N° d'ordre : / /

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHECHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

En : Recherche opérationnelle

Option : Génie mathématiques

Par

Moussa AHMIA

Sujet

Sur la log-concavité des suites numériques

Soutenu le 12/ 11 / 2009, devant le jury composé de :

Isma	BOUCHEMAKH	Prof. USTHB	Président
Hacène	BELBACHIR	M.C. USTHB	Directeur de Thèse
Sadek	BOUROUBI	M.C. USTHB	Examinateur
Miloud	MIHOUBI	M.C. USTHB	Examinateur

Sur la log-concavité des suites numériques

Mémoire de Magister en Mathématiques

Thème principal : Combinatoire énumérative

Moussa AHMIA

Table des matières

Remerciements

Ce Mémoire, intitulé "Sur la log-concavité des suites numériques", s'est déroulé dans le cadre de l'école doctorale de Recherche Opérationnelle à l'**USTHB** durant l'année universitaire 2008/2009 sous la direction de Monsieur BELBACHIR Hacène Maitre de conférence en mathématique.

Mes premiers remerciements iront au Directeur du mémoire Monsieur BELBACHIR Hacène pour m'avoir soutenu le long de cette année de recherche, ainsi que pour sa précieuse aide, sa disponibilité et ses conseils éclairés pour la réalisation de ce travail. J'aimerais lui adresser mes plus vifs remerciements.

J'adresse mes remerciements à Madame BOUCHEMAKH Isma Professeur à l'USTHB pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie Monsieur BOUROUBI Sadek Maître de conférences à l'USTHB, et Monsieur MIHOUBI Miloud Maitre de conférences à l'USTHB pour avoir accepté d'être examinateurs de mon travail.

Mes sincères remerciements vont également à mes amis intimes BAZENIAR Abdelghafour, DERRAA Samir, et BAKHA Fouzi. Ils m'ont apporté tous leurs soutiens et leurs encouragements, notamment lors des moments les plus difficiles.

Je ne pourrais clôturer ces remerciements sans me retourner vers les êtres qui mes sont le plus chers, qui ont eu un rôle essentiel et continu pendant ma réussite, et qui sans eux aucune réussite n'aurait été possible. J'adresse de tout mon cœur mes remerciements à ma famille, particulièrement à mes chers parents, mes frères et ma sœur, qui furent toujours présent et ont rempli ma vie, mon seul exemple, je leurs suis infiniment reconnaissant pour leurs amours et leurs soutiens.

Enfin, je ne pourrai oublier mes collègues de l'école doctorale qui m'ont apporté un grand réconfort de travail dans la joie et la bonne humeur, ainsi que tous les professeurs qui nous ont dispensé des cours dans notre première année de post-graduation.

Introduction

Un grand nombre de suites d'intérêt combinatoire sont log-concaves ou unimodales. Il s'agit de propriétés difficiles à montrer et non conservées par des transformations linéaires, en général. Parmi les applications combinatoires, nous citerons à titre non exhaustif, la coloration des graphes et la complexité algorithmique.

Le thème principal du mémoire est l'étude de la log-concavité des suites numériques, plus précisément la préservation de la log-concavité, ce qui nous permettra d'aborder avec aisance le concept d'unimodalité, telles que les suites extraites du triangle de Pascal ordinaire et généralisé.

Au premier chapitre, nous développons des concepts et outils qui permettent d'assurer la préservation de la log-concavité : étant donnés un triangle de nombres positifs $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ et une suite log-concave $\{x_n\}_n$, on souhaiterais pouvoir récupérer une suite log-concave $\{z_n\}_n$ via la tranformation suivante $z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x_k$. Pour ce faire, on introduira le concept de log-concavité positive qui permettra, sous certaines conditions d'établir la log-concavité de la suite $\{z_n\}_n$. Essentiellement, les résultats que l'on présentera dans ce chapitre sont dûs à Wang et Yeh [44]. Une application aux opérateurs linéaires d'ordre deux est abordée et traitée en détails. Enfin, on présente à la fin du chapitre une démonstration de Wang et Yeh concernant une généralisation du Théorème de Liggett. Malheureusement, il y a un passage que nous avons mal compris et restons sur notre faim, c'est à dire pas encore convaincus, reflexion à poursuivre...

Au deuxième chapitre, nous abordons le problème d'unimodalité des polynômes. Nous commençons par quelques notions et préliminaires sur les suites unimodales et l'unimodalité des polynômes. On y introduit la notion de préservation pour l'unimodalité des polynômes : étant donné un polynôme $P(x)$ à coefficients positifs, quelles seraient les situations et/ou les hypothèses possibles pour pouvoir affirmer que $P(x+\alpha)$ est un polynôme unimodal. Nous abordons les deux cas α entier et α réel positif. Nous présentons aussi dans ce chapitre la notion de polynôme log-concave et tentons de répondre à des questions similaires. Dans certains cas, on sera capable de spécifier le mode ou les modes de manière explicite. Ce chapitre représente essentiellement les travaux de J. Alvarez, M. Amadis, G. Boros, D. Karp, V. H. Molland, L. Rosales [3], et Wang et Yeh [43].

Enfin, dans le chapitre troisième, nous nous proposons d'étendre certains résultats présentés dans le premier chapitre à des triangles plus généraux. Principalement, on aborde la préservation de la log- concavité dans les p-triangles, comme le cas du triangle de Pascal généralisé : un p-triangle est donné par $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$. Comme pour le chapitre premier nous allons établir des théorèmes de préservation de la log-concavité, on introduira donc le concept de log-concavité positive. On se propose aussi de comprendre comment la notions de p-triangle permet de donner des applications aux opérateurs linéaires d'ordre p.

Enfin nous terminons notre travail par une annexe.

Chapitre 1

Préservation des suites Log-concaves

Ce chapitre est largement puisé de l'article de Wang et Yeh [44] avec quelques retouches personnelles.

Les suites log-concaves apparaissent dans beaucoup de domaines mathématiques, principalement en combinatoire, en algèbre, en géométrie, en informatique, en probabilité et en statistique.

1.1 Suites log-concaves et propriétés PLC et LC-positives

Dans cette section, on introduit quelques définitions, notations et résultats liées aux suites log-concaves.

Définition 1 *Soit $\{x_k\}_k$ une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est* ***log-concave*** *(**LC**) si pour tout entier $k > 0$, $x_{k-1}x_{k+1} \leq x_k^2$.*

Ainsi, une suite de nombres réels $\{x_k\}_{k\geq 0}$, strictement positifs, est log-concave si et seulement si la suite $\{x_k/x_{k-1}\}_k$ est décroissante.

Théorème 2 *Soit $\{x_k\}_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs, la suite $\{x_k\}$ est log-concave si et seulement si $x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j$ pour tout $j \geq i \geq 1$ (voir [12] Proposition 2.5.1), ou encore tous les mineurs d'ordre deux de la matrice infinie $M = (x_{i-j})_{i,j\geq 0}$ sont positifs (où $x_k = 0$ si $k < 0$).*

Preuve. On dit que $\{x_k\}_k$ es log-concave, si pour $k \geq 1$, $x_k^2 \geq x_{k-1}x_{k+1}$.

1- Si, on pose $i = j = k \geq 1$, on aura $x_i x_j \geq x_{i-1}x_{j+1}$;

2- Prenant un $k' > k$, et comme exemple $k' = k+1$, on aura :

$x_{k+1}^2 \geq x_k x_{k+2} \Rightarrow x_k x_{k+1}^2 \geq x_k^2 x_{k+2} \geq x_{k-1} x_{k+1} x_{k+2} \Rightarrow x_k x_{k+1} \geq x_{k-1} x_{k+2}$.

Alors, si on pose $i = k \geq 1$ et $j = k+1 > i$, on aura $x_i x_j \geq x_{i-1} x_{j+1}$. La preuve est complète.

□

Exemple 3 *Soit* $x_k = \binom{n}{k}$ *la* n*-ième ligne du triangle de Pascal pour* $n \geq k \geq 0$. *Elle est log-concave, car*

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} \geq 1.$$

Ci dessous des exemples de suites log-concaves :

1. Les nombres de Stirling (signless) de première espèce $\{s(n,k)\}_k$ ou $\{s(n,k)\}_k$ est définie dans la Définition 4 ci-dessous ;
2. Les nombres de Stirling de seconde espèce $\{S(n,k)\}_k$ ou $\{S(n,k)\}_k$ est définie dans la Définition 4 ci-dessous ;
3. Les nombres d'Euler $\{e(n,k)\}_k$ ou $\{e(n,k)\}_k$ est définie dans la Définition 5 ci-dessous ;
4. Les suites combinatoires suivantes correspondants à des transversales dans le triangle de Pascal $\left\{\binom{n-i}{i}\right\}_i$ et $\left\{\binom{n-id}{i}\right\}_i$ [35, 36] ;
5. Récemment, le cas général des transversales du triangle de Pascal ont été traités par Belbachir et Szalay [7] : ils ont montré la log-concavité de la suite $\left\{\binom{n+id}{k+i\sigma}\right\}_i$ avec $d, \sigma \in \mathbb{Z}$, et $n \geq k$.

Définition 4 *Les nombres de Stirling de première espèce, notés* $s(n,k)$, *et les nombres de Stirling de seconde espèce, notés* $S(n,k)$, *sont définis par les équations*

$$X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k, \tag{1.1}$$

avec

$$X^{\overline{n}} := \begin{cases} 1 & si\ n = 0, \\ X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1) & si\ n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) X^{\underline{k}}, \tag{1.2}$$

avec

$$X^{\underline{k}} := \begin{cases} 1 & si\ k = 0, \\ X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1) & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Définition 5 *Les nombres d'Euler sont une suite* $\{\mathbf{E}_n\}$*, de nombres entiers positifs définis par :*

$$E_0 = 1 \text{ et } E_n = -\sum_{\substack{k=0 \\ 2/n-k}}^{\infty} \binom{n}{k} E_k \text{ pout } n \in \mathbb{Z}^+,$$

et

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

Soit $\{a(n,k)\}_{0 \leq k \leq n}$ un triangle de nombres positifs.

Illustration du triangle, n représente la ligne et k la colonne :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	$\star$					
2	$\star$	$\star$				
3	$\star$	$\star$	$\star$			
4	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$		
5	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	. .

Considérons les deux transformations linéaires suivantes :

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k) x_k, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.3}$$

et

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k) x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.4}$$

Sans restreindre la généralité, il est commode d'étendre la définition de x_k et $a(n,k)$ à $\mathbb{Z}$, en considérant $x_k = 0$ pour $k < 0$ et $a(n,k) = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$.

Définition 6 *On dit que la transformation (1.3) a la propriété* ***PLC*** *ou encore préserve la log-concavité des suites, si la log-concavité de la suite* $\{x_n\}$ *entraine celle de la suite* $\{z_n\}$ *.*

On dit que la transformation (1.4) a la propriété ***double-PLC*** *si la log-concavité des suites* $\{x_n\}$ *et* $\{y_n\}$ *entraine celle de la suite* $\{z_n\}$*.*

Le triangle correspondant $\{a(n,k)\}$ hérite aussi des l'appellations PLC et double-PLC respectivement. Trivialement, la propriété double-PLC implique la propriété PLC.

Exemple 7 *Il est établi que les transformations linéaires importantes suivantes sont (double) PLC :*

1. *La transformation linéaire*

$$z_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x_k, \qquad n = 0, 1, 2.... \tag{1.5}$$

est PLC [12, 23].

2. *Wang [42] a prouvé que :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{a+n}{b+k} x_k, \qquad n = 0, 1, 2....$$

est PLC pour a, b deux nombres entiers positifs tels que $a \geq b$, le cas $b = 0$ étant traité par Ehrenborg et Steingrimsson [19] .

3. *La convolution ordinaire*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2....$$

est double-PLC. (Karlin [23, p. 394], ou Menon [26]).

4. *La convolution exponentielle :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2.... \tag{1.6}$$

est double-PLC [40].

5. *De plus Zhang [47, 2008] a prouvé les versions q-analogues de (1.5) et (1.6), il a établi que les transformations :*

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-n)} x_k, \qquad n = 0, 1, 2.... \\ z_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-n)} x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2.... \end{aligned}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le coefficient q-binomial, sont PLC et double-PLC respectivement pour q une indéterminée donnée.

Le coefficient q-binomial est un q-analogue du coefficient binomial, il est donné par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$$

où $[k]! = [1][2]...[k]$ et $[j] = 1 + q + q^2 + ... + q^{j-1}$.

Lorsque le triangle $\{a(n,k)\}$ est PLC, la transformation linéaire (1.3) envoie toute suite log-concave $\{x_k\}$ en une suite log concave $\{z_k\}$. Etant donnée une suite log-concave $\{x_k\}$, quelles conditions doit-on mettre sur le triangle $\{a(n,k)\}$ pour qu'il soit PLC, c'est à dire assurer la log concavité de la suite associée $\{z_k\}$?

Théorème 8 *Soit un triangle PLC* $\{a(n,k)\}$,

1. *La suite colonne* $\{a(n,r)\}_{n\geq r}$ *est log-concave pour tout* $r\in\mathbb{N}$ *;*
2. *La somme-ligne* $a(n)=\sum_{k=0}^{n}a(n,k)$ *est log-concave ;*
3. *La suite* $\mathcal{A}_r(n;p)=\sum_{k=0}^{n}a(n,k)p^k$ *est log-concave avec* $r\in\mathbb{N}$ *et* $p>0$.
4. *La suite diagonale* $\{a(n,n)\}_{n\geq 0}$ *est log-concave.*

Preuve. Pour prouver 1., il suffit de prendre $x_k=\delta_{r,k}$ (indice de Kronecker) dans la transformation (1.3). Pour 2., on prend $x_k\equiv 1$. Le troisième s'obtient pour $x_k=p^k$. □

On peut voir $\mathcal{A}_r(n;p)$ comme un polynôme en p. Ainsi, le polynôme

$$\mathcal{A}_r^2(n;p)-\mathcal{A}_r(n-1;p)\mathcal{A}_r(n+1;p)$$

prend des valeurs positives lorsque $p>0$, de coefficient dominant

$$a^2(n,n)-a(n-1,n-1)a(n+1,n+1)$$

qui est positif.

Enfin la dernière s'obtient pour les valeurs de la suite $\{x_k\}$ sont tous nulle sauf $x_n=1$.

En vue d'énoncer des conditions suffisantes pour que le triangle $\{a(n,k)\}$ soit PLC, on introduit quelques terminologies et notations.

Définition 9 *Soient q une indéterminée et $\{f_n(q)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes en q. On dit que la suite $\{f_n(q)\}_{n\geq 0}$ est q-log-concave si pour chaque $n\geq 1$,*

$$f_n^2(q)-f_{n-1}(q)f_{n+1}(q)$$

a des coefficients positifs en tant que polynôme en q.

Le concept de q-log-concavité a été introduit pour la première fois par Sagan [31, p.795]. Pour des informations complémentaires sur la q-log-concavité on pourra consulter [15, 22, 24, 31].

Définition 10 *Pour $0 \leq r \leq n$, on définit le polynôme*

$$\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=r}^{n} a(n,k)q^k,$$

*on dit que le triangle $\{a(n,k)\}$ a la propriété **LC-positive** si pour chaque $r \geq 0$, la suite des polynômes $\{\mathcal{A}_r(n;q)\}_{n \geq r}$ est q-log-concave en n.*

Définition 11 *On définit le triangle inverse $\{a^\star(n,k)\}$ associé à $\{a(n,k)\}$ par :*

$$a^\star(n,k) = a(n,n-k), \qquad 0 \leq k \leq n$$

*On dit que le triangle $\{a(n,k)\}$ a la propriété **double LC-positive** si les deux triangles $\{a(n,k)\}$ et $\{a^\star(n,k)\}$ ont la propriété LC-positive.*

Exemple 12 *Pour $a(n,k) \equiv 1$ $(0 \leq k \leq n)$ (le triangle constant unitaire), on a $\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=r}^{n} q^k$ pour $0 \leq r \leq n$, et on établit*

$$\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) = q^{r+n},$$

ainsi $\{\mathcal{A}_r(n;q)\}$ est q-log-concave en n. Donc le triangle constant est LC-positif, et donc double LC-positif car $a^\star(n,k) = a(n,k)$.

Exemple 13 *Pour le triangle de Pascal (c'est ce triangle qui est à la base des généralisations à des triangles quelconques), i.e. $a(n,k) = \binom{n}{k}$, on a*

$$\mathcal{A}_r(n;q) := \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} q^k = (q+1)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \binom{n-1}{r-1} q^r$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) = \\
& \mathcal{A}_r(n;q)\left[(q+1)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \binom{n-1}{r-1}q^r\right] \\
& -\mathcal{A}_r(n-1;q)\left[(q+1)\mathcal{A}_r(n;q) + \binom{n}{r-1}q^r\right] = \\
& q^r\binom{n-1}{r-1}\mathcal{A}_r(n;q) - q^r\binom{n}{r-1}\mathcal{A}_r(n-1;q) \\
= & \sum_{k=r}^{n}\left[\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{k} - \binom{n}{r-1}\binom{n-1}{k}\right]q^{k+r} \\
= & \sum_{k=r}^{n}\left[\binom{n-1}{r-1}\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{r-2}\binom{n-1}{k}\right]q^{k+r}
\end{aligned}$$

laquelle a des coefficients positifs par la log-concavité des coefficients binomiaux. Par conséquent $\{\mathcal{A}_r(n;q)\}$ est q-log-concave en n. Ainsi, le triangle Pascal est LC-positif et donc double LC-positif car $a^\star(n,k) = a(n,k)$.

1.2 Liens entre la LC-positivité et la préservation de la log-concavité

Dans cette section, on présente les résultats concernant la (double) LC-positivité et la propriété (double) PLC, en précisant le lien entre les deux concepts.

Commençons par introduire le lemme suivant, classique en analyse, et fort utile pour ce qui va suivre.

Lemme 14 *[44] Soit $s \in \mathbb{N}$, donnons nous deux suites finies $a_0, ..., a_s$ et $X_0, ..., X_s$ de nombres réels satisfaisant les deux conditions suivantes :*

1. $\sum_{k=r}^{s} a_k \geq 0$ *pour tout* $0 \leq r \leq s$ *;*
2. $0 \leq X_0 \leq ... \leq X_s$.

   Alors $\sum_{k=0}^{s} a_k X_k \geq X_0 \sum_{k=0}^{s} a_k \geq 0$.

Preuve. C'est une simple conséquence de la formule des sommes partielles d'Abel : $\sum_{k=0}^{s} a_k X_k = (a_0 + a_1 + \cdots + a_s)X_0 + (a_1 + \cdots + a_s)(X_1 - X_0) + \cdots + a_s(X_s - X_{s-1}) \geq X_0 \sum_{k=0}^{s} a_k \geq 0$. $\square$

Nous allons maintenant tenter de caractériser le lien qui existe entre la LC-positivité et la propriété PLC.

Soient $\{a(n,k)\}_{0 \leq k \leq n}$ un triangle de nombres positifs et $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite log-concave.

Soit $\{z_n\}_{n \geq 0}$ une suite définie par (1.3) ; et notons $\triangle_n = z_n^2 - z_{n-1} z_{n+1}$. On veut montrer que $\triangle_n \geq 0$, pour chaque $n \geq 1$. Notons que

$$\triangle_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a(n,k) x_k \right\}^2 - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1,k) x_k \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} a(n+1,k) x_k \right\} \tag{1.7}$$

est une forme quadratique de $n+2$ variables $x_0, x_1, .., x_{n+1}$. Généralement, ces formes quadratiques ne sont pas semi définie positives. Ainsi la log-concavité de $\{x_k\}$ est une hypothèse raisonnable pour nous en sortir. En effet, l'exemple simple suivant peut nous en convaincre, considérons le triangle $a(n,k) \equiv 1$ pour $0 \leq k \leq 1$, on a :

$$\triangle_1 = (x_0 + x_1)^2 - x_0(x_0 + x_1 + x_2) = x_1^2 + x_0 x_1 - x_0 x_2.$$

Il est facile de constater que $\triangle_1$ peut prendre des valeurs négatives, pour des nombres positifs x_k, par contre il demeure positif si x_0, x_1, x_2 est une progression log-concave.

Pour exploiter la log-concavité de $\{x_k\}$, rappelons que $\{x_k\}$ est log-concave si et seulement si $x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j$ pour $j \geq i \geq 1$. En d'autres termes, les $x_i x_j$ avec le même "hauteur" $i+j$ sont comparables. On rassemble les termes de même hauteur t dans $\triangle_n$ et notons leur somme par S_t.

Pour $0 \leq k \leq \lfloor t/2 \rfloor$, soit $a_k(n,t)$ le coefficient du terme $x_k x_{t-k}$ dans $\triangle_n$. Alors

$$\triangle_n = \sum_{t=0}^{2n} S_t \quad \text{avec} \quad S_t = \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t) x_k x_{t-k}.$$

Il suffit d'avoir $S_t \geq 0$, pour chaque $0 \leq t \leq 2n$.

Notons que $x_0 x_t \leq x_1 x_{t-1} \leq x_2 x_{t-2} \leq \cdots$.

D'où par le Lemme 14, il reste à établir $\sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t) \geq 0$ pour chaque $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$.

Via (1.7), on a pour $k < t/2$

$$a_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k) - a(n-1,k)a(n+1,t-k) - a(n+1,k)a(n-1,t-k); \qquad (1.8)$$

et pour t pair et $k = t/2$, on a

$$a_k(n,t) = a(n,k)^2 - a(n-1,k)a(n+1,k).$$

Remarque 15 *Ici $a_k(n,t)$ est le coefficient de $x_k x_{t-k}$ dans $\triangle_n$ d' indice k (l'évolution de l'indice k est directe) et de hauteur $t = k + (t-k)$ (c'est la somme des seconds arguments des produits qui constituent le second membre de (1.8)), son expression est donnée par la relation (1.8). Quelle notation devrait-on adopter pour l'expression issue du triangle réciproque $\{a^\star(n,k)\}$? Le coefficient de $x_k x_{t-k}$ dans ce cas est :*

$$2a^\star(n,k)a^\star(n,t-k) - a^\star(n-1,k)a^\star(n+1,t-k) - a^\star(n-1,t-k)a^\star(n+1,k).$$

On conviendra donc de le noter

$$a^\star_{t-k}(n,t)$$

ce coefficient est d'argument $t-k$ (car la lecture de l'argument se fait dans le sens inverse) et de hauteur $t = (t-k) + k$.

Notons

$$A_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t), \qquad (1.9)$$

On voit que $A_r(n,t)$ est exactement le coefficient de q^t dans le polynôme $\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q)$, ou encore

$$\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) = \sum_{t=2r}^{2n} A_r(n,t)q^t. \tag{1.10}$$

D'où la caractérisation de la LC positivité, fort utile, suivante

Lemme 16 *[44]Avec la notation précédente, le triangle $\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$ est LC-positif si et seulement si $A_r(n,t)\ge 0$ pour tout t, $2r\le t\le 2n$.*

Maintenant, on peut énoncer le premier résultat de Wang et Yeh par rapport au développement que l'on vient de faire.

Théorème 17 *[44] Les triangles LC-positifs sont PLC.*

On passe maintenant à la relation entre la double LC-positivité et la propriété double-PLC.

La proposition suivante est la clé du Théorème 19 ci-dessous.

Proposition 18 *[44] Donnons nous un triangle $\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$ de nombres positifs, et deux suites log-concaves $\{x_k\}_{k\ge 0}$ et $\{y_k\}_{k\ge 0}$. On introduit les trois triangles suivants $\{b(n,k)\}$, $\{c(n,k)\}$ et $\{d(n,k)\}$, définis par*

$$b(n,k) = a(n,k)x_k, \qquad c(n,k) = a(n,k)y_{n-k}, \qquad d(n,k) = a(n,k)x_k y_{n-k}.$$

Pour $2r\le t\le 2n$, on considère les quantités :

$$B_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2\rfloor} b_k(n,t),$$

avec

$$b_k(n,t) = 2a(n,k)a(n,t-k)x_k x_{t-k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)x_k x_{t-k} - a(n+1,k)a(n-1,t-k)x_k x_{t-k},$$

$$C_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2\rfloor} c_k(n,t),$$

avec

$$\begin{aligned} c_k(n,t) &= 2a(n,k)a(n,t-k)y_{n-k}y_{n-t+k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)y_{n-k-1}y_{n-t+k+1} \\ &\quad - a(n+1,k)a(n-1,t-k)y_{n-k+1}y_{n-t+k-1}, \end{aligned}$$

et

$$D_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} d_k(n,t),$$

avec

$$\begin{aligned} d_k(n,t) &= 2a(n,k)a(n,t-k)x_kx_{t-k}y_{n-k}y_{n-t+k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)x_kx_{t-k}y_{n-k-1}y_{n-t+k+1} \\ &\quad -a(n+1,k)a(n-1,t-k)x_kx_{t-k}y_{n-k+1}y_{n-t+k-1}, \end{aligned}$$

relatives à ces suites comme pour $A_r(n,t)$ donnée en (1.9).

1. *Si le triangle $\{a(n,k)\}$ est LC-positif, alors le triangle $\{b(n,k)\}$ est LC-positif et $B_r(n,t) \geq A_r(n,t)x_rx_{t-r}$.*
2. *Si le triangle $\{a(n,k)\}$ est double LC-positif, alors le triangle $\{c(n,k)\}$ est LC-positif et $C_r(n,t) \geq A_r(n,t)y_{n-t+r}y_{n-r}$ pour $t \leq n+r$.*
3. *Si le triangle $\{a(n,k)\}$ est double LC-positif, alors le triangle $\{d(n,k)\}$ est double LC-positif et $D_r(n,t) \geq A_r(n,t)x_rx_{t-r}y_{n-t+r}y_{n-r}$ pour $t \leq n+r$.*

Preuve. 1. Soit $0 \leq t \leq 2n$, de la définition il est facile de voir que $b_k(n,t) = a_k(n,t)x_kx_{t-k}$ pour $0 \leq k \leq \lfloor t/2 \rfloor$. Ainsi pour $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$

$$B_r(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} b_k(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t)x_kx_{t-k},$$

$\{a(n,k)\}$ est LC-positif et $x_0x_t \leq x_1x_{t-1} \leq ...$ par la log-concavité de $\{x_k\}$. Du Lemme 14 il s'ensuit que

$$B_r(n,t) \geq x_rx_{t-r} \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_k(n,t) = A_r(n,t)x_rx_{t-r} \geq 0,$$

ainsi le triangle $\{b(n,k)\}$ est LC-positif.

2. Soit $2r \leq t \leq 2n$, il nous faut établir que $C_r(n,t) \geq 0$. On traitera le cas t impair (le cas pair étant similaire et plus simple). Soit $t = 2s+1$ et notons pour $0 \leq k \leq s$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a(n,k)a(n,t-k), \\ \beta_k &= a(n-1,k)a(n+1,t-k), \\ \gamma_k &= a(n+1,k)a(n-1,t-k), \\ Y_k &= y_{n-t+k}y_{n-k}, \end{aligned}$$

ainsi

$$a_k(n,t) = 2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k$$

et

$$\begin{aligned} c_k(n,t) &= 2a(n,k)a(n,t-k)y_{n-t+k}y_{n-k} - a(n-1,k)a(n+1,t-k)y_{(n-t+k+1)}y_{n-(k+1)} \\ &\quad -a(n+1,k)a(n-1,t-k)y_{(n-t+k-1)}y_{n-(k-1)} \\ &= 2\alpha_k Y_k - \beta_k Y_{k+1} - \gamma_k Y_{k-1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$C_r(n,t) = \sum_{k=r}^{s} (2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1})Y_k - \beta_s Y_{s+1} + \gamma_{s+1} Y_s + \beta_{r-1} Y_r - \gamma_r Y_{r-1},$$

comme $Y_{s+1} = Y_s$ et $\gamma_{s+1} = \beta_s$, on a

$$C_r(n,t) = \sum_{k=r}^{s} (2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1})Y_k + \beta_{r-1} Y_r - \gamma_r Y_{r-1}.$$

Notons que $\{Y_k\}$ est croissante par la log concavité de $\{y_k\}$ et

$$\begin{aligned} 2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1} &= 2a^\star(n,n-k)a^\star(n,n-t+k) - a^\star(n-1,n-k)a^\star(n+1,n-t+k) \\ &\quad -a^\star(n+1,n-k)a^\star(n-1,n-t+k) \\ &= a^\star_{n-t+k}(n,2n-t), \ \text{(Remarque 15)}. \end{aligned}$$

Alors par la LC-positivité de $a^\star(n,k)$, on a

$$\begin{aligned} C_r(n,t) &= \sum_{j=n-t+r}^{\lfloor (2n-t)/2 \rfloor} a^\star_j(n,2n-t) Y_{j-n+t} + \beta_{r-1} Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &\geq Y_r \sum_{j=n-t+r}^{\lfloor (2n-t)/2 \rfloor} a^\star_j(n,2n-t) + \beta_{r-1} Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &= Y_r \sum_{k=r}^{s} (2\alpha_k - \beta_{k-1} - \gamma_{k+1}) + \beta_{r-1} Y_r - \gamma_r Y_{r-1} \\ &= Y_r \sum_{k=r}^{s} (2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + \gamma_r (Y_r - Y_{r-1}) \\ &= A_r(n,t) Y_r + \gamma_r (Y_r - Y_{r-1}) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Donc $C_r(n,t) \geq A_r(n,t) y_{n-t+r} y_{n-r}$ vu que $Y_r \geq Y_{r-1}$.

3. On a $d(n,k) = a(n,k)x_k y_{n-k} = c(n,k)x_k$, de 2., on sait que $c(n,k)$ est LC-positif, de plus pour $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$ avec $0 \leq t \leq 2n$, on a

$$D_r(n,t) := \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} d_k(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} c_k(n,t) x_k x_{t-k},$$

ainsi, d'après 1. et 2., on a :

$$D_r(n,t) \geq C_r(n,t)x_r x_{t-r} \geq A_r(n,t)x_r x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r}.$$

□

Maintenant, on présente le deuxième résultat relatif à la propriété double-PLC.

Théorème 19 *[44] Les triangles double LC-positifs sont double-PLC.*

Preuve. Soient $\{a(n,k)\}$ un triangle double LC-positif et $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ deux suites log-concaves. Alors le triangle $\{a(n,k)x_k y_{n-k}\}$ est LC-positif par 3. de la Proposition 18 et donc PLC par le Théorème 17, ainsi la suite somme-ligne :

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

est log-concave par 2. de la Théorème 8. En d'autres termes, le triangle $\{a(n,k)\}$ est double-PLC.
□

Des conditions moins restrictives peuvent être considérées pour obtenir la LC-positivité. On a vu que c'est la première condition du Lemme 14 qui permet d'établir la LC-positivité dans la Proposition 18. Elle entraîne, de plus, les deux assertions suivantes :

A1 La séquence $a_0, a_1, ..., a_s$, a des éléments négatifs et des éléments positifs ;

A2 $\sum_{k=0}^{s} a_k \geq 0$.

Ces deux assertions sont plus faciles à satisfaire que les condition conditions du Lemme 14, c'est le cas des suites croissantes et éventuellement positives.

Le Lemme 16 permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 20 *[44] Supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

1. *Il existe un indice $m = m(n,t)$ tel que $a_k(n,t) < 0$ pour $k < m$ et $a_k(n,t) \geq 0$ pour $k \geq m$;*
2. *La suite $\{\mathcal{A}_0(n;q)\}_{n\geq 0}$ est q-log-concave.*

   Alors le triangle $\{a(n,k)\}$ est LC-positif et donc PLC.

Corollaire 21 *[44] Supposons que le triangle $\{a(n,k)\}$ satisfait les conditions du Corollaire 20 et que $\{a^\star(n,k)\}$ satisfait seulement sa première condition, alors $\{a(n,k)\}$ est double LC-positif et donc double-PLC.*

Preuve. Il suffit de voir que $\{\mathcal{A}_0^\star(n;q)\}$ est q-log-concave. On a

$$\mathcal{A}_0^\star(n;q)=\sum_{k=0}^{n}a(n,n-k)q^k=\sum_{k=0}^{n}a(n,k)q^{n-k}=q^n\mathcal{A}_0(n;q^{-1})$$

il s'ensuit que

$$\mathcal{A}_0^{\star 2}(n;q)-\mathcal{A}_0^\star(n-1;q)\mathcal{A}_0^\star(n+1;q)=q^{2n}[\mathcal{A}_0^2(n;q^{-1})-\mathcal{A}_0(n-1;q^{-1})\mathcal{A}_0(n+1;q^{-1})]$$

qui a des coefficients positifs par la q-log-concavité de $\mathcal{A}_0(n;q)$. □

1.3 Application aux opérateurs linéaires d'ordre deux et exemples

Dans cette section, on donne quelques exemples sur les triangles PLC et double-PLC en établissant leur LC-positivité. En particulier, une généralisation du résultat de Liggett [25] sera présentée.

Notons par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres positifs. Donnons nous deux nombres positifs λ et μ, on définit l'opérateur linéaire $L=L[\lambda,\mu]$ dans $\mathfrak{S}$ par :

$$L(u_k):=\lambda u_k+\mu u_{k-1},\qquad (k\in\mathbb{Z})\,.$$

Pour $n\geq 2$, on définit $L^n:=L(L^{n-1})$, L^0 étant l'opérateur identité.

Proposition 22 *Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite log-concave. Alors la suite $\{L(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi log-concave.*

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned}
& [L(u_k)]^2-L(u_{k-1})L(u_{k+1})\\
= \;& (\lambda u_k+\mu u_{k-1})^2-(\lambda u_{k-1}+\mu u_{k-2})(\lambda u_{k+1}+\mu u_k)\\
= \;& \lambda^2(u_k^2-u_{k-1}u_{k+1})+\lambda\mu(u_{k-1}u_k-u_{k-2}u_{k+1})+\mu^2(u_{k-1}^2-u_{k-2}u_k)\geq 0
\end{aligned}$$

En vertu du Théorème 2. □

Ainsi, par récurrence, la suite $\{L^n(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi log-concave $(n\geq 0)$.

Remarque 23 *Que peut-on dire pour le cas d'un opérateur linéaire d'ordre $p>1$*

$$L(u_k)=\sum_{j=0}^{p}\lambda_j u_{k-j},\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Etudions la log-concavité de la suite $\{L(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} [L(u_k)]^2 &- L(u_{k-1})L(u_{k+1}) \\ &= \left[\sum_{j=0}^{p}\lambda_j u_{k-j}\right]^2 - \sum_{j=0}^{p}\lambda_j u_{k-j-1}\sum_{j=0}^{p}\lambda_j u_{k-j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{p}\lambda_j^2(u_{k-j}^2 - u_{k-j-1}u_{k-j+1}) \\ &\quad + \sum_{0\le j<l\le p}\lambda_j\lambda_l(2u_{k-l}u_{k-j} - u_{k-l-1}u_{k-j+1} - u_{k-l+1}u_{k-j-1}) \ge 0. \end{aligned}$$

Donc la suite est log-concave. Mais, la longueur de l'opérateur linéaire utilisé dépend du type de triangle auquel on a à faire. Néanmoins, nous allons introduire au chapitre 3 des triangles plus généraux qui prennent en charge l'opérateur linéaire lié de toute longueur fini.

Théorème 24 *[44] Donnons nous deux nombres positifs* λ *et* μ *et une suite log-concave* $\{u_k\}$*, on définit* $a(n,k) = L^n[\lambda,\mu](u_k)$ $(0 \le k \le n)$*. Alors le triangle* $\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$ *est double LC-positif et donc double-PLC.*

Preuve. Notons $a_k = L^{n-1}[\lambda,\mu](u_k)$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Alors la suite $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r(n;q) &= \sum_{k=r}^{n} L(L^{n-1}[\lambda,\mu](u_k))q^k \\ &= \sum_{k=r}^{n}(\lambda a_k + \mu a_{k-1})q^k \\ &= \lambda\sum_{k=r}^{n} a_k q^k + \mu\sum_{k=r}^{n} a_{k-1}q^k \\ &= (\lambda+\mu q)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \lambda a_n q^n + \mu a_{r-1}q^r, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_r^2(n;q) - \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) \\ =\ &\mathcal{A}_r(n;q)[(\lambda+\mu q)\mathcal{A}_r(n-1;q) + \lambda a_n q^n + \mu a_{r-1}q^r] \\ &-\mathcal{A}_r(n-1;q)[(\lambda+\mu q)\mathcal{A}_r(n;q) + \lambda(\lambda a_{n+1} + \mu a_n)q^{n+1} + \mu(\lambda a_{r-1} + \mu a_{r-2})q^r] \\ =\ &(\lambda a_n q^n + \mu a_{r-1}q^r)\mathcal{A}_r(n;q) \\ &-[\lambda(\lambda a_{n+1} + \mu a_n)q^{n+1} + \mu(\lambda a_{r-1} + \mu a_{r-2})q^r]\mathcal{A}_r(n-1;q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \sum_{k=r}^{n} (\lambda a_k + \mu a_{k-1}) a_n q^{n+k} + \mu \sum_{k=r}^{n} a_{r-1} (\lambda a_k + \mu a_{k-1}) q^{k+r} \\
&\quad -\lambda \sum_{k=r}^{n-1} a_k (\lambda a_{n+1} + \mu a_n) q^{n+k+1} - \mu \sum_{k=r}^{n-1} (\lambda a_{r-1} + \mu a_{r-2}) a_k q^{k+r} \\
&= \lambda^2 \sum_{k=r+1}^{n} (a_k a_n - a_{k-1} a_{n+1}) q^{n+k} + \mu^2 \sum_{k=r}^{n} (a_{r-1} a_{k-1} - a_{r-2} a_k) q^{k+r} \\
&\quad + (\lambda^2 a_r + 2\lambda\mu a_{r-1} + \mu^2 a_{r-2}) a_n q^{n+r}, \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

qui a des coefficients positifs par la log-concavité de $\{a_k\}$. Alors, le triangle $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ est LC-positif.

D'autre part, soit $u_k^\star = u_{-k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $\{u_k^\star\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave et $a^\star(n,k) = L^n[\lambda,\mu](u_k^\star)$. Donc le triangle $\{a^\star(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ est aussi LC-positif, et le triangle $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ est donc double LC-positif. $\square$

Remarque 25 *Soit le triangle $\{a(n,k)\}$ donné par le Théorème 24. Alors par (1.10) et (1.12), l'inégalité*

$$A_r(n,t) \geq (a_{r-1}a_{t-r-1} - a_{r-2}a_{t-r})\mu^2$$

est vraie pour $t \leq n+r$ (l'égalité reste vraie pour $t < n+r$). On va utiliser cette inégalité dans la preuve de Théorème 36.

Remarque 26 *Pour des spécialisations particulières, on retrouve la plupart des résultats donnés dans l'Exemple 7.*

Ainsi, en prenant $\lambda = \mu = 1/2$ et $u_k \equiv 1$ dans le Théorème 24, on aboutit au résultat suivant

Corollaire 27 *[44] Si la suite $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont log-concave, alors la convolution ordinaire*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_n y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

est aussi log-concave.

Commentaire 28 *Récemment, Belbachir et Szalay [7] ont utilisé la convolution ordinaire pour prouver la log-concavité des suites de coefficients binomiaux parcourant les transversale du triangle de Pascal : $\binom{u+\alpha k}{v+\beta k}_{k\geq 0}$ pour $u, v \in \mathbb{N}$, $u \geq v$. Via ([7], Lemme 3)*

$$\overline{x}_k = \binom{u+\alpha k}{v+\beta k} = \sum_{i=0} \binom{k}{i} \binom{u+(\alpha-1)k}{v+\beta k - i}.$$

Pour $x_i = \binom{k}{i}$, $y_i = \binom{u+(\alpha-1)k}{v+\beta k-i}$ *les suites obtenues forment deux lignes du triangle de Pascal qui sont trivialement log-concaves. Ainsi* $\{\overline{x}_k\}$ *est log-concave par la convolution ordinaire.*

On retrouve aussi le 2. de l'Exemple 7 via le Théorème 24 pour $\lambda = \mu = 1$ et $u_k = \binom{a}{b+k}$.

Remarque 29 *[44] Les Points 2., 3. et 4. de l'Exemple 7 peuvent êtres obtenus directement par le Théorème 19 en montrant la double LC-positivité des triangles associés. Actuellement, la double LC-positivité du triangle constant et du triangle de Pascal est montrée dans les Exemples 12 et 13 respectivement. Wang et Yeh [42] ont montré la LC-positivité du triangle* $a(n,k) = \binom{a+n}{b+k}$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *en montrant que les conditions du Corollaire 20 sont satisfaites. Ce résultat peut être établi comme dans l'Exemple 13. Notons que*

$$a^\star(n,k) = \binom{a+n}{b+(n-k)} = \binom{a+n}{(a-b)+k}.$$

Alors $a^\star(n,k)$ *est aussi LC-positif. Donc le triangle* $\{a(n,k)\}$ *est double LC-positif.*

Le corollaire suivant étend par récurrence la convolution exponentielle au cas de plusieurs suites.

Corollaire 30 *[44] Si* l *suites* $\{x_k^1\}, \{x_k^2\}, ..., \{x_k^l\}$ *sont toutes log-concaves, alors la suite :*

$$x_n := \sum \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_l} x_{k_1}^1 x_{k_2}^2 ... x_{k_l}^l \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

où la somme est étendue à tous les entiers positifs $k_1, k_2, ..., k_l$ *tel que* $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$*, est aussi log-concave.*

Le Théorème suivant peut être considéré comme un cas dual du Théorème 24 :

Théorème 31 *[44] Soient* α, β *deux nombres strictement positifs et* $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ *un triangle de nombres positifs. Supposons que chaque ligne de* $\{a(n,k)\}$ *est log-concave et satisfait la relation récurrente suivante :*

$$a(n,k) = \alpha a(n+1,k) + \beta a(n+1,k+1), \qquad k = 0, 1, 2..., n \tag{1.13}$$

Alors le triangle $\{a(n,k)\}$ *est double LC-positif et donc double-PLC.*

Preuve. Notons $a(n+1,k) = v_k$ pour $0 \leq k \leq n+1$. Alors la suite $\{v_k\}$ est log-concave et $\mathcal{A}_r(n+1;q) = \sum_{k=r}^{n+1} v_k q^k$. Par la relation récurrente (1.13), on aura

$$\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=r}^{n} (\alpha v_k + \beta v_{k+1}) q^k = (\alpha + \beta q^{-1})\mathcal{A}_r(n+1;q) - \alpha v_{n+1} q^{n+1} - \beta v_r q^{r-1}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_r^2(n;q) &- \mathcal{A}_r(n-1;q)\mathcal{A}_r(n+1;q) \\
&= \mathcal{A}_r(n;q)[(\alpha+\beta q^{-1})\mathcal{A}_r(n+1;q) - \alpha v_{n+1}q^{n+1} - \beta v_r q^{r-1}] \\
&\quad -\mathcal{A}_r(n+1;q)[(\alpha+\beta q^{-1})\mathcal{A}_r(n;q) - \alpha(\alpha v_n + \beta v_{n+1})q^n \\
&\quad -\beta(\alpha v_r + \beta v_{r+1})q^{r-1}] \\
&= [\alpha(\alpha v_n + \beta v_{n+1})q^n + \beta(\alpha v_r + \beta v_{r+1})q^{r-1}]\mathcal{A}_r(n+1;q) \\
&\quad -(\alpha v_{n+1}q^{n+1} + \beta v_r q^{r-1})\mathcal{A}_r(n;q) \\
&= \alpha^2 \sum_{k=r+1}^{n} (v_k v_n - v_{k-1}v_{n+1})q^{n+k} + \beta^2 \sum_{k=r}^{n} (v_{r+1}v_{k+1} - v_r v_{k+2})q^{r+k} \\
&\quad +v_r(\alpha^2 v_n + 2\alpha\beta v_{n+1} + \beta^2 v_{n+2})q^{n+r}
\end{aligned}$$

qui a des coefficients positifs par la log-concavité de $\{v_k\}$. Alors le triangle $\{a(n,k)\}$ est LC-positif.

Le triangle inverse $\{a^\star(n,k)\}$ possède la même propriété que $\{a(n,k)\}$. Alors $\{a^\star(n,k)\}$ est aussi LC-positif. Donc le triangle $\{a(n,k)\}$ est double LC-positif. $\square$

En prenant dans le Théorème 31 $\alpha = \beta = 1/2$ et $a(n,k) \equiv 1$ pour $0 \leq k \leq n$ on obtient le Corollaire 27 et en prenant $\alpha = \beta = 1$ et $a(n,k) = \binom{a-n}{b-k}$ pour $0 \leq k \leq n$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 32 *[44] Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \geq b$. Si les suites $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont log-concaves alors la suite :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{a-n}{b-k} x_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

est aussi log-concave.

Remarque 33 *De même si on considère une combinaison linéaire de triangles*

$$a(n,k) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j a(n+1, k+j), \qquad p > 1.$$

on est confrenté à la même situation que la Remarque 23.

1.4 Une tentative de généralisation du Théorème de Liggett

Dans ce paragraphe, on présente une tentative de généralisation du Théorème de Liggett par Wang et Yeh. Cependant, le passage qui permet de montrer l'inégalité donnée par la relation

(1.14) en utilisant la relation (1.17) ne nous a pas convaincu. Donc la véracité du résultat principal de ce paragraphe reste tributaire de la compréhension et de la véracité du dit passage.

Définition 34 *On dit qu'une suite de nombres positifs* $\{x_k\}_k$ *est ultra-log-concave d'ordre* m $[ULC\,(m)]$ *si* $x_k = 0$ *pour* $k > m$ *et la suite* $\left\{x_k/\binom{m}{k}\right\}_{k=0}^{m}$ *est log-concave, et elle est ultra-log-concave d'ordre infini* $[ULC\,(\infty)]$ *si la suite* $\{k!x_k\}$ *est log-concave.*

Le concept d'ultra log-concavité est défini aussi dans l'article de Pemantle [29]. L'approche de ce dernier avec Liggett conduit à une preuve simple de la convolution ordinaire des suites $ULC(m)$ et $ULC(l)$ en une suite $ULC(m+l)$ où m et l peuvent êtres infinies [29]. Cette preuve permet d'établir que

1. Le triangle de Pascal $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ est double-PLC ;
2. Le triangle $\left\{\binom{n}{k}\binom{a-n}{b-k}\right\}$ est double-PLC.

Liggett a vérifié les deux hypothèses précédentes en établissant le résultat suivant :

Théorème 35 ***Liggett*** *[25], Donnons trois suites log-concaves* $\{v_k = \binom{a-n+1}{b-k}\}$, $\{x_k\}$ *et* $\{y_k\}$, *et considérons*

$$z_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (v_k + 2v_{k+1} + v_{k+2}) x_k y_{n-1-k}$$

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (v_k + v_{k+1}) x_k y_{n-k}$$

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} v_k x_k y_{n+1-k}$$

Alors $z_{n-1}z_{n+1} \leq z_n^2 \Longrightarrow \{z_n\}$ *est log-concave.*

La preuve de Liggett pour ce théorème, utilise essentiellement la double LC-positivité du triangle de Pascal, elle est loin d'être simple. Le résultat plus général de Wang et Yeh [44] suivant, permet de la retrouver :

Théorème 36 *[44] Donnons nous quatre nombres strictement positifs* α, β, λ, μ *et quatre suites log-concaves* $\{u_k\}$,$\{v_k\}$ *qui représente la* $(n+1)$*-ème ligne d'un triangle définie par la relation (1.13),*$\{x_k\}$ *et* $\{y_k\}$, *soit* $a(n,k) = L^n[\lambda,\mu](u_k)$ *et*

$$z_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1,k)(\alpha^2 v_k + 2\alpha\beta v_{k+1} + \beta^2 v_{k+2}) x_k y_{n-1-k},$$

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)(\alpha v_k + \beta v_{k+1}) x_k y_{n-k},$$
$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a(n+1,k) v_k x_k y_{n+1-k}$$

Alors $z_{n-1}z_{n+1} \leq z_n^2 \Longrightarrow \{z_n\}$ *est log-concave.*

Preuve. L'inégalité $z_{n-1}z_{n+1} \leq z_n^2$ peut être considérée comme le signe d'une forme quadratique à $n+2$ variables $v_0, v_1, ..., v_{n+1}$. Soit

$$z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1} = \sum_{t=0}^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} e_k(n,t) v_k v_{t-k}.$$

Alors, on a besoin de montrer que $\sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} e_k(n,t) \geq 0$ pour $2r \leq t \leq 2(n+1)$. Brièvement, on fait ça seulement pour le cas t impair (le cas pair étant plus simple à traiter), soit $t = 2s+1$.

Posons $d(n,k) = a(n,k)x_k y_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Pour plus de commodité, soit $x_k = y_k = 0$ pour $k < 0$ et $d(n,k) = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$. Le triangle $\{a(n,k)\}$ est double LC-positif par le Théorème 24, et le triangle $\{d(n,k)\}$ est aussi LC-positif par la Proposition 18. On réécrit :

$$\begin{aligned}
z_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha^2 d(n-1,k) + 2\alpha\beta d(n-1,k-1) + \beta^2 d(n-1,k-2)) v_k, \\
z_n &= \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha d(n,k) + \beta d(n,k-1)) v_k, \\
z_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} d(n+1,k) v_k.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
e_k(n,t) &= 2[\alpha d(n,k) + \beta d(n,k-1)][\alpha d(n,t-k) + \beta d(n,t-k-1)] \\
&\quad -[\alpha^2 d(n-1,k) + 2\alpha\beta d(n-1,k-1) + \beta^2 d(n-1,k-2)] d(n+1,t-k) \\
&\quad -d(n+1,k)[\alpha^2 d(n-1,t-k) + 2\alpha\beta d(n-1,t-k-1) + \beta^2 d(n-1,t-k-2)] \\
&= \alpha^2 P_k + 2\alpha\beta Q_k + \beta^2 R_k,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
P_k &= 2d(n,k)d(n,t-k) - d(n-1,k)d(n+1,t-k) - d(n+1,k)d(n-1,t-k), \\
Q_k &= d(n,k)d(n,t-k-1) + d(n,k-1)d(n,t-k) - d(n-1,k-1)d(n+1,t-k) \\
&\quad -d(n+1,k)d(n-1,t-k-1), \\
R_k &= 2d(n,k-1)d(n,t-k-1) - d(n-1,k-2)d(n+1,t-k) \\
&\quad -d(n+1,k)d(n-1,t-k-2).
\end{aligned}$$

Donc d'après le Lemme 16 il suffit de montrer l'inégalité

$$\alpha^2 \sum_{k=r}^{s} P_k + 2\alpha\beta \sum_{k=r}^{s} Q_k + \beta^2 \sum_{k=r}^{s} R_k \geq 0. \tag{1.14}$$

Notons que $P_k = d_k(n,t)$ et $R_k = d^\star_{n-t+k+1}(n, 2n-t+2)$. Par conséquent, les deux quantités suivantes

$$\sum_{k=r}^{s} P_k = D_r(n,t), \tag{1.15}$$

et

$$\sum_{k=r}^{s} R_k = D^\star_{n-t+r+1}(n, 2n-t+2), \tag{1.16}$$

sont positives par la double LC-positivité du triangle $\{d(n,k)\}$. On a en outre

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{s} Q_k &= \sum_{k=r}^{s} [d(n,k)d(n,t-k-1) + d(n,k-1)d(n,t-k) - d(n-1,k-1)\; d(n+1,t-k) \\
&\quad -d(n+1,k)\; d(n-1,t-k-1)] \\
&= \sum_{k=r}^{s} [d(n,k)d(n,t-k-1) - d(n+1,k)d(n-1,t-k-1)] \\
&\quad + \sum_{k=r-1}^{s-1} [d(n,k)d(n,t-k-1) - d(n-1,k)d(n+1,t-k-1)] \\
&= [d^2(n,s) - d(n-1,s)d(n+1,s)] + \sum_{k=r-1}^{s-1} [2d(n,k)d(n,t-1-k) \\
&\quad -d(n-1,k)d(n+1,t-1-k) - d(n+1,k)d(n-1,t-1-k)] \\
&\quad +[d(n+1,r-1)d(n-1,t-r) - d(n,r-1)d(n,t-r)] \\
&= D_{r-1}(n,t-1) + [d(n+1,r-1)d(n-1,t-r) - d(n,r-1)d(n,t-r)].
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Si $r=0$ ou $t > n+r$. Alors $\sum_{k=r}^{s} Q_k = D_{r-1}(n,t-1) \geq 0$. Donc l'inégalité (1.14) est trivial. Reste à traiter le cas $r \geq 1$ et $t \leq n+r$.

Si on peut montrer qu'il existe un nombre strictement positif $E = E(n,t,r)$ tel que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{s} P_k &\geq \mu^2 E x_r x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r}, \\
\sum_{k=r}^{s} Q_k &\geq -\lambda\mu E x_{r-1} x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r+1}, \\
\sum_{k=r}^{s} R_k &\geq \lambda^2 E x_{r+1} x_{t-r-1} y_{n-t+r+1} y_{n-r-1},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

alors l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique et la log-concavité de $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ nous donne

$$\alpha^2 \sum_{k=r}^{s} P_k + \beta^2 \sum_{k=r}^{s} R_k \geq -2\alpha\beta \sum_{k=r}^{s} Q_k.$$

Ainsi, pour prouver (1.14), il suffit de prouver (1.18).

On utilise la Proposition 18 pour estimer des bornes supérieures pour $\sum_{k=r}^{s} P_k$, $\sum_{k=r}^{s} Q_k$, et $\sum_{k=r}^{s} R_k$. Via les relations (1.15) et 3. de la Proposition 18, on déduit que

$$\sum_{k=r}^{s} P_k \geq A_r(n,t) x_r x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r}. \tag{1.19}$$

De même, notons $d^\star(n,k) = a^\star(n,k) y_k x_{n-k}$, il s'ensuit que via les relations (1.16) et 3. de la Proposition 18, on a

$$\sum_{k=r}^{s} R_k \geq A^\star_{n-t+r+1}(n, 2n-t+2) x_{r+1} x_{t-r-1} y_{n-t+r+1} y_{n-r-1}. \tag{1.20}$$

Pour avoir une borne supérieure analogue pour $\sum_{k=r}^{s} Q_k$ de (1.17), soit $c(n,k) = a(n,k) y_{n-k}$. Alors $d(n,k) = c(n,k) x_k$ et ainsi

$$D_{r-1}(n, t-1) \geq C_{r-1}(n, t-1) x_{r-1} x_{t-r},$$

via la relation 1. de la Proposition 18. Cependant,

$$\begin{aligned} C_{r-1}(n,t-1) \quad \geq \quad & A_{r-1}(n,t-1) y_{n-t+r} y_{n-r+1} \\ & + a(n+1,r-1) a(n-1,t-r)(y_{n-t+r} y_{n-r+1} - y_{n-t+r-1} y_{n-r+2}), \end{aligned}$$

par l'inégalité (1.11). Alors par (1.17) on aura

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{s} Q_k \quad \geq \quad & [A_{r-1}(n,t-1) y_{n-t+r}\, y_{n-r+1} \\ & + a(n+1,r-1)\, a(n-1,t-r)(y_{n-t+r} y_{n-r+1} - y_{n-t+r-1} y_{n-r+2})]\, x_{r-1} x_{t-r} \\ & + [a(n+1,r-1) x_{r-1} y_{n-r+2} a(n-1,t-r) x_{t-r}\, y_{n-t+r-1} \\ & - a(n,r-1)\, x_{r-1} y_{n-r+1} a(n,t-r) x_{t-r} y_{n-t+r}] \\ = \quad & Q x_{r-1} x_{t-r} y_{n-t+r} y_{n-r+1}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

où

$$Q = A_{r-1}(n,t-1) + a(n+1,r-1) a(n-1,t-r) - a(n,r-1) a(n,t-r). \tag{1.22}$$

Il reste à montrer que les trois coefficients $A_r(n,t)$, $A^\star_{n-t+r+1}(n, 2n-t+2)$ et Q dans l'inégalité (1.19), (1.20) et (1.21) ont une borne supérieure satisfaisant (1.18). On y parvient via la Remarque 25, en effet :

Notons $a_k = L^{n-1}[\lambda, \mu](u_k)$, la Remarque 25 donne

$$A_r(n,t) \geq (a_{r-1}a_{t-r-1} - a_{r-2}a_{t-r})\mu^2,$$

et entraine aussi

$$\begin{aligned} Q &\geq (a_{r-2}a_{t-r-1} - a_{r-3}a_{t-r})\mu^2 + (\lambda^2 a_{r-1} + 2\lambda\mu a_{r-2} + \mu^2 a_{r-3})a_{t-r} \\ &\quad -(\lambda a_{r-1} + \mu a_{r-2})(\lambda a_{t-r} + \mu a_{t-r-1}) \\ &= -(a_{r-1}a_{t-r-1} - a_{r-2}a_{t-r})\lambda\mu, \end{aligned}$$

par (1.22). Notons aussi que $a^\star(n,k) = L^n[\lambda, \mu](u_{-k})$. Encore via la Remarque 25

$$\begin{aligned} A^\star_{n-t+r+1}(n, 2n-t+2) &\geq [a^\star(n-1, n-t+r)a^\star(n-1, n-r) \\ &\quad -a^\star(n-1, n-t+r-1)a^\star(n-1, n-r+1)]\lambda^2 \\ &= (a_{r-1}a_{t-r-1} - a_{r-2}a_{t-r})\lambda^2. \end{aligned}$$

Finalement, rappelons que la suite $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave, alors pour $r \leq \lfloor t/2 \rfloor$,

$$E = a_{r-1}a_{t-r-1} - a_{r-2}a_{t-r} \geq 0,$$

ainsi la preuve est faite. $\square$

Chapitre 2

Unimodalité

En ce qui concerne le sens de variation d'une suite numérique, l'unimodalité est la propriété la plus simple qui généralise la monotonie. Elle est le thème principal de ce chapitre.

Essentiellement, ce chapitre est inspiré des références [3] et [43].

2.1 Définitions et préliminaires sur les suites unimodales

Définition 37 *[6] Soit $\{a_k\}_{0\leq k\leq m}$ une suite de nombres réels positifs avec $m \geq 2$. On dit qu'elle est* ***unimodale*** *si il existe un entier $l \in \{0,1,...,m\}$ tel que la suite $\{a_k\}$ est croissante pour $k \in \{0,...,l\}$ et elle est décroissante pour $k \in \{l,...,m\}$. Un tel entier l est appelé mode de la suite $\{a_k\}_{0\leq k\leq m}$.*

Théorème 38 *Toute suite de nombres positifs strictement log-concave est unimodale.*

Une suite $\{a_k\}_{0\leq k\leq m}$ est strictement log-concave (SLC) si

$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}, \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq m-1.$$

Donc, si la suite $\{a_k\}_{0\leq k\leq m}$ est SLC, alors elle est unimodale et son maximum est : soit une seule valeur (dans ce cas, on dit qu'elle possède un pic), soit deux valeurs consécutives (dans ce dernier cas, on dit qu'elle possède un plateau à deux points) (voir [6]).

Il y a différentes techniques pour établir l'unimodalité. Voici quelques références concernant l'unimodalité selon l'ordre chronologiques de leur publication : [33], [18], [4], [12].

Quelques exemples de suites unimodales :

1. La suite des coefficients du binômes de Newton $\{\binom{n}{k}\}_k$ (est trivialement unimodale) ; La suite des coefficients du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(1+z)^k$;
2. Les nombres de Stirling (signless) de première espèce $\{s(n,k)\}_k$.

   * La suite constituée des nombres de Stirling de première espèce a comme mode l'entier le plus proche du nombre harmonique $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Ce résultat surprenant a été démontré par J. H. Hammersley [21]. De plus P. Erdös [20] a montré que H_n demeure un pic pour $n \geq 3$;
3. Les nombres de Stirling de second espèce $\{S(n,k)\}_k$;
4. Les suites $\{a(n,k)\}_k$ de partitions de n en k parts, et $\{B(n,k)\}_k$ de partitions de n en k parts distinctes, pour n suffisamment grand ;
5. La suite de nombres $\{A(n,k,m)\}_m$ de partitions de n en k parts dont la plus grande est au plus égale à m.

Le théorème suivant (voir [22], [9], et [10]) permet d'étudier l'unimodalité d'une large famille de suites.

Théorème 39 *Soit $\{a_k\}_{0\leq k\leq n}$ une suite des nombres réels positifs telle que le polynôme suivant*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

n'admet que des racines réelles négatives. Alors la suite est unimodale avec un pic ou un plateau avec deux éléments. De plus chaque mode l de la suite $\{a_k\}_{0\leq k\leq n}$ satisfait :

$$\lfloor \mu_n \rfloor \leq l \leq \lceil \mu_n \rceil, \qquad \textit{avec } \mu_n = \frac{P'(1)}{P(1)}.$$

2.2 Unimodalité des polynômes

L'unimodalité des polynômes apparaît souvent en combinatoire, en géométrie et en algèbre. Des surveys sur les différentes techniques utilisées pour prouver que des familles spécifiques de polynômes sont unimodales ont été écrits, on pourra consulter [13, 33].

Définition 40 *On dit que le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ est unimodal si la suite des coefficients $a_0, a_1, ..., a_m$ est unimodale, et le mode de cette suite c'est le mode du polynôme.*

On dit que le polynôme $P(x)$ est log-concave si la suite des coefficients $a_0, a_1, ..., a_m$ est log-concave.

Nous allons commencer par présenter le critère de Brenti [13] et deux théorèmes principaux, le premier dû à Boros [11] et le deuxième à Alvarez et Amadis [2].

Proposition 41 (Critère de Brenti [13]) *Si $P(x)$ est un polynôme log-concave avec des coefficients strictement positifs commençant éventuellement par un nombre fini de coefficients nuls, alors $P(x+1)$ est log-concave.*

Théorème 42 *[11] Si $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ satisfait $a_k \geq 0$ et $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_m$, Alors $P(x+1)$ est unimodal.*

Corollaire 43 *[2] Soit $P(x)$ un polynôme de degrés m; avec des ceofficients positifs. Si $j > m+1$, alors le polynôme $P(x+j)$ a des coefficients décroissants.*

Preuve. Soit $j > m+1$, alors le monôme x^m est tel que $(x+j)^m$ a des coefficients décroissants. En effet, l'expansion

$$(x+j)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} j^{m-k} x^k,$$

et l'inégalité $j > m+1$ montre que

$$\binom{m}{k} j^{m-k} < \binom{m}{k-1} j^{m-k+1}.$$

Ensuite, on l'applique à chacun des monômes de P. □

Alvarez et Amadis dans l'article [2] ont conjecturé que si un polynôme $P(x)$ est unimodal, alors $P(x+1)$ est aussi unimodal. Mais ça n'est pas en général vrai, l'exemple ci-dessous illustre ce point.

Un contre exemple. Soit le polynôme log-concave $P(x)$ donné par :

$$P(x) = 144 + 14x + 12x^2 + 11x^3 + 10x^4 + 6x^5$$

alors

$$P(x+1) = 197 + 141x + 165x^2 + 111x^3 + 40x^4 + 6x^5 \text{ n'est pas log-concave.}$$

On introduit le lemme suivant afin de généraliser le Théorème 42.

Lemme 44 *[2] Soit* $\widetilde{m} = \left\lfloor \frac{m}{n+1} \right\rfloor$*, alors* $(n+1)\widetilde{m} \leq m \leq (n+1)\widetilde{m} + n$.

Preuve. On a

$$\frac{m}{n+1} - 1 < \widetilde{m} \leq \frac{m}{n+1}$$

il s'ensuit directement que $m \geq \widetilde{m}(n+1)$ et $m/(n+1) < \widetilde{m}+1$. Maintenant $\frac{m}{n+1} < \widetilde{m}+1$ implique que $m < (\widetilde{m}+1)(n+1) = (n+1)\widetilde{m} + (n+1)$. Le fait que $n \in \mathbb{N}$ donne $m \leq (n+1)\widetilde{m} + n$. $\square$

Théorème 45 *[2] Soit* $P(x)$ *un polynôme de degrés* m *satisfaisant* $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_m$*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le polynôme* $P(x+n)$ *est unimodal ayant pour mode* $\widetilde{m} = \left\lfloor \frac{m}{n+1} \right\rfloor$.

Preuve. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, ainsi

$$P(x+n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i n^{k-i} = \sum_{l=0}^{m} d_l x^l$$

avec

$$d_l = \sum_{k=l}^{m} a_k \binom{k}{l} n^{k-l}. \tag{2.1}$$

Soit $0 \leq u \leq m-1$. Alors

$$\begin{aligned}
(u+1)(d_{u+1} - d_u) &= (u+1) \sum_{k=u+1}^{m} a_k \binom{k}{u+1} n^{k-u-1} - (u+1) \sum_{k=u}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u} \\
&= \sum_{k=u+1}^{m} a_k (u+1) \binom{k}{u+1} n^{k-u-1} + \sum_{k=u}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1} n(-u-1) \\
&= \sum_{k=u+1}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-u) + \sum_{k=u}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(-nu-n) \\
&= \sum_{k=u}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-(n+1)u-n). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

On montre que le polynôme $P(x+n)$ est unimodal de mode $\widetilde{m}$, montrons que $d_{u+1} - d_u \leq 0$ pour $\widetilde{m} \leq u \leq m-1$ et $d_{u+1} - d_u \geq 0$ pour $0 \leq u \leq \widetilde{m} - 1$.

Supposons $\widetilde{m} \leq u \leq m-1$. On a $k - (n+1)u - n \leq m - (n+1)u - n$, , or $\widetilde{m} \leq u$ ainsi $m - (n+1)u - n \leq m - (n+1)\widetilde{m} - n$. Cette dernière quantité est négative par le Lemme 44

Supposons maintenant que $0 \leq u \leq \widetilde{m}-1$, on a

$$\begin{aligned}
(u+1)(d_{u+1}-d_u) &= \sum_{k=u}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-(n+1)u-n) \\
&= \sum_{k=(n+1)u+n}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-(n+1)u-n) \\
&\quad + \sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-(n+1)u-n) \\
&= \sum_{k=(n+1)u+n+1}^{m} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(k-(n+1)u-n) \\
&\quad - \sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(-k+(n+1)u+n) \\
&: = T_2 - T_1.
\end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned}
T_1 &\leq a_{(n+1)u+n+1} \sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} \binom{k}{u} n^{k-u-1}(-k+(n+1)u+n) \qquad (2.3) \\
&\leq a_{(n+1)u+n+1} \sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} \binom{k}{u} n^{(n+1)u+n-1-u-1}(-k+(n+1)u+n) \\
&= a_{(n+1)u+n+1} n^{(u+1)n-2} \sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} \binom{k}{u} (-k+(n+1)u+n) \\
&= a_{(n+1)u+n+1} n^{(u+1)n} \frac{((n+1)u+n+1)!}{n^2(u+2)!(nu+n-1)!} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} \binom{k}{u} (-k+(n+1)u+n) = \frac{((n+1)u+n+1)!}{(u+2)!(nu+n-1)!}.$$

Maintenant, on réécrit la fraction comme suit

$$\frac{((n+1)u+n+1)!}{n^2(u+2)!(nu+n-1)!} = \frac{((n+1)u+n+1)!}{n^2(u+2)(u+1)u!(nu+n-1)!} = \frac{((n+1)u+n+1)!}{(nu+2n)(nu+n)u!(nu+n-1)!}.$$

On observe que $2n \geq n+1$ car $n \geq 1$. Donc $nu+2n \geq nu+n+1$ et donc $\frac{1}{nu+2n} \leq \frac{1}{nu+n+1}$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{((n+1)u+n+1)!}{(nu+2n)(nu+n)u!(nu+n-1)!} &\leq \frac{((n+1)u+n+1)!}{(nu+n+1)(nu+n)u!(nu+n-1)!} \\
&\leq \frac{((n+1)u+n+1)!}{(nu+n+1)u!} = \binom{(n+1)u+n+1}{u}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=u}^{(n+1)u+n-1} a_k \binom{k}{u} n^{k-u-1}(-k+(n+1)u+n) \leq a_{(n+1)u+n+1} n^{(u+1)n} \binom{(n+1)u+n+1}{u}.$$

Finalement, il suffit de constater que la borne supérieure de T_1 est le premier terme dans la somme définie par T_2. □

Exemple 46 *Soit* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} x^m$, *alors on montre l'unimodalité de l'expansion binomiale* $(x+n)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} n^k$. *En particulier, si* $n \geq m+1$, *alors le mode* $\widetilde{m} = \left\lfloor \frac{m}{n+1} \right\rfloor = 0$. *Cela confirme le Théorème 45. Il n'est pas clair pour la représentation de la série* $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} n^k$ *que* $P(x) = (x+n)^m$ *est unimodal parce que la suite des nombres* $\binom{m}{k}$ *est unimodale et* n^k *est croissante. Cependant, l'application du Théorème 45 établit facilement l'unimodalité de* $P(x+n)$.

2.2.1 Critère de préservation de la log-concavité pour les polynômes

Le but de cette section est la généralisation du critère de Brenti pour la log-concavité.

Commençons par quelques résultats préliminaires.

Théorème 47 *[2] Soit* $P(x)$ *un polynôme log-concave avec des coefficients strictement positifs commençant éventuellement par un nombre fini de coefficients nuls, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le polynôme* $P(x+n)$ *est log-concave.*

Preuve. Commençons par comprendre que si $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ est un polynôme de coefficients strictement positifs commençant éventuellement par un nombre fini de coefficients nuls, alors il en est de même pour le polynôme $P(x+n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $d_l = \sum_{k=l}^{m} a_k \binom{k}{l} n^{k-l}$ le coefficient de x^l dans $P(x+n)$. Les coefficients d_l sont trivialement positifs. Supposons $h < i < j$ et $d_h, d_j \neq 0$, montrons alors que $d_i = \sum_{k=i}^{m} a_k \binom{k}{i} n^{k-i} \neq 0$, et dans ce cas, on dit que la suite des coefficients d_l n'a pas des zéros internes. Observons que pour $h < i$ et $\binom{k}{h} \neq 0$ on a $\binom{k}{i} \neq 0$. Pour $n \geq 1$, reste à montrer que $\sum_{k=i}^{m} a_k \neq 0$. Or, pour $d_j = \sum_{k=j}^{m} a_k \binom{k}{j} n^{k-j} \neq 0,\ (i < j)$, il existe un indice r tel que $(i < r)$ et $a_r \neq 0$, ainsi $\sum_{k=i}^{m} a_k = a_i + \cdots + a_r + \cdots + a_m \neq 0$.On conclut que $P(x+n)$ a des coefficients positifs et n'a pas des zéros internes.

Maintenant montrons la log-concavité par induction. Le cas $n = 1$ étant assuré par le critère de Brenti. Supposons que $P(x+n)$ est log-concave. $P(x+n)$ a des coefficients positifs et n'a pas des zéros internes. Ainsi

$$P(x+n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = Q(x)$$

donc

$$P(x+n+1) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_m(x+1)^m = Q(x+1)$$

comme $P(x+n) = Q(x)$ est log-concave avec des coefficients positifs et n'a pas des zéros internes, alors il s'ensuit que $Q(x+1) = P(x+n+1)$ est log-concave. $\square$

2.2.2 Un critère de log-concavité par l'unimodalité

On rappelle que tout polynôme log-concave est unimodal. L'inverse n'est en général pas vrai : Le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ est unimodal mais $1 \times 5 \not< 2^2$, alors qu'il n'est pas log-concave. Ce qui nous amène à introduire une condition supplémentaire sur les coefficients du polynôme unimodal pour garantir la log-concavité.

Théorème 48 *[2] Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ un polynôme unimodal et concave avec le mode n, alors $P(x)$ est log-concave.*

Preuve. Soit $j < n$, alors $c_j \geq c_{j-1}$. Donc $c_j - c_{j-1} \geq c_{j+1} - c_j$ et $c_j \geq c_{j-1}$ implique que $c_j c_j - c_{j-1} c_j \geq c_{j+1} c_{j-1} - c_j c_{j-1}$ et alors la condition de la log-concavité est vraie pour j, i.e $c_j c_j \geq c_{j+1} c_{j-1}$. Clairement, cette condition est vraie pour $j = n$. Maintenant, soit $j > n$. Alors $c_j \geq c_{j+1}$. De plus

$$c_j - c_{j-1} \geq c_{j+1} - c_j \Leftrightarrow c_j - c_{j+1} \geq c_{j-1} - c_j$$

Donc $c_j - c_{j+1} \geq c_{j-1} - c_j$ et $c_j \geq c_{j+1}$ implique

$$c_j c_j - c_{j+1} c_j \geq c_{j-1} c_{j+1} - c_j c_{j+1}$$

et donc

$$c_j c_j \geq c_{j-1} c_{j+1}$$

Par conséquence, $P(x)$ est log-concave. $\square$

2.2.3 Préservation de l'unimodalité des polynômes par translation

Dans cette partie, on va explorer les résultats de Wang et Yeh concernant le nombre et la localisation des modes du polynôme $P(x+z)$ avec z un réel positif.

Notons $M_\star(P, z)$ et $M^\star(P, z)$ le plus petit et le plus grand mode de $P(x+z)$ respectivement, et par $\overline{m}(z) = \lceil \frac{m-z}{z+1} \rceil$ (ou $\overline{m}$) et $\underline{m}(z) = \lfloor \frac{m-z}{z} \rfloor$ (ou $\underline{m}$) où on note $\lceil x \rceil$ et $\lfloor x \rfloor$ le plus petit entier $\geq x$ et le plus grand entier $\leq x$ respectivement. Il est à noter que $\overline{m}(z)$ et $\underline{m}(z)$ coïncident si est seulement si z un entier positif. D'une manière générale, le nombre et la localisation des modes de $P(x+z)$ ne sont pas reliés seulement avec m et z, mais aussi avec les coefficients du polynôme $P(x)$. Le travail est assez différent quand $z \geq 1$. Dans ce cas, Wang et Yeh montrent que $P(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}(z)$ et $\overline{m}(z)+1$ lorsque $P(x)=ax^m$, et $\overline{m}(z)-1$ et $\overline{m}(z)$ sinon. On donnera aussi des conditions suffisantes sur m et z pour que $P(x+z)$ possède un unique mode $\overline{m}(z)$, en incluant le cas où z est un entier positif supérieur à 1.

Soit m un entier positif, et z un nombre réel positif. Notons par $\mathbf{P}_{\uparrow}^{m}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degrés m, avec des coefficients positifs formant une suite croissante de nombres. Pour éviter le risque de confusion, on écrit simplement $\overline{m}$ au lieu de $\overline{m}(z)$, il s'ensuit immédiatement que

$$m - z \leq (z+1)\overline{m} < m+1, \tag{2.5}$$

qui sera utilisé dans la suite.

Le résultat suivant a été conjecturé par Alvarez et *al* [3] et démontré par Yeh et Wang.

Théorème 49 *[41] Soit $P(x)$ un polynôme de degrés m et avec des coefficients positifs. Supposons que $P(x)$ est croissant et que z est un nombre réel positif. Alors $P(x+z)$ est unimodal.*

Pour prouver ce théorème, on a besoin des deux lemmes suivants

Lemme 50 *[41] Supposons que le polynôme $P(x)$ est unimodal avec comme plus petit mode t et donnons un réel $z>0$. Alors $(x+z)P(x)$ est unimodal avec le plus petit mode t ou $t+1$.*

Preuve. Soit $P(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ où $c_0 \leq ... \leq c_{t-1} < c_t \geq c_{t+1} \geq ... \geq c_n$. Alors

$$(x+z)P(x) = c_0 z + (c_0+c_1 z)x + \cdots + (c_{t-1}+c_t z)x^t + (c_t + c_{t+1} z)x^{t+1} + \cdots + (c_{n-1}+c_n z)x^n + c_n x^{n+1}.$$

Trivialement, $c_0 \leq c_0 + c_1 z \leq ... \leq c_{t-2}+c_{t-1}z \leq c_{t-1}+c_t z$ et $c_t + c_{t+1}z \geq ... \geq c_{n-1}+c_n z \geq c_n$. Ainsi, le lemme est prouvé. $\square$

Lemme 51 *[41] Soit $P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ un polynôme de degrés m, avec des coefficients positifs et $z>0$. Supposons que $P(x+z)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Alors $b_{\overline{m}} \geq b_{\overline{m}+1} \geq ... \geq b_m$. En outre, si $z \geq (m-1)/2$, alors $P(x+z)$ est unimodal et a pour mode 0 ou 1. En particulier, si $z \geq m$ alors $P(x+z)$ est décroissant.*

Preuve. On a $b_j = P^{(j)}(z)/j! = \sum_{i=j}^{m} a_i z^{i-j}\binom{i}{j}$ ce qui donne,

$$(j+1)z^{j+1}(b_{j+1}-b_j) = \sum_{i=j}^{m} a_i z^i \binom{i}{j}[(i+1)-(z+1)(j+1)]. \tag{2.6}$$

Maintenant, soit $j \geq \overline{m}$, alors $(z+1)(j+1) \geq (z+1)(\overline{m}+1) \geq m+1$ par (2.5). Par conséquent, chaque terme dans la somme (2.6) est négatif, et donc $b_{j+1} \leq b_j$. Finalement, notons que $(m-1)/2 \leq z < m$ implique $\overline{m} \leq 1$, et que $z \geq m$ implique $\overline{m} = 0$. Le lemme est ainsi prouvé. $\square$

Preuve du Théorème. 49 Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ et $P(x+z) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. On a besoin de prouver que $b_0, b_1, ..., b_m$ est unimodale. On fait ça par récurrence sur m. Si $m = 1$, le résultat est évident. Par Lemme 51, il suffit de considérer le cas $m > 2z + 1$.

Soit $P(x) = a_0 + xf(x)$ où $f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1} x^i$. Alors
$P(x+z) = a_0 + (x+z)f(x+z)$.

Par l'hypothèse de récurrence, $f(x+z)$ est unimodale, donc $(x+z)f(x+z)$ est unimodale aussi par Lemme 50. Donc $b_1, b_2, ..., b_m$ est unimodale.

Soit $r = \lfloor z \rfloor$. Alors $r < z + 1 < m$. Par (2.6) on aura

$$\begin{aligned}
b_1 - b_0 &= \sum_{i=0}^{m} a_i z^{i-1}(i-z) \\
&= \sum_{i=r+1}^{m} a_i z^{i-1}(i-z) - \sum_{i=0}^{r} a_i z^{i-1}(z-i) \\
&\geq a_r \sum_{i=r+1}^{m} z^{i-1}(i-z) - a_r \sum_{i=0}^{r} z^{i-1}(z-i) \\
&= a_r[z + 2z^2 + \cdots + (m-1)z^{m-1} - z^m] \\
&\geq a_r[(m-1)z^{m-1} - z^m] \\
&= a_r[m - z - 1]z^{m-1} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Donc $b_0, b_2, ..., b_m$ reste unimodale, cela complète la preuve. $\square$

Corollaire 52 *[41] Soit $P(x) \in \mathbf{P}_{\uparrow}^{m}$ et $z > 0$. Supposons que $P(x) \neq x^m$. Alors $M^{\star}(P, z) \leq \overline{m}$.*

Preuve. Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ et $P(x+z) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Par (2.6) on aura

$$(\overline{m}+1)z^{\overline{m}+1}(b_{\overline{m}+1} - b_{\overline{m}}) = \sum_{i=\overline{m}}^{m} a_i z^i \binom{i}{\overline{m}} [(i+1) - (z+1)(\overline{m}+1)].$$

Par (2.5), $(i+1) - (z+1)(\overline{m}+1) \leq (m+1) - (z+1)(\overline{m}+1) \leq 0$ pour tout $i \leq m$. En particulier $m - (z+1)(\overline{m}+1) \leq -1 < 0$. D'autre part, $a_{m-1} \neq 0$ car $P(x) \neq x^m$. Donc $b_{\overline{m}+1} < b_{\overline{m}}$. Cela implique que la suite unimodale $\{b_j\}$ n'a pas un mode supérieur à $\overline{m}$, et donc la preuve est complète. $\square$

2.2.4 Les modes des polynômes fondamentaux $(x+z)^m$ et $\sum_{i=0}^m (x+z)^i$

On présente ici l'étude de Wang et Yeh concernant les modes de $P(x+z)$ pour les deux polynômes fondamentaux $P(x) = x^m$ et $P(x) = \sum_{i=0}^m x^i$ respectivement, lesquels vont jouer un rôle clef dans l'investigation des modes de $P(x+z)$ pour les polynômes génériques $P(x) \in \mathbf{P}_{\uparrow}^m$.

Proposition 53 *[41] Soit $z > 0$, si $\frac{m+1}{z+1} \in \mathbb{N}$, alors $(x+z)^m$ a deux modes $\overline{m}$ et $\overline{m}+1$; sinon $(x+z)^m$ a pour unique mode $\overline{m}$.*

Preuve. Soit $(x+z)^m = \sum_{i=0}^m c_i x^i$ où $c_i = \binom{m}{i} z^{m-i}$. Notons $f(x) = \frac{m-x+1}{zx}$. Alors $\frac{c_i}{c_{i-1}} = f(i)$. Clairement, $f(x)$ est strictement décroissante et $f(\frac{m+1}{z+1}) = 1$. Maintenant $i \leq \overline{m}$ implique $i < \frac{m+1}{z+1}$, et $i \geq \overline{m}+1$ implique $i \geq \frac{m+1}{z+1}$. Donc la preuve est complète. □

Soit $Q_m(x) = \sum_{i=0}^m x^i$ et $Q_m(x+z) = \sum_{j=0}^m z_j x^j$ où

$$z_j = \sum_{i=j}^m z^{i-j} \binom{i}{j}, \qquad j = 0, 1, ..., m. \tag{2.7}$$

Alors la suite $\{z_j\}$ est log-concave et n'a pas des zéros internes (voir Brenti [12]). En fait, nous avons le résultat plus fort suivant :

Proposition 54 *[41] La suite $\{z_j\}$ est strictement log-concave.*

Preuve. Notons que

$$z_{j-1} = \sum_{i=j-1}^m z^{i-j+1} \binom{i}{j-1} = \sum_{i=j-1}^m z^{i-j+1} \left[\binom{i+1}{j} - \binom{i}{j} \right] = (1-z) z_j + z^{m-j+1} \binom{m+1}{j}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
z_j^2 - z_{j-1} z_{j+1} &= z_j^2 - \left[(1-z) z_j + z^{m-j+1} \binom{m+1}{j} \right] z_{j+1} \\
&= [z_j - (1-z) z_{j+1}] z_j - z^{m-j+1} \binom{m+1}{j} z_{j+1} \\
&= z^{m-j} \binom{m+1}{j+1} z_j - z^{m-j+1} \binom{m+1}{j} z_{j+1} \\
&= \sum_{i=j}^m \left[\binom{m+1}{j+1} \binom{i}{j} - \binom{m+1}{j} \binom{i}{j+1} \right] z^{m+i-2j} \\
&= \sum_{i=j}^m \frac{m-i+1}{j+1} \binom{m+1}{j} \binom{i}{j} z^{m+i-2j} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit on va explorer la localisation des modes de la suite $\{z_j\}$. Tout d'abord, on considère le cas $z \geq 1$. Le fait est plutôt simple quand $z = 1$.

Proposition 55 *[41]*

1. *Si m est pair alors $Q_m(x+1)$ a deux modes $\frac{m}{2}-1$ et $\frac{m}{2}$; sinon $Q_m(x+1)$ a pour unique mode $\frac{m-1}{2}$.*
2. *Soit $z \geq 1$, alors $Q_m(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}-1$ et $\overline{m}$. En particulier, si $\overline{m+1} = \overline{m}+1$, alors $Q_m(x+z)$ a pour unique mode $\overline{m}$.*
3. *Si $z \geq 1$ et $\frac{m+1}{z+1} \in \mathbb{N}$, alors $Q_m(x+z)$ a pour unique mode $\overline{m}$.*
4. *Si $z > 1$ et $z\overline{m} \in \mathbb{N}$, alors $Q_m(x+z)$ a pour unique mode $\overline{m}$.*
5. *Soit $z > 1$, si $z \in \mathbb{N}$ ou $\frac{m}{z+1} \in \mathbb{N}$, alors $Q_m(x+z)$ a pour unique mode $\overline{m}$.*

Preuve.

1. *Comme $Q_m(x) = \frac{1}{x-1}(x^{m+1}-1)$, on aura*
$$Q_m(x+1) = \frac{1}{x}[(x+1)^{m+1}-1].$$
Par la Proposition 53, $(x+1)^{m+1}$ a deux modes $\overline{m} = \frac{m}{2}$ et $\overline{m}+1 = \frac{m}{2}+1$ pour m pair, ou un seul mode $\overline{m} = \frac{m+1}{2}$ sinon, c'est aussi le cas pour $(x+1)^{m+1}-1$.
2. *Par le Lemme 51, il suffit de considérer le cas $1 \leq z \leq m$. on aura*
$$(x+z-1)Q_m(x+z) = (x+z)^{m+1}-1.$$
Par Proposition 53, $(x+z)^{m+1}$ a le plus petit mode $\overline{m+1}$, ainsi que $(x+z)^{m+1}-1$. Donc $M_\star(Q_m,z) \geq \overline{m+1}-1$ par le Lemme 50. D'autre part, on aura $M^\star(Q_m,z) \leq \overline{m}$ par le Corollaire 52. Notons que $\overline{m+1} = \overline{m}$ ou $\overline{m}+1$ car
$$\frac{m-z}{z+1} < \frac{m+1-z}{z+1} < \frac{m-z}{z+1}+1.$$
Alors $Q_m(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}-1$ et $\overline{m}$, et en particulier, un seul mode $\overline{m}$ fournit $\overline{m+1} = \overline{m}+1$. Cette preuve est ainsi complète.
3. *Si $\frac{m+1}{z+1} \in \mathbb{N}$, alors $\frac{m-z}{z+1} \in \mathbb{N}$, ainsi $\overline{m} = \frac{m-z}{z+1}$. D'autre part,*
$$\overline{m+1} = \left\lceil \frac{m+1-z}{z+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m+1}{z+1} - \frac{z}{z+1} \right\rceil = \frac{m+1}{z+1}$$
Donc $\overline{m+1} = \overline{m}+1$. Et on conclut par 2.

4. *En exploitant 2., il suffit de prouver que* $z_{\overline{m}} > z_{\overline{m}-1}$. *Par (2.6), on a*

$$\overline{m}z^{\overline{m}}(z_{\overline{m}} - z_{\overline{m}-1}) = \sum_{i=\overline{m}-1}^{m} z^i \binom{i}{\overline{m}-1}[(i+1) - (z+1)\overline{m}]$$

La somme contient des termes des deux signes. Soit $r = \lceil (z+1)\overline{m} \rceil - 1$. *Notons*

$$S_1 = \sum_{i=r}^{m} z^i \binom{i}{\overline{m}-1}[(i+1) - (z+1)\overline{m}]$$

et

$$S_2 = \sum_{i=\overline{m}-1}^{r-1} z^i \binom{i}{\overline{m}-1}[(z+1)\overline{m} - (i+1)]$$

alors $\overline{m}z^{\overline{m}}(z_{\overline{m}} - z_{\overline{m}-1}) = S_1 - S_2$. *Donc on a besoin de prouver* $S_1 > S_2$.

Comme $(z+1)\overline{m} < m+1$ *par (2.5) et le terme de gauche est un entier par hypothèse, on aura* $r \leq m-1$. *Alors*

$$S_1 \geq z^{r+1}\binom{r+1}{\overline{m}-1}[(r+2) - (z+1)\overline{m}] = z^{r+1}\binom{r+1}{\overline{m}-1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{i=\overline{m}-1}^{r-1} z^{r-1}\binom{i}{\overline{m}-1}[(r+1)-(i+1)] \\ &= z^{r-1}\left[(r+1)\sum_{i=\overline{m}-1}^{r-1}\binom{i}{\overline{m}-1} - \overline{m}\sum_{i=\overline{m}-1}^{r-1}\binom{i+1}{\overline{m}}\right] \\ &= z^{r-1}\left[(r+1)\binom{r}{\overline{m}} - \overline{m}\binom{r+1}{\overline{m}+1}\right] \\ &= z^{r-1}\binom{r+1}{\overline{m}+1}. \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{z^{r+1}\binom{r+1}{\overline{m}-1}}{z^{r-1}\binom{r+1}{\overline{m}+1}} = \frac{z^2\overline{m}(\overline{m}+1)}{(r-\overline{m}+1)(r-\overline{m}+2)} > \frac{z(\overline{m}+1)}{z\overline{m}+1} > 1,$$

ce que l'on voulait démontrer.

5. *On donne la preuve pour* $\frac{m}{z+1} \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\overline{m} = \left\lceil \frac{m-z}{z+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{z+1} - \frac{z}{z+1} \right\rceil = \frac{m}{z+1}.$$

Donc $z\overline{m} = m - \overline{m} \in \mathbb{N}$, *et on conclut par 4.*

$\square$

Maintenant, nous allons considérer le cas $0 < z < 1$, qui est plus compliqué. Par exemple, les modes de $Q_m(x+z)$ peuvent être ni $\overline{m}-1$ ni $\overline{m}$ (voir Remarque 57). La proposition suivante est une estimation approximative pour la localisation des modes de $Q_m(x+z)$.

Proposition 56 *[41] Soit $0 < z < 1$. Alors*

1. $\lfloor m/2 \rfloor \leq M_*(Q_m, d) \leq M^\star(Q_m, d) \leq \min(m-1, \overline{m})$.
2. *Si $0 < z < 1/\binom{m}{2}$, alors $Q_m(x+z)$ a le mode unique $m-1$. La réciproque est aussi vraie.*
3. *Si $0 < 1-z \leq 1/m$, alors $Q_m(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}-1$ et $\overline{m}$. En particulier, si $\frac{m+1}{z+1} \in \mathbb{N}$, alors $Q_m(x+z)$ a le mode unique $\overline{m}$.*
4. *Il existe un entier positif ϵ tel que pour $0 < 1-z < \epsilon$, $Q_m(x+z)$ a le mode unique $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.*

Preuve. Par définition, $M_\star(Q_m, z)$ est le plus grand entier j n'est pas supérieur à $\overline{m}$ tel que $z_j > z_{j-1}$. Notons que

$$\begin{aligned} z_j - z_{j-1} &= \sum_{i=j}^{m} \binom{i}{j} z^{i-j} - \sum_{i=j-1}^{m} \binom{i}{j-1} z^{i-j+1} \\ &= \sum_{i=j-1}^{m-1} \binom{i+1}{j} z^{i-j+1} - \sum_{i=j-1}^{m} \binom{i}{j-1} z^{i-j+1} \\ &= \sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} z^{i-j+1} - \binom{m}{j-1} z^{m-j+1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors

$$M_\star(Q_m, z) = max \left\{ 1 \leq j \leq \overline{m} : \sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} z^{i-j+1} - \binom{m}{j-1} z^{m-j+1} > 0 \right\}.$$

Quand $0 < z < 1$, on aura

$$\sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} z^{i-j+1} \leq z^{m-j} \sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} = z^{m-j} \binom{m}{j+1}.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$z^{m-j-1} \binom{m}{j+1} - z^{m-j} \binom{m}{j-1} > 0$$

est équivalent à

$$(m-j)(m-j+1) - zj(j+1) > 0$$

Maintenant soit $h(x) = (m-x)(m-x+1) - zx(x+1)$. Alors $h(x)$ est une fonction décroissante dans l'intervalle $0 \leq x \leq m$ car $h'(x) < 0$. Donc $h(x_0) > 0$ pour $x_0 \in (0, m)$ implique que $M_\star(Q_m, z) \geq \lfloor x_0 \rfloor$.

1. Comme $h(\frac{m}{2}) = \frac{m}{2}(\frac{m}{2}+1)(1-z) > 0$, on aura $M_\star(Q_m, z) \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

   Il ramène à montrer que $M^*(Q_m, z) \leq m-1$. Il suffit de prouver que $z_{m-1} > z_m$, qui est évident car $z_m = 1$ et $z_{m-1} = 1 + mz$.

2. De 1., $m-1$ est le mode unique de $Q_m(x+z)$ si et seulement si $z_{m-1} > z_{m-2}$. Notons que $z_{m-1} = 1 + mz$ et $z_{m-2} = 1 + (m-1)z + \binom{m}{2}z^2$. Alors $Q_m(x+z)$ a le mode unique $m-1$ si et seulement si $0 < z < 1/\binom{m}{2}$.

3. Si $0 < 1-z \leq 1/m$, alors

   $$h\left(\frac{m-z}{z+1}\right) = \frac{z(m+1)}{(z+1)^2}[3z+1-(1-z)m] > 0.$$

   qui implique que $M_\star(Q_m, z) \geq \lfloor \frac{m-z}{z+1} \rfloor$. D'autre part, $M^\star(Q_m, z) \leq \overline{m} = \lceil \frac{m-z}{z+1} \rceil$ par le Corollaire 52. Notons que

   $$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} \lceil x \rceil, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lceil x \rceil - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Alors $Q_m(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}$ et $\overline{m}-1$, et en particulier, un seul mode $\overline{m}$ si $\frac{m-z}{z+1}$ est un entier.

4. Notons $t = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Alors $M^\star(Q_m, z) \geq m$ par 1., d'autre part, on aura par (2.8)

   $$z_{t+1} - z_t = \sum_{i=t+1}^{m-1} \binom{i}{t+1} z^{i-t} - \binom{m}{t} z^{m-t} \longrightarrow \sum_{i=t+1}^{m-1} \binom{i}{t+1} - \binom{m}{t} = \binom{m}{t+2} - \binom{m}{t}$$

   quand z tend vers 1. Notons que $\binom{m}{t+2} - \binom{m}{t} < 0$. Alors $z_{t+1} - z_t < 0$ si z est suffisamment proche de 1, ce qui implique que $Q_m(x+z)$ a pour mode unique t.

□

Remarque 57 *Il est intéressant de remarquer que les Modes de $Q_m(x+z)$ ne peuvent être $\overline{m}-1$ ou $\overline{m}$ lorsque $0 < z < 1$. Par exemple, soit $1/\binom{m}{2} < z < 1/m$. Alors $\overline{m} = m$. Cependant, chaque mode de $Q_m(x+z)$ est plus petit que $m-1$ car $z_{m-2} > z_{m-1}$.*

2.2.5 Les modes dans le cas général

Le théorème suivant montre l'importance de deux polynômes fondamentaux considérés dans la partie précédente.

Théorème 58 *[41] Soit $P(x) \in \mathbf{P}_\uparrow^m$ et $z > 0$. Alors*

$$M_\star(Q_m, z) \leq M_\star(P, z) \leq M^\star(P, z) \leq M^\star(x^m, z).$$

De plus si $Q_m(x+z)$ a pour mode $\overline{m}$, il en est de même pour $P(x+z)$. En particulier, si $Q_m(x+z)$ a pour unique mode $\overline{m}$, alors $P(x+z)$ aussi, sauf pour $P(x) = x^m$ et $(m+1)/(z+1) \in \mathbb{N}$.

Preuve. L'inégalité $M^\star(P, z) \leq M^\star(x^m, z)$ découle du Corollaire 52 et de la Proposition 53, alors il suffit de prouver l'inégalité $M_\star(Q_m, z) \leq M_\star(P, z)$.
Soit $P(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ et $P(x+z) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$. Pour $1 \leq t \leq \overline{m}$. Soit $r = \lceil (z+1)r \rceil - 1$. Alors $t \leq r \leq m$. Par (2.6), on aura

$$\begin{aligned} tz^t(b_t - b_{t-1}) &= \sum_{i=t-1}^{m} a_i z^{i-t} \binom{i}{t-1} [(i+1) - (z+1)t] \\ &= \sum_{i=r}^{m} a_i z^i \binom{i}{t-1} [(i+1) - (z+1)t] - \sum_{i=t-1}^{r-1} a_i z^i \binom{i}{t-1} [(z+1)t - (i+1)] \\ &\geq a_r \sum_{i=r}^{m} z^i \binom{i}{t-1} [(i+1) - (z+1)t] - a_r \sum_{i=t-1}^{r-1} z^i \binom{i}{t-1} [(z+1)t - (i+1)] \\ &= a_r \sum_{i=r}^{m} z^i \binom{i}{t-1} [(i+1) - (z+1)t] \\ &= a_r t z^t (z_t - z_{t-1}). \end{aligned}$$

et l'égalité est retenue si et seulement si les a_i sont égaux, i.e., P coïncide avec Q_m.

Prenons $t = M_\star(Q_m, z)$. Alors $z_t > z_{t-1}$ par définition. Donc $b_t > b_{t-1}$, ce qui implique que $M_\star(P, z) \geq t$. Ce que nous voulions démontrer.

Maintenant, nous supposons que $\overline{m}$ est un mode de $Q_m(x+z)$. Alors $z_0 \leq z_1 \leq ... \leq z_{\overline{m}}$. Donc $b_0 \leq b_1 \leq ... \leq b_{\overline{m}}$. Cependant, $b_{\overline{m}} \geq b_{\overline{m}+1} \geq ... \geq b_m$ par le Corollaire 52. Alors $\overline{m}$ est un mode de $P(x+z)$.

En particulier, si $\overline{m}$ est le mode unique de $Q_m(x+z)$, alors $M_\star(P, z) \geq \overline{m}$. Donc $\overline{m}$ est le mode unique de $P(x+z)$ si et seulement si $b_{\overline{m}} > b_{\overline{m}+1}$, chose qui est vraie si et seulement si $P(x) = x^m$ et $(m+1)/(z+1) \in \mathbb{N}$ via le Corollaire 52 et la Proposition 53. La preuve de ce théorème est ainsi complète. □

En combinant le Théorème 58, le Corollaire 52 et les résultats de la dernière section on déduit :

Corollaire 59 *[41] Soit $P \in \mathbf{P}_\uparrow^m$,*

1. *si $z \geq 1$, alors $P(x+z)$ a au plus deux modes $\overline{m}$ et $\overline{m}+1$ si $P(x) = x^m$, ou $\overline{m}-1$ et $\overline{m}$ sinon.*
2. *alors $P(x+z)$ a pour mode $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil$, en particulier, si $P(x)$ est distinct de x^m et de $\sum_{i=0}^m x^i$, alors $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil$ est un mode unique de $P(x+1)$.*

3. *si* $z \geq 1$ *et* P *est tel que* $P(x) \neq x^m$, *supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :* $\overline{m+1} = \overline{m} + 1$ *ou* $\frac{m+1}{z+1} \in \mathbb{N}$ *ou* $z\overline{m} \in \mathbb{N}$ *ou* $z \in \mathbb{N}$ *ou* $\frac{m}{z+1} \in \mathbb{N}$, *alors* $P(x+z)$ *a pour unique mode* $\overline{m}$.

Les deux dernières assertions fortifient le résultat principal de [11] et [2], respectivement.

Dans le cas $0 < z < 1$, le nombre et la localisation des modes de $P(x+z)$ dépendent fortement des coefficients de $P(x)$.

Théorème 60 *[41] Soit* $0 < z < 1$ *et* $P \in \mathbf{P}^{\mathbf{m}}_{\uparrow}$. *Supposons que* $P(x) \neq x^m$. *Alors*

$$\lfloor m/2 \rfloor \leq M_{\star}(P, z) \leq M^{\star}(P, z) \leq \overline{m}.$$

Preuve. C'est une conséquence de la Proposition 56 et du Théorème 58. □

Le théorème principal de cette sous section peut être réécrit de la façon suivante :

Théorème 61 *[41] Supposons* $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_m$ *et* $z > 0$. *Alors la suite*

$$b_j = \sum_{i=j}^{m} a_i z^{i-j} \binom{i}{j}, \qquad j = 0, 1, ..., m$$

est unimodale.

Conjecture 62 ([43]) *Soient* $0 < z_1 < z_2$ *et* $P \in \mathbf{P}^{\mathbf{m}}_{\uparrow}$ *alors* $M_{\star}(P, z_1) \leq M_{\star}(P, z_2)$ *et* $M^{\star}(P, z_1) \leq M^{\star}(x^m, z_2)$.

Chapitre 3

Préservation de la log-concavité pour les p-triangles

Nous avons vu dans le premier chapitre des résultats de préservation de la log-concavité et des résultats relatifs à la LC-positivité pour les triangles ordinaires $\{a(n,k)\}_k$. Parmi les exemples qu'on a cité le cas du triangle de Pascal. Dans ce chapitre on va établir des propriétés analogues pour des triangles généralisés : "les p-**triangles**", le cas $p = 1$ étant le triangle classique. Le cas particulier du triangle de Pascal généralisé issu des coefficients bi^{q}nomiaux sera traité. Donc, ce chapitre, est une tentative de généralisation des résultats de Wang et Yeh présentés dans le chapitre premier.

Tout d'abord, on commence par quelques notations.

Soient $\{x_k\}_{k\geq 0}$, $\{y_k\}_{k\geq 0}$ deux suites log-concaves, et notons par $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$ un p-triangle de nombres positifs avec $p \geq 1$, son p-triangle inverse est donné par $a_p^{\star}(n,k) = a_p(n, np-k)$. On conviendra que $a_p(n,k) = 0$ pour $k < 0$ ou $k > np$, et que $x_k = y_k = 0$ pour $k < 0$.

Illustration du p-triangle (on prendra $p = 4$), n représente la ligne et k la colonne :

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$\star$																
2	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$												
3	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$								
4	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$				
5	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Considérons les deux transformations linéaires suivantes

$$z_n = \sum_{k=0}^{np} a_p(n,k)x_k, \qquad n = 0,1,... \tag{3.1}$$

et

$$z_n = \sum_{k=0}^{np} a_p(n,k)x_k y_{np-k}, \qquad n = 0,1,... \tag{3.2}$$

Définition 63

1. *On dit que la transformation (3.1) a la propriété PLC si elle préserve la log-concavité des suites i.e la log-concavité de $\{x_k\}_k$ entraîne celle de $\{z_k\}_k$ et dans ce cas le p-triangle correspondant est dit PLC.*
2. *On dit que la transformation (3.2) a la propriété double-PLC si elle préserve la log-concavité des suites i.e. la log-concavité de $\{x_k\}_k$ et $\{y_k\}_k$ entraîne celle de $\{z_k\}_k$ et dans ce cas le p-triangle correspondant est dit double-PLC.*

3.1 LC positivité et préservation de la log-concavité

Définition 64 *Soit la suite des polynômes $\{\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\}_n$ définie par*

$$\mathcal{A}_{p,r}(n;q) = \sum_{k=r}^{np} a_p(n,k)q^k, \quad (0 \leq r \leq np)\,.$$

1. *On dit qu'elle est q-log-concave si $\forall n \geq 1$, $\mathcal{A}^2_{p,r}(n;q) - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)$ admet des coefficients positifs en tant que polynôme en q.*
2. *On dit que le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est LC-positif si la suite des polynômes $\{\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\}_n$ est q-log-concave.*
3. *On dit que le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est double LC-positif si les deux triangles $\{a_p(n,k)\}$ et $\{a^\star_p(n,k)\}$ sont LC-positif.*

En s'appuyant sur les résultats du premier chapitre, concernant la (double) LC-positivité et la propriété (double) PLC. Nous allons voir la relation entre la LC-positivité et la propriété PLC.

Soit $\{z_n\}_{n\geq 0}$ la suite définie par (3.1) ; et notons $\triangle_n = z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1}$. On veut établir que $\triangle_n \geq 0$ pour chaque $n \geq 1$, on a

$$\triangle_n = \left\{\sum_{k=0}^{np} a_p(n,k)x_k\right\}^2 - \left\{\sum_{k=0}^{np-p} a_p(n-1,k)x_k\right\}\left\{\sum_{k=0}^{np+p} a_p(n+1,k)x_k\right\}. \tag{3.3}$$

est une forme quadratique en $np+p+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_{pn+p}$, et les formes quadratiques de ce type ne sont, en général, pas semi-définies positives, d'où l'alternative de supposer la log concavité de la suite $\{x_k\}_k$.

Soit S_t la somme des monômes $x_k x_{t-k}$ dans $\triangle_n$. Pour $0 \leq k \leq \lfloor t/2 \rfloor$ avec $0 \leq t \leq 2np$, soit $a_{p,k}(n,t)$ le coefficient du terme $x_k x_{t-k}$ en $\triangle_n$. Alors

$$\triangle_n = \sum_{t=0}^{2np} S_t \quad \text{avec } S_t = \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t) x_k x_{t-k}.$$

Donc pour établir la log-concavité, il suffit que

$$S_t \geq 0, \quad (0 \leq t \leq 2np).$$

Comme de plus $x_0 x_t \leq x_1 x_{t-1} \leq x_2 x_{t-2} \leq \cdots$, par le Lemme 14, il nous reste à établir

$$\sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t) \geq 0, \quad (0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor).$$

Par (3.3), on aura pour $k < t/2$

$$a_{p,k}(n,t) = 2a_p(n,k)a_p(n,t-k) - a_p(n-1,k)a_p(n+1,t-k) - a_p(n+1,k)a_p(n-1,t-k);$$

et pour t pair et $k = t/2$:

$$a_{p,k}(n,t) = a_p(n,k)^2 - a_p(n-1,k)a_p(n+1,k).$$

Notons

$$A_{p,r}(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t). \tag{3.4}$$

On constate que $A_{p,r}(n,t)$ est exactement le coefficient de q^t dans le polynôme $\mathcal{A}_{p,r}^2(n;q) - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)$, c-à-d :

$$\mathcal{A}_{p,r}^2(n;q) - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) = \sum_{t=2r}^{2np} A_{p,r}(n,t) q^t. \tag{3.5}$$

D'où la caractérisation immédiate suivante de la positivité :

Lemme 65 *Avec la notation précédente, le p-triangle $\{a_p(n,k)\}_{0 \leq k \leq np}$ est LC-positif si et seulement si $A_{p,r}(n,t) \geq 0$ pour tout $2r \leq t \leq 2np$.*

Ainsi, on peut établir notre premier résultat :

Théorème 66 *Les triangles généralisés "p-triangles" LC-positifs sont PLC.*

La relation entre la double LC-positivité et la propriété double-PLC est donnée par la proposition suivante :

Proposition 67 *Donnons nous un p-triangle* $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq pn}$ *de nombres positifs, et deux suites log-concaves* $\{x_k\}_{k\geq 0}$ *et* $\{y_k\}_{k\geq 0}$.

On définit trois p-triangles $\{b_p(n,k)\}$, $\{c_p(n,k)\}$ *et*$\{d_p(n,k)\}$ *par*

$$b_p(n,k) = a_p(n,k)x_k, \qquad c_p(n,k) = a_p(n,k)y_{np-k}, \qquad d_p(n,k) = a_p(n,k)x_k y_{np-k}$$

Pour $2r \leq t \leq 2np$, *on définit* $B_{p,r}(n,t)$, $C_{p,r}(n,t)$ *et* $D_{p,r}(n,t)$ *comme pour* $A_{p,r}(n,t)$ *en (3.4).*

1. *Si le p-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *est LC-positif, alors le p-triangle* $\{b_p(n,k)\}$ *est LC-positif et* $B_{p,r}(n,t) \geq A_{p,r}(n,t)x_r x_{t-r}$.
2. *Si le p-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *est double LC-positif, alors le p-triangle* $\{c_p(n,k)\}$ *est LC-positif et* $C_{p,r}(n,t) \geq A_{p,r}(n,t)y_{np-t+r}y_{np-r}$ *pour* $t \leq np + r$.
3. *Si le p-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *est double LC-positif, alors le p-triangle* $\{d_p(n,k)\}$ *est LC-positif et* $D_{p,r}(n,t) \geq A_{p,r}(n,t)x_r x_{t-r} y_{np-t+r} y_{np-r}$ *pour* $t \leq np + r$.

Preuve. 1. Soit $0 \leq t \leq 2np$, de la définition on a $b_{p,k}(n,t) = a_{p,k}(n,t)x_k x_{t-k}$ pour $0 \leq k \leq \lfloor t/2 \rfloor$. Donc, pour $0 \leq r \leq \lfloor t/2 \rfloor$

$$B_{p,r}(n,t) := \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} b_{p,k}(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t)x_k x_{t-k},$$

$\{a_p(n,k)\}$ est LC-positif et $x_0 x_t \leq x_1 x_{t-1} \leq \cdots$ par la log-concavité de $\{x_k\}$. Du Lemme 14 il s'ensuit que

$$B_{p,r}(n,t) \geq x_r x_{t-r} \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t) = A_{p,r}(n,t)x_r x_{t-r} \geq 0,$$

ainsi le p-triangle $b_p(n,k)$ est LC-positif.

2. Soit $2r \leq t \leq 2np$. On veut prouver que $C_{p,r}(n,t) := \sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} c_{p,k}(n,t) \geq 0$. On traite le cas impair, la même technique reste valable pour t pair.

Soit $t = 2s+1$, pour $0 \leq k \leq s$, notons

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= a_p(n,k)a_p(n,t-k),\\
\beta_k &= a_p(n-1,k)a_p(n+1,t-k),\\
\gamma_k &= a_p(n+1,k)a_p(n-1,t-k)\\
Y_k &= y_{np-t+k}y_{np-k},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
a_{p,k}(n,t) &= 2a_p(n,k)a_p(n,t-k) - a_p(n-1,k)a_p(n+1,t-k) - a_p(n+1,k)a_p(n-1,t-k)\\
&= 2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c_{p,k}(n,t) &= 2a_p(n,k)a_p(n,t-k)y_{np-t+k}y_{np-k}\\
&\quad -a_p(n-1,k)a_p(n+1,t-k)y_{(n+1)p-t+k}y_{(n-1)p-k}\\
&\quad -a_p(n+1,k)a_p(n-1,t-k)y_{(n-1)p-t+k}y_{(n+1)p-k}\\
&= 2a_p(n,k)a_p(n,t-k)y_{np-t+k}y_{np-k}\\
&\quad -a_p(n-1,k)a_p(n+1,t-k)y_{(np-t+k+p)}y_{np-(k+p)}\\
&\quad -a_p(n+1,k)a_p(n-1,t-k)y_{(np-t+k-p)}y_{np-(k-p)}\\
&= 2\alpha_k Y_k - \beta_k Y_{k+p} - \gamma_k Y_{k-p}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
C_{p,r}(n,t) &= \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k Y_k - \beta_k Y_{k+p} - \gamma_k Y_{k-p})\\
&= \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-p} - \gamma_{k+p})Y_k + \sum_{j=1}^{p}\beta_{r-j}Y_{r+p-j}\\
&\quad -\sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1}Y_{r-p+j-1} - \sum_{j=1}^{p}\beta_{s-j+1}Y_{s+p-j+1} + \sum_{j=1}^{p}\gamma_{s+j}Y_{s-p+j},
\end{aligned}$$

On a $Y_{s+p-j+1} = Y_{s-p+j}$ pour $j = \overline{1,p}$, en effet

$$\begin{aligned}
Y_{s+p-j+1} &= y_{np-t+s+p-j+1}y_{np-s-p+j+1}\\
&= y_{np-2s-1+s+p-j+1}y_{np-s-p+j+1}\\
&= y_{(n-1)p-s+j-1}y_{((n+1)p-s-j)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{s-p+j} &= y_{np-t+s-p+j}y_{np-s+p-j} \\ &= y_{np-2s-1+s-p+j}y_{np-s+p-j} \\ &= y_{(n-1)p-s+j-1}y_{((n+1)p-s-j)}. \end{aligned}$$

On a aussi $\beta_{s-j+1} = \gamma_{s+j}$ pour $j = \overline{1,p}$, en effet

$$\beta_{s-j+1} = a_p(n-1, s-j+1)a_p(n+1, t-s+j-1) = a_p(n-1, s-j+1)a_p(n+1, s+j),$$

et

$$\gamma_{s+j} = a_p(n+1, s+j)a_p(n-1, t-s-j) = a_p(n-1, s-j+1)a_p(n+1, s+j).$$

On aura ainsi

$$C_{p,r}(n,t) = \sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-p} - \gamma_{k+p})Y_k + \sum_{j=1}^{p}\beta_{r-j}Y_{r+p-j} - \sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1}Y_{r-p+j-1},$$

Notons que $\{Y_k\}$ est croissante par la log concavité de $\{y_k\}$ et

$$\begin{aligned} 2\alpha_k - \beta_{k-p} - \gamma_{k+p} &= 2a_p^\star(n, np-k)a_p^\star(n, np-t+k) - a_p^\star(n-1, np-k)a^\star(n+1, np-t+k) \\ &- a_p^\star(n+1, np-k)a_p^\star(n-1, np-t+k) \\ &= a_{p,np-t+k}^\star(n, 2np-t). \end{aligned}$$

Alors par la LC-positivité du triangle in verse $a_p^\star(n,k)$, on aura

$$\begin{aligned} C_{p,r}(n,t) &= \sum_{j=np-t+r}^{\lfloor(2np-t)/2\rfloor} a_{p,j}^\star(n, 2np-t)Y_{j-np+t} + \sum_{j=1}^{p}\beta_{r-j}Y_{r+p-j} - \sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1}Y_{r-p+j-1} \\ &\geq Y_r \sum_{j=np-t+r}^{\lfloor(2np-t)/2\rfloor} a_{p,j}^\star(n, 2np-t) + Y_r\sum_{j=1}^{p}\beta_{r-j} - Y_{r-p}\sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1} \\ &= Y_r\sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_{k-p} - \gamma_{k+p}) + Y_r\sum_{j=1}^{p}\beta_{r-j} - Y_{r-p}\sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1} \\ &= Y_r\sum_{k=r}^{s}(2\alpha_k - \beta_k - \gamma_k) + (Y_r - Y_{r-p})\sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1} \\ &= A_{p,r}(n,t)Y_r + (Y_r - Y_{r-p})\sum_{j=1}^{p}\gamma_{r+j-1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$C_{p,r}(n,t) \geq A_{p,r}(n,t)y_{np-t+r}y_{np-r}$.

3. On a $d_p(n,k) = a_p(n,k)x_ky_{np-k} = c_p(n,k)x_k$ et

$$D_{p,r}(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2\rfloor} d_{p,k}(n,t) = \sum_{k=r}^{\lfloor t/2\rfloor} c_{p,k}(n,t)x_kx_{t-k},$$

d'après 1. et 2., ainsi

$$D_{p,r}(n,t) \geq C_{p,r}(n,t)x_r x_{t-r} \geq A_{p,r}(n,t)x_r x_{t-r} y_{np-t+r} y_{np-r}.$$

□

Maintenant on établit le second résultat suivant :

Théorème 68 *Les triangles généralisés "p-triangles" double LC-positifs sont double-PLC.*

Preuve. Soit le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ double LC-positif, supposons que les deux suites $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont log-concaves. Alors le p-triangle $\{a_p(n,k)x_k y_{np-k}\}$ est LC-positif par 3. de la Proposition 67 et donc PLC par le Théorème 66. Ainsi la suite somme-ligne :

$$z_n = \sum_{k=0}^{np} a_p(n,k)x_k y_{np-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

est log-concave. En d'autre termes, le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est double-PLC. □

On peut donner des conditions plus pratiques qui impliquent la LC-positivité. On a vu que le Lemme 14, spécialement la première condition, joue un rôle clef dans la preuve de la LC-positivité dans la Proposition 67. On peut voir que cette condition entraine les deux conditions suivantes :

A1 La séquence $a_0, a_1, \ldots, a_s$, change de signe en passant de valeurs négatives aux valeurs positives ;

A2 $\sum_{k=0}^{s} a_k \geq 0$.

Ces deux conditions sont plus faciles à satisfaire. Par exemple, la condition (A1) peut être obtenue en démontrant que la suite $\{a_k\}$ est croissante et éventuellement positive. D'autre part, la condition (A2) est plus simple à établir que la condition 1 du Lemme 14, et la méthode des fonctions génératrices nous sera utile (voir [45] pour plus de détails). Par le Lemme 65, $\{a_p(n,k)\}$ est LC-positif si et seulement si l'inégalité $\sum_{k=r}^{\lfloor t/2 \rfloor} a_{p,k}(n,t) \geq 0$ est satisfaite pour tout $2r \leq t \leq 2np$, alors le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 69 *Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe un indice $m = m(n,t)$ tel que $a_{p,k}(n,t) < 0$ pour $k < m$ et $a_{p,k}(n,t) \geq 0$ pour $k \geq m$;*

2. *La suite* $\{\mathcal{A}_0(n;q)\}_{n\geq 0}$ *est* q*-log-concave.*

Alors le p*-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *est LC-positif et donc PLC.*

Corollaire 70 *Supposons que le* p*-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *satisfait les conditions du Corollaire 20 et* $\{a_p^\star(n,k)\}$ *satisfait seulement sa première condition. Alors* $\{a_p(n,k)\}$ *est double LC-positif et donc double-PLC.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\{\mathcal{A}_{p,0}^\star(n;q)\}$ est q-log-concave. On a

$$\mathcal{A}_{p,0}^\star(n;q) = \sum_{k=0}^{np} a_p(n,np-k)q^k = \sum_{k=0}^{np} a_p(n,k)q^{np-k} = q^{np}\mathcal{A}_{p,0}(n;q^{-1})$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p,0}^{\star 2}(n;q) & - \mathcal{A}_{p,0}^\star(n-1;q)\mathcal{A}_{p,0}^\star(n+1;q) \\ & = q^{2np}[\mathcal{A}_{p,0}^2(n;q^{-1}) - \mathcal{A}_{p,0}(n-1;q^{-1})\mathcal{A}_{p,0}(n+1;q^{-1})] \end{aligned}$$

qui a des coefficients positifs par la q-log-concavité de $\mathcal{A}_{p,0}(n;q)$, ainsi la preuve est complète. $\square$

A propos des exemples de p-triangles PLC et double-PLC, nous allons voir le cas du p-triangle de Pascal ou bien le triangle des coefficients bi^{q}nomiaux, pour cela nous abordons quelque notions les concernant.

3.2 Un p-triangle fondamentales : les coefficients bi^{q}nomiaux

3.2.1 Définition et premières propriétés

Ce paragraphe est largement puisé de la thèse de Doctorat d'Etat de Belbachir [6].

Les coefficients bi^{q}nomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ils sont définis comme suit :

Soient $q \geq 1$ et $L \geq 0$ deux entiers ; pour un entier $k = 0, 1, ..., qL$, le coefficient bi^{q}nomial $\binom{L}{k}_q$ est défini comme étant le k-ième coefficient dans le développement

$$(1 + x + x^2 + ... + x^q)^L = \sum_{k\geq 0} \binom{L}{k}_q x^k, \tag{3.7}$$

avec $\binom{L}{k}_1 = \binom{L}{k}$ $\left(\binom{L}{k}\right.$ étant les coefficients binomiaux classiques$\left.\right)$ et $\binom{L}{k}_q = 0$ pour $k > qL$ ou $k < 0$. Une expression via les coefficients binomiaux classiques est donnée par :

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_q=k} \binom{L}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{q-1}}{j_q}. \tag{3.8}$$

Comme propriétés déjà bien établies, on a la relation de symétrie

$$\binom{L}{k}_q = \binom{L}{qL-k}_q. \tag{3.9}$$

La relation de récurrence longitudinale

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{m=0}^{q} \binom{L-1}{k-m}_q. \tag{3.10}$$

Et la relation de récurrence diagonale

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{m=0}^{q} \binom{L}{m}\binom{m}{k-m}_{q-1}. \tag{3.11}$$

Ces coefficients, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, vérifient via (3.11) un équivalent du triangle de Pascal : le "q-triangle de Pascal" ou "triangle de Pascal généralisé", voir les tables : 1, 2 et 3 ci dessous. Pour les premières valeurs de ces q-triangles, on peut consulter l'encyclopédie on line des suites numériques de SLOANE [32] sous A027907 pour $q = 2$, sous A008287 pour $q = 3$, sous A035343 pour $q = 4$, et sous A001891 pour $q = 5$.

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons les triangles des coefficients bitrinomiaux, biquadrinomiaux et bipentanomiaux.

Table 1 : Triangle des coefficients bi*tri*nomiaux : $\binom{L}{k}_2$

$L\backslash k$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	9	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
0	1																
1	1	1	1														
2	1	2	3	2	1												
3	1	3	6	7	6	3	1										
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1								
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1						
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1				
7	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1		
8	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016	784	504	266	112	36	8	1

Table 2 : Triangle des coefficients bi*quadri*nomiaux : $\binom{L}{k}_3$

$L\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1	1													
2	1	2	3	4	3	2	1										
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1							
4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1				
5	1	5	15	35	65	101	135	155	155	135	101	65	35	15	5	1	
6	1	6	21	56	120	216	336	456	546	580	546	456	336	216	120	56	...

Table 3 : Triangle des coefficients bi*penta*nomiaux : $\binom{L}{k}_4$

$L\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1	1	1												
2	1	2	3	4	5	4	3	2	1								
3	1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1				
4	1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	52	35	20	10	4	1
5	1	5	15	35	70	121	185	255	320	365	379	365	320	255	185	121	...

Table 4 : Triangle des coefficients bi*hexa*nomiaux : $\binom{L}{k}_5$

$L\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1	1	1	1											
2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
3	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
4	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	...
5	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	...

Interprétation combinatoire. Brondarenko [14] a donné une interprétation combinatoire des coefficients bi^{q}nomiaux $\binom{L}{k}_q$ comme étant le nombre de manières de distribuer "k" boules dans "L" urnes de sorte que chaque urne contienne au plus "q" boules.

Remarque 71 *Cet argument combinatoire, permet d'établi la relation suivante*

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{L_1+2L_2+\cdots+qL_q=k} \binom{L}{L_1, L_2, ..., L_{q-1}, L - L_1 - \cdots - L_{q-1}}. \tag{3.12}$$

3.2.2 Une expression mono-sommatoire des coefficients bi^{q}nomiaux

H. Belbachir, S. Bouroubi et A. Khelladi dans [8] ont établi le théorème suivant :

Théorème 72 *L'identité suivante est satisfaite*

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(q+1)\rfloor} (-1)^j \binom{L}{j} \binom{k - j(q+1) + L - 1}{L - 1}. \tag{3.13}$$

Cette relation explicite est importante, au sens où elle permet d'exprimer les coefficients bi^{q}nomiaux avec un unique symbole de sommation, contrairement aux relations (3.8) à (3.12).

En 1711, de Moivre (voir [28] ou [27]) avait déjà exprimé l'expression de droite de l'identité (3.13) pour dénombrer la situation de l'interprétation combinatoire donnée par Brondarendo.

Récemment [7], Belbachir et Szalay ont montré l'unimodalité (et la log-concavité) des éléments de triangle de Pascal généralisé (ou coefficients bi^{q}nomiaux) $\binom{L}{k}_q$ pour L fixé et $0 \leq k \leq qL$. Plus généralement, ils ont établi l'unimodalité des suites parcourant toute transversale du triangle de Pascal généralisé en montrant que la suite $v_k = \binom{n+\alpha k}{m+\beta k}_q$ est log-concave, donc unimodale.

Pour ce faire ils ont utilisé le Corollaire 27. D'où, d'après [7, Lemme 6] :

$$\binom{u + \alpha k}{v + \beta k}_s = \sum_m \binom{u + \alpha k}{m} \binom{m}{v + \beta k - m}_{s-1}. \tag{3.14}$$

La suite $\{\binom{u+\alpha k}{m}\}_m$ est trivialement log-concave (c'est une ligne du triangle de Pascal), et la suite $\{\binom{m}{v+\beta k-m}_{s-1}\}_m$ est log-concave par hypothèse de récurrence.

3.3 Application aux opérateurs linéaires d'ordre p

Dans cette section, on donne quelques exemples de p-triangles PLC et double-PLC en montrant leur (double) LC-positivité.

Notons par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ des nombres positifs. Donnons nous $p+1$ nombres positifs $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p$, on définit l'opérateur linéaire $L = L[\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p]$, dans $\mathfrak{S}$ par :

$$L(u_k) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j u_{k-j}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour $n \geq 2$, par récurrence, on définit $L^n := L(L^{n-1})$. Il est commode de poser L^0 comme opérateur identité. Etudions la log-concavité de la suite $\{L(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned}
[L(u_k)]^2 \quad &- \quad L(u_{k-1})L(u_{k+1}) \\
&= \left[\sum_{j=0}^{p} \lambda_j u_{k-j}\right]^2 - \sum_{j=0}^{p} \lambda_j u_{k-j-1} \sum_{j=0}^{p} \lambda_j u_{k-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p} \lambda_j^2 (u_{k-j}^2 - u_{k-j-1}u_{k-j+1}) \\
&\quad + \sum_{0\leq j<l\leq p} \lambda_j \lambda_l (2u_{k-l}u_{k-j} - u_{k-l-1}u_{k-j+1} - u_{k-l+1}u_{k-j-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\{L\,(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave.

Donc, par induction, on peut conclure que la suite $\{L^n(u_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi log-concave pour chaque $n \geq 0$.

Ce qui nous amène à énoncer le théorème suivant

Théorème 73 *Soient* $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ $(p+1)$ *nombres positifs, et* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *une suite log-concave. On définit*

$$a_p(n,k) = L^n[\lambda](u_k) \quad (0 \leq k \leq np)$$

Alors le p-triangle $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$ *est double LC-positif et donc double-PLC.*

Preuve. Notons $a_k = L^{n-1}[\lambda](u_k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave et $\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q) = \sum_{k=r}^{np-p} a_k q^k$. On aura ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{p,r}(n;q) &= \sum_{k=r}^{np}\sum_{j=0}^{p}\lambda_j a_{k-j}q^k \\
&= \lambda_0\sum_{k=r}^{np} a_k q^k + \lambda_1\sum_{k=r}^{np} a_{k-1}q^k + \cdots + \lambda_p\sum_{k=r}^{np} a_{k-p}q^k \\
&= \lambda_0\sum_{k=r}^{np-p} a_k q^k + \lambda_0\sum_{k=np-p+1}^{np} a_k q^k + \lambda_1 q\sum_{k=r}^{np-p} a_k q^k + \lambda_1 q\sum_{k=np-p+1}^{np-1} a_k q^k + \lambda_1 a_{r-1}q^r \\
&\quad + \cdots + \lambda_p q^p\sum_{k=r}^{np-p} a_k q^k + \lambda_p q^p\sum_{j=1}^{p} a_{r-j}q^{r-j} \\
&= \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^j + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j} a_{r-l}q^{r+j-l} + \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j} a_{np-p+l}q^{np-p+l+j},
\end{aligned}$$

de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) &= \mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^j + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{r-f-l}q^{r+j-l} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{np+l-f}q^{np+l+j}
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{p,r}(n;q)^2 - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) = \\
&\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^j + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j} a_{r-l}\; q^{r+j-l} + \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j} a_{np-p+l}q^{np-p+l+j}\right] \\
&-\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^j + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{r-f-l}\; q^{r+j-l}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{np+l-f}q^{np+l+j}\right] \\
= &\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j} a_{r-l}q^{r+j-l}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{np}\lambda_f a_{k-f}q^k \\
&-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{r-f-l}q^{r+j-l}\sum_{k=r}^{np-p} a_k q^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j}a_{np-p+l}q^{np-p+l+j}\sum_{k=r}^{np}\lambda_f a_{k-f}q^k \\
& -\sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_f a_{np+l-f}q^{np+l+j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{np-p}a_kq^k \\
= \quad & \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{np}\lambda_j\lambda_f[a_{r-l}a_{k-f}-a_{r-f-l}a_k]q^{k+r+j-l} \\
& +\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=np-p+1}^{np}\lambda_j\lambda_f a_{r-f-l}a_kq^{k+r+j-l} \\
& +\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{np}\lambda_j\lambda_f\left[a_{np-p+l}a_{k-f}-a_{np+l-f}a_{k-p}\right]q^{k+np-p+l+j} \\
& +\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{r+p-1}\lambda_j\lambda_f a_{np+l-f}a_k.
\end{aligned}
$$

qui a des coefficients positifs par la log-concavité de $\{a_k\}$. Alors, le triangle $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ est LC-positif.

D'autre part, soit $u_k^\star = u_{-k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $\{u_k^\star\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est log-concave et $a_p^\star(n,k) = L^n[\lambda](u_k^\star)$. Donc le p-triangle $\{a_p^\star(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$ est aussi LC-positif, et le triangle $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$ est donc double LC-positif. $\square$

Corollaire 74 *Si la suite $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont log-concave, alors la suite définie par*

$$z_n = \sum_{k=0}^{np}\binom{a+n}{b+k}_p x_k y_{np-k},$$

est aussi log-concave.

Preuve. On sait que $\binom{a+n}{b+k}_p = \sum_{j=0}^{p}\binom{a+n-1}{b+k-j}_p$ via la relation de récurrence longitudinale 3.10. Donc pour $u_k = \binom{a}{b+k}_p$, et $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_p = 1$, alors $L^{n-1}[\lambda](u_k) = \binom{a+n-1}{b+k}_p$. Ainsi, $\{\binom{a+n}{b+k}_p\}$ est double-PLC. Par conséquent la suite $\{z_n\}$ est log-concave. $\square$

En prenant $a = b = 0$, on aura le cas intéressant suivant

Corollaire 75 *Si la suite $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont log-concave, alors la convolution bi^{q}nomiale*

$$z_n = \sum_{k=0}^{np}\binom{n}{k}_p x_k y_{np-k},$$

est aussi log-concave.

Remarque 76 *Le Corollaire 75 peut être déduit directement du Théorème 68 en montrant la double LC-positivité du p-triangle associé, en effet*

Exemple 77 *On prend l'exemple de* $a_p(n,k) = \binom{n}{k}_p$ *pour* $0 \leq k \leq np$ *et* $p \geq 1$ *(le p-triangle de Pascal), alors* $\mathcal{A}_r(n;q) = \sum_{k=r}^{np} \binom{n}{k}_p q^k$. *On aura*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{p,r}(n;q) &= \sum_{k=r}^{np}\sum_{j=0}^{p}\binom{n-1}{k-j}_p q^k \\
&= \sum_{k=r}^{np}\binom{n-1}{k}_p q^k + \sum_{k=r}^{np}\binom{n-1}{k-1}_p q^k + \cdots + \sum_{k=r}^{np}\binom{n-1}{k-p}_p q^k \\
&= \sum_{k=r}^{np-p}\binom{n-1}{k}_p q^k + q\sum_{k=r-1}^{np-p}\binom{n-1}{k}_p q^k + \cdots + q^p\sum_{k=r-p}^{np-p}\binom{n-1}{k}_p q^k \\
&= \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\sum_{j=0}^{p} q^j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n-1}{r-l}_p q^{r+j-l}.
\end{aligned}$$

De la même manière on aura

$$\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) = \mathcal{A}_r(n;q)\sum_{j=0}^{p} q^j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n}{r-l}_p q^{r+j-l}.$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{p,r}(n;q)^2 &- \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) = \\
&\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\sum_{j=0}^{p} q^j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n-1}{r-l}_p q^{r+j-l}\right] \\
&-\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=0}^{p} q^j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n}{r-l}_p q^{r+j-l}\right] \\
&= \mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n-1}{r-l}_p q^{r+j-l} - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\binom{n}{r-l}_p q^{r+j-l} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{k=r}^{np-p}\left[\binom{n-1}{r-l}_p\binom{n-1}{k-f}_p - \binom{n-1}{r-l-f}_p\binom{n-1}{k}_p\right] q^{k+r+j-l} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j}\sum_{f=0}^{p}\sum_{c=0}^{np-p-r}\left[\binom{n-1}{r-l}_p\binom{n-1}{r+c-f}_p - \binom{n-1}{r-l-f}_p\binom{n-1}{r+c}_p\right] q^{c+2r+j-l},
\end{aligned}$$

laquelle a des coefficients positifs par la log-concavité des coefficient bi^q*nomiaux, chose établie dans [7, Lemme 6] par Belbachir et Szalay. Par conséquent,* $\{\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\}$ *est q-log-concave en n. Donc, le p-triangle* $\{a_p(n,k)\}$ *est LC-positif et donc double LC-positif car* $a_p^\star(n,k) = a_p(n,np-k) = a_p(n,k)$

Le théorème suivant est dans le sens "dual" du théorème précédent et c'est le second résultat principal du chapitre.

Théorème 78 *Donnons nous $p+1$ nombres positifs $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ et $\{a_p(n,k)\}_{0\leq k\leq np}$ un p-triangle de nombres positifs. Supposons que chaque ligne de $\{a_p(n,k)\}$ est log-concave et satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$a_p(n,k) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j a_p(n+1, k+j), \qquad k = 0, 1, 2..., n \tag{3.15}$$

Alors le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est double LC-positif et donc double-PLC.

Preuve. Notons $a_p(n+1,k) = v_k$ pour $0 \leq k \leq np+p$. Ainsi la suite $\{v_k\}$ est log-concave et $\mathcal{A}_r(n+1;q) = \sum_{k=r}^{np+p} v_k q^k$. Par la relation récurrence (3.15), on aura :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{p,r}(n;q) &= \sum_{k=r}^{np}\sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_{k+j} q^k \\
&= \mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^{-j} - \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\lambda_j v_{np+j+l} q^{np+l} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{j-1}\lambda_j v_{r+l} q^{r+l-j}.
\end{aligned}$$

de la même manière, on obtient

$$\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q) = \mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^{-j} - \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_j\lambda_f v_{np-p+j+l+f} q^{np-p+l} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{f=0}^{p}\lambda_j\lambda_f v_{r+l+f} q^{r+l-j}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^2_{p,r}(n;q) - \mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q) = \\
&\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^{-j} - \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\lambda_j v_{np+j+l} q^{np+l} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{j-1}\lambda_j v_{r+l} q^{r+l-j}\right] \\
&-\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)\left[\mathcal{A}_{p,r}(n;q)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j q^{-j} - \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{f=0}^{p}\lambda_j\lambda_f v_{np-p+j+l+f} q^{np-p+l}\right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{f=0}^{p}\lambda_j\lambda_f v_{r+l+f} q^{r+l-j}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\left[\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=r+p}^{np+p}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right] \\
& + \sum_{j=1}^{p}\sum_{f=0}^{p}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{k=r}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k - v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\right] \\
& + \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\left[\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=r}^{r+p-1}\lambda_j\lambda_f v_{np-p++l+f}v_k q^{k+np-p+l} + \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{k=np+1}^{np+p}\lambda_j\lambda_f v_{r+l+f}v_k q^{k+r+l-j}\right] \\
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\sum_{l=1}^{p-j}\left[\sum_{k=r+p}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})\, q^{k+np-p+l}\right. \\
& + \sum_{k=np+1}^{np+j}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l} \\
& \left. + \sum_{k=np+j+1}^{np+p}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right] + \sum_{f=1}^{p}\sum_{k=r+1}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k - v_r v_{k+f})q^{k+r-j} \\
& + \sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\left[\sum_{k=r+1}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k - v_r v_{k+f})q^{k+r-j} + \sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k - v_r v_{k+f})q^{k+r-j}\right. \\
& + \sum_{l=1}^{j-1}\Big[\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_r - v_{r+l}v_{r+f})q^{2r+l-j} + \sum_{k=r+1}^{r+l}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k - v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j} \\
& \left. + \sum_{k=r+l}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k - v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j} + \sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\;\lambda_f(v_{r+l+f}v_k - v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\Big]\right] \\
& + \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\left[\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=r}^{r+p-1}\lambda_j\lambda_f v_{np-p+j+l+f}v_k q^{k+np-p+l} + \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{k=np+1}^{np+p}\lambda_j\lambda_f v_{r+l+f}v_k q^{k+r+l-j}\right]
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\sum_{l=1}^{p-j}\left[\sum_{k=r+p}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})\, q^{k+np-p+l}\right. \\
& + \sum_{k=np+1}^{np+j}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l} \\
& \left. + \sum_{k=np+j+1}^{np+p}\lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\sum_{l=1}^{p-j}\left[\sum_{k=r+p}^{np} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})\, q^{k+np-p+l}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=np+j}^{np+p} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right]\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\sum_{l=1}^{p-j} q^{k+np-p+l}\left[\sum_{k=r+p}^{np} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=np+j}^{np+p} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{k+(np+j+l-k)}v_{np-p+j+l+f-(np+j+l-k)})\right] \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=np+j+1}^{np+p} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{f=0}^{p}\left[\sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=np+j+1}^{np+j+l} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{p-j}\sum_{k=np+j+l}^{np+p} \lambda_j\lambda_f(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p})q^{k+np-p+l}\right]\\
&= 0 \quad \text{par le changement } l' = k-np-j \text{ et } k' = l+j+np \text{ au deuxième terme.}
\end{aligned}$$

La sommation (3.16) a des coefficients positif par la log-concavité de $\{v_k\}_k$, et que le premier terme de (3.16) donne :

Si $np-p+j+l+f \leq k$, alors

$$\begin{aligned}
(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p}) &= (v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{k+(np+j+l-k)}v_{np-p+j+l+f-(np+j+l-k)})\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

,

sinon, $(v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np+j+l}v_{k+f-p}) = (v_{np-p+j+l+f}v_k - v_{np-p+j+f+(p-f)}v_{k-(p-f)}) \geq 0.$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{f=1}^{p}\sum_{k=r+1}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}\\
&+\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\Bigg[\sum_{k=r+1}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}+\sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}\\
&+\sum_{l=1}^{j-1}\Big[\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_r-v_{r+l}v_{r+f})q^{2r+l-j}+\sum_{k=r+1}^{r+l}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\\
&+\sum_{k=r+l}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}+\sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\ \lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\Big]\Bigg]\\
=\ &\sum_{f=1}^{p}\sum_{k=r+1}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}+\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}\\
&+\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=r+j}^{np}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{k=r+1}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+f}v_k-v_rv_{k+f})q^{k+r-j}\\
&+\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{l=1}^{j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_r-v_{r+l}v_{r+f})q^{2r+l-j}\\
=\ &0 \ \text{ par le changement } k'=l+r \ \text{ au deuxième terme}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=r+1}^{r+l}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\\
&+\sum_{j=2}^{p}\sum_{f=1}^{p}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=r+l}^{r+j-1}\lambda_j\lambda_f(v_{r+l+f}v_k-v_{r+l}v_{k+f})q^{k+r+l-j}\\
=\ &0 \ \text{ par le changement } k'=l+r \text{ et } l'=k-r \text{ au deuxième terme.}
\end{aligned}$$

La sommation (3.17) a des coefficients positif par la log-concavité de $\{v_k\}_k$.

Par conséquence , le polynôme $\mathcal{A}^2_{p,r}(n;q)-\mathcal{A}_{p,r}(n-1;q)\mathcal{A}_{p,r}(n+1;q)$ a des coefficients positifs. Donc, le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est LC-positif.

Il est clair que le p-triangle réciproque $\{a^*_p(n,k)\}$ possède la même propriété que $\{a_p(n,k)\}$. Ainsi $\{a^*_p(n,k)\}$ est LC-positif. Enfin, le p-triangle $\{a_p(n,k)\}$ est double LC-positif. $\square$

Dans le Théorème 78, en prenant $\lambda_j = 1$ pour tout $j=\overline{1..p}$ et $a_p(n,k)=\binom{a-n}{b-k}_p$ pour $0\le k\le np$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 79 *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $a \geq b$. Si les suites $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont log-concaves alors la suite :*

$$z_n = \sum_{k=0}^{np} \binom{a-n}{b-k}_p x_k y_{np-k}, \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

est aussi log-concave.

Preuve. On sait que $\binom{a-n}{b-k}_p = \sum_{j=0}^{p} \binom{a-n-1}{b-k-j}_p$ via la relation de récurrence longitudinale (3.10). Donc pour $v_k = \binom{a-(n+1)}{b-k}_p$, et $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_p = 1$, alors $a_p(n+1, k) = \binom{a-(n+1)}{b-k}_p$. Ainsi, $\{\binom{a-n}{b-k}_p\}$ est double-PLC. Par conséquent la suite $\{z_n\}$ est log-concave. $\square$

Conjecture 80 *Le triangle $\{\binom{n}{k}_p \binom{a-n}{b-k}_p\}$ est PLC et double-PLC.*

Nous avons vérifié cette conjecture numériquement, ce qui à fait l'objet de l'annexe 1.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la log-concavité des suites numériques, plus précisément la préservation de la log-concavité, ce qui nous a permis d'aborder avec aisance le concept d'unimodalité, telles que les suites numériques liées aux triangles de Pascal ordinaire et généralisé.

Au premier chapitre, nous avons exploité les concepts et outils qui permettent d'assurer la préservation de la log-concavité. Pour ce faire, nous avons introduit le concept de la log-concavité positive qui nous a permis, sous certaines conditions, d'assurer la préservation de la log-concavité des suites. Essentiellement, Wang et Yeh [44] ont proposé deux applications aux opérateurs linéaires d'ordre deux, la première nous a permis de voir que les triangles $\{\binom{n}{k}\}$ et $\{\binom{a+n}{b+k}\}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b$ sont PLC et double PLC, ainsi que le triangle constant, le second résultat nous a permis de constater aussi que le triangle $\{\binom{a-n}{b-k}\}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b$ est PLC et double PLC. On a aussi compris que les triangles ordinaires ne peuvent prendre en charge que les opérateurs linéaires d'ordre deux.

Au deuxième chapitre, nous avons abordé le problème d'unimodalité des polynômes. Nous avons commencé par des préliminaires sur les suites unimodales. Nous avons vu la notion de préservation pour l'unimodalité des polynômes. Ainsi, le polynôme $P(x+\alpha)$ pour les deux cas α entier et α réel positif reste unimodal lorsque $P(x)$ est unimodal. Nous avons abordé aussi dans ce chapitre la notion de polynôme log-concave. Dans certains cas, on a été capable de spécifier le mode ou les modes éventuels.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons proposé d'étendre certains résultats présentés au premier chapitre à des triangle plus généraux. Principalement, nous avons abordé la propriété PLC, ainsi la LC-positivité dans les p-triangles comme le cas du triangle de Pascal généralisé issu des coefficients bi^{q}nomiaux. Comme pour le chapitre premier nous avons établi des théorèmes de préservation de la log-concavité, et nous avons proposé deux applications aux opérateurs linéaires d'ordre p. Dans la première, on a pu établir que les triangles $\{\binom{n}{k}_p\}, \{\binom{a+n}{b+k}_p\}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b$ sont PLC et double PLC. La seconde, nous a permis de montrer que le triangle $\{\binom{a-n}{b-k}_p\}$

où $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq .b$ est PLC et double PLC.

Nous terminons notre travail par la conjecture suivante : Les triangles $\{\binom{n}{k}_p\}\{\binom{a-n}{b-k}_p\}$ est PLC et double PLC.

Annexe 1 : Vérification numérique de la conjecture 82 par un programme en Delphi

Vérification numérique de la conjecture par un programme en Delphi

Le programme suivant en Delphi vérifie numériquement notre conjecture.

unit Unit1 ;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,

Dialogs, StdCtrls, Grids, System.ComponentModel, Borland.Vcl.ExtCtrls ;

type

TForm1 = class(TForm)

bin : TStringGrid ; S : TStringGrid ; Label5 : TLabel ; d : TStringGrid ;

Panel1 : TPanel ; Edit1 : TEdit ; Edit2 : TEdit ; Edit3 : TEdit ; Edit4 : TEdit ;

Label1 : TLabel ; Label2 : TLabel ; Label3 : TLabel ; Label4 : TLabel ; Panel2 : TPanel ;

Edit5 : TEdit ; Label6 : TLabel ; Edit6 : TEdit ;Label8 : TLabel ; Label9 : TLabel ; Button1 : TButton ;

procedure Edit1Change(Sender : TObject) ;

procedure Edit2Change(Sender : TObject) ;

procedure Edit3Change(Sender : TObject) ;

```
procedure Edit4Change(Sender : TObject) ;
procedure Button1Click(Sender : TObject) ;
private
{ Déclarations privées }
public
{ Déclarations publiques }
end ;
var
Form1 : TForm1 ;
n,a,b,p :integer ;
implementation
{$R *.dfm}
procedure TForm1.Edit1Change(Sender : TObject) ;
begin
n :=strtoint(edit1.Text) ;
end ;
procedure TForm1.Edit2Change(Sender : TObject) ;
begin
a :=strtoint(edit2.Text) ;
end ;
procedure TForm1.Edit3Change(Sender : TObject) ;
begin
if (a-n)<=0 then
showmessage('changer la valeur de a') ;
b :=strtoint(edit3.Text) ;
If b > a then
begin
```

```
showmessage('b est superieur à a, changr le');
end; end;
procedure TForm1.Edit4Change(Sender : TObject);
var sm,sl,k,i,j :integer;
begin
p :=strtoint(edit4.Text);   S.ColCount :=(n+1)*p+1;
label9.Caption :='Le '+inttostr(p)+'-triangle'; bin.ColCount :=(n+1)*p+1;
bin.RowCount :=n+2;
for i :=0 to bin.RowCount-1 do
bin.Cells[0,i] :='1';
for j :=1 to bin.ColCount-1 do
bin.Cells[j,0] :='0';
for i :=1 to bin.RowCount-1 do
begin
for j :=1 to bin.ColCount-1 do
begin
sm :=0;
if j-p>=0 then
begin
for k := j-p to j do
sm :=sm+strtoint(bin.Cells[k,i-1]);   bin.Cells[j,i] :=inttostr(sm);
end
else
begin
for k := 0 to j do
sm :=sm+strtoint(bin.Cells[k,i-1]);    bin.Cells[j,i] :=inttostr(sm)
end; end;  end;
```

```
///////////
d.ColCount :=b+1 ;   d.RowCount :=a-n+2 ;
for i :=0 to d.RowCount-1 do
d.Cells[0,i] :='1' ;
for j :=1 to d.ColCount-1 do
d.Cells[j,0] :='0' ;
for i :=1 to d.RowCount-1 do
begin
for j :=1 to d.ColCount-1 do
begin
sl :=0 ;
if j-p>=0 then
begin
for k := j-p to j do
sl :=sl+strtoint(d.Cells[k,i-1]) ;   d.Cells[j,i] :=inttostr(sl) ;
end
else
begin
for k := 0 to j do
sl :=sl+strtoint(d.Cells[k,i-1]) ;  d.Cells[j,i] :=inttostr(sl)
end ; end ; end ; end ;
procedure TForm1.Button1Click(Sender : TObject) ;
var sum1,sum2,sum3,sum11,sum21,sum31 :int64 ;
i :integer ;
t :boolean ;
begin
i :=1 ;   t :=true ;
```

```
while (i<=s.ColCount-2)and(t=true) do
begin
if(sqr(strtoint(s.Cells[i,0]))-strtoint(s.Cells[i-1,0])*strtoint(s.Cells[i+1,0])) >=0 then
i :=i+1
else
t :=false;
end;
if t= false then showmessage('changer la suite, car elle n''est pas LC')
else
begin
sum1 :=0;
for i :=0 to n*p do
if b-i>=0 then
sum1 :=sum1+strtoint(bin.Cells[i,n])*strtoint(d.Cells[b-i,a-n])*strtoint(s.Cells[i,0])
else
sum1 :=sum1;   sum2 :=0;
for i :=0 to (n-1)*p do
if b-i>=0 then
sum2 :=sum2+strtoint(bin.Cells[i,n-1])*strtoint(d.Cells[b-i,a-n+1])*strtoint(s.Cells[i,0])
else
sum2 :=sum2;  sum3 :=0;
for i :=0 to (n+1)*p do
if b-i>=0 then
sum3 :=sum3+strtoint(bin.Cells[i,n+1])*strtoint(d.Cells[b-i,a-n-1])*strtoint(s.Cells[i,0])
else
sum3 :=sum3;
edit5.Text :=inttostr(sqr(sum1)-sum2*sum3);
```

```
sum11 :=0;
for i :=0 to n*p do
if b-n*p+i>=0 then
sum11 :=sum11+strtoint(bin.Cells[n*p-i,n])*strtoint(d.Cells[b-n*p+i,a-n])
*strtoint(s.Cells[n*p-i,0])
else
sum11 :=sum11;   sum21 :=0;
for i :=0 to (n-1)*p do
if b-(n-1)*p+i>=0 then
sum21 :=sum21+strtoint(bin.Cells[(n-1)*p-i,n-1])*strtoint(d.Cells[b-(n-1)*p+i,a-n+1])
*strtoint(s.Cells[(n-1)*p-i,0])
else
sum21 :=sum21;  sum31 :=0;
for i :=0 to (n+1)*p do
if b-(n+1)*p+i>=0 then
sum31 :=sum31+strtoint(bin.Cells[i,n+1])*strtoint(d.Cells[b-(n+1)*p+i,a-n-1])
*strtoint(s.Cells[(n+1)*p-i,0])
else
sum31 :=sum31;
edit6.Text :=inttostr(sqr(sum11)-sum21*sum31);
If (strtoint(edit5.Text)>=0) and (strtoint(edit6.Text)>=0) then
showmessage('Le triangle est PLC et double PLC')
end; end;
end.
```

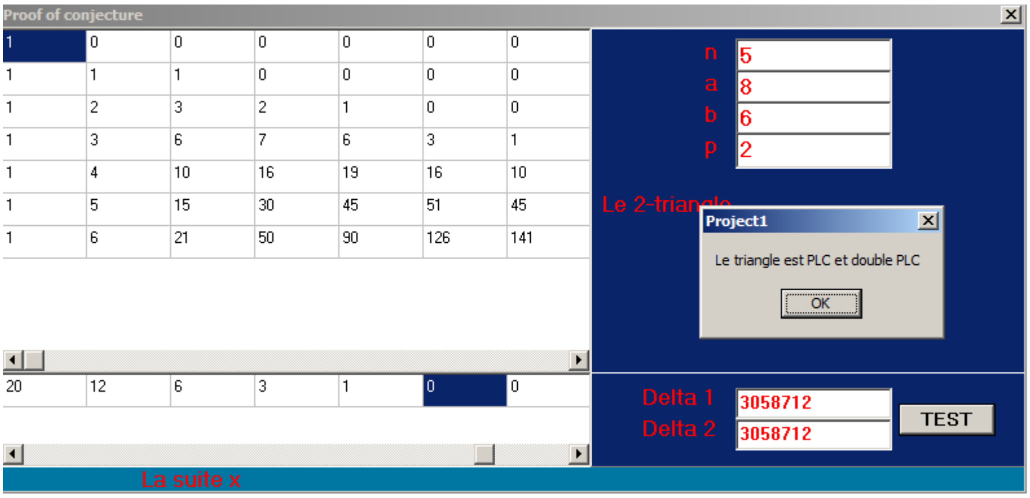
Exécutant ce programme, nous proposons les deux exemples suivant :

Exemple 81 *Soient* $(n, p) = (5, 2), (a, b) = (8, 6)$, *et les valeurs de la suite log-concave* $\{x_k\}_k$ *sont données dans le tableau suivant*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_k	1	2	4	8	11	15	20	12	6	3	1	0	0

TAB. 3.1 – Table des différents valeurs de la suite $\{x_k\}_k$

Selon l'exécutable suivant



Nous obtenons le tableau suivant

n	a	b	p	$\triangle_n^1$	$\triangle_n^2$	Propriété du triangle
5	8	6	2	3058712	3058712	PLC et double PLC

TAB. 3.2 – La valeur de $\triangle_n^1$ et $\triangle_n^2$

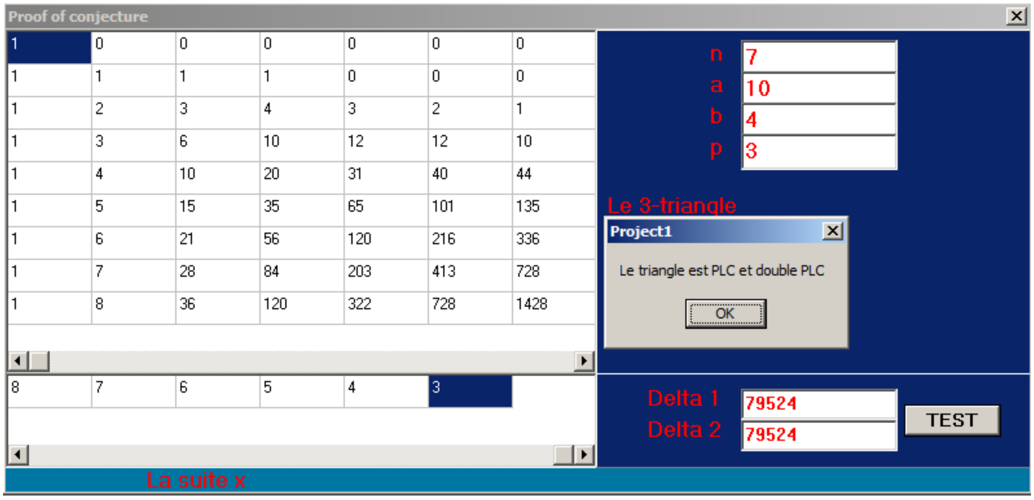
Exemple 82 *Soient* $(n,p) = (7,3), (a,b) = (10,4)$, *et les valeurs de la suite log-concave* $\{x_k\}_k$ *sont données dans le tableau suivant*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	13

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

TAB. 3.3 – Table des différents valeurs de la suite $\{x_k\}_k$

Selon l'exécutable suivant



Nous obtenons le tableau suivant

n	a	b	p	$\triangle_n^1$	$\triangle_n^2$	Propriété du triangle
7	10	4	3	79524	79524	PLC et double PLC

TAB. 3.4 – La valeur de $\triangle_n^1$ et $\triangle_n^2$

Bibliographie

[1] M. Aissen, I. J. Schoenberg, A. Whitney, *On generating functions of totally positive sequences*, I, J. Analyse Math. 2 (1952) 93–103.

[2] J. Alvarez, M. Amadis, L. Rosales, *Unimodality and log-concavity of polynomials.* Leobardo Rosales.University of California. San Diego, (August 10, 2000), 97–114.

[3] J. Alvarez, M. Amadis, G. Boros, D. Karp, V. H. Molland, L. Rosales, *An extension of a criterion for unimodality*, Electron. J. Combin. 8 (2001).

[4] M. Balazard, *Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2) 2 (1990), no. 1, 13–30.

[5] H. Belbachir, F. Bencherif, L. Szalay, *Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficients*, J. Integer Seq. 10 (2007), Article 07. 2. 3.

[6] H. Belbachir, *Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques. Université USTHB Alger*, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques (Décembre 2007).

[7] H. Belbachir, L. Szalay, *Unimodal rays in the regular and generalized Pascal triangles*, J. of Integer Seq., Vol. 11, Art. 08.2.4. (2008).

[8] H. Belbachir, S. Bouroubi, A. Khelladi, *Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution*, Annales Mathematicae et Informaticae, 35 (2008) pp. 21–30.

[9] M. Benoumhani, *Sur une propriété des polynômes à racines négatives*, J. Math. Pures Appl., 75 (1996), 85–105.

[10] M. Benoumhani, *A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers*, J. Integer Seq., 6 (2003), Article 03.2.1.

[11] G. Boros, V. H. Moll, *A criterion for unimodality.* Elec. Journal of Combinatorics 6, R10, (1999).

[12] F. Brenti, *Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 413 (1989).

[13] F.Brenti, *Log-concave and unimodal sequence in algebra, combinatorics and geometry* : an update. Elec. Contemp. Math. 178 (1994,1997), 71–84.

[14] B. A. Brondarenko, *Generalized Pascal triangles and pyramids, their fractals, graphs and applications*, The Fi- bonacci Association, Santa Clara (1993), Translated from Russian by R.C. Bollinger.

[15] L. M. Butler, *The q-log-concavity of q-binomial coefficients*, J. Combin. Theory Ser. A 54 (1990) 54–63.

[16] L. Comtet, *Analyse combinatoire.* Puf, Coll. Sup. Paris, (1970), Vol. 1 et Vol. 2.

[17] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, Reidel, Dordrecht, (1974).

[18] S. Dharmadhikari, K. Joak-Dev, *Unimodality, Convexity and Applications*, Academic Press, Boston, MA (1988).

[19] R. Ehrenborg, E. Steingrimsson, *The excedance set of a permutation*, Adv. Appl. Math. 24 (2000) 284–299.

[20] P. Erdös, *Verallgemeinerung eines elementar-zahlentheoretischen Satzes von Kürschák. (Generalization of an elementary number-theoretic theorem of Kürschák.)*, Mat. Fiz. Lapok 39, (1932) 17–24.

[21] J. H. Hammersley, *The sum of the products of natural numbers*, Proceeding of the London M. S. (1951), 435–452.

[22] C. Krattenthaler, *On the q-log-concavity of Gaussian binomial coefficients*, Monatsh. Math. 107 (1989) 333–339.

[23] S. Karlin, *Total Positivity*, Vol.I, Stanford University Press, (1968).

[24] P. Leroux, *Reduced matrices and q-log-concavity properties of q-Stirling numbers*, J. Combin. Theory Ser. A 54 (1990) 64–84.

[25] T. M. Liggett, *Ultra log concave sequence and negative dependence*, J. Combin. Theory Ser. A 79 (1997) 315–325.

[26] K. V. Menon, *On the convolution of logarithmically concave sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 439–441.

[27] A. de Moivre, *The doctrine of chances, (.rst ed. 1718 and second ed. 1738)*, eprinted by Chelsea, N. Y (1967), Third edition (1756).

[28] A. de Moivre, *Miscellanca Analytica de Scrichus et Quadraturis*, J. Tomson and J. Watts, London, (1731).

[29] R. Pemantle, *Towards a theory of negative dependence*, J. Math. Phys. 41 (2000) 1371–1390.

[30] B. E. Sagan, *Inductive proofs of q-log concavity*, Discrete Math. 99 (1992) 289–306.

[31] B. E. Sagan, *Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi- Trudi determinants*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992) 795–811.

[32] N. J. A. Sloane, *The online Encyclopedia of Integer sequences*, Published electronically at http ://www.research.att.com / njas/sequences, (2009).

[33] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989) 500–534.

[34] R. P. Stanley, *Positivity problems and conjectures in algebraic combinatorics, Mathematics : frontiers and perspectives*, (2000) 295–319, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[35] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodality sequence of binomial coefficients*, Discrete Math. 9 (1974) 79–89.

[36] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodal sequence of binomial coefficients II*, J. Combin. Inform. System Sci. 1 (1976) 81–91.

[37] X.-T. Su, Y. Wang, *On unimodality problems in Pascal's triangle, arxiv :0809.1579v1 [math.CO], (Septembre 2008).*

[38] D. W. Walkup, *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probability 13 (1976) 76–85.

[39] D. G. Wagner, *Total positive of Hadamard products*, J. Math. Anal. Appl. 163 (1992) 459-483.

[40] D. W. Walkup, *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probability 13 (1976) 76–85.

[41] Y. Wang, *Proof of a conjecture of Ehrenborg and Steingrimsson on excedance statistic*, European J. Combin. 23 (2002) 355–365.

[42] Y. Wang, *Linear transformations preserving log-concavity*, Linear Algebra Appl. 359 (2003) 162–167.

[43] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Proof of a conjecture on unimodality*, European J. Combin. 26 (2005) 617–627.

[44] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Log-concavity and LC-positivity*, J. Combin. Theory Ser. A, 114 (2007) 195–210.

[45] H. S. Wilf, *Generating functionology*, 2nd ed., Academic Press, Boston, 1994.

[46] Z. Yahi. *Sur la concavité des moyennes graduées dans le treillis des partitions d'un ensemble.. Université USTHB Alger*, Magister en Mathématiques spécialité Recherche Opérationnelle (Juin 2008).

[47] H. Zhang, *Two Linear Transformations Preserving Log-Concavity*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, (2008), no. 5, 223–228.