. Comparaison entre densité  $\alpha$ -stable et densité empirique année 2018

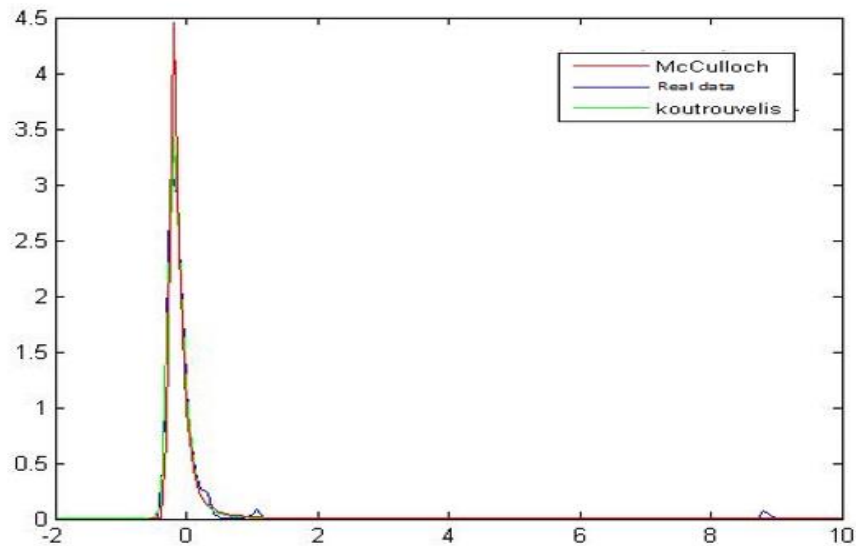


Fig.2.4. 7. Comparaison entre densité  $\alpha$ -stable et densité empirique année 2017

Nous pouvons clairement observer à travers les images Fig.2.4.6 et Fig.2.4.7, que la distribution empirique des montants de sinistre pour les deux échantillons (Année 2017 et année 2018) est bien ajustée à la distribution  $\alpha$ -stable.

### 2.4.2. Résultat du test de Kolmogorov

On rappelle, que le test de Kolmogorov permet de comparer la fonction de répartition empirique des échantillons (fonction de distribution cumulative empirique (FDCE))  $F_n(x)$  avec la fonction de répartition d'une distribution (FDC) spécifiée  $F(x)$ . Sachant qu'il n'existe pas de formule pour la fonction de répartition de loi stable, nous l'avons donc estimé en utilisant le code `Stblcdf` de (Veillette, 2012) avec les paramètres estimés précédemment (tableaux 2.4.1). Nous avons aussi utilisé la fonction CDF pour calculer la fonction de répartition empirique

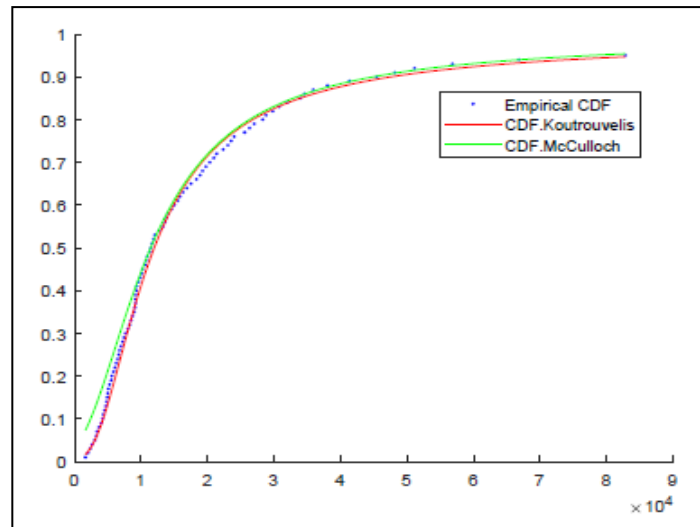


Fig.2.4. 8. Comparaison entre FDC Stable et FDCE pour l'année 2018

La fonction de distribution cumulative empirique FDCE construite à partir de l'ensemble de nos données et la FDC  $\alpha$ -stable (Fig.2.4.8) montre clairement que les fonctions de répartition sont presque identiques. Pour confirmer notre hypothèse, nous allons utiliser le test de Kolmogorov, basé sur la distance maximale entre ces courbes (FDCE et FDC), nous commençons par calculer la distance de Kolmogorov à partir de la formule :

$$D_k = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} \{ |F_n(x) - F(x)| \}$$

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.4.3.

Tableau 2. 4. 3. Résultat du test de Kolmogorov (1<sup>ère</sup> version)

Niveau de signification $\alpha$		5%	1%
Valeur critique $D_\alpha(n)$		0.140	0.167
Statistique de Kolmogorov $D_k$	Koutrouvelis	0.031	
	McCulloch	0.077	

Nous avons  $D_k < D_\alpha(n)$ , donc nous acceptons  $H_0$ . Conclusion, les données empiriques des montants de sinistre sont bien représentées par une distribution  $\alpha$ -stable.

Puis, en utilisant la 2<sup>nd</sup> version du test de Kolmogorov :

$$D_k = \max_{1, \dots, n} \left\{ \left| F(x_i) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}$$

Nous avons obtenu les résultats suivants

Tableau 2. 4. 4. Résultat du test de Kolmogorov (2<sup>ème</sup> version)

Niveau de signification $\alpha$		5%	1%
Valeur critique $D_\alpha(n)$		0.140	0.167
Statistique de Kolmogorov $D_k$	Koutrouvelis	0.071	
	McCulloch	0.083	

Là aussi, on confirme que  $D_K < D_\alpha(n)$ , donc nous acceptons  $H_0$ . Conclusion, les données empiriques des montants de sinistre sont bien représentées par une distribution  $\alpha$ -stable.

Dans ce chapitre, nous avons pu constater que les distributions stables ont une grande importance dans la modélisation de phénomène non gaussien à grandes variations car elles permettent de prendre en considération un grand nombre de valeur extrêmes (queue lourde). Cependant, elle présente encore quelques limites, ou difficultés liées à l'absence d'une expression explicite de leur densité, ainsi qu'à l'absence des moments de second ordre et d'ordre supérieur ; ce qui rend l'inférence statistique des distributions stables très complexe, ce qui fait que l'utilisation de ses distributions stables reste encore très modérée à nos jours.

Pour vérifier l'adéquation des variations des montants de sinistre automobile à la famille de lois  $\alpha$ -stable, il était nécessaire de commencer par estimer ces paramètres, dans notre travail nous avons retenu deux méthodes pour l'estimation des quatre paramètres de la distribution stable, la première c'est la méthode de McCulloch basée sur les quantiles et la seconde est la méthode de Koutrouvelis basée sur la fonction caractéristique. Après cela, nous avons pu constater à travers plusieurs tests graphiques, ainsi qu'au test de Kolmogorov que les lois stables semblent mieux décrire la distribution des montants de sinistres automobiles.

### 3. Processus $\alpha$ -stable et application en assurance auto

La première section de ce chapitre est consacrée aux processus  $\alpha$ -stables, où nous allons commencer par définir et donner quelques propriétés importantes, puis la construction de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à un mouvement  $\alpha$ -stable pour pouvoir définir les équations différentielles stochastiques par rapport à un mouvement  $\alpha$ -stable  $\alpha$ -EDS et étudier numériquement la solution d'une  $\alpha$ -EDS selon le schéma d'Euler.

Après cela, dans la section deux, nous présenterons notre modèle de risque où le montant total des sinistres est définie par un processus  $\alpha$ -stable, après un bref rappel du processus de risque classique et un historique de l'utilisation des processus stables en assurance non-vie, nous présenterons aussi quelques résultats de base en assurance, tels que la probabilité de ruine et le coefficient de Lundberg.

Enfin, la troisième section sera consacrée à la modélisation du portefeuille d'une compagnie d'assurance non-vie, où nous commencerons par définir notre processus d'investissement avec des taux d'intérêt stochastique, puis notre modèle de réserve couplé, pour finir avec une analyse sur les effets du changement des paramètres de notre processus de sinistre  $\alpha$ -stable sur la réserve de la compagnie d'assurance.

#### 3.1. Processus $\alpha$ -stables

Nous allons définir les processus stochastiques  $\alpha$ -stables et donner quelques résultats élémentaires sur ces processus. Cette section repose en grande partie sur les ouvrages suivant (Belkacem, 1996), (Sato, 1999), (Feller, 1971), (Janicki & Weron, 1994) et (Samorodnitsky & Taqqu, 1994).

##### 3.1.1. Définitions et propriétés

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  un espace de probabilité complet muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$

**Définition 3.1.1** Un processus stochastique  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est appelé processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes :

- 1)  $X(0) = 0$   $P - p. s.$  ;
- 2) Les accroissements sont indépendants, *i.e.*  $\forall n \geq 1$  et  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  :  $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  sont indépendants ;
- 3) Les accroissements sont stationnaires, *i.e.*  $\forall t \geq 0$  et  $s \geq 0$  :

$$X(t+s) - X(t) \stackrel{d}{=} X(s) - X(0)$$

- 4)  $X_t$  est continu en probabilité, *i.e.*  $\forall t \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$  :
 
$$\lim_{s \rightarrow t} P(|X(s) - X(t)| > \varepsilon) = 0 ;$$
- 5)  $X_t$  est continu à droite, limité à gauche (*càdlàg*) avec probabilité 1, *i.e.*  $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$  avec  $P(\Omega_0) = 1$  tel que, pour tout  $\omega \in \Omega_0$ ,  $X(t, \omega)$  est *càdlàg*

Un processus aléatoire vérifiant les trois premières conditions (on n'impose plus d'hypothèses de continuité) est appelé processus de Lévy en loi, et il décrit de la manière la plus générale une marche aléatoire à paramètre réel sur  $\mathbb{R}^d$  : le mouvement après l'instant  $t$  ne dépend que de la position à cet instant, et la loi d'évolution est invariante par translation d'espace (homogénéité spatiale) et de temps (homogénéité temporelle).

Les processus de Lévy peuvent aussi être identifiés par leur fonction caractéristique, comme on peut le voir dans la définition suivante.

**Définition 3.1.2.** (Formule de Lévy-Khintchine) Un processus stochastique  $\{X_t : t \geq 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est un processus de Lévy si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$E e^{i\langle \xi, X(t) \rangle} = e^{t\psi(\xi)}$$

Où

$$\psi(\xi) = i\langle \mu, \xi \rangle - \frac{1}{2} Q(\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1 - i\langle \xi, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) d\Lambda(x) \quad (3.1.1)$$

$Q$  est une forme quadratique définie positive (elle représente la partie brownienne) et  $\Lambda$  est la mesure de Lévy de  $X(t)$ . On rappelle qu'elle est définie sur  $\mathbb{R}^d - \{0\}$ , vérifiant  $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x|^2) d\Lambda(x) < \infty$  (voir Théorème 1.1.6).

**Remarque 3.1.1.** Les processus de Lévy incluent plusieurs processus connus. En effet, on obtient :

- Un processus de sauts quand  $\mu = 0$  et  $Q(\xi) = 0$  ;
- Un mouvement Brownien quand  $\mu = 0$  et  $\Lambda = 0$  ;
- Un mouvement  $\alpha$ -stable (sera défini plus en détail un peu plus loin), quand  $Q(\xi) = 0$  et s'il existe une mesure  $\nu$  sur la sphère unité  $S_d$  de  $\mathbb{R}^d$  telle que :

$$d\Lambda(x) = \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} dy d\nu(s) \quad (3.1.2)$$

Où  $y = |x|$  et  $s = x/|x|$  appartiennent  $S_d$

**Définition 3.1.3.** Un processus stochastique  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est appelé processus stable, si :

- 1)  $X_t$  est un processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ;
- 2) Pour tout  $a > 0$  il existe  $b > 0$  et  $c \in \mathbb{R}^d$  telle que

$$\{X(at) : t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t) + ct : t \in [0, +\infty)\} \quad (3.1.3)$$

On dit que  $X_t$  est un processus strictement stable quand  $c = 0$ . La propriété (3.1.3) devient :

$$\{X(at): t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t) : t \in [0, +\infty)\} \quad (3.1.4)$$

La propriété (3.1.4) est la propriété d'auto-similarité.

**Théorème 3.1.3.** (Samorodnitsky & Taquq, 1994, p. 112) Soit  $\{X(t): t \in T\}$  un processus stochastique, on définit la combinaison linéaire

$$\sum_{k=1}^d b_k X(t_k), \quad d \geq 1; t_1, t_2, \dots, t_d \in T; b_1, b, \dots, b_d \in \mathbb{R} \quad (3.1.5)$$

- (a)  $\{X(t): t \in T\}$  est strictement stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme (3.1.5) sont strictement stables
- (b)  $\{X(t): t \in T\}$  est stable symétrique si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme (3.1.5) sont stables symétriques.
- (c) Si  $\alpha \geq 1$ , alors  $\{X(t): t \in T\}$  est  $\alpha$ -stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme (3.1.5) sont  $\alpha$ -stables.

### Propriétés

- a) Si  $X_t$  est un processus stable non déterministe, alors il existe un unique  $\alpha \in (0, 2]$  et  $c \in \mathbb{R}^d$  telle que pour tout  $a > 0$ ,

$$\{X(at): t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X(t) + ct : t \in [0, +\infty)\} \quad (3.1.6)$$

- b) Si  $X_t$  est un processus strictement stable non dégénéré (*i. e.*  $P(X(t) = 0: t \in [0, +\infty)) \neq 1$ ), alors il existe  $\alpha \in (0, 2]$  telle que, pour tout  $a > 0$ ,

$$\{X(at): t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X(t) : t \in [0, +\infty)\} \quad (3.1.7)$$

**Définition 3.1.4. (Mouvement  $\alpha$ -stable)** Un processus stochastique  $\{L_\alpha(t): t \in [0, +\infty)\}$  est appelé mouvement  $\alpha$ -stable (standard) ou mouvement  $\alpha$ -stable de Lévy si :

- 1)  $L_\alpha(0) = 0$  p. s.
- 2)  $L_\alpha(t)$  est à accroissements indépendants et stationnaires ;
- 3)  $L_\alpha(t) - L_\alpha(s) \sim S_{\alpha, \beta} \left(0, (t-s)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$  pour tout  $0 \leq s < t < \infty$ .

**Remarque 3.1.2.** Le mouvement  $\alpha$ -stable de Lévy est un exemple de semi-martingale.

Notons aussi, que lorsque :

- ✓  $\alpha = 2$ ,  $L_2(t) = \sqrt{2} w(t)$  où  $\{w(t): t \in [0, +\infty)\}$  est un mouvement Brownien standard.
- ✓  $\beta = 0$ , alors  $L_\alpha(t)$  est  $\alpha$ -stable symétrique (*i. e.* (S $\alpha$ S)).

- ✓ Les mouvements  $\alpha$ -stables symétriques sont  $1/\alpha$ -auto-similaires, i.e. pour tout  $c > 0$ , on a :

$$\{L_\alpha(ct) : t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \{c^{1/\alpha}L_\alpha(t) : t \in [0, +\infty)\}$$

Pour plus des détails nous renvoyons le lecteur à consulter (Protter, 1990) et (Kwapien & Woyczynski, 1992).

Comme, nous allons le voir un peu plus loin, pour les processus stables, le mouvement  $\alpha$ -stable a un rôle similaire au mouvement brownien parmi les processus de diffusion.

### Formes canoniques

#### Première forme canonique

D'après la remarque 3.1.1, la fonction caractéristique d'un processus  $\alpha$ -stable,  $\alpha \in (0, 2]$ , peut s'écrire sous la forme  $e^{t\psi(\xi)}$  avec :

$$\psi(\xi) = i\langle \mu, \xi \rangle + \int_{S_d} \int_0^\infty \left( e^{iy\langle s, x \rangle} - 1 - i \frac{y\langle s, x \rangle}{1 + y^2} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} d\nu(s) \quad (3.1.8)$$

#### Deuxième forme canonique

Soit  $0 < \alpha < 2$ . Si  $X_t$  est un processus  $\alpha$ -stable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors il existe une mesure finie  $\Gamma$  sur  $S_d$  et  $b \in \mathbb{R}^d$  telle que, la fonction caractéristique de  $X_t$  peut s'écrire sous la forme  $e^{t\psi(\xi)}$  avec :

$$\psi(\xi) = i\langle \mu, \xi \rangle - \int_{S_d} |\langle \xi, s \rangle|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}(\langle \xi, s \rangle)) W(\alpha, s, \xi) d\Gamma(s) \quad (3.1.9)$$

Où

$$W(\alpha, s, \xi) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |\langle \xi, s \rangle| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Remarque 3.1.3.** Si  $d = 1$ , alors la formule (3.1.7) peut s'écrire sous la forme

$$\psi(\xi) = i\mu\xi - \gamma^\alpha |\xi|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(\xi)) W(\alpha, \xi) \quad (3.1.10)$$

Où

$$W(\alpha, \xi) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |\xi| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

C'est la forme de Samorodnitsky & Taquq (voir définition 1.2.2). On rappelle que  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\gamma > 0$ .

Un processus  $X_t$   $\alpha$ -stable vérifiant (3.1.8), est appelé processus stable de paramètres  $(\alpha, \beta, \mu, \gamma)$ . Comme pour les variables stable, les processus stables présentent

des grands sauts sur leurs trajectoires lorsque  $\alpha$  est proche de 0, et des sauts de plus en plus petits lorsque  $\alpha$  se rapproche de 2.

### 3.1.2. Construction des intégrales stochastiques d'Itô par rapport à un mouvement $\alpha$ -stable

Plusieurs auteurs ont essayé d'étendre la théorie des intégrales d'Itô à une classe plus large des processus non gaussiens (Engel, 1982; Lin, 1981; Surgailis, 1981). Plus particulièrement, le problème de l'intégration stochastique par rapport à un mouvement  $\alpha$ -stable a été étudié par (Giné & Marcus, 1983; Janicki & Weron, 1994; Kallenberg, 1975; Rosinski & Woyczynski, 1986; Samorodnitsky & Taqqu, 1994).

Nous allons présenter brièvement dans cette partie, la construction de l'intégrale stochastique  $\int XL_\alpha$ , où  $(L_\alpha(t))_{t \geq 0}$  est un mouvement  $\alpha$ -stable avec  $1 < \alpha < 2$  pour une classe des processus à valeurs réelles  $X(t, \omega)$   $\mathcal{F}_t$  adaptés, comme dans (Belkacem, 1996) en suivant les travaux de (Giné & Marcus, 1983) et (Rosinski & Woyczynski, 1986) Giné et Marcus [55] et Rosinski et Woyczynski [137].

Soit  $\mathbb{L}^\alpha$  l'espace de tous les processus,  $X = \{X(t, \omega)\}_{t \geq 0}$  sur  $\Omega \times [0, +\infty)$ , adaptés à  $\{\mathcal{F}_t\}$  et telle que pour tout  $T > 0$  :

$$\|X\|_{\mathbb{L}^\alpha} = \left( E \int_0^T |X(s, \omega)|^\alpha ds \right)^{1/\alpha} < \infty \quad (3.1.11)$$

De la même manière, nous définissons  $\mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$  la famille de tous les processus  $X$  sur  $\Omega \times [0, +\infty)$   $\mathcal{F}_t$ -adaptés et telle que pour tout  $T > 0$  :

$$\int_0^T |X(s)|^\alpha ds < \infty \quad p.s. \quad (3.1.12)$$

Soit  $\mathbb{A}^\alpha$  l'ensemble de tous les processus  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$   $\mathcal{F}_t$ -adaptés à trajectoires dans  $D[0, +\infty)$  (qui représente les fonctions à valeurs réelles sur  $[0, +\infty)$  et qui sont càdlàg en chaque  $t \in [0, +\infty)$ ), munies de la topologie de Skorohod (Billingsley, 1979), telle que pour tout  $T > 0$  la norme faible  $\mathbb{L}^\alpha$  est finie, i.e :

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha P \left( \sup_{t \leq T} |X(t)| > \lambda \right)^{1/\alpha} < \infty \quad (3.1.13)$$

On désigne par  $\mathcal{E}$  la classe de tous les fonctions  $X: [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ , qui sont des combinaisons linéaires des fonctions indicatrices.  $X \in \mathcal{E}$  Peut-être exprimé de la forme :

$$X(t, \omega) = \phi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (3.1.14)$$

Où  $\{t_n\}_n^\infty$  est une suite des nombres réels avec  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , et  $\phi_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. L'intégral  $\int X dL_\alpha$  est construit à travers les étapes suivantes:

**1) Construction de  $\int X dL_\alpha$  quand  $X \in \mathcal{E}$**

Lorsque  $X \in \mathcal{E}$ , l'intégrale  $\int X dL_\alpha$  est définie comme suit :

$$\int_0^t X dL_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(L_\alpha(t_{i+1}) - L_\alpha(t_i)) + \phi_n(L_\alpha(t) - L_\alpha(t_n)) \quad \text{si } t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

Et

$$\int_0^t X dL_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(L_\alpha(t \wedge t_{i+1}) - L_\alpha(t \wedge t_i)) \quad \text{si } 0 \leq t \leq \infty. \quad (3.1.15)$$

**2) Construction de  $\int X dL_\alpha$  quand  $X \in \mathbb{L}^\alpha$  (Extension)**

Le théorème suivant, permet d'étendre la construction de  $\int X dL_\alpha$  de  $X \in \mathcal{E}$  à  $X \in \mathbb{L}^\alpha$ .

**Théorème 3.1.2.** (Rosinski & Woyczynski, 1986) Il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$ , telle que pour tout processus simple  $X \in \mathbb{L}^\alpha$  et tout  $T > 0$ ,

$$c_1 E \int_0^T |X(s)|^\alpha ds \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha P \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X dL_\alpha \right| > \lambda \right) \leq E \int_0^T |X(s)|^\alpha ds \quad (3.1.16)$$

L'application  $X \rightarrow \int X dL_\alpha$  peut être étendue à un plongement isomorphe de  $\mathbb{L}^\alpha$  dans  $\mathbb{A}^\alpha$ : pour chaque  $X \in \mathbb{L}^\alpha$  il existe un processus stochastique dans  $\mathbb{A}^\alpha$ , noté  $\int_0^t X dL_\alpha \geq 0$ , vérifiant (3.1.16) et qui coïncide avec l'intégrale stochastique (3.1.15) pour  $X \in \mathcal{E}$ .

**3) Construction de  $\int X dL_\alpha$  quand  $X \in \mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$**

Pour chaque  $X \in \mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$ , on définit les temps d'arrêt par :

$$\tau_n = \inf \left\{ t, \int_0^t |X(s)|^\alpha ds \right\} \wedge n \quad (3.1.17)$$

Avec  $n = 1, 2, \dots$  de telle sorte que  $\tau_n \nearrow \infty$  p. s.

Pour  $X \in \mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$ , il est possible de montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{1}_{(\tau_n \geq s)} X \in \mathbb{L}^\alpha$ . D'un autre côté, nous avons :

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} X dL_\alpha = \int_0^t \mathbf{1}_{(\tau_n \geq s)} X dL_\alpha$$

Pour  $X \in \mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$ , le processus  $\left\{ \int_0^t X dL_\alpha, t > 0 \right\}$  est bien défini et admet presque toutes les trajectoires dans  $D[0, +\infty)$ . Il sera appelé intégrale de  $X$  par rapport à  $L_\alpha$ .

D'une façon plus générale (Rosinski & Woyczynski, 1986) ont montré que  $X$  est  $L_\alpha$ -intégrable si et seulement si  $X \in \mathbb{L}_{p.s.}^\alpha$ .

### 3.1.3. Processus de diffusion par rapport à un mouvement $\alpha$ -stable

#### Définitions

Nous considérons les équations de type Itô exprimées sous la forme suivante :

$$X(t) = Z + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dL_\alpha(s) \quad (3.1.18)$$

Où :

$$a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

Et  $Z$  une variable aléatoire stable  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\{L_\alpha(t) : t \in [0, +\infty)\}$  est un mouvement  $\mathcal{F}_t$ - $\alpha$ -stable symétrique avec  $1 < \alpha < 2$ .

Par analogie avec équations différentielles classiques d'Itô, l'équation (3.1.18) est appelée une Équation Différentielle Stochastique par rapport à un mouvement  $\alpha$ -stable ( $\alpha$ -EDS). La solution de (3.1.18) est appelée diffusion, ce que nous expliquer dans la définition suivante :

**Définition 3.1.6.** Une solution de l'équation (3.1.18) est un processus stochastique  $\mathcal{F}_t$ -adapté vérifiant :

- 1) Pour tout  $t \geq 0$ , les intégrales  $\int_0^t a(s, X(s))ds$  et  $\int_0^t b(s, X(s))dL_\alpha(s)$  sont bien définies :

$$\int_0^t a(s, X(s))ds < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^t b(s, X(s))dL_\alpha(s) < \infty \quad P - p. s. s$$

- 2)  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  Vérifie (3.1.18) i.e. :

$$\forall t \geq 0 \quad P. ps. \quad X(t) = Z + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dL_\alpha(s)$$

#### Remarques 3.1.4.

- 1) L' $\alpha$ -EDS (3.1.18) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dL_\alpha(t) \\ X(0) = Z \end{cases} \quad (3.1.19)$$

- 2) Les  $\alpha$ -EDS sont des cas particuliers d'équations différentielles stochastiques plus générales par rapport à des semimartingale, i.e. des équations de la forme :

$$X(t) = Z + \int_0^t f(X(s))dY(s) \quad (3.1.20)$$

Où  $\{Y(t)\}$  est un processus semimartingale.

L'existence et l'unicité de la solution de (3.1.18), provient des théorèmes généraux sur l'existence de solutions d'EDS par rapport à des semimartingales (Protter, 1990)

- 3) La solution de (3.1.18) n'est pas en général un processus  $\alpha$ -stable. Un processus de diffusion  $\alpha$ -stable est peut alors être obtenue dans le cas où l'intégrant figurant dans l'intégrale stochastique est déterministe, i.e.

$$X(t) = Z + \int_0^t (c(s) + a(s)X(s))ds + \int_0^t b(s)dL_\alpha(s) \quad (3.1.21)$$

$X(t)$  Peut-être exprimé sous la forme suivante :

$$X(t) = f(t, 0)Z + \int_0^t f(t, s)c(s)ds + \int_0^t f(t, s)b(s)dL_\alpha(s) \quad (3.1.22)$$

Où  $f(t, s) = \exp\left(\int_0^t a(u)du\right)$

### 3.1.4. Approximation et simulation des $\alpha$ -EDS

Il existe plusieurs méthodes de simulation de solutions d'EDS par rapport à un mouvement Brownien (Pardoux & Talay, 1985). Nous adoptons ici une méthode d'Euler (Janicki & Weron, 1994) pour approximer le processus  $\{X_t : t \in [0, T]\}$ , solution de (3.1.18), par un processus à temps discret  $\{X_{t_i}^\tau\}_{i=0}^I$  en fixant un pas de temps  $\tau = T/I$  sur l'intervalle  $I = [0, T]$  et en considérant le temps discret  $t_i = i\tau, i = 1, \dots, I$ .

Nous approximons le processus discret  $\{X_{t_i}^\tau\}_{i=0}^I$  solution de (3.1.18) par une suite des tirages aléatoires  $\{X_{t_i}^\tau(n)\}_{n=0}^N$  générés par un simulateur des v.a. Stables. Ainsi l'algorithme de simulation de la solution approximée de (3.1.18) consiste à :

- a) Approximer le processus  $\{X_t : t \in [0, T]\}$ , solution de (3.1.18), par un processus à temps discret  $\{X_{t_i}^\tau\}_{i=0}^I$  défini par :

$$\begin{cases} X_{t_i}^\tau - X_{t_{i-1}}^\tau = a(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^\tau)\tau + a(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^\tau)\Delta L_{\alpha,i}^\tau \\ X_0^\tau = Z \end{cases}$$

Où

$$\Delta L_{\alpha,i}^{\tau} = L_{t_i}^{\tau} - L_{t_{i-1}}^{\tau} \sim S_{\alpha}(\beta, 0, \tau^{1/\alpha}) \quad (3.1.23)$$

- b) Remplacer les variables aléatoires  $\Delta L_{\alpha,i}^{\tau}$  par des échantillons aléatoires stables  $\{\Delta L_{\alpha,n}^{\tau}\}_{n=1}^N$  simulés par la méthode de Chambers, Mallows et Stuck (Chambers et al., 1976).

(Janicki et al., 1993) ont montré que  $\{X^{\tau}(t): t \in [0, T]\}$  converge uniformément en probabilité vers  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  sur  $[0, T]$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , quand les fonctions  $b(t, X(t)) = b(t)$  dans (3.1.18) ou (3.1.19). Tandis que (Protter & Talay, 1997) ont pu donner un résultat plus général de convergence de la solution d'une EDS gouvernée par un processus de Lévy, définie par le schéma d'Euler, ils ont aussi montré que la vitesse de convergence dépend de la queue de la mesure de Lévy.

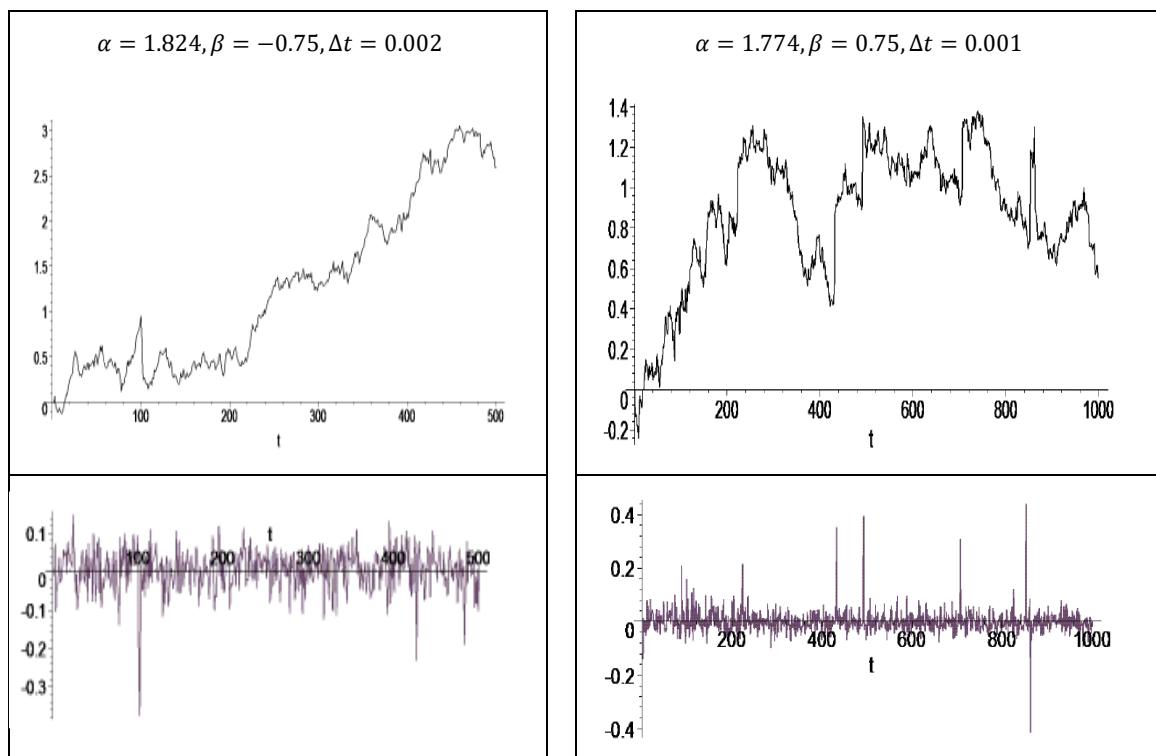


Fig.3.1. 1. Mouvement  $\alpha$ -stable (en haut) et Accroissements

## 3.2. Processus de risque

### 3.2.1. Processus de risque classique

Dans le cas le plus général un processus de risque  $X(t)$  (le capital au temps  $t$ ) représentant le comportement d'une compagnie d'assurance est décrit par l'équation suivante :

$$X(t) = u + ct - S(t). \quad (3.2.1)$$

Où  $u$  Est la réserve de risque initiale,  $c$  est le taux de prime qui est constant, et  $S(t)$  représente le processus de sinistralité (Montant cumulé des sinistres), définie par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)} \quad (3.2.2)$$

Avec

- $N(t)$  : Le nombre de sinistre sur l'intervalle  $(0, t]$ .
- $Y_i$  : le montant de sinistre (la perte occasionnée par le sinistre  $i$ )

On rappelle, que dans le modèle de Cramér Lundberg, on suppose que :

- (a)  $Y_1, Y_2, \dots$  Sont des v.a *i.i.d* de fonction de répartition  $F$
- (b)  $N(t)$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$
- (c)  $N(t)$  et  $Y_i$  sont supposés indépendant
- (d)  $c$  : le taux de prime qui est constant

Le processus de sinistralité (montant total des sinistres) est généré par les variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots$ , et  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , où  $T_i$  représente le temps d'inter-arrivée entre le sinistre  $Y_{i+1}$  et  $Y_i$  avec  $T_1$  l'instant du premier sinistre (le temps d'attente jusqu'au premier sinistre). Il n'y a qu'un nombre fini de déclaration (sinistre) dans des intervalles de temps finis, alors l'instant de la déclaration du nième est  $\delta_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  et le processus du nombre de sinistre peut être écrit comme suit :

$$N(t) = \min\{n \geq 0: \delta_{n+1} > 0\} = \max\{n \geq 0: \delta_n \leq 0\}$$

Dans la pratique, les cotisations sont rarement capitalisées continûment au cours du temps, mais en général à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et nous supposons donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement  $N_t$ , la valeur du capital de la compagnie au temps  $t$  est donc égal à  $u + ct$ , où  $ct = \Pi(t)$  est le revenu de la compagnie.

Pour une bonne gestion de risque et du portefeuille d'une compagnie d'assurance, il est nécessaire d'avoir une bonne modélisation du processus de sinistre, qui dépend essentiellement des montants des sinistres et de leurs fréquences. Il est donc important d'avoir la meilleure estimation possible de la distribution des montants des sinistres, ainsi que celle des inter-arrivées, qui permettra de décrire au mieux le processus de comptage des nombres des sinistres.

### Modélisation du nombre de sinistre

Le processus de comptage des réclamations noté  $\{N_t, t \geq 0\}$  et qui représente le nombre de réclamations dans  $(0, t]$  satisfait les conditions suivantes :

- $N(0) = 0$ ,
- $N(t) \in \mathbb{N}$ ,
- $N(t) \leq N(t+h)$ .

Nous supposons aussi, qu'il ne peut y avoir qu'un seul et unique sinistre se produisant à l'instant  $t$  ; Les sinistres cumulés (simultanés) sont comptés dans ce sens comme un seul événement de sinistre. Cependant, cela n'est pas très réaliste (n'est pas toujours vrai). Une façon de remédier à ça, est d'associer un indice pour chaque saut, pour plus de détail sur cette démarche voir (stochastic processes for insurance and finance. T. Rolski and all ; ch 12). D'autant plus que dans la théorie classique du risque collectif, on suppose que le processus de nombre de sinistres a des incréments indépendants.

Parmi les modèles les plus utilisés :

- Le processus de poisson, dans ce cas, on retrouve le processus de risque classique « processus de Cramèr-Lundberg »
- Modèle binomial négatif
- Le processus de renouvellement
- Mixture de processus de poisson
- Distribution du nombre de sinistre définie récursivement
- Processus avec des accroissements stationnaires ou indépendants.

Pour plus de détails voir (Rolski et al., 1999) ou (Bühlmann, 1970)

### Distribution des tailles des sinistres

Nous pouvons classifier les distributions des tailles de sinistres en deux classes, la première regroupe les distributions de queue légère « light tailed », la deuxième celle des distributions de queue lourde « heavy tailed ». voir [4].

#### a) Les distributions à queue légère

Les distributions de sinistre à queue légère sont définies comme des distributions dont la fonction de distribution  $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$  satisfait  $\bar{G} = O(e^{-ry})$  pour  $r > 0$ , ou  $O$  est le symbole de Landau, parmi les distributions à queue légère les plus utilisées, on retrouve : la loi exponentielle, la loi Gamma, la loi normale, la loi de Weibull, ...etc.

#### b) Les distributions à queue lourde :

Les distributions à queues lourdes sont liées à la théorie des valeurs extrêmes. Plusieurs définitions ont été associées à ces distributions en fonction de critère de classification.

La caractérisation la plus simple et celle basée sur la comparaison avec la loi normale ; On dit, alors, qu'une distribution a la queue lourde si :

$$C_k = E\left[\frac{(X - \mu_X)^4}{\sigma_X^4}\right] > 3 \quad (3.2.3)$$

Ce qui est équivalent à dire qu'une distribution a une queue lourde si et seulement si son coefficient d'aplatissement,  $C_k$ , est supérieur à celui de la loi Normale (pour laquelle  $C_k = 3$ ). La caractérisation, donnée par l'équation (3.2.1), est très générale et ne peut être appliquée que si le moment d'ordre 4 existe. Pour cela, nous définissons les distributions de sinistre à queue lourde comme une distribution  $G$  qui satisfait  $M(r) = \infty$  pour tout  $r > 0$ , ou  $M(r) = \int_0^\infty e^{ry} dG(y)$  est la fonction génératrice des moments de  $Y$  à  $r$ .

Les différentes distributions les plus utilisées peuvent être ordonnées par rapport à leurs queues droites, comme dans la figure 3.2. (El Adlouni et al., 2007, p. 19).

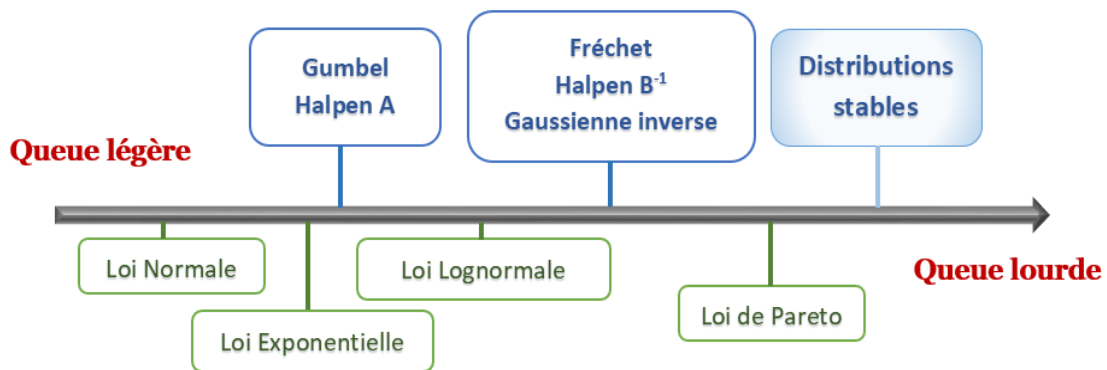


Fig.3.2. 1. Distributions ordonnées par rapport à leurs queues droites

### Charge de sécurité

La prime de risque de sécurité, ou « charge de sécurité », est l'élément qui protège la compagnie d'assurance des écarts importants de réclamations de la moyenne et permet également une accumulation de capital, alors que la prime de risque nette est la composante calculée pour couvrir les paiements des réclamations en moyenne. Dans le modèle de Cramér-Lundberg (le modèle classique), le risque moyen pour un intervalle  $(0, t]$  est égal à

$$E[X_t] = ct + m E[N_t] = (c - \lambda m)t \quad (3.2.4)$$

Où  $m = E[Y_i]$ . Nous notons

A partir de là, on peut définir la charge de sécurité, que nous allons noter  $\eta$  par la formule :

$$\eta = c - \lambda m \quad (3.2.5)$$

Et le coefficient relatif de sécurité (ou charge relative de sécurité)  $\theta$  par :

$$\theta = \frac{(c - \lambda m)}{\lambda m} = c(\lambda m)^{-1} - 1 \quad (3.2.6)$$

C'est la condition qui garantit bien une couverture parfaite contre le risque de sinistralité, on appelle aussi condition de profit net, la condition  $\theta > 0$ . Pour plus de détails voir (Asmussen & Albrecher, 2010, p. 3-4) (Asmussen & Albrecher, 2010, p. 3-4; Embrechts et al., 2013, p. 25-26)

### Probabilité de ruine

Une des mesures de risque classique est la probabilité de ruine, c'est la probabilité que les réserves deviennent strictement négatives. Elle est donnée par l'expression suivante, pour un horizon fini  $T$ :

$$\psi(u, T) = P(\exists t \in [0, T], X(t) < 0 / X(0) = u), \quad T \leq \infty$$

Que nous pouvons réécrire comme suit :

$$\psi(u, T) = P(\tau < T / X(0) = u), \quad T \leq \infty \quad (3.2.7)$$

Où  $\tau$  est l'instant de ruine du processus de risque, définie par

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X(t) < 0\} \quad (3.2.8)$$

Pour un horizon infini elle est de la forme :

$$\psi(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(u, T) = P(\exists t > 0, X(t) < 0 / X(0) = u) \quad (3.2.9)$$

Qui est égale à 1 quand il n'y pas de charge de sécurité i.e.  $c \leq \lambda m$  (On est certain de tomber en ruine quel que soit le capital initial.).

Dans le cas d'une charge de sécurité positive, nous avons  $X(t) \rightarrow \infty$  et la probabilité de ruine satisfait l'équation intégral-différentielle de premier ordre :

$$\lambda E[\psi(u - Y) - \psi(u)] + c \psi(u) = 0, \quad u \geq 0 \quad (3.2.10)$$

Qui correspond au générateur infinitésimal pour un processus de risque de type Cramér-Lundberg. Pour plus de détails sur les générateurs infinitésimaux pour différents modèles de risque se référer à (Laouar, 2007) ou (Grandell, 1991).

Généralement, pour les calculs, on préfère travailler avec la probabilité de survie  $\delta(\cdot)$ , aussi appelée probabilité de non-ruine, à la place de la probabilité de ruine, qui est définie par :

$$\delta(u, T) = 1 - \psi(u, T) \quad \text{et} \quad \delta(u) = 1 - \psi(u) \quad (3.2.11)$$

Le calcul de la probabilité de ruine (ou de survie) est l'un des problèmes centraux en science actuarielle. Cependant une forme explicite et analytique de la probabilité de ruine n'a pu être obtenue que pour un nombre réduit de distribution des montants de sinistre (principalement à queue légère). Pour des montants de sinistres exponentiellement distribués, la probabilité de ruine est de la forme :

$$\psi(u) = \frac{\lambda m}{c} e^{-R_0 u} \quad (3.2.12)$$

Où  $R_0$  est appelé coefficient de Lundberg classique qui est égale à  $(c - \lambda m) / \lambda m$ .

Pour d'autres distributions, il est plus simple de penser à la majoration de la probabilité de ruine en utilisant l'inégalité de Lundberg définie par :

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (3.2.13)$$

C'est la borne exponentielle de Lundberg de la probabilité de ruine. Le nombre réel  $R$  est appelé coefficient d'ajustement ou coefficient de Lundberg. L'inégalité de Lundberg peut être affinée comme suit :

$$a_- e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq a_+ e^{-Ru} \quad (3.2.14)$$

Avec

$$a_- = \inf_{0 \leq z < z_0} \frac{e^{-Rz} \int_z^\infty \bar{F}(y) dy}{\int_z^\infty e^{-Ry} \bar{F}(y) dy} \quad a_+ = \sup_{0 \leq z < z_0} \frac{e^{-Rz} \int_z^\infty \bar{F}(y) dy}{\int_z^\infty e^{-Ry} \bar{F}(y) dy}$$

Où  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  la distribution queue de  $Y$ , et  $z_0 = \sup\{z: F(y) < 1\}$  est la borne droite du support de  $F$  (Embrechts et al., 2013).

À partir de là nous avons, l'*approximation de Cramér-Lundberg* de la probabilité de ruine

$$\psi(u) \approx C e^{-Ru} \quad (3.2.15)$$

Le coefficient de Lundberg est considéré comme l'aversion au risque de la compagnie, il peut donner une idée du niveau de dangerosité de son portefeuille. En effet, plus  $R$  est grand, plus la limite supérieure de la probabilité de ruine est basse, donc le portefeuille est moins dangereux et la situation est plus sûre. Cela signifie que  $e^{-R}$  peut être interprété comme le facteur par lequel la probabilité de ruine diminue si le capital initial augmente et passe de  $u$  à  $u + 1$ , pour  $u$  grand. Pour le cas particulier où les montants de sinistre sont exponentiellement distribués, la probabilité de ruine définie par l'équation (3.2.12) en égale à  $\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}$  qui est valable pour tout  $u$ .

Pour une vue générale et plus complète sur la théorie du risque et la probabilité de ruine, nous renvoyons les lecteurs intéressés à (Asmussen, 2000; Asmussen & Albrecher, 2010; Bühlmann, 1970; Embrechts et al., 2013; Grandell, 1991)

### Généralisation du modèle de risque classique

Il y a eu plusieurs généralisations du modèle de risque classique (3.2.1) telles que :

- Des modèles avec une prime d'assurance stochastique ou dépendante de la réserve (Asmussen, 2000; Asmussen & Albrecher, 2010).
- Approximation du processus de risque classique par un mouvement Brownien ou d'autres processus de diffusion (ce qui était inspiré de la modélisation mathématique en finance). Voir (Bohman, 1972; Grandell, 1972, 1991; Iglehart, 1969)
- Des modèles de risque perturbé : on ajoute une perturbation ou une composante de diffusion au processus de risque classique qui aura alors la forme suivante :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + \eta Z(t) \quad (3.2.16)$$

Où  $\eta$  est un paramètre de dérive,  $Z_t$  est la composante qui ajoute une incertitude de plus au processus de risque qui peut être interprété (ou liée) par fluctuation des nombres d'assuré ou de la prime ou bien le taux de retour sur investissement de la réserve de la compagnie d'assurance.  $Z_t$  Peut-être un processus de saut, un mouvement brownien (Gerber, 1970), un processus de diffusion (Dufresne et al., 1991; Dufresne & Gerber, 1991).

La famille des processus  $\alpha$ -stable de Lévy fut aussi énormément exploitée dans la théorie du risque, comme nous allons le voir dans la sous-section suivante.

### 3.2.2. Processus $\alpha$ -stable de Lévy dans la théorie du risque

#### Processus de risque gamma

La première application d'un processus  $\alpha$ -stable, autre que le processus de poisson composé, pour la modélisation du processus de sinistre est dû à Dufresne, Gerber et Shiu (1991). Ils ont proposé le processus gamma pour modéliser le montant total des sinistres  $S(t)$ , car il présente les propriétés suivantes : à incréments indépendants, stationnaires et non négatifs avec un nombre infini de sinistres dans un intervalle de temps quelconque. Le processus de sinistre Gamma est alors une limite de processus de Poisson composé et il est composé d'un nombre infini de petits sauts. Malgré un nombre infini de saut, ceux-ci restent en quelque sorte suffisamment petits pour permettre une certaine régularité du processus, car  $S(t)$  est fini (la majorité des sinistres sont très petits dans un certain sens). Ils ont donc utilisé les résultats bien connus pour le processus de Poisson composé dans la théorie du risque pour obtenir des résultats tels que la probabilité de ruine pour le processus de sinistre  $S(t)$  de type Gamma. Le processus de risque est donc de la forme :

$$X(t) = u + ct - S(t) \quad (3.2.17)$$

Où  $S(t)$  est un processus Gamma représentant le montant total des sinistres  $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ , et  $c$  le taux de prime est défini par  $c = (1 + \theta)E[G(1)]$  avec  $\theta > 0$  est la charge de sécurité.

Pour définir et obtenir la distribution de  $S(t)$ , ils proposent d'utiliser sa transformée de Laplace définie par :

$$E[e^{-zS(t)}] = \exp\left(t \int_0^{\infty} (1 - e^{-zy}) dQ(y)\right), \quad z > 0, t \geq 0 \quad (3.2.18)$$

Où  $Q(x)$  est une fonction non négative et non croissante pour  $x > 0$ , avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} Q(x) &\rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty \\ \int_0^{\infty} Q(x) dx &< \infty \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Le processus  $S(t)$  est donc défini par la fonction  $Q(x)$ , il est à accroissements indépendants, stationnaires et non négatifs, et  $E(S(t)) < \infty$ .

Pour considérer une famille plus large de processus donnée, dans laquelle le processus gamma peut être intégré, ils ont défini la fonction  $Q(x)$  par :

$$-dQ(y) = ax^{\alpha-1}e^{-by}dx \quad (3.2.20)$$

Où avec  $a$  et  $b$  deux constantes positives et  $\alpha > -1$ .

Pour  $\alpha = 0$ , le processus de sinistre  $S(t)$  est un processus gamma.

Pour  $\alpha > 0$ , on retrouve le processus de poisson composé et pour  $\alpha = -1/2$ , on retrouve le processus gaussien inverse. Pour plus de détails se référer à (Dufresne et al., 1991).

Le processus gaussien inverse a été appliqué à la modélisation du nombre de sinistres par (Willmot, 1987), et à la modélisation du montant des sinistres individuels par (Gendron & Crepeau, 1989). Une nouvelle approximation de la distribution globale des sinistres basée sur la distribution gaussienne inverse a été proposée par (Chaubey et al., 1998), ils ont également proposé un mélange gaussienne inverse-gamma.

Dufresne, Gerber et Shiu proposent aussi de calculer la probabilité de ruine asymptotique en utilisant l'approximation de Cramér-Lundberg donnée par la formule (3.2.15), ils trouvent :

$$\psi(u) \approx \frac{\theta(1-R)}{R-\theta(1-R)}e^{-Ru} \quad (3.2.21)$$

### Approximation $\alpha$ -stable

Furrer, Michna et Weron (1997) généralisent l'approximation de diffusion de (Grandell, 1977). Ils proposent alors d'approcher le processus de risque avec un mouvement de  $\alpha$ -stable de Lévy avec dérive. Cette approche, permet de prendre en compte des événements extrêmes au sens de (Embrechts & Schmidli, 1994), contrairement aux processus de risque classique qui suppose des sinistres à queue légères. Ils proposent alors un processus de risque de la forme :

$$X(t) = u + ct - \eta^{1/\alpha}Z_\alpha(t). \quad (3.2.22)$$

Où  $Z_\alpha(t)$  est un mouvement de  $\alpha$ -stable de Lévy, avec  $1 < \alpha < 2$  (afin de garantir l'existence d'une moyenne finie de  $Z_\alpha(t)$ ), et  $\eta$  une constante positive définie par le théorème 3.2.1 ci-après. Avant de présenter le théorème, nous allons présenter brièvement l'approche d'approximation de Furrer, Michna et Weron (1997) ; ils proposent de construire un échantillon de processus de risque :

$$X^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{i=1}^{N^{(n)}(t)} Y_i^{(n)}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.23)$$

Où  $u^{(n)} > 0$  et  $c^{(n)} > 0$  correspondent respectivement aux réserves initiales et aux taux de prime,  $N^{(n)}$  le processus de comptage de nombre de sinistre, et  $(Y_i^{(n)} : i \in \mathbb{N})$  représentent les montants de sinistre tels que  $Y_i^{(n)} = Y_i/b_n$  avec  $Y_1, Y_2, \dots$  des v.a *i.i.d* de fonction de répartition  $F$  et de moyenne  $E[Y] = E[Y_i] = m$  vérifiant :

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n (Y_i - m) \rightarrow Z_\alpha(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2.24)$$

Où  $b_n = n^{1/\alpha} L(n)$  avec  $L$  une fonction qui varie lentement à l'infinie. En d'autres termes  $F$  est dans le domaine d'attraction de  $Z_\alpha(1)$

**Théorème 3.2.1.** Soit  $(Y_i; i \in \mathbb{N})$  un échantillon de variables aléatoire *i.i.d* de fonction de répartition  $F$  et de moyenne  $m$  vérifiant (3.2.23), et soit  $(N^{(n)}; n \in \mathbb{N})$  un échantillon de processus de comptage tels que

$$\frac{N^{(n)}(t) - \eta n t}{b_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2.25)$$

Supposons aussi que nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( c^{(n)} - \eta n \frac{m}{b_n} \right) \rightarrow 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = u$$

Alors

$$u^{(n)} + c^{(n)} t - \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{N^{(n)}(t)} Y_i^{(n)} \rightarrow u + ct - \eta^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2.26)$$

Furrer, Michna et Weron (1997) ont pu aussi élaborer quelques résultats importants concernant la probabilité de ruine en horizon fini pour leur modèle défini par la formule (3.2.21). La proposition suivante, ainsi que le théorème 3.2.2 résumant les résultats concernant la probabilité de ruine asymptotique pour le modèle (3.2.21).

**Proposition 3.2.1.** Soit  $Z_\alpha(t)$  est un mouvement de  $\alpha$ -stable de Lévy avec paramètre d'asymétrie  $-1 < \beta \leq 1$ , alors on a

$$P \left[ T \left( u + ct - \eta^{1/\alpha} Z_\alpha(t) \right) \leq t \right] \sim C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \eta t (u + ct)^{-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2.27)$$

Avec  $C_\alpha = (1 - \alpha) / (\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))$

**Théorème 3.2.2.** Soit  $Z_\alpha(t)$  est un mouvement de  $\alpha$ -stable de Lévy avec  $\alpha \neq 1$  et un paramètre d'asymétrie  $|\beta| \leq 1$ , pour  $u, c$  et  $\eta$  constantes positives, on a :

$$P \left[ T \left( u + ct - \eta^{1/\alpha} Z_\alpha(t) \right) \leq t \right] \leq \frac{\bar{G} \left( \frac{u + ct}{(\eta t)^{1/\alpha}}; \alpha, \beta \right)}{\bar{G} \left( \frac{ct}{(\eta t)^{1/\alpha}}; \alpha, \beta \right)} \quad (3.2.28)$$

Où  $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$  avec  $G(x)$  la fonction de répartition d'une variable  $S_{\alpha, \beta}(0, 1)$ .

Pour les démonstrations et plus de détails sur l'approximation du processus de sinistre par un mouvement  $\alpha$ -stable voir (Furrer et al., 1997).

### Processus de risque perturbé par un mouvement $\alpha$ -stable de Lévy

Furrer (1997) dans sa thèse « Risk theory and heavy tailed Lévy processes » propose un modèle de risque perturbé de la forme suivante :

$$R(t) = X(t) + \eta Z_\alpha(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + \eta Z_\alpha(t) \quad (3.2.29)$$

Où  $\eta$  est un nombre positif et  $Z_\alpha(t)$  est un mouvement de  $\alpha$ -stable de Lévy, indépendant de  $R(t)$  avec  $1 < \alpha < 2$  et  $\beta = -1$ . La condition  $\beta = -1$  est nécessaire pour garantir qu'il n'y a pas de sauts vers le haut de  $Z_\alpha(t)$ . Les sauts vers le bas de  $Z_\alpha(t)$  pourraient être considérés comme certains paiements aléatoires supplémentaires (des dépenses ou des coûts de sinistres), pour plus de détails voir (Furrer, 1997, 1998). Le processus de comptage de nombre de sinistre  $N(t)$  est un processus de poisson homogène d'intensité  $\lambda$  et les montants de sinistre  $Y_1, Y_2, \dots$  sont *i.i.d* de fonction de répartition  $F$  et de moyenne  $E[Y] = m$ .

Furrer (1997) définit la probabilité de ruine par la formule :

$$\psi(u) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda m}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda m}{c}\right)^n (F_I^{*n} * U^{*(n+1)})(u) \quad (3.2.30)$$

Où 
$$F_I(x) = \frac{1}{m} \int_0^x \bar{F}(y) dy \quad \text{et} \quad \bar{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma(1 + n(\alpha - 1))} x^{n(\alpha - 1)}$$

Dans le modèle de risque perturbé original de (Dufresne & Gerber, 1991), la composante qui ajoute une incertitude était un mouvement brownien, ce qui ne permet pas de modéliser de large variations. En choisissant le mouvement  $\alpha$ -stable, Furrer a obtenu davantage de résultats, plus de flexibilité grâce au paramètre  $\alpha$ . En changeant  $\alpha$ , on peut contrôler la variabilité du processus, plus  $\alpha$  est petit, plus les fluctuations sont importantes.

### 3.2.3. Description du modèle de risque avec un processus de sinistre $\alpha$ -stable

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, le modèle classique de risque ne prend pas vraiment en considération le cas de grande fluctuation, C'est pour cette raison, que nous avons proposé un processus  $\alpha$ -stable pour modéliser la sinistralité automobile, et nous avons montré dans la section (2.3), que les montants de sinistre automobile suivent bien une distribution  $\alpha$ -stable.

Nous supposons donc que le processus de risque est décrit par l'équation (3.2.1) avec un processus de sinistres  $\{S(t) : t \geq 0\}$  défini par une équation différentielle stochastique régie par un mouvement  $\alpha$ -stable ( $\alpha$ -SDE) :

$$\begin{cases} dS(t) = a(t, S(t))dt + b(t, S(t))dL_\alpha(t) \\ S(0) = Z \end{cases} \quad (3.2.31)$$

L' $\alpha$ -EDS (3.23), peut être réécrite sous forme d'intégrale, et on obtient :

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(k, S(k))dk + \int_0^t b(k, S(k))dL_\alpha(k), \quad t \geq 0 \quad (3.2.32)$$

Où  $L_\alpha(t)$  est un mouvement  $\alpha$ -stable standard.

Pour simplifier les choses et pouvoir comparer notre modèle au mouvement brownien géométrique (cas  $\alpha = 2$ ), nous supposons que le coefficient de dérive correspond au paramètre de localisation ( $\mu \in \mathcal{R}$ ) et que le coefficient de diffusion est une constante positive qui correspond au paramètre d'échelle ( $\gamma \in \mathcal{R}^+$ ). Nous pouvons donc réécrire (3.2.31) comme suit

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \gamma dL_\alpha(t) \\ S(0) = s \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Et (3.2.32) devient :

$$S(t) = S(0) + \mu \int_0^t dk + \gamma \int_0^t dL_\alpha(k), \quad t \geq 0 \quad (3.2.34)$$

### Simulation du processus de sinistre

Nous adoptons ici la méthode d'Euler (voir (Janicki & Weron, 1994)) pour approximer le processus de sinistre  $\{S_t: t \in [0, T]\}$  solution de l'équation (3.2.2) par un processus à temps discret  $\{S_{t_i}\}_{i=0}^N$ , en fixant un pas de temps  $\Delta t = T/N$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , en considérons le temps discret  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

$$\begin{cases} S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \mu S_{t_{i-1}} \Delta t + \gamma S_{t_{i-1}} \Delta L_{\alpha,i} \\ S_0 = s \end{cases}$$

Où  $\Delta L_{\alpha,i} = L_{\alpha,t_i} - L_{\alpha,t_{i-1}} \sim S_\alpha(\beta, 0, (\Delta t)^{1/\alpha})$

Nous présentons quelques simulations du processus de sinistre  $\alpha$ -stable dans Fig.3.2.2 et Fig3.2.3, l'algorithme de simulation avec Maple est donné en Annexe 2.

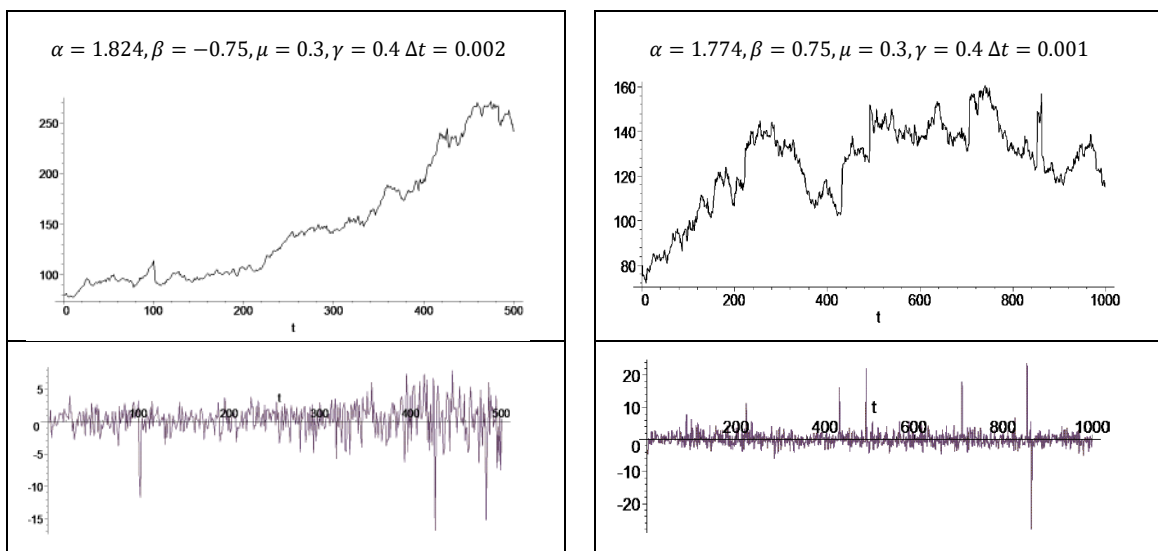


Fig.3.2. 2. Processus de sinistre (en haut) et Accroissements

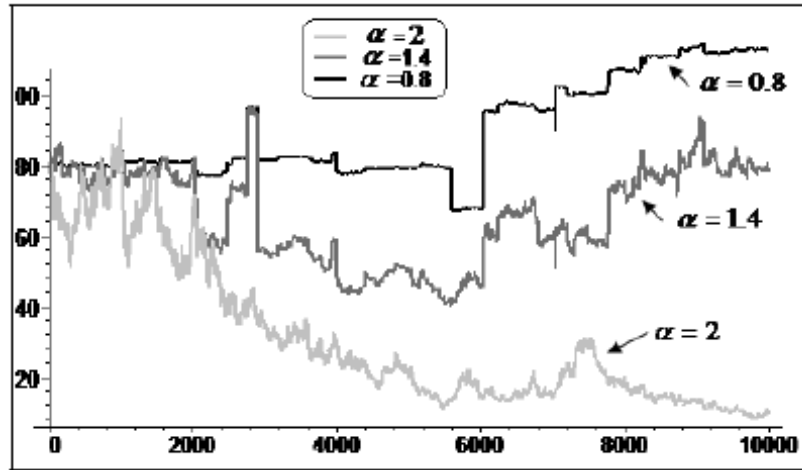


Fig.3.2. 3. Processus de sinistre pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Pour la probabilité de ruine, on peut penser à la majoration en utilisant l'inégalité de Lundberg affinée :

$$\psi(u) \leq a_+ e^{-Ru} \quad (3.2.35)$$

Avec

$$a_+ = \sup_{0 \leq z < z_0} \frac{e^{-Rz} \int_z^\infty \bar{F}(y) dy}{\int_z^\infty e^{-Ry} \bar{F}(y) dy}$$

Où  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  la distribution queue de  $Y$ , et  $z_0 = \sup\{z : F(y) < 1\}$  est la borne droite du support de  $F$ .

Cependant, la difficulté majeure est que les distributions stables ne disposent pas de forme explicite de fonction de répartition. C'est pour cette raison, que pour les travaux futurs, nous pensant à résoudre ce problème par simulation, car même avoir une approximation de la probabilité de ruine asymptotique sous forme explicite s'avère être très ardu et complexe.

### 3.3. Portefeuille d'une compagnie d'assurance avec un processus de sinistre $\alpha$ -stable

#### 3.3.1. Processus d'investissement :

Dans notre travail, on se place dans un marché complet, pas d'opportunité d'arbitrage, où nous supposons que la compagnie à la possibilité d'investir dans un actif sans risque et un actif risqué selon le modèle de Black et Scholes modifié, où nous supposons que le rendement instantané de l'actif risqué est stochastique, car l'hypothèse que les paramètres du modèle de Black et Scholes soient constants implique une sous-évaluation du prix de l'actif risqué.

Le portefeuille de la compagnie est composé d'un actif sans risque  $B_t$

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = \tau dt, \quad B(0) = 0 \quad (3.3.1)$$

Où  $\tau \geq 0$  La force d'intérêt,

Et d'un actif risqué  $Z_t$  définie par mouvement Brownien géométrique, comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dZ(t)}{Z(t)} = (r_t - q)dt + \sigma dw_t \\ Z(0) = z \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Où  $q$  est le taux continu de dividende,  $r_t$  est le rendement instantané considéré stochastique, nous considérons dans notre travail seulement deux modèles à un facteur décrits dans le tableau suivant :

Tableau 3.3. 1. Modèle de taux d'intérêt.

Nom du modèle	Formulation
Vasicek (1977)	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t$ (3.3.3)
Cox-Ingersoll-Ross (1985)	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dw_t$ (3.3.4)

- $a(b - r_t)$  est l'espérance de variation instantanée de  $r_t$  ;
- $\sigma$  l'écart-type de la variation instantanée de  $r_t$  (volatilité instantanée) ;
- $a$  la force de rappel sur la tendance (le taux de retour à la moyenne) ;
- $b$  la moyenne à long terme du taux court ;
- $dw_t$  est un mouvement brownien standard.

Vasicek a été le premier à proposer un modèle stochastique de la courbe des taux d'intérêts, le seul inconvénient à son modèle est que le taux peut devenir négatif, d'où le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, aussi appelé modèle de la racine carré, qui est une amélioration du modèle de Vasicek afin d'assurer la positivité du taux d'intérêt sous la condition  $2ab > \sigma^2$  (Brigo & Mercurio, 2007).

#### ***a) Le modèle de Black et Scholes associé à un taux de Vasicek***

Le prix d'un actif financier sera donné par une équation différentielle couplée  $(Z_t, r_t)$  définie par le système d'EDS suivant :

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{Z_t} = (r_t - q)dt + \sigma_1 dw_t^1 \\ dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_2 dw_t^2 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Où :

- $Z_t$  Représente le prix d'un actif financier à l'instant  $t$  ;
- $r_t$  est le taux d'intérêt à court terme à l'instant  $t$  ;
- $dw_t^1$  et  $dw_t^2$  sont deux mouvements browniens standards éventuellement corrélé entre eux tels que  $dw_t^1 \cdot dw_t^1 = \rho dt$ , avec  $0 \leq \rho \leq 1$  ;
- $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) représente la volatilité du processus  $Z_t$  (resp.  $r_t$ ).

Comme on peut le voir le modèle est compliqué pour donner une solution explicite de la dynamique de prix  $Z_t$ , pour cela on utilisera des méthodes de simulation et de discrétisation

à temps continu pour pouvoir reproduire des trajectoires régies par l'équation différentielle stochastique couplée définie par l'équation (3.2.5).

**Simulation du processus d'investissement associé à un taux de Vasicek**

On se propose d'utiliser le schéma d'Euler sur l'intervalle  $[0, T]$  avec un pas de discrétisation  $\Delta t = T/N$ , en considérons le temps discret  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_N$ . On aura donc le système suivant :

$$\begin{cases} Z_{t_{i+1}} = Z_{t_i} + (r_{t_i} - q)Z_{t_i}\sqrt{\Delta t} + \sigma_1\sqrt{\Delta t}\mathcal{E}_i^1 \\ r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + a(b - r_{t_i})\sqrt{\Delta t} + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\mathcal{E}_i^2 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Où  $\mathcal{E}_i^1$  et  $\mathcal{E}_i^2$  représentent deux v.a gaussiennes éventuellement corrélées ( $cov(\mathcal{E}_i^2, \mathcal{E}_i^2) = \rho$ , avec  $0 \leq \rho \leq 1$ ).

Les Fig.3.3.1 et Fig.3.3.2, nous donnent les trajectoires du processus de taux de Vasicek, ainsi que le processus d'investissement associé avec pas de discrétisation  $\Delta t = 0.002$  et les paramètres suivants :

Paramètres	$q$	$a$	$b$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\rho$
Valeurs	0.062	0.0954	0.7022	0.014	0.013	0.5

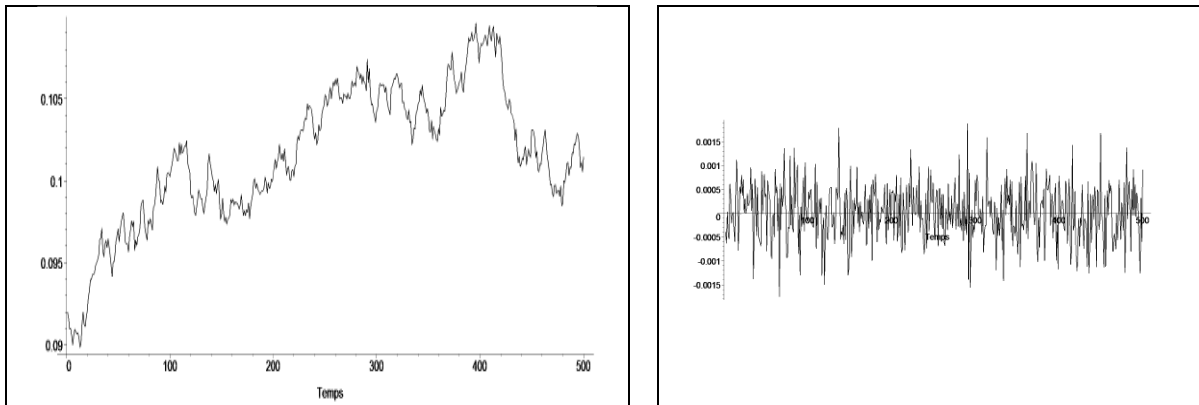


Fig.3.3. 1. Taux de Vasicek (à droite) et Accroissement

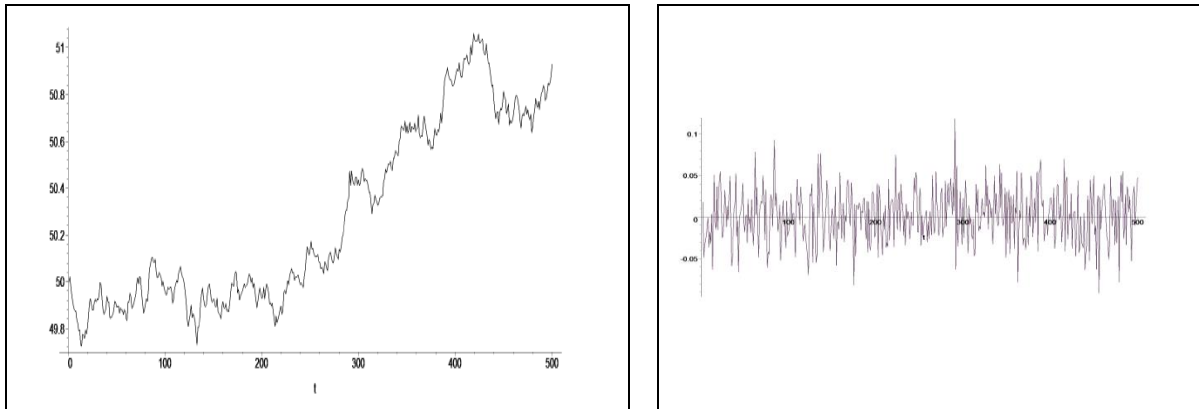


Fig.3.3. 2. Processus de d'investissement  $Z_t$  avec un taux de Vasicek et Accroissements

### b) Le modèle de Black et Scholes associé à un taux de type Cox-Ingersoll-Ross

Comme précédemment le prix d'un actif financier sera donné par une équation différentielle couplée  $(Z_t, r_t)$  :

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{Z_t} = (r_t - q)dt + \sigma_1 dw_t^1 \\ dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_2 \sqrt{r_t} dw_t^2 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Pour la simulation nous utilisons les mêmes démarches que précédemment. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Z_{t_{i+1}} = Z_{t_i} + (r_{t_i} - q)Z_{t_i}\sqrt{\Delta t} + \sigma_1\sqrt{\Delta t}\mathcal{E}_i^1 \\ r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + a(b - r_{t_i})\sqrt{\Delta t} + \sigma_2\sqrt{r_{t_i}}\sqrt{\Delta t}\mathcal{E}_i^2 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

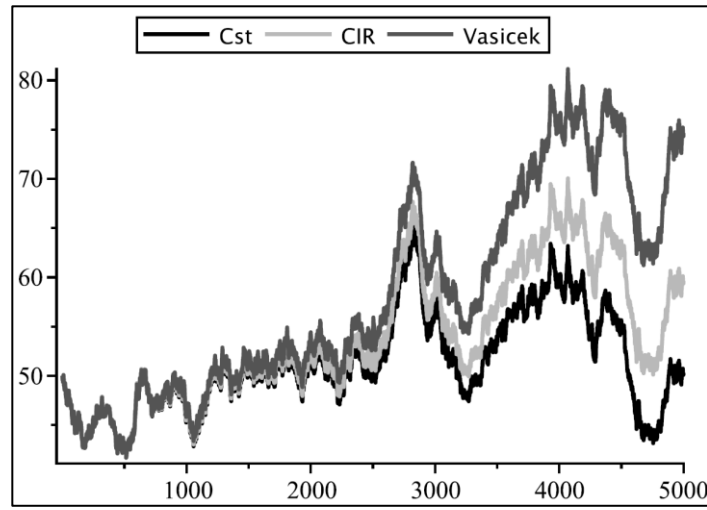


Fig.3.3. 3. Processus de d'investissement  $Z_t$  pour différents taux  $r_t$

### 3.3.2. Processus de réserve couplé

Soit  $R_t$  la réserve de la compagnie à l'instant  $t$ . On suppose qu'une quantité  $A_t$  sera investie dans l'actif risqué, et la partie restante  $R_t - A_t$  dans l'actif sans risque.

Le processus de retour d'investissement que nous noterons  $I_t$  aura la dynamique suivante :

$$dI_t = (R_t - A_t) \frac{dB_t}{B_t} + A_t \frac{dZ_t}{Z_t} = (R_t - A_t)\tau dt + A_t \frac{dZ_t}{Z_t} \quad (3.3.7)$$

Où

- $Z_t$  Représente le prix de l'actif risqué à l'instant  $t$  (formule (3.3.2));
- $B_t$  est le prix de l'actif sans risque à l'instant  $t$  (formule (3.3.2)) ;
- $A_t$  Stratégie d'investissement autofinancée.

Le processus de réserve  $R_t$  de la compagnie est alors donné par la somme du processus de risque et du processus du retour de l'investissement (Hipp, 2004) et peut être écrit comme

$$dR_t = dX + dI_t \quad (3.3.8)$$

On rappelle que,  $dX_t = cdt - dS_t$  est le processus de risque défini par l'équation (3.2.1), ce qui donne :

$$dR_t = cdt - dS_t + (R_t - A_t) \frac{dB_t}{B_t} + A_t \frac{dZ_t}{Z_t}, \quad R_0 = u \quad (3.3.9)$$

Avec

$$\begin{cases} dB(t) = \tau B(t)dt & , B_0 = 1 \\ dZ(t) = (r_t - q)Z(t)dt + \sigma_1 Z(t)dw_t^1 & , Z_0 = z \\ dS(t) = \mu S(t)dt + \gamma S(t)dL_{\alpha,t} & , S_0 = s \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$dR_t = cdt - (\mu S_t dt + \gamma S_t dL_{\alpha,t}) + (R_t - A_t)\tau dt + A_t((r_t - q)dt + \sigma_1 dw_t^1) \quad (3.3.10)$$

$$dR_t = (c - \mu S_t + \tau R_t)dt - \gamma S_t dL_{\alpha,t} + A_t((r_t - q - \tau)dt + \sigma_1 dw_t^1) \quad (3.3.11)$$

Où  $L_{\alpha,t}$  est un mouvement  $\alpha$ -stable standard et  $r_t$  le rendement stochastique.

On rappelle, que nous supposons que le marché est complet (absence d'arbitrage). Nous avons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , où  $(\mathcal{F}_t)$  est la filtration générée par les deux processus  $Z(t)$  et  $S(t)$  et elle est continue, nous supposons également que tous les processus stochastiques définis dans cette section sont adaptés et  $A(t)$  est localement bornée et appartient à l'ensemble des politiques admissibles. Ainsi, pour le choix de la stratégie d'investissement  $A(t)$  nous pouvons utiliser l'information de tous les cours de l'actif risqué (des actions) avant l'instant  $t$  ; mais pas l'information au temps  $t$ .

➤ **Dynamique du processus de réserve pour un taux de type Vasicek**

$$\begin{cases} dR_t = (c - \mu S_t + \tau R_t)dt - \gamma S_t dL_{\alpha,t} + A_t((r_t - q - \tau)dt + \sigma_1 dw_t^1) \\ dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_2 dw_t^2 \\ R_0 = u, Z_0 = z, S_0 = z, r_0 = r \end{cases} \quad (3.3.12)$$

➤ **Dynamique du processus de réserve pour un taux Cox-Ingersoll-Ross**

$$\begin{cases} dR_t = (c - \mu S_t + \tau R_t)dt - \gamma S_t dL_{\alpha,t} + A_t((r_t - q - \tau)dt + \sigma_1 dw_t^1) \\ dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_2 \sqrt{r_t} dw_t^2 \\ R_0 = u, Z_0 = z, S_0 = z, r_0 = r \end{cases} \quad (3.3.13)$$

On rappelle que  $dw_t^1$  et  $dw_t^2$  sont deux mouvements browniens standards éventuellement corrélés entre eux tels que  $dw_t^1 \cdot dw_t^1 = \rho dt$ , avec  $0 \leq \rho \leq 1$  ;

Le processus de réserve  $R(t)$  dépend de la composition du portefeuille d'investissement, il est alors impacté par la stratégie d'investissement  $A(t)$ . Par souci de simplicité, nous considérons ci-dessous une stratégie d'investissement constante. La dynamique du processus de réserve en fonction des taux d'intérêt stochastiques est présentée dans Fig.3.3.4. La procédure de simulation et l'algorithme sont donnés en Annexe 2.

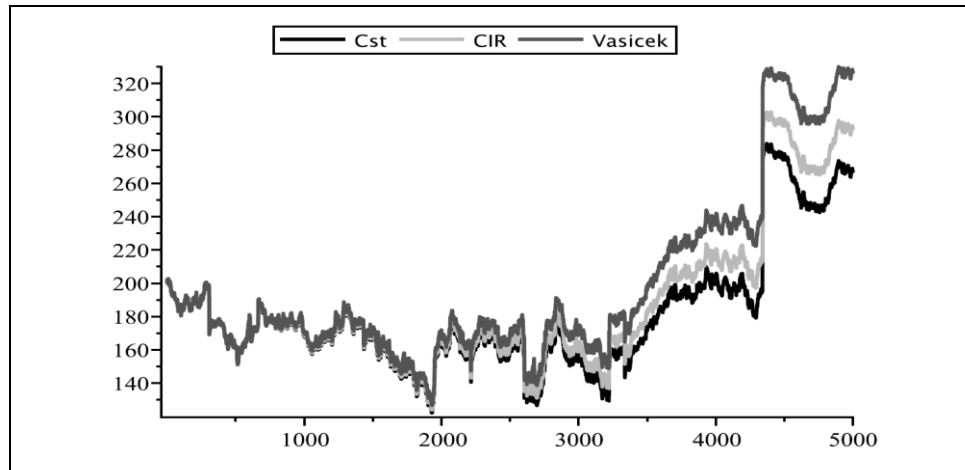


Fig.3.3. 4. Processus de réserve en fonction de différents modèles de taux

Il est vrai que les taux d'intérêt jouent un rôle important dans la décision d'investissement et la gestion des risques sur les marchés financiers, car la dynamique de l'actif risqué est affectée par les fluctuations du taux d'intérêt comme on peut le voir sur la figure 3.3.3 qui représente les trajectoires du processus d'investissement en fonction du taux d'intérêt stochastique. Toutefois, à travers nos simulations, nous nous sommes rendu compte, que l'effet du changement du modèle de taux a moins d'impact sur la richesse de la compagnie d'assurance par rapport au changement des paramètres du processus de sinistre  $\alpha$ -stable. Car, cela dépend essentiellement du montant investi en actifs risqués. Plus précisément, le modèle de réserve couplée est moins sensible à l'évolution des paramètres du taux court, sauf dans le cas où la volatilité du taux court est forte et le montant investi en actifs risqués est bien supérieur à celui investi en actif sans risque. La réserve de la compagnie d'assurance est plus sensible à sinistralité. Les paramètres du processus de sinistre  $\alpha$ -stable ont un effet significatif sur le processus de risque (voir la Fig.3.2.2 pour différentes valeurs du paramètre d'indice), et donc sur la richesse de l'entreprise. Pour cette raison, dans la section suivante, nous vérifions la sensibilité du modèle de réserve couplé avec taux stochastique par simulation en fonction des quatre paramètres du processus de sinistre, où nous avons choisi les modèles CIR pour assurer la positivité des taux d'intérêt.

### 3.3.3. Simulation et analyse de sensibilité du processus de réserve

Dans cette section, nous analysons l'effet des différents paramètres de processus de sinistre  $\alpha$ -stable sur la dynamique des processus du processus de sinistre  $S(t)$  et de réserve  $R(t)$  par

simulation des différentes trajectoires, car il est difficile d'obtenir des formules explicites pour l'étudier analytiquement.

### Effet de l'indice de stabilité $\alpha$

Nous présentons dans Fig.3.3.5 quelques simulations de trajectoires de processus de réserve pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . On peut voir clairement que la trajectoire est dominée par de grands sauts à chaque fois que  $\alpha$  diminue (prenant des valeurs plus petites). Le montant de sinistre est une v.a  $\alpha$ -stable a queue lourde, ce qui engendre une grande fluctuation du montant cumulé des sinistres (processus de sinistre  $S(t)$ ), qui est lui-même un processus  $\alpha$ -stable, ce qui impacte énormément la dynamique du processus de réserve. On rappelle que pour  $\alpha = 2$ , le mouvement  $\alpha$ -stable standard est le mouvement brownien mouvement, et dans ce cas on retrouve le modèle de Cramér-Lundberg (le processus de risque classique) dans lequel, le processus de sinistre est un processus de Poisson composé qui peut être approché par le mouvement brownien), pour cela, lorsque  $\alpha$  est grand (proche de 2), la trajectoire des processus de sinistre ressemble à un mouvement brownien. On rappelle également que lorsque  $\alpha$  proche de 1 les trajectoires semblent correspondre au processus de Cauchy.

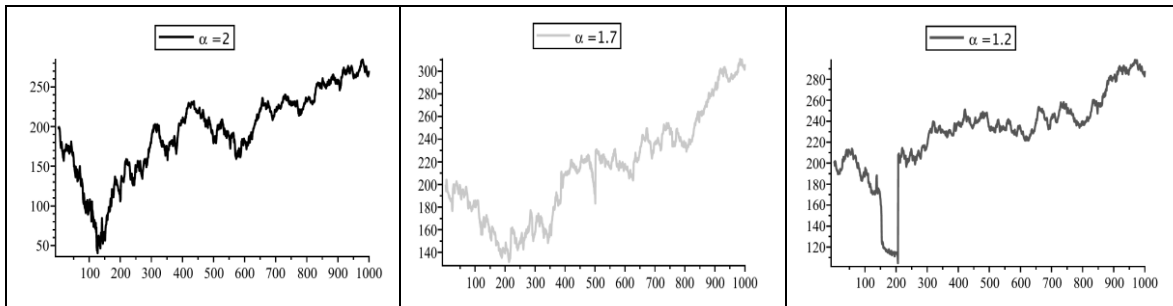


Fig.3.3. 5. Processus de réserve pour différentes valeurs de  $\alpha$

Il y a clairement une différence entre le modèle classique ( $\alpha = 2$ ) et notre modèle couplé avec  $\alpha$ -stables ( $\alpha < 2$ ) ; Nous pouvons mieux visualiser cette différence dans la représentation des accroissements du processus de réserve dans la Fig.3.3.6. Comme nous l'avons dit précédemment, les processus  $\alpha$ -stables présentent de grands sauts dans leurs trajectoires et deviennent de plus en plus impulsifs lorsque  $\alpha$  est petit (proche de 0), Pour  $\alpha = 2$  , les accroissements du processus de réserve sont compris entre  $-25$  et  $25$ , pour  $\alpha = 1.7$ , l'intensité des sauts commence à augmenter, entre  $-15$  et  $45$ . Effectivement, les sauts deviennent de plus en plus importants à chaque fois que  $\alpha$  diminue, pour  $\alpha = 1.2$  ils sont entre  $-20$  et  $100$ .

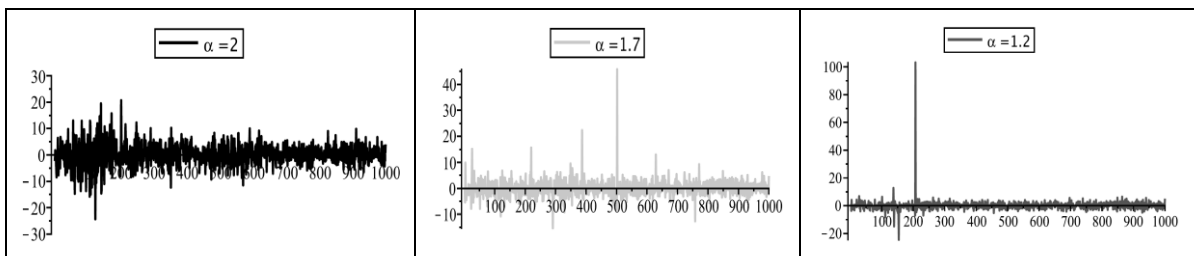


Fig.3.3. 6. Accroissement du processus de réserve pour différentes valeurs de  $\alpha$

### Effet du paramètre $\beta$

Nous pouvons voir clairement sur la Fig.3.3.7 que lorsque  $\beta$  diminue (pour  $\beta < 0$  et  $\beta > 0$ ), le processus de sinistre  $\alpha$ -stable  $S(t)$  augmente, donc la richesse  $R(t)$  diminue, voir Fig. 3.3.9. Nous observons également que plus  $\beta$  diminue, plus le processus de sinistre, ainsi que le processus de réserve deviennent impulsifs et leurs trajectoires sont dominées par de grands sauts. Ceci est confirmé dans Fig. 3.3.8.

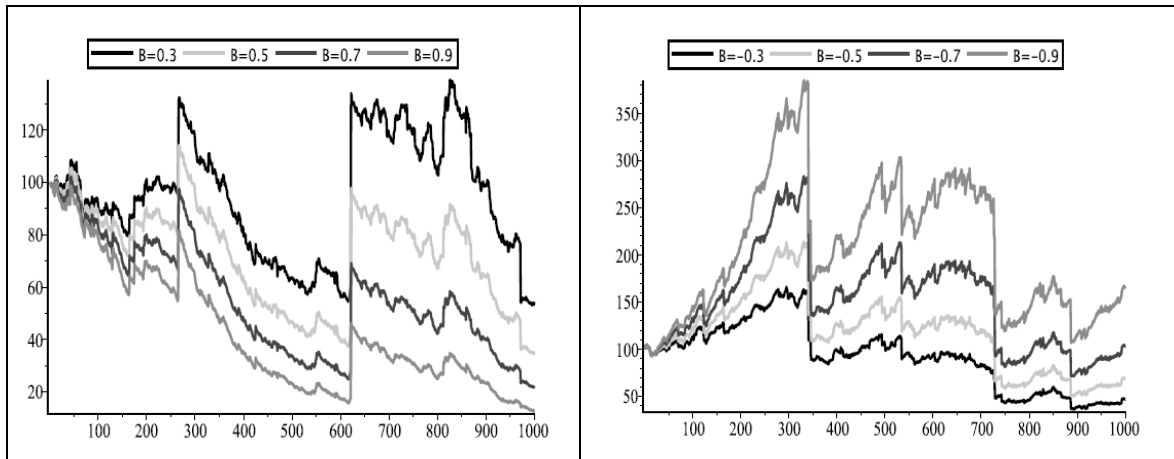


Fig.3.3. 7. Processus de sinistre pour différentes valeurs de  $\beta$

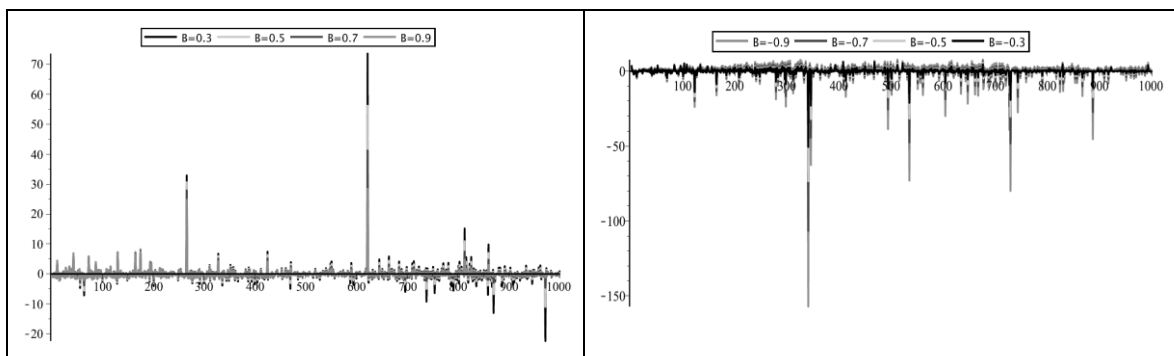
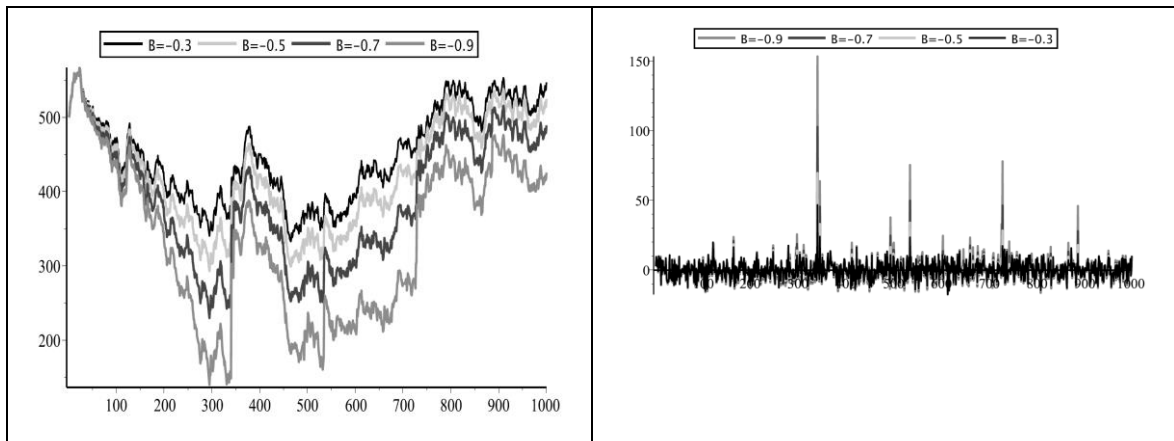


Fig.3.3. 8. Accroissement du processus de sinistre pour différentes valeurs de  $\beta$

Pour  $\beta > 0$  (Le côté gauche Fig. 3.3.8), la dynamique du processus de sinistre  $\alpha$ -stable à plus tendance à augmenter brusquement ( $\Delta S_t = S_t - S_{t-1} > 0$ ). Alors que pour  $\beta < 0$ , nous avons l'inverse, les sauts les plus importants sont à la baisse (la dynamique du processus  $\alpha$ -stable a tendance à diminuer brusquement), De ce fait, le processus de réserve aura une tendance à augmenter brusquement (Fig. 3.3.9.).


 Fig.3.3. 9. Processus de réserve (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de  $\beta$ 

### Effet du paramètre d'échelle $\gamma$

Nous rappelons que la version discrétisée du processus de sinistre est définie comme suit :

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} + \mu S_{t_{i-1}} \Delta t + \gamma S_{t_{i-1}} \Delta L_{\alpha,i}$$

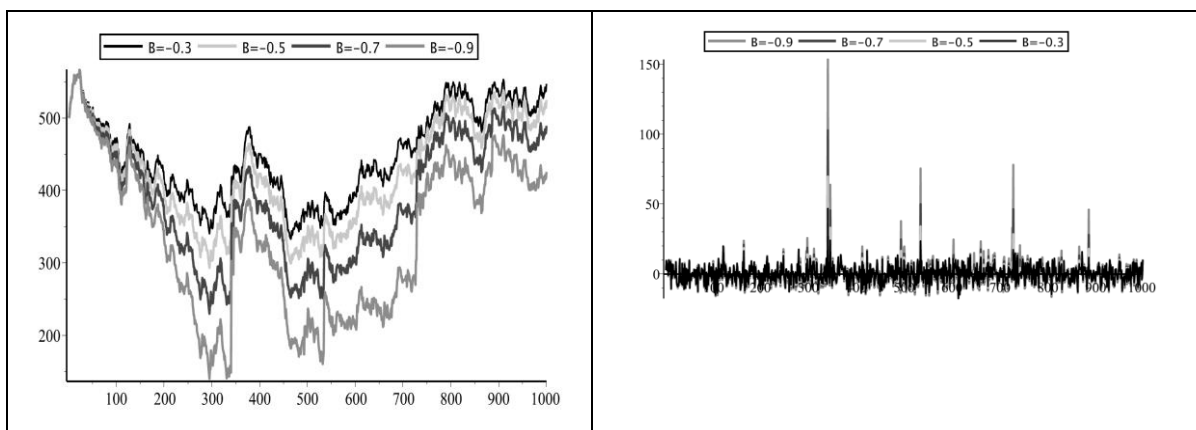
Posons  $\Lambda$  la variation du paramètre d'échelle  $\gamma$ , alors :

$$S_{t_i}^{\Lambda} = S_{t_{i-1}} + \mu S_{t_{i-1}} \Delta t + (\gamma + \Lambda) S_{t_{i-1}} \Delta L_{\alpha,i}$$

Après calcul, on obtient :

$$S_{t_i}^{\Lambda} - S_{t_i} = \Lambda S_{t_{i-1}} \Delta L_{\alpha,i}$$

Nous pouvons noter que l'effet du changement du paramètre d'échelle sur le processus  $\alpha$ -stable dépend fortement du terme aléatoire  $\Delta L_{\alpha,i}$ , on peut donc conclure, que ça dépend des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Et nous remarquons aussi, dans Fig. 3.3.10, que le processus de risque  $\alpha$ -stable  $S(t)$  diminue lorsque le paramètre d'échelle  $\gamma$  augmente si  $S(t)$  est inférieur à la valeur initiale  $S(0) = s$  en même temps la richesse  $R(t)$  augmente, et si  $S(t) > s$  le processus stable  $S(t)$  augmente quand  $\gamma$  augmente.


 Fig.3.3. 10. Processus de sinistre (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de  $\gamma$ 

Nous pouvons également voir sur Fig. 3.3.10 et Fig. 3.3.11 que le processus de sinistre  $\alpha$ -stable devient de plus en plus impulsif lorsque  $\gamma$  augmente, ainsi, le processus de réserve devient également impulsif.

Le paramètre d'échelle joue le même rôle que la volatilité dans le mouvement brownien géométrique, on rappelle que la dispersion  $\delta = \gamma^\alpha$ .

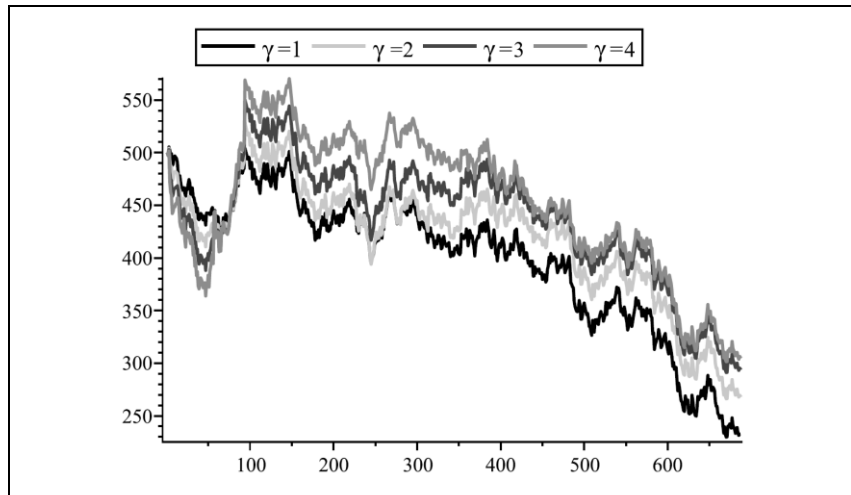


Fig.3.3. 11. Processus de réserve pour différentes valeurs de  $\gamma$

### Effet du paramètre de position $\mu$

Posant maintenant  $\nabla$  la variation du paramètre d'échelle  $\mu$ , alors

$$S_{t_i}^\nabla = S_{t_{i-1}} + (\mu + \nabla)S_{t_{i-1}}\Delta t + \gamma S_{t_{i-1}}\Delta L_{\alpha,i}$$

La variation du processus de sinistre est donc :  $S_{t_i}^\nabla - S_{t_i} = \nabla S_{t_{i-1}}\Delta L_{\alpha,i}$

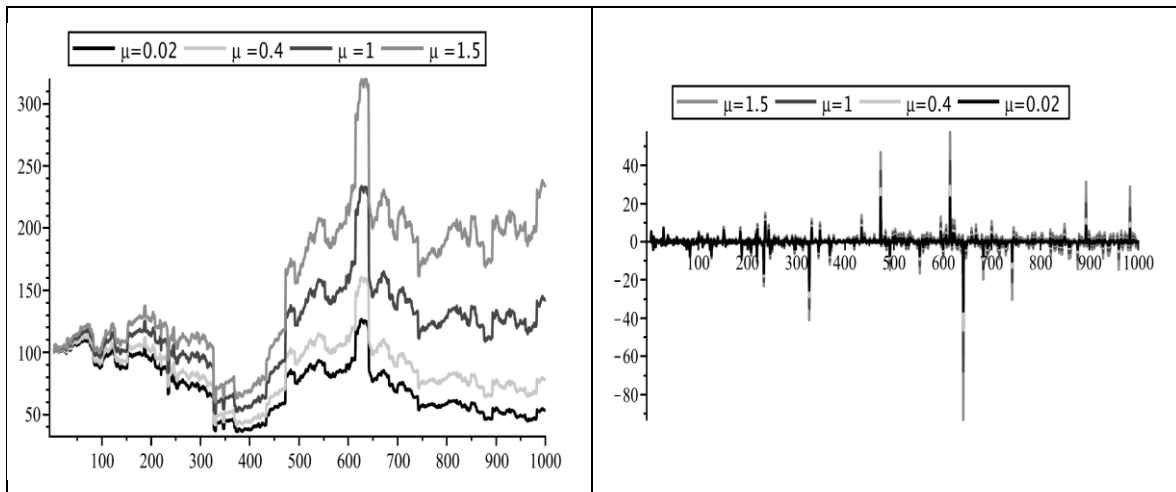


Fig.3.3. 12. Processus de sinistre (à droite) et Accroissement pour différentes valeurs de  $\mu$

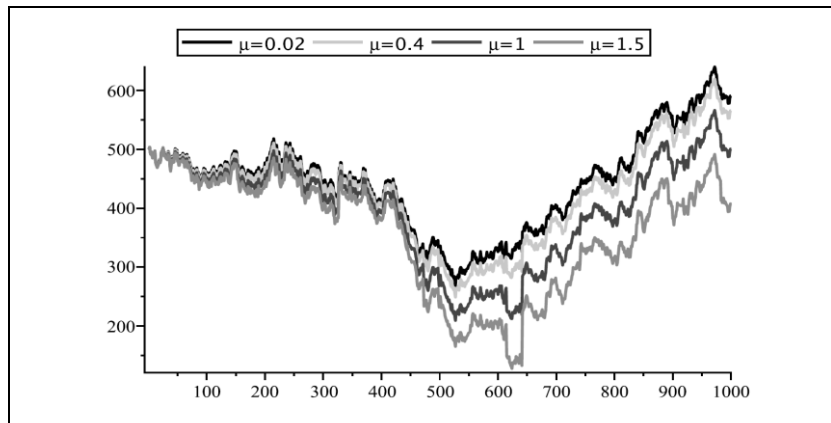


Fig.3.3. 13. Processus de réserve pour différentes valeurs de  $\mu$

Lorsque le paramètre de localisation augmente, le processus stable augmente, donc la richesse diminue et les sauts sont plus importants, comme nous pouvons le voir Fig.3.3.12 et Fig.3.3.13.

Nous avons pu voir à travers ce chapitre que les processus stables sont une bonne alternative pour la modélisation de phénomènes à grande variabilité. Ils peuvent prendre en compte les petites et grandes fluctuations, de ce fait ils sont mieux adaptés pour la représentation des événements extrêmes (ou événements rares).

## Conclusion et perspectives

L'objectif de notre travail était de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance non-vie, pour un portefeuille de risque précis, à savoir les sinistres automobiles et de se placer dans le cas de situations extrêmes, afin de d'étudier le comportement dynamique du processus de réserve représenté par une équation différentielle couplée, et exposé au risque de ruine, lié à des montants de sinistre à queue lourde avec une distribution à variance infinie

Il était donc essentiel pour nous de déterminer le processus de risque le plus représentatif possible de la réalité en tenant compte de toutes les situations possibles (événements rares...etc.). En tenant compte du fait que les données empiriques des montants de sinistres sont asymétriques à droite et présentent généralement beaucoup de variation dans les montants, ils sont plutôt lepto-kurtiques avec des queues plus épaisses que la normale, Nous avons pensé à modéliser le processus de sinistre par un processus  $\alpha$ -stable, et nous avons émis l'hypothèse que les montants de sinistre automobile sont distribués selon une distribution  $\alpha$ -stable. Notre choix s'est porté sur les distributions stables car c'est une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter et d'expliquer différentes asymétries et des queues très lourdes.

Afin de vérifier notre hypothèse, la première partie de notre travail était d'introduire la théorie des distributions stables qui est une sous famille des distributions infiniment divisible dans le chapitre 1, où nous avons pu voir que même s'il n'existe pas d'expressions explicites pour leurs densités ou leurs fonctions de répartition, elles peuvent être exploitées de différentes façons grâce aux différentes paramétrisations qui existent de leurs fonctions caractéristiques,

Puis nous avons vu la complexité et la difficulté de l'inférence statistique des distributions stables dans le second chapitre. À nos jours différents chercheurs tentent encore d'améliorer les techniques d'estimation des paramètres des distributions stables et d'étudier la convergence des estimateurs. C'est pour cette raison que dans notre travail nous avons retenu deux méthodes pour l'estimation des quatre paramètres de la distribution stable, la première c'est la méthode de McCulloch basée sur les quantiles et la seconde est la méthode de Koutrouvelis basée sur la fonction caractéristique est pour les avantages relatifs qu'elles présentent en comparaison avec la complexité des calculs et l'imprécision des autres méthodes. Nous avons pu montrer à travers différents tests que la distribution stable est bien appropriée pour modéliser les sinistres automobiles.

Dans troisième chapitre, nous avons étudié le comportement dynamique du processus de réserve représenté par une équation différentielle couplée, où nous avons supposés que la compagnie à la possibilité d'investir dans un actif sans risque et un actif risqué selon le modèle de Black et Scholes modifié, où nous supposons que le rendement instantané de l'actif risqué évolue comme un processus stochastique à coefficients constants, et nous avons choisis deux modèles importants de taux courts, à savoir les modèles Vasicek et CIR, et que le montant total des sinistres est modélisé par équation différentielle stochastique  $\alpha$ -stable ( $\alpha$ -EDS). Nous avons commencé par étudier la dynamique de la richesse par rapport au rendement instantané, puis par rapport aux paramètres du processus de sinistre  $\alpha$ -stable. Nous avons pu constater à travers nos simulations, que l'effet du changement du modèle de taux a moins d'impact sur la richesse de la compagnie d'assurance par rapport au changement des paramètres du processus de sinistre  $\alpha$ -stable. Car, cela dépend essentiellement du montant investi en actifs risqués. Plus précisément, le modèle de réserve couplée est moins sensible à l'évolution des paramètres du taux court, sauf dans le cas où la volatilité du taux court est forte et le montant investi en actifs risqués est bien

supérieur à celui investi en actif sans risque. La réserve de la compagnie d'assurance est plus sensible à sinistralité, et plus particulièrement aux paramètres de stabilité et d'asymétrie. Cela nous a permis de voir que les processus stables sont plus représentatifs de la variabilité. Ils peuvent prendre en compte les petites et grandes fluctuations (petits et gros sinistres). Ce qui nous semble être un choix approprié pour modéliser la richesse de l'assurance automobile et pouvoir prendre en compte des événements extrêmes et rares.

Dans des travaux futurs, nous pourrions envisager de calculer des mesures de risque pour des sinistre  $\alpha$ -stable tels que la probabilité de ruine, ...etc. Cependant, le résultat de ces travaux nous donne déjà une idée générale des changements qui peuvent survenir dans la dynamique de la richesse d'une compagnie d'assurance non-vie lorsque le processus de sinistre est  $\alpha$ -stable, ainsi que sur le potentiel de la modélisation de processus stable en tant qu'outil encore à explorer et exploiter pleinement dans la théorie du risque. Nous espérons avoir établi les bases de recherches futures dans cette direction qui mèneront à de nouvelles perspectives.

**Références**

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (National Bureau of Standards, Vol. 55). Printing Office, Washington, DC.
- Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. *Transactions on XV Th International Congress of Actuaries*, 2, 219-229.
- Arad, R. W. (1980). Parameter Estimation for Symmetric Stable Distribution. *International Economic Review*, 21(1), 209-220.
- Asmussen, S. (2000). *Ruin Probabilities* (Vol. 2). World Scientific Publishing Company.
- Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities (2nd Edition)* (Vol. 14). World Scientific Publishing Company.
- Belkacem, L. (1996). *Processus stables et applications en finance : CAPM, risque, choix des portefeuilles, évaluation des options dans un marché  $\alpha$ -stable* [PhD Thesis]. <http://www.theses.fr/1996PA090053>
- Beran, R. (1974). Asymptotically Efficient Adaptive Rank Estimates in Location Models. *The Annals of Statistics*, 2(1), 63-74.
- Bergström, H. (1953). On distribution functions with a limiting stable distribution function. *Arkiv för Matematik*, 2, 463-474.
- Billingsley, P. (1979). *Probability and Measure*. Wiley.
- Bohman, H. (1972). Risk Theory and Wiener Processes. *ASTIN Bulletin*, 7(1), 96-99.
- Brigo, D., & Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Models—Theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit*. Springer Berlin Heidelberg.
- Brockwell, P. J., & Brown, B. M. (1981). High-Efficiency Estimation for the Positive Stable Laws. *Journal of the American Statistical Association*, 76(375), 626-631. <https://doi.org/10.2307/2287521>
- Brorsen, W. B., & Yang, S. R. (1990). Maximum Likelihood Estimates of Symmetric Stable Distribution Parameters. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 19(4), 1459-1464. <https://doi.org/10.1080/03610919008812928>
- Brothers, K. M., DuMouchel, W. H., & Paulson, A. S. (1983). *Fractiles of the stable laws*. Rensselaer Polytechnic Institute. Troy, NY.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory* (Vol. 172). Springer Berlin Heidelberg.

- Chambers, J. M., Mallows, C. L., & Stuck, B. W. (1976). A Method for Simulating Stable Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354), 340-344. <https://doi.org/10.2307/2285309>
- Chaubey, Y. P., Garrido, J., & Trudeau, S. (1998). On the computation of aggregate claims distributions : Some new approximations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23(3), 215-230.
- Cheng, B. N., & Rachev, S. T. (1995). Multivariate Stable Futures Prices. *Mathematical Finance*, 5(2), 133-153.
- Čížek, P., Härdle, W., & Weron, R. (2005). *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer.
- Cramér, H. (1955). *Collective Risk Theory : A Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes*. Esselte Stockholm.
- D'Estampes, L. (2003). *Traitement statistique des processus  $\alpha$ -stables : Mesures de dépendance et identification des ar stables. Test séquentiels tronqués* [Theses, Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT]. <https://theses.hal.science/tel-00005216>
- Dufresne, F., & Gerber, H. U. (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: mathematics and economics*, 10(1), 51-59.
- Dufresne, F., Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (1991). Risk Theory with the Gamma Process. *ASTIN Bulletin*, 21(2), 177-192. <https://doi.org/10.2143/AST.21.2.2005362>
- DuMouchel, W. H. (1971). *Stable Distributions in Statistical Inference*. Yale university.
- DuMouchel, W. H. (1973). Stable Distributions in Statistical Inference : 1. Symmetric Stable Distributions Compared to Other Symmetric Long-Tailed Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 68(342), 469-477. <https://doi.org/10.2307/2284101>
- DuMouchel, W. H. (1975). Stable Distributions in Statistical Inference : 2. Information from Stably Distributed Samples. *Journal of the American Statistical Association*, 70(350), 386-393. <https://doi.org/10.2307/2285828>
- Dzhaparidze, K. O. (1975). On Simplified Estimators of Unknown Parameters with Good Asymptotic Properties. *Theory of Probability & Its Applications*, 19(2), 347-358.
- El Adlouni, S., Bobée, B., & Ouarda, T. B. M. J. (avec INRS-ETE). (2007). *Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues*. INRS Eau, terre et environnement.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (2013). *Modelling Extremal Events : For Insurance and Finance*. Springer Berlin Heidelberg. <https://books.google.dz/books?id=BXOI2pICfJUC>

- Embrechts, P., & Schmidli, H. (1994). Modelling of extremal events in insurance and finance. *Zeitschrift Für Operations Research*, 39(1), 1-34. <https://doi.org/10.1007/BF01440733>
- Engel, D. D. (1982). *The Multiple Stochastic Integral* (American Mathematical Society).
- Essama, G., & Mai, H. M. (1994). *Représentation probabiliste des rendements des actifs financiers : Difficultés d'estimation et résultats empiriques*. <https://doi.org/10.3406/ecoap.1994.1537>
- Fama, E. F., & Roll, R. (1971). Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66(334), 331-338. <https://doi.org/10.1080/01621459.1971.10482264>
- Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and Its Application Vol II*. John Wiley and Sons.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Application Vol II*. John Wiley and Sons.
- Furrer, H. (1997). *Risk theory and heavy tailed Lévy processes*. Swiss federal institute of technology. Zurich.
- Furrer, H. (1998). Risk processes perturbed by  $\alpha$ -stable Lévy motion. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 59-74. <https://doi.org/10.1080/03461238.1998.10413992>
- Furrer, H., Michna, Z., & Weron, A. (1997). Stable Lévy motion approximation in collective risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(2), 97-114. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(97\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(97)00008-5)
- Gendron, M., & Crepeau, H. (1989). On the computation of the aggregate claim distribution when individual claims are Inverse Gaussian. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(3), 251-258.
- Gerber, H. U. (1970). An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1970(3-4), 205-210. <https://doi.org/10.1080/03461238.1970.10405664>
- Giné, E., & Marcus, M. B. (1983). The central limit theorem for stochastic integrals. *Ann. Probab*, 11(1), 58-77.
- Gnedenko, B. V., & Kolmogorov, A. N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley. <https://books.google.dz/books?id=rYsZAQAIAAJ>
- Grandell, J. (1972). A remark on Wiener process approximation of risk processes. *ASTIN Bulletin*, 7(1), 100-101. <https://doi.org/10.1017/S0515036100005742>
- Grandell, J. (1977). A class of approximations of ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1977(sup1), 37-52. <https://doi.org/10.1080/03461238.1977.10405071>

- Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag.
- Hall, P. (1980). A comedy of errors : The canonical form for stable characteristic function. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 13, 23-27.
- Hipp, C. (2004). Stochastic Control with Application in Insurance. In *Stochastic Methods in Finance : Lectures given at the C.I.M.E.-E.M.S. Summer School held in Bressanone/Brixen, Italy, July 6-12, 2003* (p. 127-164). Springer Berlin Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-44644-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-44644-6_3)
- Iglehart, D. L. (1969). Diffusion approximations in collective risk theory. *Journal of Applied Probability*, 6, 285-292.
- Janicki, A., Podgórski, K., & Weron, A. (1993). Computer Simulation of  $\alpha$ -stable Ornstein-Uhlenbeck Processes. In S. Cambanis, J. K. Ghosh, R. L. Karandikar, & P. K. Sen (Éds.), *Stochastic Processes : A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur* (p. 161-170). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7909-0\\_19](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7909-0_19)
- Janicki, A., & Weron, A. (1994). *Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -Stochastic Processes*. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology. <https://EconPapers.repec.org/RePEc:wuu:hsbook:hsbook9401>
- Kallenberg, O. (1975). On the Existence and Path Properties of Stochastic Integrals. *The Annals of Probability*, 3(2), 262-280.
- Kanter, M. (1975). Stable Densities Under Change of Scale and Total Variation Inequalities. *The Annals of Probability*, 3(4), 697-707.
- Kolmogorov, A. N. (1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.*, 6, 805-808, 866-869.
- Koutrouvelis, I. A. (1980). Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372), 918-928. <https://doi.org/10.1080/01621459.1980.10477573>
- Koutrouvelis, I. A. (1981). An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws : An iterative procedure for the estimation. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 10(1), 17-28. <https://doi.org/10.1080/03610918108812189>
- Koutrouvelis, I. A., & Kellermeier, J. (1981). A Goodness-of-Fit Test Based on the Empirical Characteristic Function when Parameters must be Estimated. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 43(2), 173-176.
- Kuelbs, J. (1973). A representation theorem for symmetric stable processes and stable measures on  $H$ . *Z. Wahrsch. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, 26(4), 259-271. <https://doi.org/10.1007/BF00534891>
- Kwapień, S., & Woyczynski, W. A. (1992). *Random Series and Stochastic Integrals : Single and Multiple*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:18584011>

- Laouar, A. (2007). *Etude du coefficient de Lundberg dans le cas des processus de risque extrême*. [Thèse de Magister].  
<http://repository.usthb.dz/xmlui/handle/123456789/3518>
- Lévy, P. (1934). Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 3(3-4), 337-366.
- Lévy, P. (1938). L'arithmétique des lois de probabilité. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 17, 17-39.
- Lévy, P. (1954). *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars.
- Lin, T. F. (1981). Multiple Integrals of a Homogeneous Process with Independent Increments. *The Annals of Probability*, 9(3), 529-532.
- Linnik, Yu. V. (1965). On stable probability laws with exponent less than one. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 94, 619-621.
- Liu, S. (2009). *Lois stables et processus ponctuels : liens et estimation des paramètres* [Phdthesis, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I].  
<https://theses.hal.science/tel-00463817>
- Lundberg, F. (1903). *I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen. II. Återförsäkring af kollektivrisker. Akademisk afhandling, etc* [PhD Thesis].
- Mandelbrot, B. (1960). The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income. *International Economic Review*, 1(2), 79-106. <https://doi.org/10.2307/2525289>
- Mandelbrot, B. (1963). New Methods in Statistical Economics. *Journal of Political Economy*, 71(5), 421-440.
- McCulloch, J. H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 15(4), 1109-1136.  
<https://doi.org/10.1080/03610918608812563>
- McCulloch, J. H. (2000). Estimation of the Bivariate Stable Spectral Representation by the Projection Method. *Computational Economics*, 16(1), 47-62.  
<https://doi.org/10.1023/A:1008797318867>
- Modarres, R., & Nolan, J. P. (1994). A method for simulating stable random vectors. *Computational Statistics*, 9(1), 11-19.
- Nagaev, A. V. (2001). On Nonparametric Estimation of the Poisson Spectral Measure of a Stable Law. *Journal of Mathematical Sciences*, 106(2), 2854-2859.  
<https://doi.org/10.1023/A:1011324111431>
- Nolan, J. P. (1998). Multivariate stable distributions : Approximation, estimation, simulation and identification. In *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques and Applications* (p. 509-525).

- Nolan, J. P., Panorska, A. K., & McCulloch, J. H. (2001). Estimation of stable spectral measures. *Mathematical and Computer Modelling*, 34(9), 1113-1122. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(01\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(01)00119-4)
- Pardoux, E., & Talay, D. (1985). Discretization and simulation of stochastic differential equations. *Acta Applicandae Mathematica*, 3(1), 23-47. <https://doi.org/10.1007/BF01438265>
- Paulson, A. S., Holcomb, E. W., & Leitch, R. A. (1975). The Estimation of the Parameters of the Stable Laws. *Biometrika*, 62(1), 163-170. <https://doi.org/10.2307/2334499>
- Press, S. J. (1972). Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 842-846. <https://doi.org/10.2307/2284646>
- Protter, P. (1990). *Stochastic integration and differential equations : A new approach*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118462901>
- Protter, P., & Talay, D. (1997). The Euler Scheme for Lévy Driven Stochastic Differential Equations. *The Annals of Probability*, 25(1), 393-423.
- Rachev, S. T., & Xin, H. (1993). TEST FOR ASSOCIATION OF RANDOM VARIABLES IN THE DOMAIN OF ATTRACTION OF MULTIVARIATE STABLE LAW. *Probability and Mathematical Statistics*, 14(1), 125-141.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., & Teugels, J. L. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley.
- Rosinski, J., & Woyczynski, W. A. (1986). On Itô Stochastic Integration with Respect to p-Stable Motion : Inner Clock, Integrability of Sample Paths, Double and Multiple Integrals. *The Annals of Probability*, 14(1), 271-286. <https://doi.org/10.1214/aop/1176992627>
- Samorodnitsky, G., & Taqqu, M. S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Taylor & Francis.
- Sato, K.-Iti. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* (Vol. 68). Cambridge University Press.
- Skorokhod, A. V. (1954). Asymptotic formulas for stable distribution laws. *Transl. Math. Statist. and Probab. Inst. Math. Statist. and Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1, 731-734.
- Surgailis, D. (1981). On L2 and non-L2 multiple stochastic integration. *Stochastic Differential Systems*, 212-226. <https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0006424#citeas>
- Uchaikin, V. V., & Zolotarev, V. M. (1999). *Chance and Stability : Stable Distributions and Their Applications*. VSP.

- Veillette, M. (2012). STBL : Alpha stable distributions for MATLAB. *Matlab Central File Exchange*, retrieved October, 10, 2012.
- Weron, R. (1995). *Performance of the estimators of stable law parameters* (HSC Research Reports HSC/95/01). Hugo Steinhaus Center, Wrocław University of Technology. <https://ideas.repec.org/p/wuu/wpaper/hsc9501.html>
- Weron, R. (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics & Probability Letters*, 28(2), 165-171.
- Willmot, G. E. (1987). The Poisson-Inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1987(3-4), 113-127. <https://doi.org/10.1080/03461238.1987.10413823>
- Zolotarev, V. M. (1957). Mellin-Stieltjes Transforms in Probability Theory. *Theory of Probability & Its Applications*, 2(4), 433-460. <https://doi.org/10.1137/1102031>
- Zolotarev, V. M. (1961). Expression of the density of a stable distribution with exponent  $\alpha$  greater than one in terms of a density with exponent  $1/\alpha$ . *Selected Transl. Math. Statist. Probab*, 1, 163-167.
- Zolotarev, V. M. (1964). On the representation of stable laws by integrals. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 71, 46-50.
- Zolotarev, V. M. (1978). Estimates of the parameters of multidimensional stable distributions. *Theory of Probability & Its Applications*, 23, 472-473.
- Zolotarev, V. M. (1980). Statistical estimates of the parameters of stable laws. *Banach Center Publications*, 6(1), 359-376.
- Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society.
- Khintchine, Y. A., & Lévy, P. (1936). Sur les lois stables. *C. R. Acad. Sei. Paris*, 202, 374-376.

## Annexes

**Annexe 1.** Tables pour estimation des paramètres des distributions stables.  
(McCulloch, 1986)

**Table I:**  $v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta)$

$\alpha$	$\beta$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
2,00	2,439	2,439	2,439	2,439	2,439
1,90	2,512	2,512	2,513	2,513	2,515
1,80	2,608	2,609	2,610	2,613	2,617
1,70	2,737	2,738	2,730	2,742	2,746
1,60	2,912	2,909	2,904	2,900	2,902
1,50	3,148	3,136	3,112	3,092	3,089
1,40	3,464	3,436	3,378	3,331	3,316
1,30	3,882	3,834	3,720	3,626	3,600
1,20	4,447	4,365	4,171	4,005	3,963
1,10	5,217	5,084	4,778	4,512	4,451
1,00	6,314	6,098	5,624	5,220	5,126
0,90	7,910	7,590	6,860	6,260	6,124
0,80	10,448	9,934	8,779	7,900	7,687
0,70	14,838	13,954	12,042	10,722	10,370
0,60	23,483	21,768	18,332	16,216	15,584
0,50	44,281	40,137	33,002	29,140	17,782
$\phi_1(\alpha, -\beta) = \phi_1(\alpha, \beta)$					

**Table II:**  $v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta)$

	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
2,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,90	0,000	0,018	0,036	0,053	0,071
1,80	0,000	0,039	0,077	0,113	0,148
1,70	0,000	0,063	0,123	0,178	0,228
1,60	0,000	0,089	0,174	0,248	0,309
1,50	0,000	0,118	0,228	0,320	0,390
1,40	0,000	0,148	0,285	0,394	0,469
1,30	0,000	0,177	0,342	0,470	0,546
1,20	0,000	0,206	0,399	0,547	0,621
1,10	0,000	0,236	0,456	0,624	0,693
1,00	0,000	0,268	0,513	0,699	0,762
0,90	0,000	0,303	0,573	0,770	0,825
0,80	0,000	0,341	0,634	0,834	0,881
0,70	0,000	0,387	0,699	0,890	0,927
0,60	0,000	0,441	0,768	0,936	0,962
0,50	0,000	0,510	0,838	0,970	0,985
$\phi_2(\alpha, -\beta) = -\phi_2(\alpha, \beta)$					

**Table III:  $\alpha = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$** 

$v_\alpha$	$v_\beta$						
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0
<b>2,439</b>	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
<b>2,5</b>	1,916	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924
<b>2,6</b>	1,808	1,813	1,829	1,829	1,829	1,829	1,829
<b>2,7</b>	1,729	1,730	1,737	1,745	1,745	1,745	1,745
<b>2,8</b>	1,664	1,663	1,663	1,668	1,676	1,676	1,676
<b>3,0</b>	1,563	1,560	1,553	1,548	1,547	1,547	1,547
<b>3,2</b>	1,484	1,480	1,471	1,460	1,448	1,438	1,438
<b>3,5</b>	1,391	1,386	1,378	1,364	1,337	1,318	1,318
<b>4,0</b>	1,279	1,273	1,266	1,250	1,210	1,184	1,150
<b>5,0</b>	1,128	1,121	1,114	1,101	1,067	1,027	0,973
<b>6,0</b>	1,029	1,021	1,014	1,004	0,974	0,935	0,874
<b>8,0</b>	0,896	0,892	0,887	0,883	0,855	0,823	0,769
<b>10,0</b>	0,818	0,812	0,806	0,801	0,780	0,756	0,691
<b>15,0</b>	0,698	0,695	0,692	0,689	0,676	0,656	0,595
<b>25,0</b>	0,593	0,590	0,588	0,586	0,579	0,563	0,513

Il est à noter que :  $\Psi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$

**Table IV:  $\beta = \Psi_2(v_\alpha, v_\beta)$** 

$v_\alpha$	$v_\beta$						
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0
<b>2,439</b>	0,0	2,2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
<b>2,5</b>	0,000	1,592	3,390	1,000	1,000	1,000	1,000
<b>2,6</b>	0,000	0,789	1,800	1,000	1,000	1,000	1,000
<b>2,7</b>	0,000	0,482	1,048	1,694	1,000	1,000	1,000
<b>2,8</b>	0,000	0,360	0,760	1,232	2,229	1,000	1,000
<b>3,0</b>	0,000	0,253	0,518	0,823	1,575	1,000	1,000
<b>3,2</b>	0,000	0,203	0,410	0,632	1,244	1,906	1,000
<b>3,5</b>	0,000	0,165	0,332	0,499	0,943	1,560	1,000
<b>4,0</b>	0,000	0,136	0,271	0,404	0,689	1,230	2,195
<b>5,0</b>	0,000	0,109	0,216	0,323	0,539	0,827	1,917
<b>6,0</b>	0,000	0,096	0,190	0,284	0,472	0,693	1,759
<b>8,0</b>	0,000	0,082	0,163	0,243	0,412	0,601	1,596
<b>10,0</b>	0,000	0,074	0,147	0,220	0,377	0,546	1,482
<b>15,0</b>	0,000	0,064	0,128	0,191	0,330	0,478	1,362
<b>25,0</b>	0,000	0,056	0,112	0,167	0,285	0,428	1,274

$\Psi_2(v_\alpha, -v_\beta) = -\Psi_2(v_\alpha, v_\beta)$

Annexe 2. Procédure de simulation d'un processus  $\alpha$ -stable avec Maple

## Simulation of stable process

```

> restart:with(Statistics):with(LinearAlgebra):with(plots):
> StblProc:=proc(alpha,beta,mu,lambda,s,n::posint,T::posint)
local delta,v, w, Stbl,L, S, IncL, IncS, C, G, t, PlotS, PlotL, PlotIncS, PlotIncL;
delta:=T/n;
v:= Sample(RandomVariable(Uniform(-Pi/2,Pi/2)), n);
w:= Sample(RandomVariable(Exponential(1)), n);
# Simulation of Stable variable #
if ((alpha>0 and alpha <= 2) and (beta >= -1 and beta <= 1)and mu >0) then
  if alpha =1 then
    for t from 1 to n do

Stbl[t]:=(2/Pi)*(((Pi/2)+(beta*v[t]))*tan(v[t]))-(beta*log((w[t]*cos(v[t]))/(
(Pi/2)+(beta*v[t]))));
      end do;
    else
      C:=(arctan(beta*tan(evalf(Pi)*alpha/2)))/alpha;
      G:=(cos(arctan(beta*tan(evalf(Pi)*alpha/2))))^(-1/alpha);

for t from 1 to n do

      Stbl[t]:=G* ((sin((alpha)*(v[t]+C)))/((cos(v[t]))^(1/(alpha))))*(cos(v[t]-
(alpha)*(v[t]+C)))/w[t]^((1-(alpha))/(alpha));
      end do;
    fi;
for t from 1 to n do
L[1]:=0;

L[t]:= evalf(L[t-1]+ Stbl[t]*(delta^(1/(alpha)))): # Stable motion #

IncL[t]:= L[t]- L[t-1]:
S[1]:=s:

S[t]:= evalf(S[t-1]*(1+(mu*delta)+(lambda*IncL[t]))):# Claim process #

IncS[t]:= S[t]- S[t-1]: #increment of Claim process #
end do:
PlotIncS:=plot([ seq([ t,IncS[t] ], t =2..n )],color =black, thickness = 1, title =
"Increment of Stable proces"):
PlotIncL:=plot([ seq([ t,IncL[t] ], t = 2..n )],color =black, thickness = 1, title =
"Increment of Stable-Lévy proces"):
PlotS:=plot([ seq([ t,S[t] ], t = 1..n )],color =black, thickness = 1, title =
"Stable proces"):
PlotL:=plot([ seq([ t,L[t] ], t = 1..n )],color =black, thickness = 1, title =
"Stable-Lévy proces"):
display(Array(1..2,1..2,[[PlotL,PlotIncL],[PlotS,PlotIncS]]));
else
  print("error in parameter condition");
fi;
end proc:

```

## Annexe 3. Procédure de simulation d'un processus d'investissement couplé avec Maple

```

> restart:with(Statistics):with(LinearAlgebra):with(plots):
> CoupledModels:=proc(r,q,sigma1,z,a,b,sigma2,rho,n::posint,T::posint,M)
local Delta,W,W,R,Z,Sigma,N,t,MultivariateNormalSample,IncR, IncZ, PlotIncR, PlotR,
PlotIncZ, PlotZ;
MultivariateNormalSample := proc(Sigma, N)
local A, R, d;
d := LinearAlgebra[RowDimension](Sigma):
R := Matrix(LinearAlgebra[LUdecomposition](evalf(Sigma), 'method' = 'Cholesky'),
datatype = float[8]):
A := Statistics[Sample](Normal(0, 1), d*N):
A := ArrayTools[Alias](A, [1..d, 1..N]):
rtable_options(A, subtype = Matrix):

return R.A:
end proc:
Sigma := <<1., rho>|<rho, 1.>>:W:= MultivariateNormalSample(Sigma, n):Delta:= T/n:
if M=Vasicek then
    for t from 2 to n do

R[1,1]:=r:
R[t,1]:=evalf(R[t-1,1]+(a*(b-R[t-1,1]))*Delta)+(sigma2*sqrt(Delta)*WW[1,t]): #
Vasicek process #
        end do:
    elif M=CIR then
        if 2*a*b>sigma2^2 then
            for t from 2 to n do
R[1,1]:=r:
R[t,1]:=evalf(R[t-1,1]+(a*(b-R[t-1,1]))*Delta)+(sigma2*sqrt(Delta*R[t-1,1])*WW[1,t]): #
CIR process #
            IncR[t,1]:=evalf(R[t,1]-R[t-1,1]):
                end do:
            else print("error in parameter's condition of CIR model");
                fi;
            else print("error in the name of stochastic rate process");
                fi;
            for t from 2 to n do
                Z[1,1]:=z:
                Z[t,1]:=evalf(Z[t-1,1]*(1+(R[t,1]-q)*Delta)+(sigma1*sqrt(Delta)*WW[2,t])):#
                Investment process #
                IncZ[t,1]:=evalf(Z[t,1]-Z[t-1,1]): # Increment of investment process #
                end do:
R:=<seq(R[i,1], i = 1 .. n)>: IncR:=<seq(IncR[i,1], i = 2 .. n)>:
Z:= <seq(Z[i,1], i = 1 .. n)>: IncZ:= <seq(IncZ[i,1], i = 2 .. n)>:
PlotR:= plot([seq(i, i = 1 .. n)], R, color = black, thickness = 2, title = " spote
rate proces "):
PlotIncR:= plot([seq(i, i = 1 .. n-1)], IncR, color = black, thickness = 2, title = "
spote rate-increment"):
PlotZ:= plot([seq(i, i = 1 .. n)],Z, color = black, thickness = 2, title = " increment
of coupled investment process"):
PlotIncZ:= plot([seq(i, i = 1 .. n-1)], IncZ, color = black, thickness = 2, title = "
increment of coupled investment process"):
display(Array(1..2,1..2,[[PlotR,PlotIncR],[PlotZ,PlotIncZ]]));
end proc:

```