

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENE  
Faculté de Mathématique



THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**En : MATHÉMATIQUE**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle et Management**

**Par : KERBOUI Roumeissa**

**Thème**

**MÉTHODES MULTICRITÈRES ET DEGRÉ DE DOMINANCE :**

**Amélioration et phénomène d'inversion de rang**

Soutenue publiquement, le **30/11/2025**, devant le jury composé de :

M. MOULAÏ Mustapha	Professeur	à l'USTHB	Président
M. ABBAS Moncef	Professeur Emérite	à l'USTHB	Directeur de thèse
M. PIRLOT Marc	Professeur	à l'UMONS	Examineur
M. SADOUN Mohamed	Maitre de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur
M. BOUZID Mouaouia Cherif	Maitre de Conférences/A	à l'ENSTA, dergana	Examineur

# Dédicace

À mon père,  
pour tout ce qu'il m'a transmis, et qui continue à me guider chaque jour.

À ma mère,  
pour son amour inconditionnel, sa patience et ses prières silencieuses.

À mon époux,  
pour sa compréhension, son soutien constant et sa présence rassurante à mes côtés.

À mes deux enfants,  
dont les sourires et l'amour m'ont donné la force d'avancer, même dans les moments les plus difficiles.

À mes sœurs et mon frère,  
pour leur affection et leurs encouragements.

Avec toute ma reconnaissance.

# Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide, le soutien et les encouragements de nombreuses personnes à qui j'adresse ici mes plus sincères remerciements.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes professeurs qui m'ont guidée tout au long de ces années de recherche, et dont les orientations ont permis de faire aboutir ce modeste travail.

Je remercie particulièrement mon directeur de thèse, **Pr. ABBAS Moncef**, pour sa précieuse guidance, sa disponibilité, ses conseils avisés et son accompagnement constant tout au long de ce travail. Ses remarques pertinentes et son exigence scientifique ont été pour moi une source de motivation et de rigueur.

Mes remerciements vont également à **Pr. PIRLOT Marc**, pour son soutien technique, ses orientations méthodologiques et ses encouragements continus durant ces années de recherche.

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude à ma famille pour son soutien moral et affectif indéfectible.

À ma grande et petite famille : **ma mère** et **mon père**, pour leur amour inconditionnel, leurs prières et leur confiance en moi. À mon époux, **DALI Ali**, merci pour ta patience, ta compréhension et ton soutien constant durant les moments les plus intenses de ce parcours. À mes deux enfants, **Wael** et **Rym**, votre innocence, vos sourires et votre amour ont été ma source quotidienne d'énergie et de motivation. À mon frère, **Walid**, ainsi qu'à mes sœurs, **Marya** et **Hiba**, je vous remercie sincèrement pour votre soutien et vos encouragements tout au long de cette aventure.

À toutes celles et ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail, je vous adresse ma profonde reconnaissance.



## ملخص

تندرج هذه الأطروحة ضمن مجال دعم اتخاذ القرار متعدد المعايير AMCD، والذي يهدف إلى تقييم البدائل وفق عدة معايير غالباً ما تكون متضاربة، من أجل تحديد الحل الأنسب للمقايضة. وقد سعينا لتحسين بعض طرق الترتيب، وبالأخص طريقة PROMETHEE II، من خلال دمج معاملات التجميع المتقدمة. علاوة على ذلك، قمنا بتعميق دراسة الطريقة القائمة على درجة الهيمنة المطبقة على معطيات على شكل مجالات، من خلال فحص تأثيرها على الترتيب وعلى ظاهرة انعكاس الترتيب. تسهم الإضافات المنهجية المقترحة في تعزيز كل من متانة النماذج القرارية وقابليتها للتفسير. وتبرز النتائج المحصل عليها فعالية هذه الأساليب في تقليل حالات انعكاس الترتيب وتحسين اتساق الترتيبات. وأخيراً، تتضمن آفاق البحث المستقبلي توسيع تطبيق هذه الأساليب إلى سياقات قرارية أخرى وكذلك إلى أنظمة التوصية.

**الكلمات المفتاحية :** دعم اتخاذ القرار متعدد المعايير، طرق الترتيب، معاملات التجميع، انعكاس الترتيب، نماذج القرار.

## Abstract

This thesis focuses on multi-criteria decision aiding (MCDA), which involves evaluating multiple, sometimes conflicting, criteria to make optimal decisions. It aims to enhance outranking methods, particularly PROMETHEE II, by integrating advanced aggregation operators. Additionally, it studies the dominance degree applied to interval data, analyzing its impact on ranking and rank reversal phenomena. The proposed methodological improvements increase the robustness and interpretability of decision-making models. The results demonstrate the effectiveness of these approaches in reducing rank reversals and improving ranking consistency. Future work could extend these methods to other decision-making contexts and recommendation systems.

**Keywords:** Multi-criteria decision aiding (MCDA), Outranking methods, Aggregation operators, Rank reversal, Decision-making models.

## Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de l'aide multicritère à la décision (AMCD), qui vise à évaluer des alternatives selon plusieurs critères, souvent contradictoires, afin d'identifier la solution de meilleur compromis. Nous avons cherché à améliorer certaines méthodes de surclassement, en particulier PROMETHEE II, par l'intégration d'opérateurs d'agrégation avancés. Par ailleurs, nous avons approfondi l'étude de la méthode fondée sur le degré de dominance appliqué aux données intervalles, en examinant son influence sur le classement et sur le phénomène d'inversion de rang. Les contributions méthodologiques proposées renforcent à la fois la robustesse et l'interprétabilité des modèles décisionnels. Les résultats obtenus mettent en évidence l'efficacité de ces approches pour réduire les inversions de rang et améliorer la cohérence des classements. Enfin, des perspectives de recherche future portent sur l'extension de ces méthodes à d'autres contextes décisionnels ainsi qu'à des systèmes de recommandation.

**Mots clés :** Aide à la décision multicritère, Méthodes de surclassement, Opérateurs d'agrégation, Inversion de rang, Modèles de décision.

# Table des matières

Table des figures	i
Liste des tableaux	iii
Introduction Générale	1
1    Préliminaires à l'aide multicritère à la décision	4
1.1    Introduction	4
1.2    Méthodologie d'aide à la décision	6
1.2.1    Processus de décision et aide à la décision	6
1.2.2    Approches d'aide à la décision	7
1.2.3    Les étapes d'une méthodologie d'aide à la décision	9
1.3    Aide multicritère à la décision	11
1.3.1    Les Alternatives et les Critères	12
1.3.2    Les différentes problématiques multicritères	19
1.3.3    Critère et famille de critères	22
1.3.4    Échelles et signifiante	25
1.4    Dépendances entre critères	28
1.4.1    Dépendances au sens des préférences	28
1.4.2    Synergie positive	28
1.4.3    Synergie négative	29
1.4.4    Antagonisme	29
1.4.5    Dépendances au sens structurel	29
1.5    Prise en compte et évolution des profils de préférences dans la décision multicritère	30
1.6    Apprentissage de profils/préférences	31
1.6.1    Exploitation des profils/préférences	32
1.6.2    Apprentissage par renforcement pour les profils utilisateurs	33
1.7    Désagrégation et agrégation avec indépendance des critères	33
1.7.1    Opérateurs de désagrégation	33
1.7.2    Opérateurs d'agrégation	35
1.7.3    Comparaison d'éléments	36
1.8    Désagrégation/ Agrégation avec Interaction entre les Critères	36

1.8.1	L'importance des interactions entre critères	37
1.9	Utilisation des intégrales floues et des interactions	37
1.9.1	Agrégation des critères	38
1.9.2	Description de l'étape d'agrégation des critères	38
1.9.3	Méthode par système expert / règles de production	40
1.9.4	Mesures floues	40
1.9.5	L'intégrale de Choquet	41
1.9.6	Approches d'élicitation	43
1.9.7	Mise en œuvre	45
1.10	Conclusion	46
2	Méthodes multicritères et structuration des alternatives par agrégation et clustering	48
2.1	Introduction	48
2.2	Typologie des problèmes de décision multicritère	49
2.2.1	Les différents problèmes multicritères	49
2.2.2	Les différentes problématiques multicritères	49
2.3	Typologie des modèles de décision multicritère	49
2.3.1	Les structures de préférences	49
2.3.2	Procédures d'agrégation multicritère	50
2.3.3	Les écoles de méthodes multicritères	51
2.4	Les Méthodes Multicritères : Procédure d'Agrégation Multicritère	51
2.5	Typologie des Méthodes selon les Préférences du Décideur	51
2.6	Exemples de Méthodes de Décision Multicritère (Méthodes scalaires)	52
2.6.1	Méthode de la Somme Pondérée	52
2.6.2	Théorie de l'Utilité Multi-Attribut (MAUT)	52
2.6.3	Méthode AHP : Processus Analytique Hiérarchique	53
2.7	Méthodes de surclassement	54
2.7.1	Méthode ELECTRE	55
2.7.2	Méthode PROMETHEE	57
2.8	Clustering	64
2.8.1	Clustering & Classification	65
2.8.2	Étapes du Clustering	67
2.8.3	Différents Types de Clustering	67
2.8.4	Techniques de Clustering	68
2.8.5	Critères d'Évaluation	68

2.8.6	Défis du Clustering pour les Données Massives	69
2.8.7	Méthodes de Clustering pour les Big Data	69
2.9	Différents Types de Clusters	70
2.10	Méthodes de Clustering	70
2.10.1	Principales Étapes du Clustering	71
2.10.2	Types d'Algorithmes de Clustering	71
2.10.3	Applications du Clustering	72
2.10.4	Outils et Techniques Complémentaires	72
2.11	Validité du Clustering	73
2.12	Algorithme K-means	73
2.12.1	Propriétés et Avantages de K-means	74
2.12.2	Limites de K-means	74
2.12.3	Améliorations de l'algorithme K-means	75
2.12.4	Applications de K-means	75
2.12.5	Aperçu des Méthodes de Clustering	75
2.12.6	Algorithmes de Clustering	76
2.12.7	Clustering Fuzzy C-Means (FCM)	76
2.13	Définition du Problème de Clustering en MCDA	77
2.13.1	Méthodologie Proposée	78
2.13.2	Algorithme K-means Modifié	78
2.14	Nouvelle Méthode de Clustering Hiérarchique sur des Données d'Intervalle	87
2.14.1	Problème de Clustering Hiérarchique	88
2.14.2	Méthodologie Proposée	89
2.15	Conclusion Générale	92
3	Étude de variantes d'une méthode de classement basée sur le degré de dominance : robustesse et phénomène d'inversion de rang	94
3.1	Introduction	94
3.1.1	Problématique et Approches Multicritères	94
3.1.2	Objectifs et Contributions	95
3.2	Positionnement par rapport à l'état de l'art	96
3.2.1	Le phénomène d'inversion de rang (Rank Reversal )	96
3.2.2	Méthodes résistantes aux inversions de rang	97
3.2.3	Prise en compte de l'incertitude dans l'AMCD	99
3.2.4	Poids des critères	100
3.3	Définitions et Notations	100

3.4	Classement des données d'intervalles à l'aide du degré de dominance	102
3.4.1	Propriétés du degré de dominance	102
3.5	Inversion de classement lors du retrait ou de l'ajout d'un objet	104
3.6	Réformulation Préliminaire	105
3.6.1	Suppression d'un objet	107
3.6.2	Cas d'inversion de classement	108
3.6.3	Ajout d'un objet	111
3.6.4	Proposition concernant l'ajout d'un objet	112
3.6.5	Résumé et proposition sur l'ajout d'un objet	113
3.7	Degré de domination	114
3.7.1	Définitions et propriétés	115
3.7.2	Cas d'inversion de classement	117
3.8	Degré de dominance nette	119
3.8.1	Définitions et propriétés	120
3.8.2	Cas d'inversion de classement	122
3.9	Étude expérimentale	125
3.9.1	Paramétrage des simulations	126
3.9.2	Résultats des simulations	126
3.9.3	Observations et commentaires	130
3.10	Comparaison des classements obtenus par différentes méthodes	132
3.10.1	Exemple	133
3.10.2	Résultats expérimentaux	135
3.11	Comment et quand utiliser ces méthodes	136
3.11.1	Interprétation des méthodes fondées sur le degré de dominance	136
3.11.2	Rendre les méthodes fondées sur le degré de dominance plus résistantes aux inversions de classement (RR)	137
3.12	Discussion	139
3.12.1	Résumé	139
3.12.2	Quand et comment utiliser ces méthodes	141
3.12.3	Perspectives	142
3.13	Conclusion	144
	Conclusion	148
	Bibliographie	150
	Annexe A	A

# Table des figures

1.1	Cycle d'apprentissage de préférences	31
2.1	Hierarchie décisionnelle pour l'achat d'une voiture selon AHP	53
2.2	Arbre de classification	67
2.3	Séquence hiérarchique des différentes méthodes de clustering	68
2.4	Structures potentielles du clustering en MCDA.	78
2.5	Premier clustering en 3 groupes en 25,47 secondes avec 3 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means	83
2.6	Premier clustering en 4 groupes en 40,1273 secondes avec 4 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means	84
2.7	Premier clustering en 5 groupes en 42,99746 secondes avec 6 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means	85
2.8	Premier clustering en 3 groupes avec 1000 actions et 15 critères en 3,5 minutes avec 15 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-means	86
2.9	Premier clustering en 4 groupes avec 2000 actions et 15 critères en 53 secondes avec 25 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-means	86
2.10	Premier clustering en 5 groupes avec 1000 actions et 15 critères comparé au clustering obtenu avec K-means	87
2.11	Dendrogramme du clustering pour de l'exemple 2.15	91
3.1	Organigramme du processus de simulation	128

# Liste des tableaux

1.1	Exemple d'association d'éléments et de notes	46
2.1	Matrice de comparaison par paires des critères (Prix vs Confort)	54
2.2	Types de fonctions de préférence dans la méthode PROMETHEE	59
2.3	Résultats pour le cas ELECTRE	62
2.4	Résultats pour le cas Tebessa12	63
2.5	Résultats pour le cas BRANS85	64
2.6	Résultats pour le cas Serbie13	65
2.7	Résultats pour le cas Tlemcen10	66
2.8	Matrice de performance pour l'évaluation du type de régime démocratique des pays	80
2.9	Clustering de 24 pays avec K-Means Choquet (KMC) pour $k = 3, 4, 5$	81
2.10	Représentation de chaque cluster par la capacité obtenue à l'aide du modèle quadratique	82
2.11	Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour $m = 3$ critères et $n = 20, 50, 100, 150$	82
2.12	Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour $m = 5$ critères et $n = 50, 100, 150, 200$	83
2.13	Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour $m = 10$ critères et $n = 20, 50, 100, 150, 200, 500, 1000$	84
2.14	Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour $m = 15$ critères et $n = 20, 50, 100, 150, 200, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 5000$	86
2.15	Système d'information par intervalles	91
3.1	Matrice d'évaluations intervalle des objets selon $m$ critères.	101
3.2	Exemple 3. Classement : $c \sim a > f > b > e > d$	109
3.3	Cas 3.6.2.1 : Suppression de $a$ . Classement : $c >_{-a} b >_{-a} f >_{-a} e >_{-a} d$	110
3.4	Exemple 4 : Évaluations des objets.	110
3.5	Cas 3.6.2.2 : Suppression de $i$ de l'Exemple 4. Le classement résultant est : $h >_{-i} g >_{-i} b >_{-i} a >_{-i} c \sim_{-i} d \sim_{-i} e \sim_{-i} f$	110
3.6	Exemple 5.	118

3.7	Cas 3.7.2.1 : Retrait de a de l'Exemple 5. Le classement obtenu est $b >_{-a} c \sim_{-a} f >_{-a} g >_{-a} d >_{-a} e$	119
3.8	Cas 3.7.2.3 : Retrait de g de l'Exemple 5. Le classement obtenu est $b >_{-g} a \sim_{-g} f >_{-g} c >_{-g} d >_{-g} e$	119
3.9	Exemple 3 avec le degré de dominance net	125
3.10	Retrait de c de l'exemple 3. Le classement résultant est : $a \sim_{*c} e \sim_{*c} f \sim_{*c} b \sim_{*c} d$	125
3.11	Nombre de RR et SRR observés pour DataSet1 généré par le schéma de simulation 1, 100 répétitions.	129
3.12	Nombre de RR et SRR observés pour DataSet2 généré par le schéma de simulation 2, 100 répétitions.	130
3.13	Nombre moyen de paires dans la relation de dominance $\geq$ (en excluant les paires identiques) avec le schéma de simulation 1, 100 répétitions pour chaque cas	132
3.14	Nombre moyen de paires dans la relation de dominance $\geq$ (en excluant les paires identiques) avec le schéma de simulation 2, 100 répétitions pour chaque cas	132
3.15	Exemple avec 2 critères et 10 objets générés par le schéma de simulation 1	134
3.16	Score de Borda	134
3.17	Rangement des objets à l'aide des scores D, Dr, D* et de leur rang calculé	134
3.18	Coefficient tau de Kendall et nombre de paires à égalité	135
3.19	Rho de Spearman	135
3.20	Tau de Kendall pour $m = 2, 3$ et les schémas de simulation 1 et 2	135
3.21	Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec $m = 3$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	139
3.22	Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec $m = 5$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	140
3.23	Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec $m = 10$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	141
3.24	Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec $m = 3$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	142
3.25	Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de	

référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec $m = 5$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	143
3.26 Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec $m = 10$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	144
3.27 Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec $m = 3$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	145
3.28 Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec $m = 5$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	146
3.29 Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble A de taille $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence R de taille $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec $m = 10$ critères, et chaque cas est répété 500 fois	147
3.30 Nombre moyen de classes d'équivalence dans les classements obtenus par le degré de dominance (resp. le degré de domination et le degré de dominance net) pour $n$ alternatives, $n \geq 2$ , en présence d'un ensemble de référence de taille $r$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, chaque simulation étant répétée 500 fois.	147
A.1 Rho de Spearman pour $m = 2, 3$ et les schémas de simulation 1 et 2	C
A.2 Tau de Kendall pour $m = 5$ , schémas de simulation 1 et 2	D
A.3 Rho de Spearman pour $m = 5$ , schémas de simulation 1 et 2	D
A.4 Nombre de renversements de classement (RR) et de renversements stricts (BSRR) observés pour le jeu de données 1 avec la règle de Borda (100 répétitions). Les valeurs entre parenthèses indiquent le nombre de cas pour chaque position de l'objet supprimé.	D
A.5 Nombre de RR et BSRR observés pour le jeu de données 2 avec la règle de Borda (100 répétitions).	E

# Introduction Générale

La prise de décision multicritère occupe aujourd’hui une place centrale dans de nombreux domaines où les choix sont structurés par une pluralité de critères souvent conflictuels. L’aide multicritère à la décision (AMCD) vise ainsi à fournir un cadre rigoureux permettant d’évaluer, de comparer et de sélectionner des alternatives en tenant compte simultanément d’un ensemble de points de vue hétérogènes. Elle est mobilisée dans une large variété d’applications, telles que la gestion de projets, la planification stratégique, la sélection de fournisseurs, les politiques publiques, ou encore les systèmes de recommandation personnalisés. L’objectif fondamental de ces approches est de formaliser les préférences des décideurs et d’agrèger ces préférences selon une méthode méthodologiquement fiable pour produire un classement ou une sélection cohérente des options disponibles.

Si les méthodes multicritères sont largement utilisées et éprouvées, les approches classiques présentent néanmoins plusieurs limites importantes. Elles sont particulièrement sensibles aux variations dans l’ensemble des alternatives (effet dit de *rank reversal*), n’intègrent que partiellement les interactions possibles entre critères, et peinent à s’adapter aux évolutions naturelles des préférences des utilisateurs dans le temps. Ces défis, qui affectent directement la robustesse et la fiabilité des classements produits, motivent la recherche de nouvelles méthodologies capables d’apporter plus de stabilité, de flexibilité et de cohérence dans des environnements décisionnels de plus en plus complexes et dynamiques.

Dans ce contexte, la présente thèse propose des avancées méthodologiques selon deux axes complémentaires. Le premier concerne l’enrichissement des méthodes de surclassement, et en particulier PROMETHEE II, par l’intégration d’opérateurs d’agrégation avancés—tels que Bonferroni, Heronian, Harmonique ou Géométrique—permettant de mieux représenter les dépendances et les interactions entre critères. Le second axe est consacré à l’étude approfondie du degré de dominance appliqué à des évaluations sous forme d’intervalles. Cette analyse met en lumière son influence sur le phénomène d’inversion de rang (*rank reversal*) ainsi que sur la stabilité des classements lorsque les données sont imprécises ou incertaines.

L’objectif principal de cette thèse est donc de proposer des approches méthodologiques innovantes pour renforcer la fiabilité, la stabilité et la cohérence des classements en aide multicritère à la décision (MCDM). Plus précisément, nos contributions s’articulent autour

des objectifs suivants :

1. Intégrer des opérateurs d'agrégation avancés (Bonferroni, Heronian, Harmonique, Géométrique) dans la méthode PROMETHEE II pour mieux capter les interactions entre critères et améliorer la richesse de l'agrégation ;
2. Étudier et formaliser le degré de dominance dans le cas d'évaluations sous forme d'intervalles, en analysant précisément les situations d'inversion de rang (*rank reversal*) qu'il peut induire ou atténuer ;
3. Comparer, valider et analyser expérimentalement les performances des méthodes proposées sur des jeux de données réels et synthétiques.

Pour structurer les contributions développées dans cette thèse, le document est organisé en trois chapitres principaux après l'introduction :

- **Chapitre 1 : Fondements théoriques de la décision multicritère et modélisation évolutive des préférences.** Ce chapitre unifie les bases conceptuelles de l'aide multicritère à la décision et les principes de modélisation évolutive des préférences. Il présente, de manière intégrée, les notions essentielles de la décision multicritère ainsi que les mécanismes d'apprentissage et d'actualisation des profils utilisateurs.
  - les fondements conceptuels de l'aide multicritère à la décision (AMCD) ;
  - le processus de décision et les différentes approches méthodologiques (normative, descriptive, prescriptive et constructive) ;
  - les éléments fondamentaux tels que les alternatives, critères, dimensions, échelles, problématiques multicritères et dépendances entre critères ;
  - les principes d'apprentissage des préférences, les profils utilisateurs, le rangement, la classification et l'apprentissage par renforcement ;
  - les méthodes de désagrégation et d'agrégation, incluant les modèles additifs, multiplicatifs et les intégrales floues (notamment l'intégrale de Choquet) ;
  - les approches d'élicitation des capacités, les règles de production et la mise en œuvre des systèmes experts.

Ce chapitre constitue le socle théorique général sur lequel s'appuient les contributions méthodologiques proposées dans cette thèse.

- **Chapitre 2 : Méthodes multicritères classiques, structuration des alternatives et contributions méthodologiques.** Ce chapitre approfondit les méthodes multicritères classiques et leur articulation avec les techniques de structuration de données. Il présente :
  - les différentes typologies de problèmes (choix, tri, classement, description) et les modèles décisionnels associés ;

- les approches scalaires (somme pondérée, MAUT, AHP), les méthodes de surclassement (ELECTRE, PROMETHEE) et les relations de dominance ;
  - les techniques de clustering, notamment K-Means et Fuzzy C-Means, ainsi que leurs étapes de mise en œuvre ;
  - des contributions méthodologiques incluant un algorithme K-Means modifié et une méthode de clustering hiérarchique adaptée aux données intervalles.
- **Chapitre 3 : Étude du degré de dominance pour données intervalles et analyse du phénomène d'inversion de rang.** Ce chapitre s'intéresse aux évaluations exprimées sous forme d'intervalles et analyse :
- les effets de l'ajout ou de la suppression d'alternatives sur l'ordre final ;
  - le phénomène d'inversion de rang (*rank reversal*) et ses causes structurelles ;
  - les variations du degré de dominance (dominance brute, degré dominé, dominance nette) ;
  - une comparaison expérimentale avec d'autres méthodes, notamment la règle de Borda et les méthodes multicritères classiques.

L'ensemble de ces chapitres permet d'introduire et de développer de nouvelles méthodologies visant à renforcer la robustesse, la stabilité et la cohérence des classements multicritères, en particulier lorsque les critères interagissent, lorsque les données sont imprécises ou lorsque les préférences évoluent dans le temps. Les contributions proposées montrent que l'intégration d'opérateurs d'agrégation plus expressifs, ainsi que l'utilisation d'indicateurs de dominance adaptés aux données intervalle, améliore significativement la fiabilité des modèles décisionnels.

Au-delà des résultats présentés, cette thèse ouvre des perspectives prometteuses pour l'extension de ces approches à d'autres méthodes de surclassement, telles qu'ELECTRE, ainsi qu'à des systèmes de recommandation intelligents capables d'apprendre, de modéliser et d'anticiper l'évolution des préférences dans des environnements décisionnels complexes.

# Chapitre 1

## Préliminaires à l'aide multicritère à la décision

### 1.1 Introduction

La décision multicritère s'inscrit dans une démarche constructiviste, dans laquelle les préférences des acteurs sont souvent conflictuelles, imparfaitement structurées et susceptibles d'évoluer au cours du processus décisionnel, notamment sous l'influence de la mise en œuvre du modèle [1]. Cette approche vise à exploiter les éléments relativement stables de la perception du problème par les décideurs, tout en leur fournissant des concepts, des modes de représentation et des outils de raisonnement permettant d'enrichir leur compréhension de la situation et de formuler une recommandation pertinente. Contrairement à l'objectif de construire un système de préférences conduisant à une comparaison systématique et sans ambiguïté entre deux actions, les modèles issus de cette démarche admettent et intègrent les phénomènes d'hésitation, d'imprécision et d'incomparabilité.

La décision multicritère s'intéresse ainsi à des problématiques décisionnelles caractérisées par la présence de multiples critères, souvent contradictoires, qui peuvent intervenir à différents niveaux et dans des domaines variés [2, 3]. À titre illustratif, ces problématiques peuvent concerner le choix entre plusieurs schémas d'organisation d'un système de santé visant à concilier maîtrise des coûts, qualité et accessibilité des soins, ou encore la sélection de candidats à un concours sur la base de critères académiques, professionnels ou comportementaux.

Ces décisions, généralement complexes et à forte portée stratégique, sont marquées par le caractère conflictuel des critères, l'incertitude et l'incomplétude de l'information disponible, ce qui en accroît significativement la difficulté [4, 5].

La problématique de la décision multicritère ne se limite toutefois pas aux sphères organisationnelles ou stratégiques, mais s'étend également à de nombreuses situations de la vie quotidienne. Par exemple, le choix d'un produit tel qu'une voiture ou un appareil

électronique implique de comparer simultanément des critères de prix, de performance, de qualité, de fonctionnalités ou encore d'impact environnemental. De même, le choix d'une carrière professionnelle nécessite d'évaluer des dimensions variées telles que les perspectives d'évolution, l'équilibre entre vie professionnelle et personnelle, la rémunération ou l'adéquation avec les aspirations individuelles. Ces situations illustrent la nécessité de gérer des critères parfois antagonistes, dont l'importance relative peut varier selon les préférences et les priorités de chaque individu. La démarche multicritère offre alors un cadre structurant pour analyser ces compromis et aboutir à des décisions plus cohérentes et mieux adaptées à la complexité des contextes considérés.

Dans un cadre plus général, les systèmes autonomes — notamment les réseaux autonomes — sont également confrontés à des problématiques de décision multicritère dans des environnements dynamiques et évolutifs, souvent en l'absence d'une intervention humaine directe. Cette contrainte impose le recours à des méthodes capables de produire des décisions robustes et adaptées en temps réel, malgré l'incertitude et la variabilité du contexte.

Dans une perspective plus récente, l'intégration de la personnalisation et des techniques d'intelligence artificielle conduit à considérer non seulement la structure des critères, mais également la dynamique temporelle des préférences des utilisateurs. Celles-ci ne sont plus supposées statiques, mais évoluent au fil des interactions, de l'acquisition d'expérience et des changements de contexte.

Dans ce cadre, ce chapitre vise à fusionner les fondements théoriques de l'aide multicritère à la décision avec les apports modernes liés à l'apprentissage des préférences et à l'agrégation non-additive. L'objectif est de proposer un socle conceptuel et méthodologique solide pour la conception de modèles décisionnels avancés, capables de prendre en compte à la fois la complexité des interactions entre critères et l'évolution des profils de préférences.

Le chapitre s'articule autour des axes suivants :

- les fondements du processus décisionnel ;
- la construction des modèles multicritères (alternatives, attributs, critères et échelles) ;
- l'analyse des dépendances, synergies et conflits entre critères ;
- l'apprentissage des préférences et l'évolution des profils utilisateurs ;
- les méthodes d'agrégation additives, multiplicatives et non-additives ;
- l'intégrale de Choquet et les capacités  $k$ -additives ;
- les méthodes d'élicitation fondées sur des exemples préférentiels.

## 1.2 Méthodologie d'aide à la décision

L'objectif de cette section est de présenter une méthodologie d'aide à la décision applicable à un problème spécifique. Nous commencerons par définir ce que nous entendons par aide à la décision, en précisant le cadre dans lequel elle s'inscrit et les acteurs susceptibles de la solliciter. Ensuite, nous passerons en revue les différentes approches d'aide à la décision existant dans la littérature. Enfin, nous détaillerons les étapes constituant cette méthodologie, ce qui nous permettra de formaliser notre processus d'aide à la décision, comme décrit au chapitre 3, en nous appuyant sur les travaux de Tsoukiàs [6] et Roy [7].

### 1.2.1 Processus de décision et aide à la décision

L'aide à la décision est généralement sollicitée par des organisations lorsqu'elles sont confrontées à des problèmes complexes tels que la planification, la localisation, l'allocation et la gestion des ressources, le dimensionnement des structures, le choix et l'évaluation, etc. Ces problèmes induisent des décisions importantes dont les conséquences dépassent souvent ce que l'expérience et le bon sens peuvent éclairer. Ce processus décisionnel s'inscrit dans ce que l'on appelle le « processus de décision ». Dans la littérature, A. Tsoukiàs [6] le définit comme un espace d'interaction évoluant dans le temps et l'espace, où les différents intervenants partagent des préoccupations souvent contradictoires (comme améliorer l'approvisionnement tout en diminuant les coûts). La présence de cet espace d'interaction est justifiée par l'existence d'un objectif final. La nature évolutive de ce processus suggère que la préoccupation finale peut également évoluer.

L'aide à la décision, sollicitée par les intervenants dans ce processus, doit contribuer, souvent de manière indirecte, à atteindre cet objectif final. B. Roy, [7] l'a défini comme « l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision ». L'individu en charge de cette aide est généralement appelé « homme d'étude » [7] ou « analyste » [6], tandis que l'intervenant est souvent désigné comme le « décideur ». Cette définition confirme que l'aide à la décision ne fournit pas nécessairement une réponse directe à l'objectif final mais peut se limiter à répondre à certaines questions spécifiques des intervenants. Toutefois, il est essentiel de s'assurer que, en répondant à ces préoccupations intermédiaires, nous fournissons également des éléments de réponse à l'objectif final, garantissant ainsi que l'aide à la décision demeure cohérente avec l'évolution de cette préoccupation.

## 1.2.2 Approches d'aide à la décision

L'aide à la décision est une activité basée sur des modèles représentant, de manière explicite ou formelle, la réalité. Dans cette section, nous examinerons les types de modèles existants en aide à la décision [8, 9] et, plus généralement, les approches basées sur ces modèles. On distingue principalement quatre types de modèles en aide à la décision : les modèles normatifs, descriptifs, prescriptifs et constructifs.

### Démarche descriptive :

Dans une approche descriptive, les modèles sont généralement fondés sur des données ou des comportements observés. Ils servent à décrire des phénomènes déjà réalisés et susceptibles de se reproduire dans des conditions similaires. Le décideur n'est pas directement sollicité pour l'élaboration de ces modèles. La validité des résultats repose sur l'observation de phénomènes analogues. La démarche descriptive vise à dévoiler la « vérité cachée » d'un problème, en se basant sur des observations antérieures [10].

**Exemple :** Dans le domaine de l'analyse des marchés financiers, les modèles descriptifs sont souvent utilisés pour prédire l'évolution des prix des actions. Ces modèles s'appuient sur des séries temporelles historiques pour détecter des tendances ou des cycles économiques susceptibles de se reproduire.

### Démarche normative :

La démarche normative consiste à définir des principes et des règles rationnelles que les individus devraient suivre. Cette analyse repose sur un ensemble d'axiomes logiques et bien spécifiés, créant une structure cohérente et rationnelle [8]. Ces axiomes, définis par les analystes, cherchent à traduire un comportement logique et rationnel. Ensuite, comme dans tout système axiomatique, les chercheurs peuvent explorer les implications de modifications ou de suppressions d'axiomes pour vérifier la concordance entre le système abstrait et les observations comportementales. La théorie normative classique voit ces axiomes comme des vérités indiscutables que le décideur doit suivre rationnellement, [10], tandis que l'approche axiomatique les traite comme des hypothèses de travail issues d'un dialogue entre l'analyste et le décideur [9, 11].

**Exemple :** En théorie économique, le modèle de l'homo economicus est un exemple classique de démarche normative. Ce modèle suppose que les individus prennent toujours des décisions rationnelles visant à maximiser leur utilité, selon des axiomes bien définis comme la transitivité ou la complétude des préférences.

**Démarche prescriptive :**

L'approche prescriptive diffère des approches normatives et descriptives en ce qu'elle ne repose pas sur des informations préexistantes. L'analyste doit collecter et structurer ces informations pour construire un modèle. Le décideur intervient principalement pour valider le modèle construit. Cette démarche se concentre sur les conseils et recommandations pour aider le décideur à améliorer ses décisions, en s'adaptant aux besoins et aux capacités cognitives des individus concernés. Les modèles prescriptifs sont évalués par leur valeur pragmatique et leur capacité à améliorer les décisions Bell, 1988 [12].

**Exemple :** Dans le cadre médical, un médecin recueille les symptômes d'un patient pour proposer un diagnostic et prescrire un traitement. Le modèle prescriptif repose sur des lignes directrices médicales qui orientent la prise de décision, tout en laissant de la place à l'expérience du médecin pour personnaliser les recommandations.

**Approche constructive :**

La particularité de l'approche constructive ([13], [14]) est que le décideur est impliqué tant dans la construction que dans la validation du modèle. Les modèles sont fondés sur les connaissances des décideurs, que l'analyste cherche à expliciter ou formaliser. La validation de ces modèles, comme dans l'approche prescriptive, est effectuée par le décideur. Par exemple, lorsqu'un analyste construit un modèle représentant les préférences d'un décideur.

**Exemple :** Lors de l'élaboration d'un plan d'urbanisme participatif, l'analyste travaille avec les habitants pour recueillir leurs priorités (protection des espaces verts, développement des infrastructures, etc.) et construit un modèle qui reflète ces préférences. Ce modèle guide ensuite les décisions stratégiques tout en restant ajustable selon les retours des participants.

En conclusion, ces quatre approches offrent des cadres différents pour l'aide à la décision, chacune ayant ses propres méthodologies et implications pratiques. La compréhension de ces approches permet de choisir la méthode la plus adaptée aux besoins spécifiques du décideur et du problème à résoudre.

### 1.2.3 Les étapes d'une méthodologie d'aide à la décision

Dans cette section, nous détaillons les étapes essentielles qu'un analyste doit suivre pour formaliser le « processus d'aide à la décision » dans le cadre d'un problème spécifique. Cette méthodologie se base sur les travaux d'A. Tsoukiàs [6]. Un processus d'aide à la décision implique la collaboration entre l'analyste et au moins un intervenant du processus de décision, ayant pour objectif de répondre formellement aux préoccupations liées au problème. La construction du modèle repose sur les connaissances de l'analyste et, selon l'approche choisie (normative, prescriptive, descriptive ou constructive), sur les informations fournies par le décideur [6]. Voici les étapes de cette méthodologie :

**Représentation du problème :** Cette première étape consiste à analyser le processus de décision pour identifier :

Les intervenants concernés par l'aide à la décision. Leur rôle au sein du processus.

Les intervenants avec lesquels l'analyste interagira (appelés « décideurs » dans ce contexte, même s'il y a plusieurs intervenants).

Les préoccupations de chaque intervenant par rapport au problème posé.

Certaines préoccupations peuvent être plus importantes que d'autres ou interconnectées. A. Tsoukiàs [6] propose d'identifier l'importance de chaque préoccupation ainsi que les éventuelles dépendances entre elles, pour garantir une aide à la décision pertinente.

**Formulation du problème :** À cette étape, l'analyste, en collaboration avec le décideur, identifie l'objet de la décision (l'ensemble des actions possibles). Cet ensemble, noté  $A$ , peut être défini explicitement (par exemple, un ensemble de tracés pour une ligne TGV, des emplacements pour un aéroport, des réponses à un appel d'offre) ou implicitement (un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^n$  défini par des contraintes).

Une fois l'ensemble  $A$  déterminé, il s'agit de comprendre ce que le décideur souhaite en faire, souvent en fonction des préoccupations des différents intervenants identifiées précédemment. A. Tsoukiàs [6] propose trois types de traitements pour l'ensemble  $A$  :

Définir formellement l'ensemble  $A$  sans évaluation (exemple : problème de satisfaction de clauses logiques).

Construire un modèle pour décrire un sous-ensemble d'actions dans une approche descriptive (exemple : apprentissage en intelligence artificielle et en statistique).

Partitionner l'ensemble  $A$ , méthode souvent utilisée en recherche opérationnelle et en aide multicritère à la décision, avec trois façons de le faire selon B. Roy [7] :

Choisir un sous-ensemble restreint d'actions pour aider le décideur à choisir la meilleure (problématique de choix).

Affecter des actions à des catégories prédéfinies (problématique de tri).

Classer les actions selon les préférences des décideurs (problématique de rangement).

**Construction du modèle d'évaluation :** Après avoir déterminé l'ensemble  $A$  et le traitement souhaité, l'analyste construit le modèle pour répondre au problème identifié et formuler une recommandation. Pour cela, il doit :

Construire les dimensions caractérisant l'ensemble  $A$  : ces dimensions représentent l'information disponible et sont généralement codées sur des échelles pour obtenir une représentation formelle de  $A$ .

Établir les critères d'évaluation : un critère est une dimension ou une agrégation de dimensions traduisant un même point de vue et permettant d'évaluer  $A$ . Améliorer les méthodes d'évaluation : ces outils permettent de traiter l'ensemble  $A$  pour fournir une solution au modèle (exemples : procédures d'agrégation multicritère, algorithmes de programmation mathématique).

**Construction de la recommandation finale :** Bien que le résultat fourni par la méthode d'évaluation soit cohérent avec le modèle, il doit aussi correspondre aux préoccupations des intervenants. Avant de formuler une recommandation, l'analyste doit :

Effectuer une analyse de sensibilité pour s'assurer que le résultat n'est pas trop sensible à des variations non significatives des données utilisées. Interpréter le résultat en tenant compte des hypothèses sur les données, le modèle et l'évolution du processus de décision.

## 1.3 Aide multicritère à la décision

Dans un processus d'aide à la décision, il est rare de se limiter à un seul critère correspondant à un point de vue unique pour lequel le décideur exprime ses préférences. Il est donc nécessaire de prendre en compte plusieurs points de vue (coûts, ressources humaines, sécurité, environnement, etc.) lors de la construction du modèle d'évaluation. La prise de décision en présence de critères multiples est complexe car ces critères sont souvent conflictuels. Pour répondre à cette complexité, plusieurs méthodologies d'aide multicritère à la décision ont été développées [7, 15].

Ces méthodologies commencent par l'élucidation des préférences du décideur pour chaque point de vue, correspondant à un critère, exprimé sur une échelle cardinale ou ordinale (cf. 1.3.4). Les critères ainsi définis sont ensuite agrégés au moyen de méthodes d'agrégation multicritères. Ces méthodologies offrent également divers outils pour recueillir les préférences globales des décideurs afin de paramétrer ces méthodes.

Nous avons vu dans la section précédente qu'il y avait quatre étapes principales pour représenter de manière formelle un processus d'aide à la décision (cf. 1.2.2). Dans cette section, nous nous concentrons sur les éléments produits par ce processus dans le cadre de l'aide multicritère à la décision : l'ensemble des actions  $A$ , la problématique, l'ensemble des dimensions  $D$ , l'ensemble des critères  $F$ , et l'ensemble des méthodes d'évaluation.

L'aide multicritère à la décision (AMCD) est conçue pour fournir un support à la décision sans remplacer le décideur. Cette assistance se fait en obtenant les préférences de l'utilisateur et en sélectionnant la solution la plus adaptée à ses besoins et à son problème. L'utilisation de plusieurs critères permet de prendre en compte les préférences de l'utilisateur à travers des critères présents dans son profil, qui ont une importance variable pour lui.

Pour bien comprendre la différence entre un attribut et un critère, nous devons les définir :

**Attribut** : Une caractéristique ou propriété mesurable d'une alternative.

**Critère** : Un attribut ou une combinaison d'attributs qui sert à évaluer les alternatives selon un certain point de vue.

Dans cette section, nous rappelons la terminologie couramment utilisée dans la littérature de la théorie de la décision multicritère [7], [15]. Les termes essentiels pour décrire

un problème de décision sont :

**Alternatives** : Les différentes options ou actions parmi lesquelles il faut choisir, ranger ou trier.

**Objectifs** : Les buts ou résultats souhaités que le décideur cherche à atteindre.

**Attributs** : Les caractéristiques mesurables des alternatives.

**Critères** : Les standards ou points de référence utilisés pour évaluer et comparer les alternatives.

**Décideur** : La personne ou le groupe responsable de faire le choix final, le rangement ou le trie.

**Analyste** : La personne qui aide à structurer le problème et à fournir les outils d'analyse pour faciliter la décision.

En résumé, l'aide multicritère à la décision permet de formaliser et de structurer le processus de décision en prenant en compte des points de vue variés et souvent conflictuels, afin de fournir une recommandation éclairée et cohérente avec les préférences du décideur.

### 1.3.1 Les Alternatives et les Critères

#### 1.3.1.1 Alternatives et Actions

L'ensemble des alternatives désigne l'ensemble des scénarios, des candidats, des projets, des sites, etc., sur lesquels porte la décision. L'identification de cet ensemble de solutions réalisables est une tâche primordiale dans la définition du problème. Cet ensemble peut être défini de deux façons :

- **Explicitement** : par un ensemble fini d'alternatives de cardinalité relativement faible.
- **Implicitement** : par un ensemble de propriétés ou de conditions que les alternatives doivent vérifier (comme dans le cas d'un ensemble d'alternatives spécifié par ses variables de décision satisfaisant un système de contraintes explicites).

**Exemple : Sélection d'un candidat pour un poste** Pour sélectionner un candidat à un poste, chaque alternative peut être caractérisée par des attributs spécifiques, tels que : L'âge, Le diplôme, Les résultats aux tests d'aptitude et les prétentions salariales.

Une action potentielle  $a_i$  est une action, réelle ou fictive, provisoirement jugée réaliste par au moins un acteur [1]. L'ensemble des  $a_i$  considérées dans le processus d'aide à la décision constitue l'ensemble  $A$ . Décider consiste à mettre en œuvre une ou plusieurs actions parmi toutes les actions potentielles. Les actions sont dites exclusives (ou globales) quand le décideur ne peut choisir qu'une seule action de l'ensemble  $A$ .

**Exemple :**

$A$  est constitué des deux actions potentielles : « détruire le pont » et « rénover le pont ». Si l'on accepte le fait qu'il est inutile de rénover un pont pour le détruire ensuite, les actions de  $A$  sont alors exclusives (globales). Dans le cas contraire, les actions sont non exclusives (fragmentaires).

Nous avons vu que l'action représentait l'objet de la décision, mais nous n'avons pas évoqué sa réalisabilité. Afin de différencier les actions réalisables de celles qui ne le sont pas, B. Roy [7] nomme action potentielle ou alternative une action réalisable, c'est-à-dire une action dont la mise en œuvre en pratique est envisageable. En aide multicritère à la décision, l'ensemble des alternatives  $A$  est généralement construit sous forme d'une liste :  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Une action est une représentation de l'élément de solution qui contribue à la décision (par exemple, une région, un site, un investissement, une offre, etc. constituent des actions). Quand les actions sont exclusives, on peut utiliser le terme "variantes" (en anglais "alternatives").

Une action potentielle est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par au moins un acteur ou présumée telle par l'homme d'étude en vue de l'aide à la décision. L'ensemble des actions potentielles sur lequel l'aide à la décision prend appui au cours d'une phase d'étude est noté  $A$ .

### 1.3.1.2 Critères

La signification du mot "critère", selon le dictionnaire Le Robert, est "ce qui sert de base à un jugement, ce qui permet de distinguer une chose, une notion". En théorie de la décision, ce terme correspond à un attribut ou à un objectif. Ainsi, un problème de décision peut être multiattribut ou multiobjectif, voire les deux.

Un critère, objectif ou attribut, est une fonction définie sur l'ensemble des alternatives, prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné et représentant les préférences de l'utilisateur selon le point de vue modélisé par ce critère [16].

Un critère exprime les préférences du décideur relativement à un point de vue spécifique (par exemple, une voiture puissante). Cette notion intègre la structure de préférence du décideur sur ce critère (maximiser la puissance, maximiser la vitesse). Un critère peut faire référence à un ou plusieurs attributs. Par exemple, le critère de « compétence » peut inclure des attributs tels que les diplômes et les expériences passés.

Aider à décider consiste à fournir au décideur des informations concernant les différentes actions de l'ensemble  $A$ . Les actions ont divers effets, susceptibles d'influencer les objectifs ou le système de valeurs d'un acteur. Ces effets, appelés conséquences, permettent de comparer ou d'évaluer les alternatives. Pour représenter un aspect permettant de comparer les préférences entre une action  $a_i$  et d'autres actions de  $A$ , il est utile de regrouper certaines des conséquences en un même point de vue via une fonction  $g$  de  $A$  dans  $\mathbf{R}$ , appelée critère. On notera  $g(a_i)$  la performance de l'action  $a_i$  sur le critère  $g$ .

Un critère vise à résumer l'évaluation d'une action sur diverses dimensions se rattachant à un même "axe de signification", qui est l'interprétation opérationnelle d'un "point de vue" [1].

Par exemple, le point de vue financier d'un projet peut être représenté par le critère "valeur actuarielle nette du projet", qui actualise les différents *cash-flows* des éléments du projet. Les *cash-flows* représentent les flux de trésorerie générés par le projet, c'est-à-dire la différence entre les entrées et les sorties de liquidités associées à celui-ci. Ces flux permettent d'évaluer la viabilité et la rentabilité d'un projet à travers le temps.

Dans ce cas,  $g(a_i)$  serait la valeur actuarielle nette du projet  $a_i$ , obtenue en actualisant les *cash-flows* à un taux d'actualisation donné pour refléter la valeur temporelle de l'argent.

Roy & Bouyssou [1] définissent formellement un critère comme une fonction  $g$  à valeurs réelles, définie sur l'ensemble  $A$  des actions potentielles, permettant de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions  $a$  et  $b$  à partir des nombres  $g(a)$  et  $g(b)$ . Ce critère  $g$  est supposé être maximisé (le cas d'un intérêt à minimiser se traite de manière analogue). Plus précisément, un critère  $g$  constitue un modèle à partir duquel on peut établir la proposition :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow (bS_g a)$$

où  $S_g$  est une relation binaire signifiant "au moins aussi bon que, relativement aux évaluations sur les dimensions prises en compte par  $g$ ". Cette définition signifie que si  $g(b)$  est supérieur ou égal à  $g(a)$ , alors  $b$  est au moins aussi bon que  $a$  selon le point de vue du critère  $g$ . On dira alors que " $b$  surclasse  $a$ " localement au critère  $g$ . La relation binaire  $S_g$  est nommée relation de surclassement.

Un critère permet de distinguer deux actions au sens des préférences. Il n'est pas nécessaire de donner sens aux écarts entre les valeurs  $g(a)$  et  $g(b)$ , mais au moins de permettre la comparaison des actions  $a$  et  $b$  par ordre de préférence, en établissant que " $b$  est au moins aussi bon que  $a$ ".

Il est important d'ajouter un sens indiquant la préférence, qui peut être soit le sens naturel des valeurs, soit le sens inverse, selon la nature des données utilisées. Par exemple, on préférera les valeurs plus élevées d'une échelle en dinars pour un critère représentant des gains, tandis qu'on préférera les valeurs plus faibles pour le nombre d'accidents sur un réseau routier. Si l'échelle varie dans le sens inverse des préférences, il est simple de la transformer (par inversion du signe) pour qu'elle varie dans le même sens que les préférences du décideur. Pour simplifier le formalisme, nous considérerons uniquement des critères dont les échelles varient dans le même sens que les préférences.

Roy & Bouyssou [1] précisent qu'un critère est une fonction à valeurs réelles. Cela n'exclut pas de travailler sur une échelle à valeurs non réelles, pourvu que l'on puisse ordonner les échelons de cette échelle selon les préférences (échelle ordinale). Si tel est le cas, et s'il s'agit d'un nombre fini d'échelons, on peut attribuer à chacun d'eux une valeur numérique (un réel) en respectant l'ordre de préférence des différents échelons. Cette condition permet de conclure que :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow (bS_g a)$$

c'est-à-dire que  $g$  est un critère. Plusieurs transformations sont possibles tant qu'elles respectent l'ordre initial des échelons après recodage. Par exemple, une échelle de gêne aux valeurs non réelles peut être recodée comme suit :

— peu gêné : 4

— moyennement gêné : 3

- assez gêné : 2
- très gêné : 1

### 1.3.1.3 Pouvoir discriminant d'un critère

**Définition :** Un critère est une fonction  $g : A \Leftarrow X \subset \mathbf{R}$  qui permet, relativement à un point de vue donné et pour un acteur identifié, de comparer deux actions quelconques  $a$  et  $b$ , de telle manière que :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow (bS_g a)$$

La manière dont s'effectue la comparaison des actions sur chaque critère dépend du pouvoir discriminant de celui-ci [7, 17, 18]. Lorsque le pouvoir discriminant de  $g$  est parfait, on dit que  $g$  est un vrai-critère. Si  $g$  possède un pouvoir discriminant imparfait, il s'agira d'un quasi-critère ou d'un pseudo-critère.

Un critère est souvent utilisé de la façon suivante :

- **P** : préférence stricte
- **I** : indifférence

Pour nuancer la transition entre  $I$  et  $P$ , on introduit une zone intermédiaire appelée préférence faible, notée  $Q$ . Ainsi,  $g$  induit sur  $A$  un pré-ordre total, structure « agréable » pour déterminer un choix, un tri ou un classement. En effet,  $g$  permet de comparer chaque élément deux à deux, et ainsi de connaître lequel est préféré, et ce pour chaque couple d'actions.

La définition du critère proposée par [1] utilise la relation binaire  $S_g$  sur le critère  $g$ . Selon :

- la nature de  $g$  (observation, prévision, ...),
- l'importance que l'on accorde aux écarts de valeurs le long de l'échelle de  $g$ ,

- la précision des données (intervalle de confiance, ...),

L'écart de performance entre  $g(a)$  et  $g(b)$  peut être plus ou moins significatif d'une éventuelle préférence, plus ou moins discriminant dans la comparaison de  $a$  et  $b$ . C'est ce qu'on appelle le « pouvoir discriminant » d'un critère.

Pour nuancer le pouvoir discriminant d'un critère, les auteurs proposent d'introduire trois nouvelles relations binaires permettant une comparaison plus fine de deux actions  $a$  et  $b$ , localement à un critère  $g$  :

- $a$  est indifférente à  $b$  selon  $g$  (et inversement) : relation  $(aI_gb)$ ,
- $a$  est préférée strictement à  $b$  (ou inversement) : relation  $(aP_gb)$ ,  $(bP_ga)$ ,
- $a$  est préférée faiblement à  $b$  (ou inversement) : relation  $(aQ_gb)$ ,  $(bQ_ga)$ .

La préférence faible est ajoutée pour traduire une hésitation du décideur entre une situation de préférence stricte et une situation d'indifférence. Voici trois types de critères avec des pouvoirs discriminants de plus en plus faibles :

- Vrai-critère
- Quasi-critère
- Pseudo-critère

### Vrai-critère

Sur un vrai-critère, seule l'égalité de  $g(a)$  et  $g(b)$  est significative d'une indifférence entre  $a$  et  $b$ . Toute différence entre  $g(a)$  et  $g(b)$  traduit une préférence stricte :

- si  $g(a) = g(b)$ , alors  $(aI_gb)$ ,
- si  $g(a) > g(b)$ , alors  $(aP_gb)$ ,

- si  $g(a) < g(b)$ , alors  $(bP_g a)$ .

Roy & Bouyssou [1] appellent un tel critère un vrai-critère, possédant un pouvoir discriminant absolu, où toute différence, aussi minime soit-elle, fait basculer la situation d'indifférence dans une situation de préférence stricte.

### Quasi-critère

Pour affaiblir le pouvoir discriminant d'un vrai-critère, on introduit un seuil d'indifférence  $q$  tel que :

- $(aP_g b)$  si  $g(a) - g(b) > q$ ,
- $(aI_g b)$  si  $|g(a) - g(b)| \leq q$ .

Ce seuil représente l'écart à partir duquel on commence à préférer l'une des deux actions. Le seuil  $q$  peut varier le long de l'échelle du critère  $g$ , permettant ainsi une indifférence pour de légères différences entre deux évaluations. Un critère muni de ce seuil est appelé un quasi-critère.

### Pseudo-critère

Pour affaiblir davantage le pouvoir discriminant, on introduit un second seuil de préférence  $p$ , créant une zone de préférence faible  $Q$  :

- $(aP_g b)$  si  $g(a) - g(b) > p(g(b))$ ,
- $(aQ_g b)$  si  $q(g(b)) < g(a) - g(b) \leq p(g(b))$ ,
- $(aI_g b)$  si  $g(a) - g(b) \leq q(g(b))$ .

Le passage de l'indifférence à la préférence stricte est nuancé par une zone de préférence faible. Un critère muni de ces deux seuils est appelé un pseudo-critère. Le schéma suivant illustre les différentes relations binaires en fonction des valeurs  $g(a)$  et  $g(b)$ .

Dans ce cas, la relation de surclassement  $S_g$  entre deux actions sur un pseudo-critère  $g$  devient :

$$(aS_gb) \Rightarrow (aI_gb) \text{ ou } (aP_gb) \text{ ou } (aQ_gb)$$

où "au moins aussi bon que" inclut l'indifférence, la préférence faible et la préférence stricte en faveur de  $a$ .

### 1.3.2 Les différentes problématiques multicritères

En aide multicritère à la décision (AMCD), la problématique se définit par la manière dont l'aide à la décision doit être envisagée [7]. Comme discuté dans la section 1.2.3, elle peut consister à partitionner l'ensemble des alternatives  $A$ . Elle peut aussi impliquer la construction de l'ensemble  $A$  ou de la famille de critères  $F$ . Nous distinguons quatre problématiques en aide multicritère à la décision [7] : les problématiques de choix, de tri, de rangement, et de description.

La problématique peut être perçue comme une orientation de l'investigation adoptée pour un problème de décision donné. Elle exprime les termes dans lesquels le décideur ou l'analyste pose le problème et traduit le type de prescription qu'il souhaite obtenir. Roy [19] distingue quatre problématiques :

#### 1.3.2.1 Problématiques de choix $P.\alpha$

**Définition :** La problématique du choix  $P.\alpha$  consiste à poser le problème en termes de choix d'une seule meilleure action, orientant l'investigation vers la mise en évidence d'un sous-ensemble  $A'$  de  $A$  aussi restreint que possible. Ce sous-ensemble est conçu pour éclairer directement le décideur sur l'issue de la prochaine étape, en tenant compte du caractère révisable et/ou transitoire de  $A$ . Cette problématique prépare une forme de prescription ou de simple participation visant :

- À indiquer avec précision une décision à préconiser,
- À proposer une méthodologie fondée sur une procédure de sélection convenant à une utilisation répétitive et/ou automatisée,

- À considérer les éléments objectifs insuffisamment précis,
- À prendre en compte la multiplicité des systèmes de valeurs en jeu.

**Objectif :** Aider à choisir une "meilleure" action ou à élaborer une procédure de sélection.

Dans ce type de problématique, l'aide à la décision vise à sélectionner un ensemble de "bonnes" alternatives, de cardinalité la plus petite possible. Bien que l'alternative recommandée soit dans cet ensemble, cela ne signifie pas que la procédure de sélection utilisée est orientée uniquement vers cette solution. Elle consiste plutôt à éliminer les mauvaises alternatives par comparaison. L'ensemble sélectionné peut contenir des alternatives équivalentes ou incomparables entre elles, mais ne contient pas nécessairement que de bonnes alternatives.

C'est la problématique classique, celle qui consiste à poser le problème en termes de meilleur choix. Les procédures d'optimisation se sont développées principalement par rapport à cette problématique.

### 1.3.2.2 Problématiques de tri $P.\beta$

**Définition :** La problématique du tri  $P.\beta$  consiste à poser le problème en termes de tri des actions par catégories, conçues en fonction de la suite à donner aux actions qu'elles sont destinées à recevoir. Elle oriente l'investigation vers la mise en évidence d'une affectation des actions de  $A$  à ces catégories selon des normes portant sur la valeur intrinsèque des actions, en tenant compte du caractère révisable et/ou transitoire de  $A$ . Cette problématique prépare une forme de prescription ou de simple participation visant :

- À préconiser l'acceptation ou le rejet de certaines actions,
- À proposer une méthodologie fondée sur une procédure d'affectation à des catégories convenant à une utilisation répétitive et/ou automatisée.

**Objectif :** Aider à trier les actions selon des normes ou à élaborer une procédure d'affectation.

Dans ce type de problématique, l'aide à la décision oriente chaque alternative vers une catégorie jugée "appropriée" parmi des catégories prédéfinies et généralement ordonnées.

Le choix de cette catégorie est justifié par le type de jugement souhaité et les traitements envisagés. Par exemple, définir des catégories de confort pour des offres (très inconfortable, inconfortable, confortable, très confortable) et recommander des actions pour encourager les fournisseurs à passer à une catégorie supérieure.

### 1.3.2.3 Problématiques de rangement $P.\delta$

**Définition :** La problématique du rangement  $P.\delta$  consiste à poser le problème en termes de rangement des actions de  $A$  ou de certaines d'entre elles, orientant l'investigation vers la mise en évidence d'un classement défini sur un sous-ensemble de  $A$ . Ce classement est conçu pour discriminer les actions "suffisamment satisfaisantes" en fonction d'un modèle de préférences, en tenant compte du caractère révisable et/ou transitoire de  $A$ . Cette problématique prépare une forme de prescription ou de simple participation visant :

- À indiquer un ordre partiel ou complet sur des classes regroupant des actions jugées équivalentes,
- À proposer une méthodologie fondée sur une procédure de classement convenant à une utilisation répétitive et/ou automatisée.

**Objectif :** Aider à ranger les actions selon un ordre de préférence décroissant ou à élaborer une procédure de classement.

Dans ce type de problématique, l'aide à la décision vise à établir un préordre partiel ou total sur l'ensemble  $A$ . Les classes d'équivalence induites par ce préordre peuvent être considérées comme des catégories ordonnées.

### 1.3.2.4 Problématiques de description $P.\gamma$

**Définition :** La problématique de la description  $P.\gamma$  consiste à poser le problème en termes limités à une description des actions de  $A$  et/ou de leurs conséquences. Elle oriente l'investigation vers la mise en évidence d'informations relatives aux actions potentielles, conçues pour aider directement le décideur à les découvrir, comprendre et jauger, en tenant compte du caractère révisable et/ou transitoire de  $A$ . Cette problématique prépare une forme de prescription ou de simple participation visant :

- À présenter une description systématique et formalisée des actions et de leurs conséquences qualitatives ou quantitatives,
- À proposer une méthodologie fondée sur une procédure cognitive convenant à une utilisation répétitive et/ou automatisée.

**Objectif :** Aider à décrire les actions et/ou leurs conséquences de façon systématique et formalisée ou à élaborer une procédure cognitive.

Dans ce type de problématique, il n'est pas nécessaire que le résultat soit une prescription (choix d'une ou d'un ensemble d'actions comme recommandation au décideur). Il peut s'agir de déterminer l'ensemble des actions potentielles  $A$ , une famille de critères  $F$ , ou des valeurs possibles pour certains paramètres (seuil d'indifférence et de préférence, poids, niveau d'aspiration). Ce type de problématique est approprié lorsque le décideur rencontre des difficultés à définir le problème, à exprimer ses points de vue ou le type de résultat souhaité.

### 1.3.3 Critère et famille de critères

Un critère  $g$  est un outil permettant d'évaluer et de comparer des alternatives sur un point de vue bien défini. On note  $g(a)$  la performance de  $a$  sur le critère  $g$ . Cette performance est généralement représentée par un nombre réel prenant ses valeurs dans  $\mathbf{X}_g$  l'ensemble des valeurs possibles de  $g$ , défini explicitement. Pour comparer deux alternatives sur ce critère, il est nécessaire de définir un ordre total  $<_g$  sur  $\mathbf{X}_g$  (voir l'annexe A1). Nous supposons, sans perte de généralité, que la valeur  $g(a)$  augmente avec la performance de  $a$  sur le critère  $g$ . Le couple  $(g, \mathbf{X}_g)$  est appelé échelle du critère  $g$ . Les éléments  $x \in \mathbf{X}_g$  sont appelés échelons de l'échelle.

En aide multicritère à la décision (AMCD), une échelle est soit de type ordinal, soit de type cardinal (voir section 1.3.4). Si  $\mathbf{X}_g$  est de type nominal (les échelons ne sont pas ordonnés), alors  $g$  est appelé attribut.

Pour appliquer des méthodes d'aide multicritère à la décision, afin d'agréger les performances des alternatives sur les critères et d'obtenir une évaluation globale, il est nécessaire de respecter certaines exigences théoriques lors de la construction des critères. Chaque intervenant dans le processus de décision associé au modèle doit accepter le résultat de la comparaison entre les alternatives issu de chaque critère. Cela implique les remarques suivantes [20] :

- Les points de vue associés aux critères doivent être compris et approuvés par tous les intervenants, même si l'importance de chaque critère n'est pas nécessairement partagée. En pratique, cela revient à associer une échelle à chaque critère qui soit acceptée par tous les intervenants.
- Les méthodes permettant de construire ces échelles doivent également être comprises et acceptées par tous les intervenants.
- La construction d'un critère doit prendre en compte la nature des données à partir desquelles elle s'est faite. Tout élément d'incertitude, d'imprécision ou d'indétermination peut lourdement affecter la comparaison issue de ces critères.

Avant d'énoncer les propriétés que doit posséder une famille de critères  $F$ , nous allons nous intéresser au lien entre critères et dimensions en AMCD.

### 1.3.3.1 Conséquences élémentaires, dimensions et critères

Pour définir complètement une alternative, il est nécessaire d'identifier toutes ses conséquences élémentaires. Une conséquence élémentaire est tout aspect, effet ou attribut permettant de comparer ou d'évaluer une alternative [1].

Une dimension est une conséquence élémentaire à laquelle on associe une échelle. La procédure permettant d'évaluer une alternative sur cette dimension est appelée indicateur d'état [7]. Il est également possible d'associer à chaque dimension une échelle de préférences dont les valeurs reflètent l'impact réel de la conséquence sur l'évaluation globale.

Un critère permet de regrouper des conséquences élémentaires associées à un même point de vue afin d'éliciter les préférences du décideur sur ce point de vue. Cela nous évite d'évaluer directement les alternatives à partir des conséquences élémentaires, dont le nombre important rendrait la tâche difficile [20].

Il arrive parfois que l'on ne puisse pas associer directement un critère à un point de vue, notamment pour des problèmes complexes. Dans ce cas, il est possible de décomposer ce point de vue de manière hiérarchique (ou arborescente) [15], en plusieurs points de vue auxquels on associe des sous-critères, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive aux conséquences élémentaires. Pour plus de détails sur la construction de critères directement

à partir des conséquences élémentaires, voir les chapitres 8 et 9 de [7].

### 1.3.3.2 Propriétés d'une famille de critères

Pour assurer une prise de décision efficace, une famille de critères doit posséder certaines propriétés essentielles : l'intelligibilité, l'opérationnalité et la cohérence [1] [7].

#### Intelligibilité

Le nombre de critères constituant une famille doit être suffisamment réduit pour permettre une compréhension claire de la nature de l'information inter-critères, laquelle représente les préférences globales du décideur. Cela facilite le choix de la méthode d'agrégation appropriée. Bouyssou [20] suggère qu'une famille de critères ne devrait pas dépasser une douzaine de critères.

#### Opérationnalité

La famille de critères doit fournir une base solide pour tous les décideurs, garantissant que le processus d'aide à la décision se déroule dans des conditions optimales.

#### Cohérence

La cohérence d'une famille de critères est essentielle pour la majorité des méthodes d'agrégation multicritère. Pour qu'une famille de critères soit cohérente, elle doit respecter les propriétés suivantes :

##### a) Exhaustivité

La famille de critères doit couvrir de manière exhaustive tous les points de vue exprimés par les intervenants. Aucun critère décisif dans l'évaluation ne doit être omis. Formellement, pour toute paire d'alternatives  $a$  et  $b$  dont les performances sur tous les critères sont égales, elles doivent être indifférentes pour le décideur :

$$\forall a, b \text{ et } \forall i \in F : g_i(a) = g_i(b) \Leftrightarrow a \sim b$$

où  $a \sim b$  signifie que  $a$  et  $b$  sont indifférentes.

##### b) Monotonie

Les préférences partielles (établies sur chaque critère) doivent être cohérentes avec les préférences globales sur les alternatives. Formellement, si, pour le décideur, une alternative  $a$  est au moins aussi bonne qu'une alternative  $b$  (préférences globales), alors, si  $a'$  est une alternative dont les performances sont au moins aussi bonnes que  $a$  sur tous les critères (préférences partielles),  $a'$  doit être jugée au moins aussi bonne que  $b$  par le décideur.

$$\text{Si } \forall a, b : a \succsim b \text{ et } \forall i \in F : g_i(a') \geq g_i(a) \text{ Alors } a \succsim b$$

où  $a \succsim b$  signifie que  $a$  est au moins aussi bonne que  $b$ .

### c) Minimalité (Non redondance)

La famille de critères  $F$  ne doit pas contenir de critères superflus. Pour vérifier si un critère  $i$  est redondant, il suffit de le supprimer de  $F$  et de vérifier si  $F \setminus \{i\}$  satisfait toujours les propriétés d'exhaustivité et de monotonie.

Les deux premières exigences impliquent l'isolabilité, c'est-à-dire que le résultat de la comparaison entre deux alternatives dont les évaluations ne diffèrent que sur un seul critère ne doit pas dépendre des valeurs prises par les autres critères. Cela interdit certaines formes de dépendances entre critères (voir section 1.4).

Bien que les propriétés caractérisant une famille cohérente de critères soient intuitives et faciles à comprendre, il n'est pas toujours évident de les vérifier en pratique, en particulier la condition de monotonie. La non-vérification de ces hypothèses peut compliquer la modélisation de l'information inter-critères et rendre difficile le choix d'une méthode d'agrégation. Pour plus de détails sur les exemples de critères qui peuvent violer ces conditions, voir le chapitre 2 de [1].

## 1.3.4 Échelles et signifiante

Dans un modèle d'évaluation utilisé dans un processus d'aide à la décision, il est essentiel que les dimensions  $D$  et les critères  $F$  (cf. 1.2.3) soient codés sur des échelles numériques pour garantir que les traitements effectués par les différentes méthodes soient signifiants. Nous allons explorer les types d'échelles appropriées à cette fin [21].

### 1.3.4.1 Échelle de mesure

Une échelle peut être définie comme le couple formé par  $(f, \mathbf{X}_f)$  :

- $\mathbf{X}_f$  : Un ensemble de nombres représentant les valeurs possibles d'une codification relative à un ensemble d'actions  $A$ .
- $f$  : Une représentation numérique appropriée (r.n.a) qui applique  $A$  dans cet ensemble.

Les types d'échelles développés par Stevens [81] sont classés selon les caractéristiques suivantes :

- **Caractéristique d'ordre** : Rangement par valeurs croissantes ou décroissantes des nombres constituant la série.
- **Caractéristique de distance** : Rangement par valeurs croissantes ou décroissantes des différences entre tous les couples de nombres constituant la série.
- **Caractéristique d'origine** : Rôle que joue le 0 vis-à-vis des nombres constituant la série (le 0 désigne l'absence de quantité).

À partir de ces caractéristiques, nous définissons cinq types d'échelles :

#### 1. Échelle nominale :

- L'ensemble des nombres ne donne sens à aucune des trois caractéristiques.
- **Exemple** : Attribuer des nombres aux participants d'un concours.

#### 2. Échelle ordinale :

- L'ensemble des nombres donne sens à la caractéristique d'ordre. Si  $f$  est une r.n.a de  $A$ , toute transformation monotone  $\Phi$  de  $f$  est une r.n.a de  $A$ .
- **Exemple** : Les indicateurs de la qualité de l'air sur une échelle de 1 (meilleure qualité) à 10 (pire qualité) vérifient la caractéristique d'ordre car :
  - Un air de qualité  $n$  est meilleur qu'un air de qualité  $m$  ( $n, m \in \{1, \dots, 10\}$  et  $n > m$ ).

Cependant :

- Cela ne vérifie pas la caractéristique d'origine (par exemple, un air de qualité 6 n'est pas nécessairement deux fois moins bon qu'un air de qualité 3).
- Cela ne vérifie pas la caractéristique de distance (par exemple, la différence entre un air de qualité 6 et 4 n'est pas nécessairement la même qu'entre un air de qualité 3 et 1).

### 3. Échelle d'intervalle :

- Une échelle ordinale à laquelle on donne sens à la caractéristique de distance. Si  $f$  est une r.n.a de  $A$ , toute transformation affine  $\Phi$  de  $f$  ( $\Phi \circ f = \alpha f + \beta$ , où  $\alpha > 0$ ) est une r.n.a de  $A$ .
- **Exemple :** La température en degrés Celsius vérifie la caractéristique de distance car :
  - La différence entre  $T$  et  $T + \alpha$  est la même qu'entre  $T'$  et  $T' + \alpha$ .

Cependant, cela ne vérifie pas la caractéristique d'origine car :

- Une température de  $10^\circ\text{C}$  n'est pas le double d'une température de  $5^\circ\text{C}$ .

### 4. Échelle de ratio :

- Une échelle d'intervalle à laquelle on donne sens à la caractéristique d'origine. Si  $f$  est une r.n.a de  $A$ , toute transformation  $\Phi$  de  $f$  telle que  $\Phi \circ f = \alpha f$  est une r.n.a de  $A$ .
- **Exemple :** La masse en kilogrammes vérifie la caractéristique d'origine :
  - Une masse de 20 kg est quatre fois plus grande qu'une masse de 5 kg.

### 5. Échelle absolue :

- Une échelle de ratio qui n'autorise qu'une seule r.n.a.
- **Exemple :** Le nombre d'habitants dans une ville vérifie la caractéristique d'origine :
  - On peut dire qu'il y a trois fois plus d'habitants dans une ville que dans une autre.
  - Cependant, toute transformation de ce nombre n'aurait aucun sens. Contrairement à des mesures comme la masse ou la longueur, où l'on peut changer d'échelle (par exemple, de grammes à kilogrammes) sans perdre la signification.

*Remarque.* On dit d'une échelle qu'elle est **cardinale** si elle est au moins de type intervalle (la notion de distance a un sens).

## 1.4 Dépendances entre critères

Dans cette section, nous aborderons la notion de dépendances (ou interactions) entre critères en aide multicritère à la décision (AMCD). Cette question est particulièrement importante lors de l'étape d'agrégation des critères dans notre approche. Il existe deux formes classiques de dépendances en AMCD : les dépendances au sens des préférences et les dépendances structurelles [7], [1].

### 1.4.1 Dépendances au sens des préférences

Une sous-famille d'au moins deux critères  $J \subset F$  est dite dépendante au sens des préférences dans  $F$  si la comparaison de deux alternatives  $a$  et  $b$  vérifiant  $g_k(a) = g_k(b) \forall k \in F \setminus J$  est influencée par leurs performances sur les critères  $k \in J$ .

#### Exemple Illustratif :

Supposons qu'un responsable doit choisir parmi plusieurs candidats en se basant sur trois critères :  $g_1$  (niveau de formation initiale),  $g_2$  (aptitude à une bonne intégration dans l'équipe),  $g_3$  (nombre d'années d'expérience professionnelle). Soient  $a$  et  $b$  deux candidats ayant le même nombre d'années d'expérience ( $g_3(a) = g_3(b)$ ). Si  $a$  a un meilleur niveau de formation que  $b$  ( $g_1(a) > g_1(b)$ ) mais  $b$  est jugé meilleur pour l'intégration dans l'équipe ( $g_2(a) < g_2(b)$ ), le choix entre  $a$  et  $b$  dépendra de l'importance accordée au nombre d'années d'expérience. Si ce critère est jugé significatif, le responsable pourrait préférer  $b$  pour ses aptitudes d'adaptation. Ainsi, la sous-famille  $J = \{g_1, g_2\}$  est dépendante au sens des préférences.

Les dépendances au sens des préférences sont souvent difficiles à identifier et certaines méthodes ne parviennent pas à les modéliser. Les méthodes qui le peuvent sont généralement basées sur des modèles complexes et nécessitent une validation préalable de l'existence de telles dépendances avant leur mise en œuvre.

### 1.4.2 Synergie positive

Il y a synergie positive entre au moins deux critères si leur contribution à l'évaluation globale est supérieure à la somme de leurs contributions prises séparément. Les méthodes multicritères modélisant cette situation incluent :

— **Complémentarité** dans l'intégrale de Choquet [22].

— **Auto-renforcement** dans les méthodes ELECTRE [2].

**Exemple :** Pour écrire une lettre, on a besoin d'un papier et d'un stylo. Si le critère  $g_1$  indique la présence d'un stylo et  $g_2$  celle d'un papier, alors il y a synergie positive entre  $g_1$  et  $g_2$ .

### 1.4.3 Synergie négative

Il y a synergie négative entre deux critères si leur contribution à l'évaluation globale est inférieure à la somme de leurs contributions prises séparément. Ce concept est traduit en :

— Substitution dans l'intégrale de Choquet [22].

— Auto-affaiblissement dans les méthodes ELECTRE [2].

**Exemple :** Si deux remèdes peuvent guérir une maladie et qu'un seul suffit, alors il y a synergie négative entre les critères représentant la capacité de chaque remède à guérir.

### 1.4.4 Antagonisme

Un critère  $g_i$  est antagoniste à un critère  $g_j$  si l'impact de  $g_j$  sur l'évaluation globale diminue avec l'augmentation de la performance sur  $g_i$ . Dans les méthodes ELECTRE, cela se manifeste lorsque la préférence significative sur  $g_i$  diminue la contribution de  $g_j$  à l'évaluation globale.

**Exemple :** Dans l'évaluation du confort d'une offre, si le confort dynamique influence le confort postural, on pourrait considérer un effet antagoniste de  $g_i$  sur  $g_j$  pour éviter la redondance d'information.

### 1.4.5 Dépendances au sens structurel

Ces dépendances proviennent de facteurs influençant conjointement plusieurs critères et sont souvent évoquées par les décideurs. Elles peuvent être mises en évidence en examinant la construction des critères, bien que les corrélations statistiques ne soient pas

toujours pertinentes pour la décision multicritère, car les critères traduisent des points de vue différents.

### Exemple Illustratif

Dans le choix du tracé de lignes TGV, les critères de temps et de coût du trajet peuvent être influencés par la longueur du trajet. Cependant, lors de la modélisation des préférences, ces deux critères peuvent être traités indépendamment car ils concernent des parties prenantes différentes (investisseurs et clients).

Cette section met en lumière l'importance de considérer les dépendances entre critères en AMCD, qu'elles soient au sens des préférences ou structurelles, et la nécessité d'outils appropriés pour leur modélisation et prise en compte.

## 1.5 Prise en compte et évolution des profils de préférences dans la décision multicritère

Dans de nombreux domaines, la personnalisation joue un rôle clé pour améliorer l'expérience utilisateur et maximiser la pertinence des recommandations. Qu'il s'agisse de systèmes de recommandation, d'applications éducatives, ou encore de solutions commerciales, la capacité à comprendre et à modéliser les préférences des utilisateurs est essentielle. Pour cela, il est nécessaire de définir des profils précis qui reflètent les attentes, les besoins et les priorités de chaque individu.

La prise en compte des préférences repose sur l'analyse et l'apprentissage de comportements passés, mais elle s'inscrit également dans une dynamique d'évolution. En effet, les préférences des utilisateurs ne sont pas figées : elles peuvent changer avec le temps, en fonction de nouvelles expériences ou de nouveaux besoins. La mise à jour et l'adaptation des profils doivent ainsi être continuellement intégrées dans le processus, afin de garantir une pertinence constante des recommandations.

Dans cette partie, nous abordons les différentes approches et techniques permettant de construire, d'ajuster et de faire évoluer les profils des utilisateurs. Nous décrivons les mécanismes d'apprentissage des préférences, les méthodes de mise à jour dynamique des profils multicritères, ainsi que les défis liés à la gestion des données et des changements de préférences. Ces aspects sont illustrés à travers des exemples concrets pour mieux comprendre l'impact de l'évolution des profils sur la qualité des recommandations.

Cette problématique est au cœur de nombreux systèmes intelligents, et elle représente un défi majeur pour l'intelligence artificielle, notamment dans les domaines de la

personnalisation, de la recommandation et de la prise de décision multicritère.

Dans cette optique, l'objectif est de créer un ou plusieurs profils qui reflètent au mieux les préférences d'un utilisateur. Ces profils jouent un rôle central dans la personnalisation des recommandations, car ils permettent d'adapter les objets proposés à chaque utilisateur. Pour y parvenir, on recourt à des techniques, souvent issues de l'intelligence artificielle, pour apprendre les profils et les préférences des utilisateurs.

Ce processus d'apprentissage suit plusieurs étapes. Il est nécessaire, tout d'abord, de décomposer les objets que l'utilisateur a sélectionnés ou évalués afin de comprendre quels aspects sont importants pour lui. Ensuite, le profil multicritère de l'utilisateur est mis à jour avec les nouvelles informations collectées. Enfin, les données contenues dans ce profil permettent de sélectionner, trier et filtrer les objets proposés, en accord avec les préférences spécifiques de l'utilisateur (Figure 1.1).

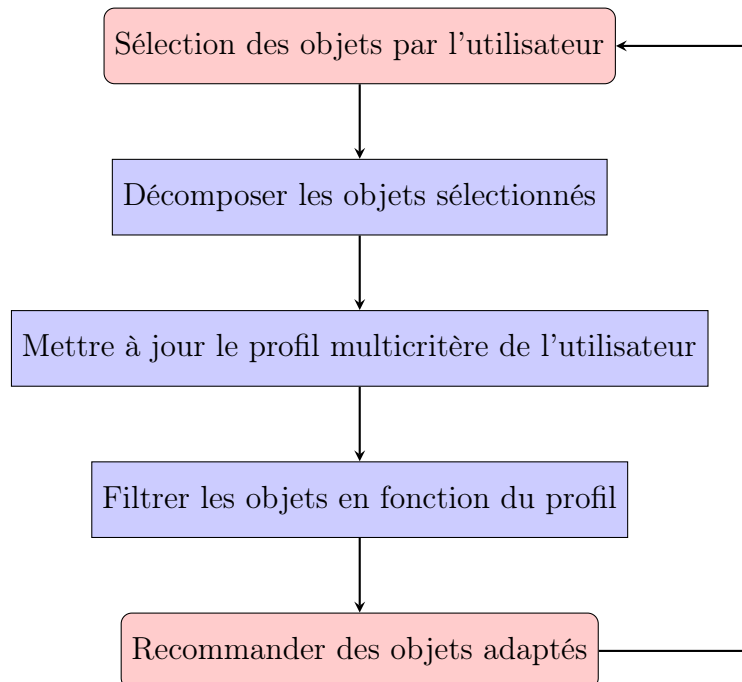


Figure 1.1: Cycle d'apprentissage de préférences

## 1.6 Apprentissage de profils/préférences

L'apprentissage des profils et des préférences des utilisateurs (ou *preference learning*) permet de proposer des recommandations personnalisées en exploitant ces profils. Pour un aperçu plus complet, on peut se référer à [23].

Avant de détailler les méthodes d'apprentissage, il est important de comprendre le cadre dans lequel ces profils/préférences sont exploités.

## 1.6.1 Exploitation des profils/préférences

L'exploitation des profils utilisateurs repose sur deux grandes approches pour représenter leurs préférences : la classification et le rangement.

### 1.6.1.1 La classification

La classification consiste à assigner chaque objet à un groupe, en fonction de ses caractéristiques, sans nécessairement établir d'ordre entre les objets. Elle permet de regrouper des objets en fonction de critères partagés, facilitant ainsi l'organisation des recommandations.

Soit un ensemble d'objets  $\{x_k | k = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbf{X}$  et un ensemble de groupes  $\{\lambda_i | i = 1, \dots, c\}$ . Un groupe  $\lambda_i$  est attribué à chaque objet  $x_k$ . Cela implique que l'objet  $x_k$  appartient préférentiellement au groupe  $\lambda_i$  plutôt qu'au groupe  $\lambda_j$ , ce qui est formalisé par  $\lambda_i \succ_{x_k} \lambda_j$ .

Cependant, cette méthode présente une limite : elle ne permet pas de définir un ordre total entre les objets, rendant difficile la sélection précise des éléments qui satisferaient le mieux l'utilisateur.

### 1.6.1.2 Le rangement

Le rangement vise à établir un ordre entre les différentes solutions proposées, afin de pouvoir sélectionner et trier celles qui sont les plus susceptibles de correspondre aux préférences de l'utilisateur.

Le rangement, tel que décrit dans [24], est une technique d'apprentissage supervisé ou semi-supervisé, où l'objectif est de construire un ordre total entre des objets, souvent basé sur un système de notation (par exemple une échelle de 0 à 5). Ce modèle repose sur la permutation des objets non encore appris en fonction de leur score global.

Pour définir le rangement, il est nécessaire de comprendre la notion de transitivité :

**Définition 1.1. Définition de la transitivité :** Une relation binaire  $\mathbf{R}$  définie sur un ensemble  $\mathbf{E}$  est dite transitive si, pour tout  $x, y$  et  $z$  appartenant à  $\mathbf{E}$ , si  $x$  est en relation avec  $y$  et  $y$  avec  $z$ , alors  $x$  est en relation avec  $z$ .

*Exemple 1.* Si  $A > B$  et  $B > C$ , alors  $A > C$ .

**Définition 1.2. Définition du rangement :** Avec un ensemble d'objets  $\{x_k | k = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbf{X}$ , chaque objet  $x_k$  est associé à un ordre total vis-à-vis des autres objets, où cet ordre est transitif.

## 1.6.2 Apprentissage par renforcement pour les profils utilisateurs

L'apprentissage par renforcement, appliqué aux profils utilisateurs, a été exploré dans plusieurs travaux [25]. Ce type d'apprentissage est basé sur la mise à jour incrémentale des préférences de l'utilisateur au fil des interactions, en renforçant les critères pertinents en fonction des objets évalués.

L'apprentissage est formalisé par des mises à jour de poids attribués aux critères de préférence via la formule suivante :

$$p_i^{(t+1)} = p_i^{(t)} + 0.1 \times \log(1 + pc_i^{(t)}) \quad (1.1)$$

Cette méthode présente des limites, notamment l'impossibilité de traiter certaines formes de données non textuelles et l'incomparabilité des objets.

## 1.7 Désagrégation et agrégation avec indépendance des critères

Afin de comprendre quels attributs sont pertinents pour un utilisateur dans l'évaluation d'un objet, il est nécessaire de décomposer cet objet en plusieurs attributs. Ces attributs sont, par simplification, considérés comme indépendants les uns des autres, car les interactions, dépendances ou liens entre eux ne sont pas toujours connues. Cependant, cette hypothèse d'indépendance est souvent irréaliste. En pratique, les attributs peuvent être fortement liés entre eux, ce qui influence la qualité de la recommandation si ces interactions ne sont pas prises en compte. Par exemple, dans le cas d'une voiture, la puissance est directement liée à son moteur. Si l'on considère ces attributs comme indépendants, des informations utiles peuvent être perdues, entraînant des recommandations moins précises et de moindre qualité.

Cela dit, modéliser ces interactions est complexe. Premièrement, il est difficile de concevoir un système qui les prenne en charge efficacement. Deuxièmement, ces interactions ne sont pas toujours connues. Ainsi, dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que les critères sont indépendants.

### 1.7.1 Opérateurs de désagrégation

En général, l'objectif n'est pas de construire directement une fonction d'utilité représentant les préférences d'un décideur, mais plutôt de concevoir une fonction d'une forme

spécifique que l'on sait pouvoir être réalisée cognitivement. De nombreuses formes de désagrégation ont été décrites dans la littérature. Nous présentons ici les principales.

Soit  $X_i$  l'ensemble des valeurs que peut prendre le  $i^{\text{me}}$  attribut, et supposons que  $X \subseteq \prod_{i=1}^n X_i$ . Les axiomes assurant l'existence de ces formes diffèrent selon qu'il s'agit de choix dans un contexte certain ou dans celui de l'espérance d'utilité (EU). Dans ce dernier cas, la fonction d'utilité est de la forme  $U(x) = \sum_j p_j u(x^j)$ , comme dans la théorie de Von Neumann et Morgenstern [26]. Voici une description succincte des principales méthodes issues de la littérature [27].

### 1.7.1.1 La décomposition additive

Il existe des fonctions  $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$$

Cette décomposition est abondamment traitée dans la littérature [28, 29].

### 1.7.1.2 La décomposition multiplicative

Il existe des fonctions  $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i)$$

Cette décomposition est une extension de la précédente, et peut être exprimée en termes logarithmiques pour  $u_i \geq 0$  [30].

### 1.7.1.3 La décomposition multilinéaire

Aussi appelée décomposition multiplicative-additive, cette méthode combine les deux approches précédentes. Il existe des fonctions  $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout ensemble  $j \subseteq \{1, \dots, n\}$ , des coefficients  $\pi_j \in \mathbb{R}$  tels que :

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j \subseteq \{1, \dots, n\}} \pi_j \prod_{k \in j} u_k(x_k)$$

Cette méthode est décrite en détail dans [30, 31].

### 1.7.1.4 La structure décomposable

Cette décomposition utilise des fonctions  $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$u(x_1, \dots, x_n) = F(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$$

Bien que plus générale, cette structure présente l'inconvénient de ne pas garantir l'unicité des fonctions  $u_i$  et de  $F$  [30, 32].

## 1.7.2 Opérateurs d'agrégation

L'opération inverse de la désagrégation consiste à agréger les données issues de différents attributs pour obtenir une valeur globale représentant l'intérêt de l'utilisateur pour un objet. Cette opération est appelée agrégation. Différentes méthodes permettent de réaliser cette agrégation [33]. Voici une description succincte des principales approches.

### 1.7.2.1 La somme pondérée ou moyenne arithmétique pondérée

La méthode de la somme pondérée est une combinaison linéaire des scores de chaque attribut :

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_i$$

où les poids  $w_i \in [0, 1]$  vérifient  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Cette méthode est la plus couramment utilisée, bien qu'il existe d'autres formes de moyennes [34].

### 1.7.2.2 Le minimum et maximum pondérés

Introduits par Dubois et Prade [34], ces opérateurs agrègent les scores en utilisant des opérations de minimum et maximum pondérés :

$$wmin_w(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{i=1}^n [(1 - w_i) \vee a_i]$$

$$wmax_w(a_1, \dots, a_n) = \bigvee_{i=1}^n [w_i \wedge a_i]$$

### 1.7.2.3 La somme pondérée ordonnée (OWA)

L'agrégation OWA (Ordered Weighted Average) a été introduite par Yager [35] et est définie par :

$$OWA_w(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_{(i)}$$

où  $w_i$  sont des poids associés aux rangs des valeurs triées  $a_{(i)}$ , et non aux valeurs elles-mêmes.

### 1.7.3 Comparaison d'éléments

Pour effectuer un classement des objets, il est nécessaire de les comparer à l'aide de différentes méthodes. Il existe deux approches principales [36] :

- L'évaluation individuelle des objets, où chaque élément reçoit un score global.
- La comparaison par paires d'éléments, où un prédicat binaire détermine si un élément est préféré à un autre.

Dans la comparaison par paires, le concept de Pareto-optimalité est souvent utilisé. Une alternative  $a$  est dite Pareto optimale si elle n'est dominée par aucune autre. Toutefois, cette méthode peut conduire à des incomparabilités.

*Exemple 2.* Soit deux objets  $A$  et  $B$ , caractérisés par deux critères avec des vecteurs d'utilité  $A = (10, 5)$  et  $B = (8, 4)$ . Ici,  $A$  est "supérieur" à  $B$  car ses valeurs sont meilleures sur les deux critères. Cependant, si nous comparons  $A = (10, 5)$  et  $C = (6, 11)$ , il est impossible de déterminer clairement une préférence car  $A$  est meilleur sur le premier critère, mais  $C$  l'emporte sur le second.

La méthode de calcul d'une valeur globale permet de comparer des objets très différents en agrégeant leurs attributs, et ainsi éviter les problèmes d'incomparabilité.

## 1.8 Désagrégation/Agrégation avec Interaction entre les Critères

L'agrégation des critères dans un processus de prise de décision multicritère doit prendre en compte l'importance des attributs ou critères considérés. Traditionnellement, cette importance est modélisée par l'utilisation de poids associés à chaque critère. Ces poids influencent directement l'agrégation, nécessitant ainsi l'utilisation de fonctions d'agrégation pondérées, ce qui abandonne la propriété de symétrie. Les fonctions pondérées les

plus courantes incluent les moyennes quasi linéaires, telles que les moyennes arithmétiques pondérées. Cependant, ces dernières présentent plusieurs limitations.

En effet, les moyennes arithmétiques pondérées et plus largement les moyennes quasi linéaires ne permettent pas de modéliser les interactions entre les critères. En théorie de l'utilité multiattribut (MAUT), ces fonctions mènent à l'indépendance préférentielle mutuelle des critères, ce qui signifie que les préférences entre certains critères sont indépendantes des autres critères. Cette approche est inappropriée lorsque les critères sont interdépendants, car elle entraîne souvent des erreurs dans les évaluations.

Pour modéliser les phénomènes d'interaction entre critères, tels que les synergies positives ou négatives, il est plus pertinent d'utiliser une fonction d'ensemble non additive, comme une mesure floue. Cela permet de définir un poids non seulement pour chaque critère individuel, mais aussi pour chaque sous-ensemble de critères, reflétant ainsi leurs interactions complexes.

### 1.8.1 L'importance des interactions entre critères

La tendance à considérer les critères comme indépendants mène souvent à une perte d'informations cruciales. Pour améliorer la qualité des recommandations, il est essentiel d'avoir une bonne modélisation des préférences utilisateur, en tenant compte des interactions entre les critères. Par exemple, dans le cas de l'achat d'une voiture, un utilisateur peut préférer une combinaison de moteur puissant et de freins performants. Si ces critères sont traités de manière indépendante, cette information n'est pas correctement capturée, ce qui peut entraîner des recommandations inappropriées.

Les interactions entre les critères permettent également de réduire le bruit dans les données en identifiant les critères les plus influents et en écartant ceux qui sont peu pertinents ou jamais utilisés. Ainsi, ces interactions permettent de mieux structurer les données de préférence et d'améliorer le processus d'agrégation.

## 1.9 Utilisation des intégrales floues et des interactions

Contrairement aux moyennes arithmétiques pondérées, les intégrales floues, telles que les intégrales de Choquet et de Sugeno, permettent de modéliser les interactions entre les critères. L'intégrale de Choquet, en particulier, se distingue par sa flexibilité à représenter les phénomènes d'interaction entre critères. Elle prend en compte à la fois l'importance individuelle des critères et leurs interactions, offrant ainsi une meilleure modélisation des situations complexes.

**Avantages de l'intégrale de Choquet.** L'intégrale de Choquet s'est révélée particulièrement adaptée pour généraliser le raisonnement sur des alternatives binaires à des alternatives plus complexes [37]. Dans notre contexte, où l'algorithme Pairwise fonctionne

selon un principe de comparaison binaire entre objets, l'intégrale de Choquet améliore significativement la qualité des classements et des recommandations en renforçant ce raisonnement.

En intégrant cette méthode dans notre système d'aide à la décision, nous sommes capables de détecter et de modéliser les interactions entre critères, qu'elles soient positives ou négatives. Ces interactions sont identifiées à partir des préférences exprimées par l'utilisateur à travers ses choix. En conséquence, le modèle d'évaluation peut être ajusté pour refléter plus précisément les interactions entre critères, ce qui permet d'affiner la désagrégation et d'améliorer la personnalisation des recommandations en fonction des actions de l'utilisateur.

### 1.9.1 Agrégation des critères

L'agrégation des critères constitue l'étape finale dans la construction du modèle d'évaluation pour la prise de décision. Après avoir identifié les critères et leur structure hiérarchique, nous utilisons l'agrégation pour combiner ces critères en une évaluation globale. Dans cette phase, les intégrales de Choquet nous permettent de capturer la complexité des interactions entre critères, offrant une méthode puissante pour produire des recommandations robustes et adaptées aux préférences de l'utilisateur.

Un exemple concret de cette approche est l'agrégation des critères liés aux modalités thermiques et au siège environnant dans un modèle conceptuel. Cette agrégation, basée sur les interactions identifiées entre ces critères, permet d'obtenir une évaluation plus précise et de proposer des solutions mieux adaptées aux besoins de l'utilisateur.

### 1.9.2 Description de l'étape d'agrégation des critères

À l'instar de la construction du modèle conceptuel, nous avons considéré les questions essentielles concernant les besoins et préoccupations des intervenants durant l'étape d'agrégation :

- Les besoins et préoccupations liés à l'utilisation de l'outil peuvent-ils influencer l'agrégation des critères ?
- Existe-t-il des préoccupations spécifiques à prendre en compte lors de cette phase d'agrégation ?

La première question a été abordée lors de la définition de la problématique dans la première phase de notre approche. Celle-ci a permis de mettre en évidence que les besoins liés à l'utilisation de l'outil nous incitent à adopter des méthodes d'agrégation adaptées à des problématiques de classification ou, idéalement, à des problématiques combinant tri et classement au sein d'une même catégorie. En ce qui concerne la seconde question, nous tenterons d'y répondre dans cette section.

Le processus d'agrégation a débuté par l'agrégation des dimensions de chaque critère terminal pour obtenir une évaluation unique sur une échelle donnée. Ensuite, les critères des nœuds parent ont été agrégés à partir des évaluations des nœuds enfants, et ainsi de suite jusqu'au premier niveau du modèle. À chaque nœud, nous avons sélectionné une méthode d'agrégation spécifique. Contrairement à l'Approche Hiérarchique Analytique (AHP), où une même méthode est utilisée uniformément, nous avons choisi des méthodes différentes selon les nœuds en fonction des besoins du problème.

Les préférences des intervenants ont été élicitées en collaboration avec des experts en confort pour les nœuds relatifs aux modalités et sous-critères, et avec les décideurs pour les nœuds correspondant aux groupes et activités.

### 1.9.2.1 Choix des méthodes d'agrégation

Les méthodes d'agrégation ont été sélectionnées en fonction des points suivants :

- La nature de la problématique d'aide à la décision,
- Le niveau de précision souhaité pour les résultats,
- La compatibilité des échelles utilisées (ordinales ou cardinales, homogènes ou hétérogènes) et des informations préférentielles avec la méthode choisie,
- La simplicité d'application et d'interprétation des résultats de la méthode,
- La capacité de la méthode à modéliser les interactions inter-critères (compensation, interaction, veto, etc.).

Compte tenu du nombre important de méthodes multicritères existantes, nous avons restreint notre choix à trois méthodes représentatives de différentes familles, basées sur les critères mentionnés :

- **Méthodes à base de règles** : La construction de règles avec le décideur a été retenue, car elle offre des résultats clairs, facilement interprétables, et adaptés à notre contexte. En effet, il est crucial que le résultat soit une affectation exclusive des options, avec des règles de décision intuitives. Les méthodes DRSA, par exemple, ne répondent pas à cette exigence.
- **Méthodes utilisant un critère unique de synthèse** : Nous avons choisi l'intégrale de Choquet pour modéliser les interactions entre critères, souvent présentes lors de l'agrégation. Cette méthode a été préférée aux autres méthodes fondées sur des modèles additifs, minimum, maximum ou OWA, car elle prend en compte davantage d'informations préférentielles, sous réserve de la commensurabilité des échelles. Cependant, nous avons systématiquement vérifié si les méthodes additives ou de type minimum pouvaient restituer correctement les préférences des intervenants.
- **Méthodes de surclassement** : Nous avons opté pour la méthode ELECTRE TRI, qui est la principale méthode de surclassement permettant d'obtenir des résultats sous forme de tri.

L'intégrale de Choquet, l'une des méthodes les plus utilisées pour interpréter l'interaction entre les critères, a été introduite dans nos travaux précédents où nous avons exploré les avantages de ce principe. Nous avons notamment étudié son utilisation dans le cadre du processus de clustering (la classification non supervisée) K-means [38, 39]. Après avoir expérimenté avec l'intégrale de Choquet ainsi que d'autres méthodes d'agrégation, telles que les moyennes arithmétique, pondérée, géométrique, harmonique et OWA, appliquées à la méthode de PROMETHEE [40], nous avons choisi de nous concentrer sur l'intégrale de Choquet pour ses capacités spécifiques à modéliser les interactions complexes entre les critères.

Ces trois méthodes — construction de règles, intégrale de Choquet et ELECTRE TRI — sont complémentaires dans leurs conditions d'application et leur capacité à modéliser les informations inter-critères. Elles sont également parmi les plus utilisées en Analyse Multicritère d'Aide à la Décision (AMCD).

### 1.9.3 Méthode par système expert / règles de production

Une méthode d'apprentissage existe pour identifier des dépendances entre symboles, souvent sous forme de règles de production. Ce type d'apprentissage permet de construire des systèmes experts à partir d'exemples. Parmi ces méthodes, les arbres de décision probabilistes, tels que ceux proposés par Quinlan (ID3 [41], C4.5 [42]), sont bien connus. Ces méthodes permettent également de générer des probabilités ou des coefficients de certitude, comme décrit dans [43].

Cependant, ces systèmes présentent certaines limites. En effet, ils deviennent difficiles à maintenir lorsque l'utilisateur est incohérent. Dans ce cas, les règles ou probabilités intégrées dans le système deviennent contradictoires, ce qui compromet son bon fonctionnement.

### 1.9.4 Mesures floues

Il est désormais bien reconnu que l'additivité n'est pas une propriété adéquate dans de nombreux contextes réels, notamment en raison de la complexité du raisonnement humain. Afin d'améliorer la modélisation des préférences des utilisateurs, Sugeno a proposé, en 1974, de remplacer la propriété d'additivité des fonctions d'ensemble par la monotonie, introduisant ainsi les mesures floues.

Considérons un ensemble de  $n$  indices  $N = \{1, \dots, n\}$  représentant des attributs ou critères. Une mesure floue, ou capacité, est définie comme suit :

**Définition 1.3. Mesure floue (Capacité)**

Soit un ensemble  $N = \{1, \dots, n\}$  de critères. Une capacité est une fonction  $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$  qui est monotone, c'est-à-dire que  $\mu(S) \leq \mu(T)$  pour tout  $S \subseteq T$ , et qui vérifie les

conditions limites  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\mu(N) = 1$ . La capacité est dite additive si, pour tout  $S, T \subseteq N$  disjoints,  $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$ .

En analyse multicritère, le coefficient  $\mu(S)$  pour un sous-ensemble  $S \subseteq N$  représente généralement le poids ou l'importance de la combinaison  $S$  de critères. Cette monotonie reflète simplement que l'ajout d'un nouveau critère dans une combinaison ne peut réduire son importance.

La capacité  $\mu(S)$  est utilisée pour calculer une valeur d'intérêt de l'utilisateur pour une combinaison de critères, permettant ainsi de comparer différents objets en fonction de leur pertinence pour l'utilisateur. Cette mesure floue sert ensuite à établir un ordre de préférence entre les différentes options proposées.

#### 1.9.4.1 Intégrales floues

Une fois une mesure floue définie, il est possible de construire une fonction d'agrégation, telle que l'intégrale floue, qui prend en compte les interactions entre critères. L'intégrale de Choquet, en particulier, est utilisée pour agréger des valeurs sur une échelle d'intervalle, contrairement à l'intégrale de Sugeno, qui est adaptée aux échelles ordinales.

L'intégrale de Choquet est ainsi une méthode puissante pour modéliser des phénomènes complexes d'interactions entre attributs ou critères, permettant une agrégation plus souple que les méthodes traditionnelles basées sur des poids simples.

### 1.9.5 L'intégrale de Choquet

Dans le cadre des systèmes d'aide à la décision multicritère (MCDA), l'une des méthodes les plus couramment utilisées est la somme pondérée, en raison de sa simplicité (voir la section sur la moyenne arithmétique pondérée). Cependant, cette approche présente certaines limitations lorsqu'il s'agit de modéliser des interactions complexes entre les critères. L'intégrale de Choquet, introduite par Choquet en 1953 et développée plus tard par Grabisch et ses collaborateurs [44,45], propose une solution plus flexible en considérant ces interactions.

L'intégrale de Choquet englobe une large gamme de fonctions d'agrégation (par exemple, Min, Max, OWA, etc.), dans lesquelles les poids attribués aux critères ne dépendent pas seulement du rang des critères (comme dans la moyenne pondérée ordonnée), mais aussi d'une mesure floue, appelée *capacité*. Cette capacité permet de capturer l'importance des sous-ensembles de critères, reflétant ainsi leur degré d'interaction.

#### Définition 1.4. Définition de l'intégrale de Choquet

Une fonction  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbf{R}$  est une *capacité* sur l'ensemble des critères  $N :=$

$\{1, \dots, n\}$  si :

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(N) = 1, \quad \text{et} \quad \forall S, T \subseteq N, S \subseteq T \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$$

Dans ce contexte,  $\mu(S)$  peut être interprété comme l'importance ou le poids du sous-ensemble de critères  $S \subseteq N$  dans le processus de décision.

L'intégrale de Choquet discrète d'un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par rapport à une capacité  $\mu$  est donnée par :

$$C_\mu(x) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]$$

où  $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$  est une permutation des composantes de  $x$  telle que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , et  $A_{(i)} := \{(i), (i+1), \dots, (n)\}$ .

**Exemple :**

Considérons trois critères dont les évaluations sont  $x_3 \leq x_1 \leq x_2$ . L'intégrale de Choquet correspondante sera alors :

$$C_\mu(x_1, x_2, x_3) = x_3[\mu(\{1, 2, 3\}) - \mu(\{1, 2\})] + x_1[\mu(\{1, 2\}) - \mu(\{2\})] + x_2\mu(\{2\})$$

Cette formule montre comment l'intégrale de Choquet prend en compte les interactions entre les différents critères, capturées par les différences de capacités entre les sous-ensembles.

**Propriétés de l'intégrale de Choquet** En tant qu'opérateur d'agrégation, l'intégrale de Choquet présente des propriétés intéressantes, dont :

- La moyenne arithmétique pondérée (capacité additive) ;
- Les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (capacité cardinale) ;
- Les polynômes laticiels (capacité binaire, comme les intégrales de Sugeno définies avec des mesures floues  $\{0, 1\}$ ).

Elle permet également de modéliser des cas particuliers tels que la fonction OWA (Ordered Weighted Averaging), qui peut être vue comme une intégrale de Choquet associée à une capacité cardinale, c'est-à-dire ne dépendant que de la taille des sous-ensembles.

**Concepts clés : Importance globale et interaction** Deux concepts fondamentaux permettent d'analyser l'intégrale de Choquet : l'*importance globale d'un critère* et l'*interaction entre critères*.

- **Importance globale** : Cette notion provient de la théorie des jeux coopératifs et est capturée par l'indice de Shapley, qui mesure la contribution moyenne d'un critère

$i$  dans toutes les coalitions possibles de critères. Il est défini par :

$$\phi_i = \sum_{K \subset N \setminus \{i\}} \frac{(n - |K| - 1)! |K|!}{n!} [\mu(K \cup \{i\}) - \mu(K)]$$

- **Interaction** : L'interaction entre deux critères  $i$  et  $j$  est capturée par l'indice d'interaction, défini par :

$$I_{ij} = \mu(\{i, j\}) - (\mu(\{i\}) + \mu(\{j\}))$$

Un indice positif indique une synergie, tandis qu'un indice négatif révèle une redondance.

## 1.9.6 Approches d'élicitation

Dans cette section, nous présentons un ensemble de méthodes d'élicitation relatives aux différentes composantes de la décision multicritère, et en particulier aux méthodes d'agrégation. Bien que la littérature sur ce sujet soit abondante, nous mettons en avant certaines des références les plus fréquemment citées.

### 1.9.6.1 KAPPALAB et élicitation de la capacité

L'intégrale de Choquet requiert la connaissance des valeurs de la fonction de capacité. Le système KAPPALAB [Grabisch et al., 2008] propose diverses méthodes pour l'élicitation de cette capacité. L'identification de la capacité suppose la disponibilité d'informations préférentielles sur la fonction d'utilité globale ou sur les relations de préférence entre un sous-ensemble d'alternatives  $\mathbf{O} \subseteq A$ .

Les modèles d'élicitation proposés dans KAPPALAB reposent sur des modèles d'optimisation, variant en fonction de la nature de l'information préférentielle et de la forme de la fonction objectif. En d'autres termes, il s'agit d'apprendre la fonction capacité à partir des informations préférentielles disponibles dans  $\mathbf{O}$ . Ces informations peuvent se présenter sous la forme d'un ordre partiel entre les alternatives, entre les critères, ou encore entre les valeurs de la capacité sur certains sous-ensembles de critères. Cette information est traduite automatiquement en un système de contraintes sur les valeurs des capacités.

Cependant, la complexité du modèle croît exponentiellement avec le nombre de critères ( $2^n$  variables), ce qui rend la tâche irréaliste pour un grand nombre de critères. C'est pourquoi, dans le cadre de l'intégrale de Choquet, une hypothèse de k-additivité des capacités est souvent posée. Selon la nature du modèle d'élicitation, plusieurs approches de résolution sont proposées, telles que la programmation linéaire ou la méthode des moindres carrés. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [46].

### 1.9.6.2 Élicitation des capacités de l'intégrale de Choquet

L'intégrale de Choquet, couramment utilisée en aide multicritère à la décision (AMCD) pour obtenir un classement, nécessite l'élicitation d'une capacité. Les méthodes d'élicitation sont indirectes et reposent sur des procédures d'agrégation/désagrégation, car il est difficile d'attribuer directement des valeurs à une capacité.

Nous avons utilisé des exemples d'apprentissage constitués de comparaisons par paires d'alternatives et d'affectations. Notre expérience a montré que le choix des alternatives d'apprentissage joue un rôle crucial dans la procédure d'agrégation/désagrégation, en accélérant l'apprentissage des préférences et réduisant ainsi le temps d'interaction avec l'intervenant. Ce n'est pas tant la quantité d'exemples d'apprentissage qui importe, mais plutôt leur caractère informatif.

Dans notre approche, nous avons cherché à identifier un ensemble d'exemples d'apprentissage pertinents. Nous avons constaté que lorsque ces exemples représentent des bornes de catégories (les meilleures et moins bonnes alternatives d'une catégorie), ils sont plus informatifs. Cela nécessite cependant un dialogue avec l'intervenant pour valider que les exemples choisis représentent bien ces bornes.

#### Étapes de l'élicitation de la capacité :

**1. Recueil de l'information préférentielle :** Nous avons demandé à l'expert de définir un ordre sur l'importance des critères (les saisons) pour construire un ensemble d'apprentissage pertinent, composé de comparaisons par paires d'alternatives. Ces comparaisons ont été effectuées par deux experts en confort thermique, dont les résultats étaient largement concordants.

**2. Détection d'interactions entre critères :** Nous avons transformé les comparaisons par paires en contraintes linéaires et tenté de trouver une capacité additive ( $k = 1$ ). L'absence de solution a suggéré la présence d'interactions entre critères, rendant nécessaire l'utilisation d'un modèle non additif.

**3. Procédure d'agrégation/désagrégation :** Afin de trouver une capacité reflétant les préférences des experts, nous avons appliqué la méthode du maximum split. En résolvant un programme linéaire, nous avons obtenu une solution correspondant à une capacité additive, mais elle n'était pas totalement cohérente avec les préférences des experts. Nous avons ensuite ajusté les contraintes et obtenu une capacité 2-additive qui correspondait davantage aux attentes des experts.

Après avoir déterminé une capacité compatible avec l'information préférentielle, nous avons calculé l'indice d'interaction  $I_\mu$  et la valeur de Shapley  $\phi_\mu$  pour mieux comprendre les interactions entre les critères et l'importance de chacun. Les résultats ont montré des indices d'interaction positifs, indiquant une complémentarité entre les critères, et ont confirmé l'importance relative des critères.

### 1.9.7 Mise en œuvre

Pour exploiter facilement les intégrales de Choquet, un package appelé « Kappalab » a été développé et est disponible via le système statistique R [46]. Ce package contient des routines permettant de manipuler divers types de fonctions comme les capacités. Il permet de calculer plusieurs intégrales non additives, telles que l'intégrale de Choquet et l'intégrale de Sugeno. Une analyse des capacités, en termes de comportement décisionnel, peut être réalisée par le calcul de différents indices comme la valeur de Shapley, l'indice d'interaction, etc. De plus, des transformations comme celle de Möbius, ainsi que d'autres représentations équivalentes de fonctions, peuvent également être calculées.

Nous avons adapté nos données pour les rendre compatibles avec ce package. En effet, les données que nous utilisons ne sont pas directement exploitables par Kappalab dans leur forme initiale, ce qui a nécessité leur conversion dans un format adapté.

Pour chaque appel à ce package, nous avons d'abord listé tous les critères correspondant aux éléments à évaluer et converti ces informations en variables booléennes. Par exemple, pour un élément (K) parmi une liste d'éléments (A, B, K, C), nous avons converti les informations sur ces éléments en un tableau où chaque critère est représenté par 0 (le critère ne fait pas partie de l'élément) ou 1 (le critère fait partie de l'élément).

Il nous reste à présent à définir les contraintes à inclure dans le système afin de pouvoir utiliser les intégrales de Choquet pour déterminer une solution et calculer les utilités de chaque critère et des paires de critères.

#### 1.9.7.1 Détermination des contraintes

Les contraintes sont exprimées sous forme d'un ordre partiel entre différents éléments. Ces contraintes sont ensuite intégrées dans Kappalab. Il existe deux cas possibles pour la détermination des contraintes :

- Le cas où une note est attribuée à un élément. - Le cas où l'utilisateur sélectionne un élément parmi une liste proposée.

Dans le premier cas, nous utilisons la note pour ordonner l'élément évalué par rapport aux autres éléments précédemment notés. Par exemple :

Élément	Note
A	17
K	15
B	14
C	14

**Tableau 1.1:** Exemple d'association d'éléments et de notes

Les contraintes obtenues à partir de cet exemple (1.1) sont :

—  $A > K$

- $A > B$
- $A > C$
- $K > B$
- $K > C$

Dans le second cas, où l'utilisateur choisit un élément parmi plusieurs (par exemple,  $K$  parmi  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $K$ ), nous considérons que l'utilisateur préfère l'élément sélectionné à tous les autres. Les contraintes sont alors les suivantes :

- $K > A$
- $K > B$
- $K > C$

Ces contraintes servent de base pour déterminer une solution qui respecte chacune d'entre elles. Cette solution permettra ensuite de calculer les intégrales de Choquet, les représentations de Möbius, et les utilités des différents critères et paires de critères.

### 1.9.7.2 Calcul des utilités

Afin de simplifier les calculs, des classes spéciales d'intégrales de Choquet, appelées capacités  $k$ -additives, sont souvent utilisées. Dans notre cas, nous utilisons une capacité 2-additive, car, pour des problèmes complexes, il est souvent préférable, pour des raisons de calcul et de simplicité, de limiter l'ensemble des solutions possibles à des capacités  $k$ -additives, avec  $k \in \{1, \dots, n\}$ , où  $n$  est le nombre total de critères. Nous avons choisi  $k = 2$  pour notre solution afin de tenir compte des interactions entre paires de critères.

## 1.10 Conclusion

Ce chapitre a présenté une vue d'ensemble des fondements de l'aide multicritère à la décision (AMCD), en mettant l'accent sur la modélisation et l'adaptation des préférences des utilisateurs dans des contextes décisionnels complexes. Nous avons examiné les concepts clés, les différentes approches méthodologiques — normatives, descriptives, prescriptives et constructives — ainsi que les outils permettant de structurer, d'évaluer et d'agrégier des critères souvent multiples et conflictuels.

Une attention particulière a été portée à la modélisation des préférences et à leur évolution au fil du temps, notamment à travers l'utilisation de méthodes d'agrégation flexibles et de techniques d'élicitation visant à affiner la représentation des profils utilisateurs. L'intégration des interactions entre critères, en particulier à l'aide des intégrales de Choquet, a permis de mieux prendre en compte la complexité des relations entre les dimensions d'évaluation et d'améliorer la cohérence des profils décisionnels.

Néanmoins, certaines limites techniques ont été identifiées, notamment en lien avec les outils d'implémentation utilisés, qui peuvent restreindre les expérimentations, en particulier pour des modèles comportant un grand nombre de critères. Ces constats ouvrent des perspectives de recherche intéressantes, telles que l'étude de l'impact des valeurs d'utilité négatives sur les performances des systèmes, ou encore l'exploration d'approches alternatives offrant des capacités plus avancées pour la modélisation de préférences conditionnelles et évolutives.

Dans cette continuité, nous avons approfondi la problématique de la prise en compte et de l'évolution des profils de préférences dans des contextes multicritères. Les travaux présentés s'intéressent plus spécifiquement aux méthodes et aux mécanismes permettant d'améliorer la personnalisation, la robustesse et la pertinence des recommandations, en s'appuyant sur des techniques d'apprentissage et des modèles décisionnels dynamiques.

# Chapitre 2

## Méthodes multicritères et structuration des alternatives par agrégation et clustering

### 2.1 Introduction

La prise de décision dans des environnements complexes implique souvent la prise en compte de multiples critères, parfois contradictoires, qui reflètent les différentes dimensions d'un problème. Que ce soit dans le cadre de la gestion de projets, de la sélection de fournisseurs, de l'évaluation de performances ou encore de la planification stratégique, les décideurs doivent jongler entre des objectifs variés, allant des coûts financiers aux impacts environnementaux, en passant par des considérations sociales et techniques.

Les méthodes multicritères d'aide à la décision (MCDA) offrent un cadre théorique et pratique pour structurer, analyser et résoudre ces problématiques complexes. Elles permettent de formaliser les préférences des décideurs, d'évaluer des alternatives selon plusieurs dimensions et d'aboutir à des recommandations cohérentes. Contrairement aux approches mono-critères, qui réduisent un problème à une seule dimension d'évaluation, les méthodes multicritères intègrent la richesse et la diversité des points de vue, tout en gérant les conflits et les compromis inhérents à ce type de décision.

Dans ce chapitre, nous présenterons les fondements des méthodes multicritères en commençant par une typologie des problèmes de décision. Nous aborderons ensuite les différentes catégories de problèmes multicritères, ainsi que les approches méthodologiques adaptées à chaque type de situation. Cette exploration nous permettra de mieux comprendre comment structurer un problème décisionnel complexe et choisir la méthode la plus appropriée pour le résoudre.

## 2.2 Typologie des problèmes de décision multicritère

### 2.2.1 Les différents problèmes multicritères

Les problèmes multicritères sont classés en fonction de plusieurs critères :

- **La nature des conséquences des décisions**, modélisées comme :
  - déterministes, stochastiques ou floues ;
  - réversibles, lourdes ou irréversibles.
- **La nature de l'ensemble des alternatives**, modélisées comme :
  - explicite, avec un nombre fini d'alternatives, pouvant être représentées par un tableau des performances pour chaque critère ;
  - implicite, avec un nombre infini d'alternatives, typiques des problèmes de programmation multi-objectifs.
- **Le contexte de décision** : publique ou privée ;
- **Le nombre de décideurs** : décision individuelle ou de groupe.

### 2.2.2 Les différentes problématiques multicritères

**Problématique de choix multicritère** L'objectif est de sélectionner un ensemble réduit d'alternatives, voire une seule, se démarquant comme meilleure. Cet ensemble regroupe des alternatives difficiles à départager. L'optimisation est un exemple classique de cette problématique.

**Problématique de rangement multicritère** Elle vise à ordonner les alternatives selon des préférences. Cet ordre peut être complet ou partiel sur l'ensemble des alternatives.

Roy propose également deux autres problématiques multicritères : la classification et la description [17].

## 2.3 Typologie des modèles de décision multicritère

### 2.3.1 Les structures de préférences

La notion de structure de préférence est fondamentale dans la plupart des modèles de décision multicritère. Voici les définitions essentielles :

#### Relations binaires et ordres

**Définition 2.1.** Une relation binaire  $S$  sur un ensemble  $\mathbf{X}$  est un ensemble de paires ordonnées  $(x, y)$ , avec  $x, y \in \mathbf{X}$ . On utilise indifféremment les notations  $(x, y) \in S$  ou  $xSy$ .

**Définition 2.2.** Une relation binaire est dite :

- **réflexive** si  $(x, x) \in S$  pour tout  $x \in X$  ;
- **irréflexive** si  $(x, x) \notin S$  pour tout  $x \in X$  ;
- **symétrique** si  $(x, y) \in S$  implique  $(y, x) \in S$  pour tout  $x, y \in X$  ;
- **asymétrique** si  $(x, y) \in S$  implique  $(y, x) \notin S$  pour tout  $x, y \in X$  ;
- **transitive** si  $(x, y) \in S$  et  $(y, z) \in S$  implique  $(x, z) \in S$  pour tout  $x, y, z \in X$ .

### Structures de préférences

**Définition 2.3.** Une structure de préférence  $S$  est définie sur  $X$  par une relation binaire  $P$  (asymétrique) et une relation binaire  $I$  (réflexive et symétrique).  $P$  et  $I$  sont deux sous-ensembles disjoints de  $X \times X$ .

$$xSy \text{ ssi } xPy \text{ ou } xIy \quad (S = P \cup I)$$

### 2.3.2 Procédures d'agrégation multicritère

**Agrégation des préférences** L'agrégation consiste à synthétiser l'information pour la rendre plus compacte et facile à traiter. Dans le cas de la décision multicritère, elle implique l'agrégation de critères contradictoires [47].

Deux types d'agrégation de préférences existent :

- **Agrégation ordinale** : ne prend en compte que l'ordre des alternatives.
- **Agrégation cardinale** : utilise des performances quantitatives pour obtenir un résultat d'agrégation déterminé par ces indicateurs.

**Méthodes de surclassement** Les méthodes de surclassement construisent une ou plusieurs relations binaires de surclassement entre les alternatives, indiquant dans quelle mesure une alternative  $x$  est "au moins aussi bonne" qu'une alternative  $y$  [16].

Quelques exemples de méthodes de surclassement :

- **Méthode majoritaire** : Cette méthode, issue des travaux de Condorcet (1785), préfère une alternative  $x$  à  $y$  si  $P(x, y) > P(y, x)$ , où  $P(x, y)$  représente le nombre de critères où  $x$  domine  $y$ .
- **Règle de prudence** : Le décideur choisit la solution minimisant les vulnérabilités potentielles. Formellement, une solution  $\bar{x}$  est choisie si elle maximise :

$$\min_{y \in X} a(\bar{x}, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} a(x, y)$$

### 2.3.3 Les écoles de méthodes multicritères

Deux écoles principales en aide multicritère à la décision (MCDA) :

- **École américaine** : se base sur la combinaison additive des valeurs d'utilité, comme la somme pondérée, et comprend des méthodes telles que MAUT (MultiAttribute Utility Theory) et AHP (Analytic Hierarchy Process).
- **École européenne** : privilégie les méthodes de surclassement, telles que les méthodes ELECTRE et PROMETHEE, qui permettent l'inclusion de relations d'indifférence et d'incomparabilité.

D'autres méthodes, comme QUALIFLEX et les méthodes coût-bénéfice, existent en dehors de ces deux écoles [48].

## 2.4 Les Méthodes Multicritères : Procédure d'Agrégation Multicritère

Les méthodes d'aide à la décision multicritère sont abondantes et bien documentées dans la littérature, notamment dans les travaux de Roy [17], Vincke [15], Pomerol et al. [49], Roy [16], et Figueira et al. [50].

Deux principales écoles dominent le domaine de la décision multicritère :

- **L'école Américaine** : Cette école favorise une approche additive, souvent fondée sur une fonction d'utilité combinant les valeurs pour obtenir une note globale. Les méthodes populaires incluent MAUT (MultiAttribute Utility Theory) [13], MHM (Méthode de hiérarchisation multicritère) [51] et AHP (Analytic Hierarchy Process) [52].
- **L'école Européenne** : Cette école privilégie l'utilisation de méthodes basées sur le surclassement entre actions potentielles. Les méthodes les plus connues incluent ELECTRE [53] et PROMETHEE [54]. Ces méthodes permettent d'établir des notions d'indifférence et d'incomparabilité, bien adaptées aux perceptions des décideurs [55].

## 2.5 Typologie des Méthodes selon les Préférences du Décideur

Les méthodes multicritères se distinguent en fonction du moment où les préférences du décideur sont sollicitées. Trois grandes catégories peuvent être identifiées :

- **Méthodes à préférence *a priori*** : Les préférences sont spécifiées avant le lancement du processus décisionnel. Les méthodes scalaires, qui agrègent les critères en

une fonction unique, en sont un exemple typique (voir Section 2.6).

- **Méthodes à préférence progressive** : Le décideur intervient tout au long du processus pour ajuster ses préférences en fonction des informations obtenues au fur et à mesure.
- **Méthodes à préférence *a posteriori*** : Ces méthodes génèrent d’abord l’ensemble des solutions non dominées (proches du front de Pareto). Le décideur sélectionne ensuite la solution finale parmi ces alternatives.

## 2.6 Exemples de Méthodes de Décision Multicritère (Méthodes scalaires)

Dans cette section, nous présentons plusieurs méthodes scalaires bien connues, illustrant leur fonctionnement et leurs spécificités.

### 2.6.1 Méthode de la Somme Pondérée

La méthode de la somme pondérée attribue un poids à chaque critère, permettant d’obtenir une valeur globale pour chaque alternative. Cette méthode est formalisée par l’équation suivante :

$$u(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (2.1)$$

où  $w_i$  représente le poids attribué au critère  $i$ , et  $f_i(x)$  la performance de l’alternative  $x$  sur ce critère.

**Choix des Poids** Le choix des poids est crucial dans cette méthode. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour aider le décideur à définir ces poids :

- **Méthodes de classement** : Elles permettent de hiérarchiser les critères selon leur importance relative [56].
- **Méthodes de comparaison par paires** : Le décideur compare les critères deux à deux pour établir des rapports de préférence [57].

### 2.6.2 Théorie de l’Utilité Multi-Attribut (MAUT)

La théorie de l’utilité multi-attribut (MAUT) vise à modéliser les préférences du décideur à travers une fonction d’utilité qui agrège les performances sur plusieurs critères. La fonction est définie ainsi :

$$u(x) = f(u_1(f_1(x)), u_2(f_2(x)), \dots, u_k(f_k(x))) \quad (2.2)$$

où  $u_i(f_i(x))$  représente l'utilité attribuée à la performance  $f_i(x)$  sur le critère  $i$ .

### 2.6.3 Méthode AHP : Processus Analytique Hiérarchique

La méthode AHP (Analytic Hierarchy Process), développée par Saaty [58], est une méthode puissante pour structurer des décisions complexes. Elle imite le processus de décision humain, basé sur la décomposition, le jugement et la synthèse des informations. AHP est particulièrement utile pour traiter des critères qualitatifs et quantitatifs, et trouve des applications variées en économie, en écologie et en ingénierie.

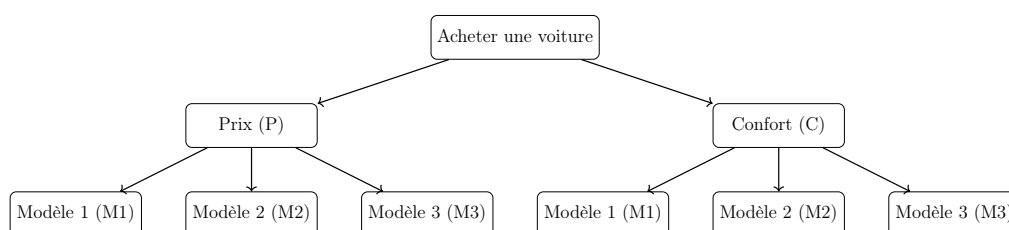
#### 2.6.3.1 Phases de la Méthode AHP

La méthode AHP se déroule en cinq étapes :

1. **Décomposition hiérarchique du problème** : Le problème est structuré en une hiérarchie comprenant l'objectif global, les critères et sous-critères, puis les alternatives à évaluer.
2. **Construction des matrices de comparaison par paires** : Les éléments de chaque niveau sont comparés deux à deux en fonction de leur contribution à l'objectif supérieur. Une échelle allant de 1 (importance égale) à 9 (importance absolue) est utilisée.
3. **Établissement des priorités** : Les priorités sont calculées à partir des vecteurs propres des matrices de comparaison, puis normalisées.
4. **Synthèse des priorités** : Les priorités des critères sont agrégées pour obtenir un score global pour chaque alternative.
5. **Vérification de la cohérence des jugements** : Un ratio de cohérence (CR) est calculé pour s'assurer de la fiabilité des jugements du décideur.

#### 2.6.3.2 Exemple Illustratif : Achat d'une Voiture

Considérons l'achat d'une voiture en fonction de deux critères : le prix (P) et le confort (C). Trois modèles sont disponibles : M1, M2 et M3.



**Figure 2.1:** Hiérarchie décisionnelle pour l'achat d'une voiture selon AHP

	P	C	Priorité
P	1	5	0,83
C	$\frac{1}{5}$	1	0,17

**Tableau 2.1:** Matrice de comparaison par paires des critères (Prix vs Confort)

La synthèse des priorités pour les modèles de voitures est réalisée de la même manière, aboutissant à un classement des alternatives. La cohérence des jugements est vérifiée à l'aide du ratio de cohérence (CR), qui doit être inférieur à 0,1 pour garantir la validité des résultats.

### 2.6.3.3 Avantages et Limites de l'AHP

La méthode AHP est intuitive et facile à appliquer pour des problèmes de taille modérée. Toutefois, pour des systèmes complexes ou autonomes, la collecte en temps réel des jugements du décideur peut devenir contraignante.

## 2.7 Méthodes de surclassement

Les méthodes de surclassement permettent de gérer l'incomparabilité de certains couples d'actions. La comparaison de ces couples d'actions conduit à la construction d'un graphe des relations entre elles, ce qui permet de prendre en compte les relations non transitives, telles que le paradoxe de Condorcet. Ce paradoxe survient, par exemple, lorsque des votants doivent choisir entre trois actions A, B et C. Dans ce cas, une majorité de votants peut préférer l'action A à B, une autre majorité préférer B à C, et enfin une troisième majorité préférer C à A.

Les méthodes de surclassement permettent de sélectionner une solution unique si, et seulement si, la relation est un ordre total. Dans le cas contraire, elles identifient un ensemble de solutions. Ces méthodes sont spécifiquement applicables aux problèmes d'aide à la décision multicritère (MADM).

Les méthodes de surclassement reposent sur des comparaisons par paires d'actions dans le but d'établir une relation de surclassement  $S$  dans un ensemble d'actions ou d'alternatives  $\mathbf{X}$ . Selon B. Roy, une relation de surclassement  $S$  est une relation binaire définie dans l'ensemble  $\mathbf{X}$ , telle que :

$xSx'$  si, et seulement si, il existe "suffisamment d'arguments pour admettre que  $x$  est au moins aussi bon que  $x'$ " et "il n'y a pas de raison importante de prétendre le contraire".

Cette définition fait intervenir deux concepts essentiels :

- **Concordance** : pour qu'une action  $x$  surclasse une autre action  $x'$ , il est nécessaire que la majorité (au sens large) des critères de  $x$  soient au moins aussi bons que leurs homologues dans  $x'$ .

- **Discordance** : pour qu'une action  $x$  surclasse une autre action  $x'$ , il faut que  $x'$  ne présente pas de critères pour lesquels son avantage sur  $x$  soit substantiel et non négligeable.

Dans les sections suivantes, nous présenterons les principales méthodes de surclassement abordées dans la littérature, à savoir les méthodes ELECTRE et PROMETHEE.

### 2.7.1 Méthode ELECTRE

Les méthodes **ELECTRE** (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) constituent une famille de techniques d'aide multicritère à la décision développées par Bernard Roy et son équipe dès 1968 [53]. Conçues pour traiter des problèmes décisionnels complexes impliquant des critères nombreux et souvent contradictoires, ces méthodes reposent sur le principe de *surclassement* pour comparer les alternatives. Elles visent soit à sélectionner un sous-ensemble d'alternatives, soit à les classer ou à les affecter à des catégories.

Dans cette section, nous présenterons en détail la méthode **ELECTRE I**, puis un aperçu des développements ultérieurs tels que **ELECTRE II** et d'autres variantes plus récentes. Pour une présentation approfondie, le lecteur peut se référer à [59], [16], et [15].

#### 2.7.1.1 ELECTRE I : Le Principe de Surclassement pour le Choix

La première méthode de la série, **ELECTRE I**, a été introduite par Bernard Roy en 1968 [53]. Elle est conçue pour résoudre des problèmes de *choix*, où l'objectif est de sélectionner un sous-ensemble restreint d'alternatives jugées préférables. La méthode repose sur la construction d'une relation binaire de surclassement, notée  $S$ , entre les alternatives.

**Principe du Surclassement** : Une alternative  $a$  est dite *surclasser* une alternative  $b$  (noté  $aSb$ ) si :

- $a$  est considérée comme au moins aussi bonne que  $b$  selon la majorité des critères (**concordance**).
- Aucun critère n'exprime un désaccord majeur empêchant ce surclassement (**discordance**).

**Indices utilisés** :

- **Indice de Concordance**  $C(a, b)$  : Mesure la proportion de critères pour lesquels  $a$  est au moins aussi bon que  $b$ . Plus cet indice est proche de 1, plus le surclassement est soutenu.
- **Indice de Discordance**  $D(a, b)$  : Évalue l'importance des désaccords éventuels sur certains critères. Si un critère pénalise fortement  $a$ , le surclassement peut être bloqué, même si l'indice de concordance est élevé.

**Formulation mathématique :** Soit  $w_i$  le poids du critère  $i$ , avec  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $x, x'$  deux alternatives à comparer.

$$C(x, x') = \sum_{i=1}^k \delta_i(x, x') \quad (2.3)$$

avec

$$\delta_i(x, x') = \begin{cases} w_i & \text{si } f_i(x) \geq f_i(x') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

L'indice de non-discordance est défini par :

$$D(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{w_i} \max_i (f_i(x') - f_i(x)) & \text{si } C(x, x') \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

**Décision finale :** Une alternative  $x$  surclasse  $x'$  si :

$$xSx' \Leftrightarrow C(x, x') \geq c \quad \text{et} \quad D(x, x') \leq d \quad (2.6)$$

où  $c$  et  $d$  sont respectivement les seuils de concordance et de discordance fixés par le décideur.

La dernière étape consiste à identifier le **noyau** des alternatives non surclassées par aucune autre, constituant les meilleures options.

### 2.7.1.2 ELECTRE II : Classement des Alternatives

**ELECTRE II**, introduite en 1973 [60], étend le cadre d'ELECTRE I aux problèmes de *classement*. Alors qu'ELECTRE I se concentre sur la sélection d'un sous-ensemble d'alternatives, ELECTRE II vise à établir un *ordre partiel ou total* des alternatives disponibles.

**Principe du Classement :** La méthode repose sur une double application du surclassement :

1. Un **classement descendant** : les meilleures alternatives sont identifiées en éliminant progressivement les moins performantes.
2. Un **classement ascendant** : les alternatives les moins favorables sont identifiées pour remonter vers les meilleures.

La synthèse des deux classements permet d'obtenir un classement final robuste. ELECTRE II introduit également deux types de surclassement :

- **Surclassement fort** : lorsque les critères de concordance sont pleinement satisfaits sans discordance significative.

- **Surclassement faible** : lorsqu'un surclassement est établi malgré la présence de légères discordances.

Cette approche est particulièrement utile pour hiérarchiser les alternatives lorsque les critères sont nombreux et hétérogènes.

### 2.7.1.3 Évolutions des Méthodes ELECTRE

À partir des méthodes ELECTRE I et II, plusieurs variantes ont été développées pour répondre à des besoins décisionnels spécifiques :

- **ELECTRE III** [61] : Conçue pour des problèmes de *classement* avec des données imprécises et des préférences floues. Elle introduit la notion de *pseudo-critères*, modélisant des zones d'indifférence et de préférence faible.
- **ELECTRE IV** [16] : Adaptée aux situations où les poids des critères ne sont pas définis, cette méthode repose sur des relations de surclassement associées à des degrés de crédibilité.
- **ELECTRE TRI** [59] : Spécifique aux problèmes de *tri*, cette méthode affecte les alternatives à des catégories prédéfinies en fonction de profils de référence.

Les méthodes ELECTRE se distinguent par leur capacité à modéliser des problèmes complexes impliquant des critères multiples et contradictoires. Leur souplesse et leur robustesse en font des outils incontournables en aide à la décision multicritère. Pour une présentation détaillée des différentes variantes et de leurs applications, le lecteur peut se référer à [16], [15], et [59].

### 2.7.2 Méthode PROMETHEE

La méthode **PROMETHEE** (Preference Ranking Organisation METHods for Enrichment Evaluation) a été proposée pour la première fois en 1982 par Jean-Pierre Brans [62]. Faisant partie des méthodes de surclassement, PROMETHEE offre une approche simple et puissante pour la résolution de problèmes multicritères. Elle est particulièrement adaptée aux situations où le décideur doit choisir, classer ou trier des alternatives en fonction de plusieurs critères contradictoires.

Deux variantes principales de PROMETHEE existent :

- **PROMETHEE I** : Fournit un *préordre partiel*, permettant l'incomparabilité entre certaines alternatives lorsque l'information disponible ne permet pas de les départager de manière définitive.
- **PROMETHEE II** : Fournit un *préordre total*, dans lequel toutes les alternatives sont comparées et classées, même si certaines comparaisons sont moins précises.

Ces méthodes s'appliquent à des problèmes multicritères de la forme :

$$\text{Opt } \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) \mid x \in A\},$$

où  $A$  est un ensemble fini d'alternatives  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , et  $f_j(x)$  représente la performance de l'alternative  $x$  selon le critère  $j$  pour  $j = 1, \dots, k$ .

### 2.7.2.1 Principes de la Méthode PROMETHEE

La méthode PROMETHEE repose sur trois étapes fondamentales [63] :

**1. Enrichissement de la structure de préférence :** Pour chaque critère, une fonction de préférence  $P_j(x, x')$  est définie pour mesurer à quel point une alternative  $x$  est préférée à une autre  $x'$ . Cette fonction dépend de la différence  $d_j = f_j(x) - f_j(x')$ .

**2. Enrichissement de la relation de dominance :** Une agrégation des préférences est réalisée pour obtenir une mesure globale de la préférence de chaque alternative par rapport aux autres. Cela se fait à l'aide de l'**indicateur de préférence global**  $\pi(x, x')$ .

**3. Aide à la décision :** Les indicateurs de préférence sont utilisés pour établir des flux de préférence permettant de classer les alternatives. PROMETHEE I permet de détecter des incomparabilités, tandis que PROMETHEE II offre un classement total.

### 2.7.2.2 Calcul de l'Intensité de Préférence

Pour deux alternatives  $x$  et  $x'$ , l'intensité de préférence pour le critère  $j$  est définie par :

$$P_j(x, x') = G_j(d_j),$$

où  $d_j = f_j(x) - f_j(x')$ . La fonction  $G_j(d_j)$  est une fonction croissante pour  $d_j \geq 0$  et nulle pour  $d_j < 0$ . Une valeur proche de 1 signifie que  $x$  est nettement préférable à  $x'$  pour le critère  $j$ , tandis qu'une valeur proche de 0 indique le contraire.

### 2.7.2.3 Types de Fonctions de Préférence

Les fonctions de préférence  $G_j(d)$  peuvent prendre différentes formes selon la nature des critères et les préférences du décideur. Voici les types les plus courants [64] :

### 2.7.2.4 Agrégation des Préférences et Classement des Alternatives

Les intensités de préférence sont agrégées pour obtenir un **indicateur de préférence global**, noté  $\pi(x, x')$ .

Tableau 2.2: Types de fonctions de préférence dans la méthode PROMETHEE

Type de Critère	Forme de la Fonction de Préférence $G_j(d)$
Type I : Critère Usuel	$G_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \leq 0 \\ 1, & \text{si } d > 0 \end{cases}$
Type II : Quasi-Critère	$G_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \leq q_j \\ 1, & \text{si } d > q_j \end{cases}$
Type III : Préférence Linéaire	$G_j(d) = \begin{cases} \frac{d}{p_j}, & \text{si } 0 < d \leq p_j \\ 1, & \text{si } d > p_j \end{cases}$
Type IV : Préférence en Niveaux	$G_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \leq q_j \\ \frac{1}{2}, & \text{si } q_j < d \leq p_j \\ 1, & \text{si } d > p_j \end{cases}$
Type V : Préférence Linéaire avec Zone d'Indifférence	$G_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \leq q_j \\ \frac{d-q_j}{p_j-q_j}, & \text{si } q_j < d \leq p_j \\ 1, & \text{si } d > p_j \end{cases}$
Type VI : Critère Gaussien	$G_j(d) = 1 - \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_j^2}\right)$

$$\pi(x, x') = \sum_{j=1}^k w_j \cdot P_j(x, x')$$

où  $w_j$  est le poids du critère  $j$ , reflétant son importance relative dans la décision.

À partir de ces indicateurs, deux flux sont calculés :

- **Flux sortant** ( $\phi^+(x)$ ) : mesure la force avec laquelle l'alternative  $x$  surclasse les autres.

$$\phi^+(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{x' \in A \setminus \{x\}} \pi(x, x')$$

- **Flux entrant** ( $\phi^-(x)$ ) : mesure la force avec laquelle  $x$  est surclassée par les autres.

$$\phi^-(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{x' \in A \setminus \{x\}} \pi(x', x)$$

**PROMETHEE I (Classement Partiel)** : Le classement est basé sur la comparaison des flux sortants et entrants :

- $x$  est préférée à  $x'$  si  $\phi^+(x) > \phi^+(x')$  et  $\phi^-(x) < \phi^-(x')$ .
- $x$  et  $x'$  sont incomparables si les flux ne permettent pas de conclure à une préférence nette.

**PROMETHEE II (Classement Total) :** Un **flux net** est calculé pour chaque alternative :

$$\phi(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x).$$

Les alternatives sont ensuite classées de manière décroissante en fonction de  $\phi(x)$ , fournissant un classement total.

La méthode PROMETHEE se distingue par sa flexibilité et sa simplicité de mise en œuvre. Elle permet de gérer efficacement des problèmes multicritères complexes en offrant au décideur des outils pour ajuster les paramètres de préférence selon ses besoins. PROMETHEE I est particulièrement utile lorsque l'incomparabilité est pertinente, tandis que PROMETHEE II est mieux adapté pour obtenir un classement global clair.

### 2.7.2.5 Intégration de PROMETHEE II avec des Opérateurs d'Agrégation

L'aide multicritère à la décision (MCDA) s'appuie sur un ensemble de méthodes destinées à comparer, évaluer et classer des alternatives en fonction de plusieurs critères généralement conflictuels. Parmi ces approches, les méthodes d'ordonnement, telles que *PROMETHEE II*, occupent une place importante en raison de leur capacité à produire un classement complet des alternatives à partir d'un indice global de préférence.

Dans notre travail [37], nous proposons une amélioration de la méthode *PROMETHEE II* en intégrant plusieurs opérateurs d'agrégation, parmi lesquels la moyenne arithmétique, géométrique, harmonique, ainsi que les moyennes de Bonferroni et d'Heronian [65]. L'intégration de ces opérateurs intervient au niveau de l'agrégation des préférences sur l'ensemble des critères, afin de calculer l'indicateur de préférence global  $\pi(x, x')$  pour chaque couple d'alternatives  $(x, x')$ . L'objectif est d'analyser l'influence de ces opérateurs sur la cohérence du classement final et d'évaluer leur aptitude à représenter de manière plus précise et plus flexible les préférences exprimées par le décideur.

Le recours à des opérateurs d'agrégation offre en effet un cadre plus flexible et plus riche pour la modélisation des préférences, notamment en permettant de mieux tenir compte des interactions et corrélations éventuelles entre critères. Nous analysons ainsi les propriétés mathématiques de ces opérateurs et comparons leurs performances à travers une série d'expérimentations menées sur des jeux de données réels.

#### Moyenne de Bonferroni [66, 67]

**Définition 2.4.** (Bonferroni, 1950) Soient  $p, q \geq 0$  et  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une collection de nombres réels positifs. Alors, la fonction d'agrégation suivante :

$$B^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n a_i^p a_j^q \right]^{\frac{1}{p+q}} \quad (2.7)$$

est appelée moyenne de Bonferroni (BM).

### Moyenne Héronienne [68]

**Définition 2.5.** Soit  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une collection de nombres positifs. Alors, la moyenne définie par :

$$HM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sqrt{a_i a_j} \quad (2.8)$$

est appelée moyenne Héronienne (HM). Cette moyenne est basée sur la définition de la moyenne de Bonferroni (BM) (Yageri, 2009). Nous proposons également une généralisation de la moyenne Héronienne.

**Définition 2.6.** Soient  $p, q \geq 0$  et  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une collection de nombres positifs. Alors, la moyenne définie par :

$$GHM^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[ \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i^p a_j^q \right]^{\frac{1}{p+q}} \quad (2.9)$$

est appelée moyenne Héronienne généralisée (GHM). Il est à noter que lorsque  $p = q = \frac{1}{2}$ , la GHM se réduit à la HM (Beliakov, 2007).

### Moyenne harmonique [69]

**Définition 2.7.** Soit  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une collection de nombres positifs. Alors, la moyenne définie par :

$$HAM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \quad (2.10)$$

est appelée moyenne harmonique (HAM).

### Moyenne géométrique [70]

**Définition 2.8.** Soit  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une collection de nombres positifs. Alors, la moyenne définie par :

$$GM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[ \prod_{i=1}^n a_i \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.11)$$

est appelée moyenne géométrique (GM).

Commençons par le **flux net** obtenue par l'agrégation de tous les critères à l'aide de la fonction de préférence en "V" 2.2. Ensuite, afin d'obtenir le score global  $\phi$  pour chaque action, nous appliquons différentes moyennes utilisées comme fonctions d'agrégation, telles que celles décrites dans la section précédente, afin d'analyser leur performance et l'efficacité des résultats obtenus.

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a); \quad (2.12)$$

$$\phi(a) = \sum_{x \in A} P(a, x) - \sum_{x \in A} P(x, a); \quad (2.13)$$

Pour plusieurs types de moyennes, nous obtenons :

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
A1	30	-248	5	3.5	18
A2	0	-269	2	4.5	24
A3	50	-413	4	5.5	17
A4	90	-596	6	8	20
A5	120	-1321	8	7.5	16
A6	70	-734	5	4	21
A7	105	-982	7	8.5	13
$w$	25	45	10	12	8

Préférence  $P(a, b)$  :

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	0	25	14.167	44.67	47	45	53
A2	10	0	18.67	47.167	53	49	53
A3	11	32	0	17.167	45	44.167	51
A4	39	47	42	0	51	26.67	53
A5	47	45	41	20	0	47	4
A6	29	35	11	0	53	0	36
A7	42	47	45	0	45.167	37	0

Classements :

- AM :  $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_7 \succ A_6 \succ A_5$
- BM :  $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_7 \succ A_5 \succ A_6$
- HM :  $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_7 \succ A_5 \succ A_6$
- GM :  $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_6$
- HAM :  $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_7 \succ A_5 \succ A_6$

**Tableau 2.3:** Résultats pour le cas ELECTRE

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
B1	3.5	2	1.5	4	3
B2	3.5	3	2	3.25	2
B3	4	5	2.25	2.75	3
B4	5	3	2.75	3.5	3
B5	3	2	1.75	2	3
$w$	0.25	0.25	0.1	0.2	0.2

**Préférence  $P(a, b)$  :**

	B1	B2	B3	B4	B5
B1	0	0.4	0.2	0.2	0.45
B2	0.35	0	0.2	0	0.8
B3	0.6	0.8	0	0.25	0.8
B4	0.6	0.75	0.55	0	0.8
B5	0.1	0.2	0	0	0

**Classements :**

- AM :  $B_4 \succ B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_5$
- BM :  $B_4 \succ B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_5$
- HM :  $B_4 \succ B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_5$
- GM :  $B_4 \succ B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_5$
- HAM :  $B_4 \succ B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_5$

**Tableau 2.4:** Résultats pour le cas Tebessa12

**Conclusion** Dans ce travail, nous avons proposé l'utilisation de plusieurs fonctions d'agrégation dans la méthode de surclassement PROMETHEE. Plus précisément, nous avons exploité les moyennes de Bonferroni, Héronienne, Géométrique et Harmonique en tant que fonctions d'agrégation, ces dernières ayant la particularité de capturer les corrélations entre les arguments agrégés.

Sans perte de généralité, et dans le cadre du classement final produit par la méthode PROMETHEE, nous avons intégré ces fonctions d'agrégation au processus de décision. Cette approche s'inscrit dans une tendance récente où plusieurs études se sont intéressées à l'application de ces concepts aux problèmes de décision multicritère. À travers les exemples illustrés, nous avons démontré que les paramètres des opérateurs d'agrégation influencent significativement le classement des alternatives.

Dans le futur, nous envisageons de généraliser davantage ces opérateurs en intégrant l'intégrale de Choquet ou en explorant d'autres applications potentielles des opérateurs

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
C1	80	90	60	5.4	8	5
C2	65	58	20	9.7	1	1
C3	83	60	40	7.2	4	7
C4	40	80	100	7.5	7	10
C5	52	72	60	2	3	8
C6	94	96	70	3.6	5	6

**Préférence  $P(a, b)$  :**

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	0	0.296	0.25	0.268	0.1	0.185
C2	0.462	0	0.389	0.333	0.296	0.5
C3	0.236	0.18	0	0.333	0.056	0.429
C4	0.399	0.505	0.305	0	0.223	0.212
C5	0.444	0.515	0.487	0.380	0	0.448
C6	0.286	0.399	0.250	0.432	0.133	0

**Classements :**

- AM :  $C_5 \succ C_2 \succ C_4 \succ C_6 \succ C_3 \succ C_1$
- BM :  $C_5 \succ C_2 \succ C_4 \succ C_6 \succ C_3 \succ C_1$
- HM :  $C_5 \succ C_2 \succ C_4 \succ C_6 \succ C_3 \succ C_1$
- GM :  $C_5 \succ C_2 \succ C_4 \succ C_6 \succ C_3 \succ C_1$
- HAM :  $C_5 \succ C_2 \succ C_4 \succ C_6 \succ C_1 \succ C_3$

**Tableau 2.5:** Résultats pour le cas BRANS85

d'agrégation développés.

Enfin, un exemple illustratif et des comparaisons ont été réalisés afin de valider la méthode développée et de démontrer sa praticité ainsi que son efficacité. L'un des principaux avantages de la méthode proposée est qu'elle permet d'obtenir un opérateur plus général et flexible, tout en prenant en compte les interdépendances entre les différents critères.

Dans les travaux futurs, nos résultats pourront être encore approfondis en intégrant l'intégrale de Choquet [71], qui constituent des axes de recherche prometteurs à explorer.

## 2.8 Clustering

Dans l'environnement concurrentiel actuel, le clustering joue un rôle essentiel dans l'analyse des données. Le clustering est une tâche fondamentale du data mining, utilisée

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
D1	5	394	60000	5	5	1389	50
D2	5	440	60000	5	4	1337	50
D3	3	544	59900	3	3	1310	50
D4	3	513	59900	3	3	1400	50
D5	1	425	59850	1	1	1412	50
$w$	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

**Préférence  $P(a, b)$  :**

	D1	D2	D3	D4	D5
D1	0	0.15	0.75	0.7	0.7
D2	0.2	0	0.75	0.7	0.9
D3	0.2	0.2	0	0.2	0.9
D4	0.25	0.25	0.05	0	0.9
D5	0.25	0.05	0.05	0.05	0

**Classements :**

— AM, BM, HM, GM, HAM :  $D_2 \succ D_1 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_5$

**Tableau 2.6:** Résultats pour le cas Serbie13

pour regrouper des ensembles de données en fonction de leur similarité. Il s'agit d'un concept clé consistant à rassembler des objets en groupes homogènes basés sur leurs caractéristiques communes. Contrairement à la classification, où les groupes sont prédéfinis, le clustering détermine les groupes uniquement à partir des données, sans présupposer de catégories.

L'analyse de clustering est l'une des techniques de data mining les plus importantes, jouant un rôle central dans la gestion et l'organisation des données. Dans le contexte du clustering de documents, cette technique consiste à regrouper des documents similaires en différentes classes, la similarité étant évaluée par une fonction appliquée aux documents. Ce processus ne nécessite pas d'étape d'apprentissage ou d'étiquetage manuel préalable des groupes. Le clustering partitionne ainsi un ensemble de modèles en clusters distincts, où les documents d'un même cluster sont fortement similaires entre eux, tandis que ceux appartenant à des clusters différents présentent des dissemblances significatives.

### 2.8.1 Clustering & Classification

La classification est un apprentissage supervisé, dans lequel on apprend une méthode permettant de prédire la classe d'une instance à partir d'instances préalablement étiquetées (classifiées). En revanche, le clustering est un apprentissage non supervisé qui identifie des regroupements "naturels" d'instances à partir de données non étiquetées. L'analyse

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
E1	50	600	7	16	50
E2	65	630	8	18	83
E3	51	550	7	10	70
E4	70	800	9	15	130
E5	68	650	9	14	100
E6	65	580	8	10	90
$w$	5	3	1	2	4

**Préférence  $P(a, b)$  :**

	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1	0	0	5	0	2	3.75
E2	15	0	15	2	2	5
E3	4	0	0	0	0	0
E4	13	13	15	0	12	15
E5	13	11.75	15	0	0	15
E6	10	3	13	0	0	0

**Classements :**

- AM, BM, HM :  $E_4 \succ E_5 \succ E_2 \succ E_6 \succ E_1 \succ E_3$
- GM, HAM :  $E_4 \succ E_5 \succ E_6 \succ E_2 \succ E_1 \succ E_3$

**Tableau 2.7:** Résultats pour le cas Tlemcen10

de clustering consiste à regrouper des objets en sous-ensembles ayant du sens dans le contexte d'un problème particulier. En ce sens, le clustering peut être considéré comme un type spécifique de classification, appliquée à un ensemble fini d'objets sans étiquettes préalables.

Chaque feuille de l'arbre illustré en Figure 1.2 définit un type de problème de classification différent. Les nœuds de l'arbre sont définis de la manière suivante :

- **Exclusif vs. Non exclusif** : La classification exclusive est une partition de l'ensemble des objets, dans laquelle chaque objet appartient à un seul sous-ensemble ou cluster. En revanche, dans la classification non exclusive ou chevauchante, un objet peut être affecté à plusieurs classes.
- **Supervisé vs. Non supervisé** : La classification non supervisée utilise uniquement la matrice de proximité pour effectuer le regroupement et est souvent appelée "apprentissage non supervisé" dans le domaine de la reconnaissance de formes, car aucune étiquette de catégorie n'est utilisée. En revanche, la classification supervisée utilise à la fois des étiquettes de catégorie sur les objets et la matrice de proximité pour établir la classification.

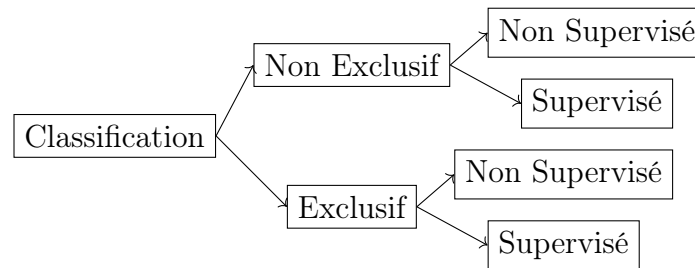


Figure 2.2: Arbre de classification

## 2.8.2 Étapes du Clustering

Jain et Dubes décrivent trois étapes obligatoires ainsi que deux étapes optionnelles dans un processus typique de clustering [72]. Ces étapes sont les suivantes :

- **Représentation des modèles** : sélectionner et représenter les attributs pertinents des données.
- **Définir une mesure de proximité** : choisir une mesure de similarité ou de distance adaptée au domaine des données.
- **Clustering ou regroupement** : regrouper les données en clusters en fonction de la mesure de proximité définie.
- **Abstraction des données (optionnelle)** : simplifier les données en extrayant des représentations ou résumés des clusters, si nécessaire.
- **Évaluation des résultats (optionnelle)** : évaluer la qualité des clusters formés pour déterminer la pertinence des regroupements.

Les trois premières étapes sont essentielles pour tout processus de clustering. La figure 2.2 illustre la séquence typique de ces étapes, incluant une boucle de rétroaction.

## 2.8.3 Différents Types de Clustering

Les différentes approches de clustering peuvent être organisées sous forme de hiérarchie, comme illustré en Figure 2.3. Au niveau supérieur, on distingue les approches hiérarchiques des approches partitionnelles. Les méthodes hiérarchiques produisent une série imbriquée de partitions, alors que les méthodes partitionnelles ne produisent qu'une seule partition. Voici quelques exemples de types de clustering :

- **Clustering basé sur la densité** : Un cluster est défini comme une région dense en objets, entourée d'une région de faible densité. Cette approche est utile pour identifier des clusters de formes irrégulières ou imbriquées.
- **Clustering basé sur la propriété partagée** : Un cluster regroupe des objets partageant certaines propriétés communes spécifiques, ce qui est adapté aux données où les objets d'un même cluster partagent des caractéristiques bien définies.

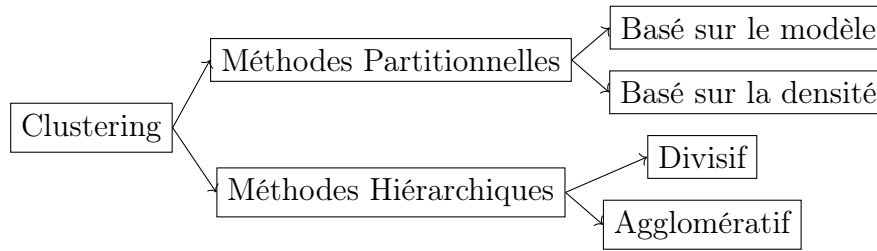


Figure 2.3: Séquence hiérarchique des différentes méthodes de clustering

## 2.8.4 Techniques de Clustering

Les méthodes de clustering peuvent être classées selon divers critères. Parmi les plus populaires et les plus couramment utilisées, on distingue les techniques suivantes :

- **Clustering hiérarchique** : Cette méthode crée une hiérarchie de clusters, qui peut être agglomérative ou divisive. Dans le clustering agglomératif, chaque objet commence dans son propre cluster, et les clusters sont fusionnés progressivement pour former des groupes plus larges au fur et à mesure de la montée dans la hiérarchie. À l'inverse, le clustering divisif commence avec tous les objets dans un seul cluster, qui se divise successivement en sous-groupes en descendant dans la hiérarchie.
- **Clustering partitionnel** : Ici, les objets sont répartis en  $K$  clusters, chacun étant représenté par un centre de cluster. Une méthode populaire dans cette catégorie est l'algorithme K-means, qui assigne chaque objet au cluster dont le centre est le plus proche. Après chaque itération, les centres sont recalculés pour minimiser la distance totale entre les objets et leurs centres respectifs.
- **Clustering basé sur la densité** : Dans cette approche, les clusters sont formés en fonction de la densité des objets dans l'espace des données. Un cluster est donc une région dense entourée de régions de faible densité. Une méthode courante de cette catégorie est DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise), qui permet de détecter des clusters de forme arbitraire.
- **Clustering basé sur le modèle** : Cette méthode définit les clusters par le biais d'un modèle statistique. Un modèle courant est le mélange gaussien, qui suppose que les données proviennent d'une combinaison de plusieurs distributions gaussiennes.

## 2.8.5 Critères d'Évaluation

L'évaluation des performances des méthodes de clustering peut se faire à l'aide de divers critères, globaux ou locaux, internes ou externes. Voici quelques exemples :

- **Indice de silhouette** : Ce critère mesure à quel point chaque point est similaire à son propre cluster comparativement aux autres clusters. Un indice de silhouette élevé indique que l'objet est bien assorti à son cluster et distinct des autres clusters.

- **Cohésion et séparation** : La cohésion mesure la proximité des objets d'un même cluster, tandis que la séparation évalue la distance entre les clusters. Ces deux mesures sont essentielles pour déterminer la qualité d'un clustering.
- **Matrice de confusion** : Bien que principalement utilisée pour la classification, la matrice de confusion peut être adaptée pour évaluer les performances des méthodes de clustering supervisées.

### 2.8.6 Défis du Clustering pour les Données Massives

Le clustering des Big Data présente plusieurs défis spécifiques, parmi lesquels :

- **Scalabilité** : La capacité à traiter de grandes quantités de données tout en maintenant des temps de calcul raisonnables est un défi majeur. Les algorithmes de clustering traditionnels, comme K-means ou DBSCAN, peuvent être inadaptés aux Big Data en raison de leur complexité algorithmique élevée.
- **Données à haute dimension** : Lorsque la dimensionnalité des données augmente, la distance entre les objets devient moins significative, rendant les méthodes classiques de clustering inefficaces.
- **Données hétérogènes** : Les Big Data sont souvent hétérogènes, incluant des données de différents types (textes, images, vidéos, etc.), ce qui complique l'application des méthodes de clustering traditionnelles.
- **Données bruitées et incomplètes** : Les données massives contiennent souvent du bruit ou sont incomplètes, ce qui peut nuire aux performances des algorithmes de clustering.

### 2.8.7 Méthodes de Clustering pour les Big Data

Plusieurs algorithmes ont été développés ou adaptés pour répondre aux défis du clustering dans les Big Data :

- **Mini-Batch K-means** : Une variante de l'algorithme K-means qui utilise des mini-lots (batches) de données pour réduire le temps de calcul tout en maintenant des performances acceptables.
- **Clustering basé sur des échantillons** : Ces méthodes utilisent des échantillons représentatifs de l'ensemble de données pour effectuer le clustering, ce qui réduit la complexité computationnelle.
- **Clustering distribué** : Les méthodes de clustering distribué exploitent des infrastructures de calcul parallèles ou distribuées pour traiter de grandes quantités de données. Des plateformes telles que Hadoop et Spark permettent de mettre en œuvre des algorithmes de clustering distribués à grande échelle.

## 2.9 Différents Types de Clusters

Les clusters peuvent varier en termes de structure, de forme et de nature. Voici un aperçu des différents types de clusters couramment identifiés :

- **Clusters sphériques** : Les objets sont regroupés autour d'un centre et la distance des objets par rapport au centre est limitée. Ce type de cluster est typique dans les méthodes comme K-means, où les points sont assignés au centre de cluster le plus proche.
- **Clusters allongés ou en forme de chaîne** : Les clusters peuvent avoir une forme allongée ou en "chaîne", avec les objets alignés suivant une direction ou un axe particulier. Les méthodes comme DBSCAN sont efficaces pour détecter ces clusters de forme arbitraire.
- **Clusters à formes complexes** : Certains clusters présentent des formes très irrégulières, qui ne correspondent pas à des géométries simples comme des sphères ou des ellipses. Ces clusters sont souvent détectés par des algorithmes de clustering basés sur la densité, qui ne supposent pas de forme particulière.
- **Clusters imbriqués** : Dans certains ensembles de données, les clusters peuvent être imbriqués les uns dans les autres, c'est-à-dire qu'un cluster peut contenir un sous-ensemble de données formant un cluster distinct. Les méthodes hiérarchiques, comme le clustering agglomératif, peuvent découvrir ces relations.
- **Clusters discontinus** : Certains clusters sont constitués de plusieurs sous-ensembles d'objets séparés par des régions vides. Ces types de clusters sont difficiles à détecter avec des méthodes de clustering traditionnelles, mais peuvent être identifiés par des techniques adaptées aux données discontinues.

Les types de clusters varient en fonction des données et de l'application. Il est donc crucial de choisir une méthode de clustering appropriée pour capturer efficacement la structure sous-jacente des données.

## 2.10 Méthodes de Clustering

Le **clustering**, ou analyse de regroupement, est une technique d'apprentissage non supervisé qui vise à diviser un ensemble de données en sous-groupes homogènes appelés *clusters*, en fonction de la similarité entre les objets. Contrairement à la classification supervisée, où les catégories sont connues à l'avance, le clustering permet de découvrir des structures cachées dans les données sans information préalable. Cette technique est largement utilisée dans divers domaines comme la segmentation de marché, la biologie, la reconnaissance de formes, et bien d'autres.

### 2.10.1 Principales Étapes du Clustering

Le processus de clustering comprend généralement plusieurs étapes clés [72] :

1. **Prétraitement des données** : Cette étape inclut la normalisation des données, la gestion des valeurs manquantes ou aberrantes, et parfois la réduction de la dimensionnalité (par exemple via l'ACP). Un bon prétraitement améliore significativement la qualité des clusters.
2. **Choix de la mesure de similarité** : La mesure de similarité ou de distance influence fortement la structure des clusters. Les plus courantes incluent :
  - **Distance euclidienne** : adaptée aux données continues et pour des clusters sphériques.
  - **Distance de Manhattan** : idéale pour les données en grille ou discrètes.
  - **Distance de Mahalanobis** : prend en compte les corrélations entre variables.
  - **Distance de Hamming** : utilisée pour les variables catégorielles.
3. **Application d'un algorithme de clustering** : Selon la nature des données et les objectifs, différents algorithmes peuvent être choisis.
4. **Évaluation des résultats** : Il est essentiel d'évaluer la qualité des clusters à l'aide de mesures comme l'indice de silhouette, la cohésion intra-cluster, ou la séparation inter-clusters.
5. **Interprétation des clusters** : L'analyse des caractéristiques spécifiques de chaque cluster permet d'en extraire des connaissances utiles.

### 2.10.2 Types d'Algorithmes de Clustering

Les méthodes de clustering peuvent être classées en plusieurs catégories en fonction de leur approche [72] :

- **Clustering partitionnel** :
  - **K-means** : L'un des algorithmes les plus populaires, qui partitionne les données en  $K$  clusters en minimisant la variance intra-cluster.
  - **Fuzzy C-means** : Une variante du K-means où chaque point peut appartenir à plusieurs clusters avec des degrés d'appartenance.
- **Clustering hiérarchique** :
  - **Méthodes agglomératives** : Commencent par traiter chaque point comme un cluster unique, puis fusionnent les clusters successivement.
  - **Méthodes divisives** : Partent d'un seul cluster contenant toutes les données, puis divisent les clusters récursivement.

- **Dendrogramme** : Représente visuellement la hiérarchie des clusters.
- **Clustering basé sur la densité** :
  - **DBSCAN** : Identifie les clusters comme des régions de haute densité séparées par des zones de faible densité, utile pour détecter des formes de clusters non sphériques et des anomalies.
  - **OPTICS** : Une extension de DBSCAN qui gère mieux les variations de densité.
- **Clustering par modèle** :
  - **Mélanges gaussiens (GMM)** : Suppose que les données sont générées à partir d'une combinaison de distributions gaussiennes et utilise l'algorithme EM pour l'estimation.

### 2.10.3 Applications du Clustering

Le clustering trouve des applications dans de nombreux domaines [73] :

- **Marketing** : Segmentation de la clientèle pour des campagnes de marketing ciblées.
- **Biologie** : Classification des gènes ou des protéines selon des expressions similaires.
- **Assurance** : Identification de groupes de souscripteurs à risque.
- **Urbanisme** : Groupement des habitations selon leur typologie et localisation.
- **Études sismiques** : Regroupement des épacentres de séismes selon les failles géologiques.

### 2.10.4 Outils et Techniques Complémentaires

Le choix des outils et des mesures influence fortement les résultats de clustering :

- **Mesures de distance** : Distance euclidienne, Manhattan, Mahalanobis, Hamming, etc.
- **Évaluation des clusters** :
  - **Indice de silhouette** : Mesure la cohésion et la séparation des clusters.
  - **Indice de Davies-Bouldin** : Évalue la dispersion des clusters.
- **Réduction de dimensionnalité** : Techniques comme l'Analyse en Composantes Principales (ACP) pour visualiser les clusters en 2D ou 3D.

Les méthodes de clustering offrent une approche puissante pour l'exploration des données non étiquetées. Leur capacité à révéler des structures sous-jacentes dans des ensembles de données complexes en fait un outil indispensable dans de nombreux domaines. Cependant, la qualité des résultats dépend fortement du choix des algorithmes, des mesures de distance, et des paramètres, soulignant l'importance d'une compréhension approfondie des techniques utilisées.

## 2.11 Validité du Clustering

L'évaluation de la validité du clustering est essentielle pour déterminer si les clusters formés sont significatifs et bien définis. Voici quelques approches courantes pour évaluer la validité du clustering :

- **Critères internes** : Ces critères évaluent la qualité du clustering sans référence à une vérité terrain ou à des labels externes. Les indices internes mesurent la densité, la séparation et la compacité des clusters. Parmi les indices internes courants :
  - **Indice de Silhouette** : Cet indice mesure à quel point un point est bien assorti à son propre cluster par rapport aux autres clusters. Une silhouette proche de 1 indique un bon clustering, tandis qu'une valeur proche de -1 signifie que le point est mal classé.
  - **Cohésion et séparation** : La cohésion mesure la proximité des points d'un même cluster, tandis que la séparation évalue la distance entre les clusters. Un bon clustering maximise la cohésion tout en minimisant la séparation.
- **Critères externes** : Ces critères comparent le clustering généré avec un clustering de référence ou des labels connus (par exemple, dans un contexte supervisé). Les indices de validité externe mesurent la correspondance entre le clustering obtenu et les labels de référence, notamment :
  - **Matrice de confusion** : Elle compare les clusters obtenus avec ceux de référence et fournit des mesures telles que la précision, le rappel et la F-mesure.
  - **Rand Index** : Il mesure la proportion de paires de points classées de manière cohérente entre le clustering généré et celui de référence.
- **Critères relatifs** : Utilisés pour comparer plusieurs modèles de clustering, ces critères aident à sélectionner le meilleur modèle parmi un ensemble de solutions possibles, souvent avec une validation croisée.
- **Critères basés sur le domaine** : Dans certains cas, les clusters doivent être interprétés dans le contexte spécifique du domaine d'application. Par exemple, dans le domaine biomédical, les clusters peuvent

## 2.12 Algorithme K-means

L'algorithme K-means est l'une des méthodes de clustering partitionnel les plus populaires et les plus largement utilisées. Il est simple, efficace et bien adapté aux ensembles de données de grande taille. Le principe de base de K-means est de partitionner un ensemble de données en  $K$  clusters, où chaque point est affecté au cluster dont le centre (centroïde) est le plus proche. Voici les principales étapes de l'algorithme K-means :

- **Initialisation** : Tout d’abord,  $K$  centres de clusters sont initialisés aléatoirement ou selon une méthode heuristique. Ces centres, appelés centroïdes, servent de points de référence pour déterminer l’appartenance des points aux clusters.
- **Affectation des points** : Chaque point de données est affecté au cluster dont le centroïde est le plus proche, généralement mesuré par la distance euclidienne. Cette étape forme  $K$  clusters distincts.
- **Recalcul des centroïdes** : Après que tous les points ont été affectés à un cluster, le centroïde de chaque cluster est recalculé comme la moyenne des points appartenant à ce cluster.
- **Répétition** : Les étapes d’affectation des points et de recalcul des centroïdes sont répétées jusqu’à ce que les centroïdes ne changent plus de position de manière significative, ou qu’un critère de convergence soit atteint.

### 2.12.1 Propriétés et Avantages de K-means

- **Efficacité** : K-means est rapide et efficace pour des ensembles de données de grande taille. Sa complexité temporelle est  $\mathcal{O}(n \times K \times d)$ , où  $n$  est le nombre de points,  $K$  est le nombre de clusters et  $d$  est la dimension des données.
- **Facilité d’interprétation** : Les clusters produits par K-means sont facilement interprétables, car chaque cluster est représenté par un centroïde qui sert de point moyen.
- **Simplicité d’implémentation** : K-means est simple à implémenter et ne nécessite pas de paramètres complexes, ce qui en fait un choix populaire pour de nombreuses applications.

### 2.12.2 Limites de K-means

- **Nombre de clusters  $K$**  : K-means nécessite que l’utilisateur spécifie à l’avance le nombre de clusters  $K$ . Choisir un  $K$  inapproprié peut conduire à des clusters de mauvaise qualité.
- **Sensibilité aux points aberrants** : K-means est sensible aux points aberrants et aux valeurs extrêmes, qui peuvent fausser la position des centroïdes.
- **Clusters sphériques** : K-means suppose implicitement que les clusters sont de forme sphérique et de taille similaire, ce qui peut ne pas être approprié pour des ensembles de données avec des clusters de formes variées.

### 2.12.3 Améliorations de l'algorithme K-means

Plusieurs variantes et améliorations de l'algorithme K-means ont été développées pour surmonter certaines de ses limitations :

- **K-means++** : Cette méthode améliore l'initialisation des centroïdes en choisissant des points éloignés les uns des autres, réduisant ainsi la sensibilité à l'initialisation aléatoire.
- **Mini-Batch K-means** : Pour de très grands ensembles de données, Mini-Batch K-means utilise des sous-échantillons (mini-batches) pour mettre à jour les centroïdes, ce qui réduit le temps de calcul tout en maintenant une performance acceptable.
- **K-medoids** : Contrairement à K-means, qui utilise la moyenne des points pour calculer les centroïdes, K-medoids utilise des points réels comme représentants des clusters, le rendant ainsi moins sensible aux points aberrants.

### 2.12.4 Applications de K-means

L'algorithme K-means est utilisé dans une large gamme d'applications, notamment :

- **Segmentation de marché** : Les entreprises utilisent K-means pour segmenter leurs clients en groupes distincts en fonction de leurs comportements d'achat.
- **Compression d'images** : K-means est utilisé pour réduire le nombre de couleurs dans une image tout en maintenant une qualité visuelle acceptable.
- **Regroupement de documents** : K-means est couramment utilisé dans les systèmes de recommandation pour regrouper des documents ou des articles similaires.

### 2.12.5 Aperçu des Méthodes de Clustering

Les méthodes de clustering sont des techniques classiques permettant de partitionner un ensemble d'objets [72, 74]. Un processus de clustering typique comporte deux phases principales :

- **Construction d'une matrice de similarité** : Cette matrice contient les mesures de proximité entre les alternatives. Plusieurs fonctions de similarité ou de dissimilarité peuvent être utilisées, avec des propriétés différentes. Des revues de ces mesures et de leurs relations peuvent être trouvées dans [75, 76].
- **Construction des clusters** : Les objets similaires sont regroupés dans des clusters. De nombreuses méthodes ont été développées pour cela [72]. Les méthodes de clustering sont généralement divisées en deux catégories principales :
  - **Méthodes de clustering hiérarchique agglomératif** : Les clusters sont imbriqués en formant un arbre où la racine représente le cluster le plus général contenant tous les objets, et les feuilles représentent des groupes spécifiques.

- **Méthodes de clustering partitionnel** : Les clusters sont mutuellement exclusifs et sont générés en optimisant un critère de clustering spécifique.

Nous suivrons ici l’approche hiérarchique agglomérative, où le clustering progresse en construisant un arbre de partitions successives sur l’ensemble des alternatives.

### 2.12.6 Algorithmes de Clustering

Le but du clustering est de découvrir les groupements naturels d’un ensemble d’objets ou de points [72]. Une définition opérationnelle du clustering pourrait être : “Étant donné une représentation de  $n$  objets, trouver  $K$  groupes en fonction d’une mesure de similarité telle que les similarités entre objets dans le même groupe soient élevées, tandis que les similarités entre objets de groupes différents soient faibles” [72].

Les algorithmes de clustering peuvent être divisés en deux groupes principaux : les algorithmes hiérarchiques et partitionnels [74]. Les algorithmes hiérarchiques trouvent des clusters imbriqués dans un mode agglomératif ou divisif (top-down), tandis que les algorithmes partitionnels trouvent les clusters simultanément sans imposer de structure hiérarchique.

$$J(C) = \sum_{k=1}^K \sum_{x_i \in C_k} \|x_i - \mu_k\|^2 \quad (2.14)$$

L’algorithme K-means dépend de trois paramètres choisis par l’utilisateur : le nombre de clusters  $K$ , l’initialisation des clusters et la métrique de distance. Le choix de  $K$  est particulièrement important et peut être basé sur des heuristiques, bien que l’algorithme K-means ait été étendu de plusieurs façons pour inclure des critères tels que l’AIC (Akaike Information Criterion) ou le BIC (Bayesian Information Criterion).

### 2.12.7 Clustering Fuzzy C-Means (FCM)

Le clustering Fuzzy C-Means (FCM), proposé par Dunn [77] et développé par Bezdek [78], est l’une des techniques de clustering basées sur des fonctions objectives les plus populaires et les plus efficaces. FCM partitionne un ensemble de  $N$  données  $x_1, x_2, \dots, x_N$  en  $c$  clusters, où chaque cluster est représenté par un prototype.

Le clustering reste un domaine clé pour structurer de grands ensembles de données et est essentiel pour diverses applications telles que l’analyse de marché, la reconnaissance de formes, et l’extraction de connaissances.

## 2.13 Définition du Problème de Clustering en MCDA

Dans l'analyse de données, le clustering vise à regrouper les objets indiscernables entre eux et à séparer ceux qui peuvent être distingués. Comme nous ne disposons d'aucune information sur les objets, hormis leurs évaluations sur un ensemble d'attributs, les objets similaires sont regroupés, tandis que les objets dissemblables sont placés dans des groupes distincts.

Cependant, dans le cadre de la MCDA, le décideur (DM) fournit des informations supplémentaires, à savoir une représentation de ses préférences, qui permettent de comparer les alternatives de manière plus significative et de refléter la perspective du DM. Dans ce domaine, le clustering n'a pas encore été formellement défini en fonction des relations d'indifférence, de préférence stricte et d'incomparabilité, qui sont propres à ce contexte.

Étant donné qu'une seule relation — indifférence, préférence stricte, ou incomparabilité — peut exister à un moment donné entre deux alternatives, nous pouvons adapter la définition du clustering au domaine de la MCDA.

**Définition 2.9.** [79] Nous définissons le *clustering non relationnel* en MCDA comme le processus visant à regrouper les alternatives indifférentes et à séparer celles qui ne le sont pas.

Dans ce cadre, les relations entre alternatives sont regroupées en deux catégories : celles qui rapprochent les alternatives (indifférence) et celles qui les distinguent (préférence stricte et incomparabilité). En analyse de données, chacun de ces groupes se réduit à une seule relation, soit la similarité, soit la dissimilarité. Cependant, en MCDA, le complément de l'indifférence se distingue davantage en préférence stricte (dans un sens ou dans l'autre) ou en incomparabilité. Comme cette information supplémentaire n'est pas encore exploitée ici, nous appelons cette approche de clustering "non relationnelle."

Grâce à la diversité des relations entre les alternatives, cette approche permet d'obtenir des résultats de clustering plus structurés.

**Définition 2.10.** [79] Le *clustering relationnel* en MCDA est défini comme le regroupement des alternatives indifférentes, tout en séparant les groupes strictement préférés ou incomparables.

Ici, nous ne visons pas uniquement à former des groupes d'alternatives basés sur la relation d'indifférence, mais également à établir des relations entre ces groupes, soutenues par l'une des relations complémentaires à celle de l'indifférence. Dans certains cas, il est également possible de distinguer plus finement entre les relations de préférence stricte et d'incomparabilité.

Les différentes structures potentielles des clusters d'alternatives décrites ci-dessus sont illustrées dans la figure 2.4.

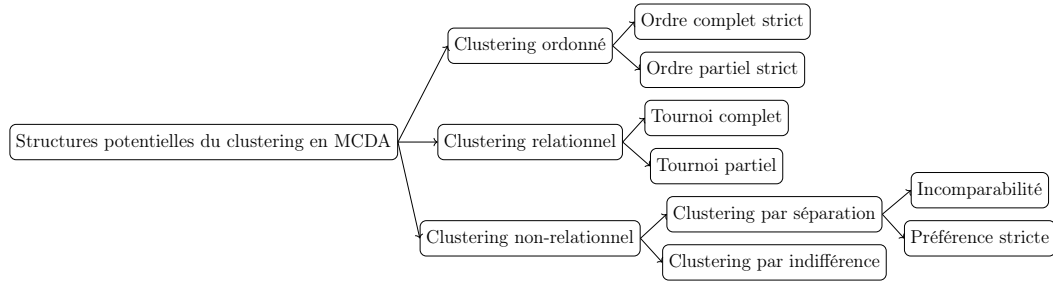


Figure 2.4: Structures potentielles du clustering en MCDA.

### 2.13.1 Méthodologie Proposée

Dans la méthodologie MCDA, le clustering des alternatives en groupes homogènes consiste à assigner un ensemble de  $n$  actions  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  évaluées selon  $m$  critères  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  à différents groupes tout en examinant leur valeur intrinsèque. En comparant l'évaluation de chaque alternative avec les centres des groupes, on détermine à quel groupe une alternative appartient.

Dans cette méthode, nous abordons le problème suivant : le clustering des alternatives en groupes, tout en cherchant à ce que chaque alternative soit assignée au groupe le plus proche possible. Nous renvoyons le lecteur intéressé à cette étude. L'algorithme K-means est l'une des techniques non supervisées les plus fréquemment utilisées pour ce type d'analyse. Cette méthode permet de regrouper les alternatives en clusters en fonction de la distance minimale aux centres des classes, tout en maximisant la distance entre les centres de différentes classes. Suivant l'approche multicritère, nous cherchons à définir les alternatives les plus proches de la meilleure agrégation de chaque alternative à l'aide d'une fonction d'agrégation en MCDA, appelée "Intégrale de Choquet", qui prend en compte la nature multicritère du problème.

Nous proposons une extension de l'algorithme K-means au cadre multicritère [36], [35]. La méthode consiste d'abord à agréger toutes les alternatives avec l'intégrale de Choquet en tenant compte des interactions 2-additives entre critères, puis à assigner chaque alternative au groupe ayant la valeur de centre la plus proche.

### 2.13.2 Algorithme K-means Modifié

L'algorithme partitionne un ensemble de  $N$  données  $x_1, x_2, \dots, x_N$  en  $c$  clusters ( $1 \leq c \leq N$ ). Le résultat est un ensemble de  $c$  centres  $v_1, v_2, \dots, v_c$ . Cette structure résulte de la minimisation de la fonction objective suivante :

$$K = \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^N | C_{\mu}(v_k) - C_{\mu}(x_i) |$$

où  $C_{\mu}(\ast)$  représente l'intégrale de Choquet par rapport à une capacité  $\mu$ , donnée par :

Pour une alternative  $x := (x_1, \dots, x_n) \in X$ , l'expression de l'intégrale de Choquet d'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  par rapport à la capacité  $\mu$  est la suivante :

$$C_\mu(f) := \sum_{i=1}^n (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)})) \cdot \mu(E_{(i)}), \quad (2.15)$$

L'algorithme comprend les étapes suivantes :

1. Générer  $k$  centres de groupes représentés par les objets à regrouper.
2. Agréger l'ensemble des alternatives avec l'intégrale de Choquet, ainsi que les centres de chaque groupe.
3. Affecter chaque alternative au cluster dont le centre est le plus proche.
4. Recalculer les  $k$  centres pour tous les clusters une fois que toutes les alternatives ont été affectées.
5. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changements dans les centres des groupes.

### 2.13.2.1 Application de la méthode

#### *Étude de cas*

Nous abordons le problème de l'évaluation de la démocratie dans différents pays en utilisant cinq critères proposés par l'Economical Intelligence Unit ([80]) : processus électoral et pluralisme ( $g_1$ ), fonctionnement du gouvernement ( $g_2$ ), participation politique ( $g_3$ ), culture politique ( $g_4$ ) et libertés civiles ( $g_5$ ). Nous appliquons un clustering à 24 pays d'Australasie ainsi qu'à ceux d'Asie du Sud-Est, d'Asie centrale et d'Asie de l'Est. Leurs évaluations sont fournies dans le tableau 2.8.

Les résultats de l'algorithme sont résumés dans le tableau 2.9. Le résultat du clustering est réparti en plusieurs groupes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  et  $C_5$ .

La valeur de l'intégrale de Choquet pour chacune des 24 alternatives et pour chaque cluster est présentée dans le tableau 2.10.

En calculant le modèle de préférence basé sur l'intégrale de Choquet pour chaque alternative et en considérant le modèle le plus représentatif, nous obtenons le classement final des clusters obtenu par l'algorithme :

$$k = 3 \rightarrow C_3 \succ C_2 \succ C_1, \quad k = 4 \rightarrow C_3 \succ C_4 \succ C_1 \succ C_2, \quad k = 5 \rightarrow C_3 \succ C_2 \succ C_1 \succ C_4 \succ C_5$$

	Pays	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
1	Australia(AU)	10	8.93	7.78	8.75	10
2	China(CN)	0	4.64	2.78	6.25	1.18
3	Fiji(FJ)	6.5	5.21	3.33	5.0	8.24
4	Indonesia(ID)	6.92	7.14	5.0	6.25	6.76
5	Japan(JP)	9.17	7.86	5.56	8.75	9.41
6	Kazakhstan(KZ)	2.67	2.14	3.33	4.38	5.59
7	Kyrgyzstan(KG)	5.75	1.86	2.78	5.0	5.0
8	Laos(LA)	0	3.21	1.11	5.0	1.18
9	Malayasia(MY)	6.08	5.71	4.44	7.5	6.18
10	Mangolia(MN)	9.17	6.08	3.89	5.63	8.24
11	Myanmar(MM)	0.0	1.79	0.56	5.63	0.88
12	New Zealand(NZ)	10	8.57	8.33	8.13	10.00
13	North Korea(KP)	0.83	2.5	0.56	1.25	0.0
14	Papua New G.(PG)	7.33	6.43	4.44	6.25	8.24
15	Philippines(PH)	9.17	5.36	5.0	3.75	9.12
16	Singapore(SG)	4.33	7.5	2.78	7.5	7.35
17	South Korea(KR)	9.58	7.14	7.22	7.5	7.94
18	Taiwan(TW)	9.58	7.5	6.67	5.63	9.71
19	Tajikistan(TJ)	1.83	0.79	2.22	6.28	1.18
20	Thailand (TH)	4.83	6.43	5.0	5.63	6.47
21	Timor Leste (TL)	7.0	5.57	5.0	6.25	8.24
22	Turkmenistan (TM)	0.0	0.79	2.78	5.0	0.59
23	Uzbekistan (UZ)	0.08	0.79	2.78	5.0	0.59
24	Vietnam (VN)	0.83	4.29	2.78	4.38	1.47

**Tableau 2.8:** Matrice de performance pour l'évaluation du type de régime démocratique des pays

À partir de ce classement, on peut conclure que le cluster  $C_3$  est le meilleur, contenant le plus grand nombre d'alternatives de l'ensemble  $A$ , tandis que le pire est  $C_1$  (dans le cas de  $k = 3$ ), qui regroupe les alternatives les moins performantes de l'ensemble initial  $A$ .

Les résultats du clustering en 3, 4 et 5 groupes seront respectivement présentés dans les figures 2.5, 2.6 et 2.7.

Afin de construire un modèle plus précis, il est possible d'imposer des contraintes supplémentaires dans un problème comportant plus de 100 alternatives, comme nous le verrons dans la prochaine section.

	Country	$C_\mu$	Run	KMC	Run	KMC	Run	KMC
1	Australia(AU)	8.978		$C_3$		$C_3$		$C_3$
2	China(CN)	3.13		$C_1$		$C_4$		$C_4$
3	Fiji(FJ)	5.478		$C_2$		$C_3$		$C_1$
4	Indonesia(ID)	6.405		$C_2$		$C_3$		$C_2$
5	Japan(JP)	8.9271		$C_3$		$C_3$		$C_3$
6	Kazakhstan(KZ)	3.828		$C_1$		$C_4$		$C_4$
7	Kyrgyzstan(KG)	4.119		$C_1$		$C_4$		$C_4$
8	Laos(LA)	2.122		$C_1$		$C_1$		$C_5$
9	Malayasia(MY)	6.034		$C_2$		$C_3$		$C_1$
10	Mangolia(MN)	6.171		$C_2$		$C_3$		$C_1$
11	Myanmar(MM)	1.699		$C_1$		$C_1$		$C_5$
12	New Zealand(NZ)	8.761	K=3	$C_3$	K=4	$C_3$	K=5	$C_3$
13	North Korea(KP)	0.798	nbit=2	$C_1$	nbit=4	$C_2$	nbit=6	$C_5$
14	Papua New G.(PG)	6.474	31.42 sec	$C_2$	40.12 sec	$C_3$	42.99 sec	$C_2$
15	Philippines(PH)	5.86		$C_2$		$C_3$		$C_1$
16	Singapore(SG)	6.488		$C_2$		$C_3$		$C_2$
17	South Korea(KR)	7.505		$C_3$		$C_3$		$C_3$
18	Taiwan(TW)	7.441		$C_3$		$C_3$		$C_3$
19	Tajikistan(TJ)	2.298		$C_1$		$C_1$		$C_5$
20	Thailand (TH)	5.763		$C_2$		$C_3$		$C_1$
21	Timor Leste (TL)	6.297		$C_2$		$C_3$		$C_2$
22	Turkmenistan (TM)	1.851		$C_1$		$C_1$		$C_5$
23	Uzbekistan (UZ)	1.853		$C_1$		$C_1$		$C_5$
24	Vietnam (VN)	2.879		$C_1$		$C_4$		$C_4$

**Tableau 2.9:** Clustering de 24 pays avec K-Means Choquet (KMC) pour  $k = 3, 4, 5$

### 2.13.2.2 Illustration Générale

À titre d'exemple, nous illustrons la performance de notre algorithme à l'aide de données généralisées. Nous considérons plusieurs exemples avec différents paramètres :  $K=3-5$  clusters,  $n=20-5000$  actions, et  $m=3-15$  critères. L'exécution de l'algorithme nécessite l'utilisation du package Kappalab, conçu pour calculer plusieurs intégrales non additives, telles que l'intégrale de Choquet, l'intégrale de Sugeno, ainsi que les intégrales de Choquet symétriques et asymétriques. Les fonctions de Kappalab sont particulièrement utiles dans le cadre de l'aide multicritère à la décision ou de la théorie des jeux coopératifs.

Dans cette illustration, nous réalisons une étude de simulation pour évaluer la performance de notre version modifiée de l'algorithme K-means. La première version utilise l'algorithme standard basé sur les distances euclidiennes. La seconde variation de K-means repose sur le calcul de l'intégrale de Choquet pour chaque action et le point idéal, en calculant la différence entre chaque action et le point idéal, tout en conservant la même

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$C_\mu$
K = 3						
$C_1$	1.199	2.28	2.168	4.817	1.766	2.455
$C_2$	6.814	6.158	4.32	5.973	7.648	6.15
$C_3$	9.666	8.00	7.112	7.752	9.412	8.141
K = 4						
$C_1$	0.382	1.474	1.89	5.382	0.884	1.975
$C_2$	0.83	2.5	0.56	1.25	0.00	0.798
$C_3$	7.832	6.816	5.317	6.608	8.278	6.868
$C_4$	2.312	3.232	2.917	5.002	3.31	3.442
K = 5						
$C_1$	7.15	5.758	4.332	5.502	7.65	5.9
$C_2$	6.395	6.66	4.305	6.562	7.647	6.448
$C_3$	9.666	8.00	7.112	7.752	9.412	8.141
$C_4$	2.312	3.232	2.917	5.002	3.31	3.442
$C_5$	0.456	1.645	1.668	4.693	0.736	1.818

**Tableau 2.10:** Représentation de chaque cluster par la capacité obtenue à l'aide du modèle quadratique

initialisation que dans K-means classique.

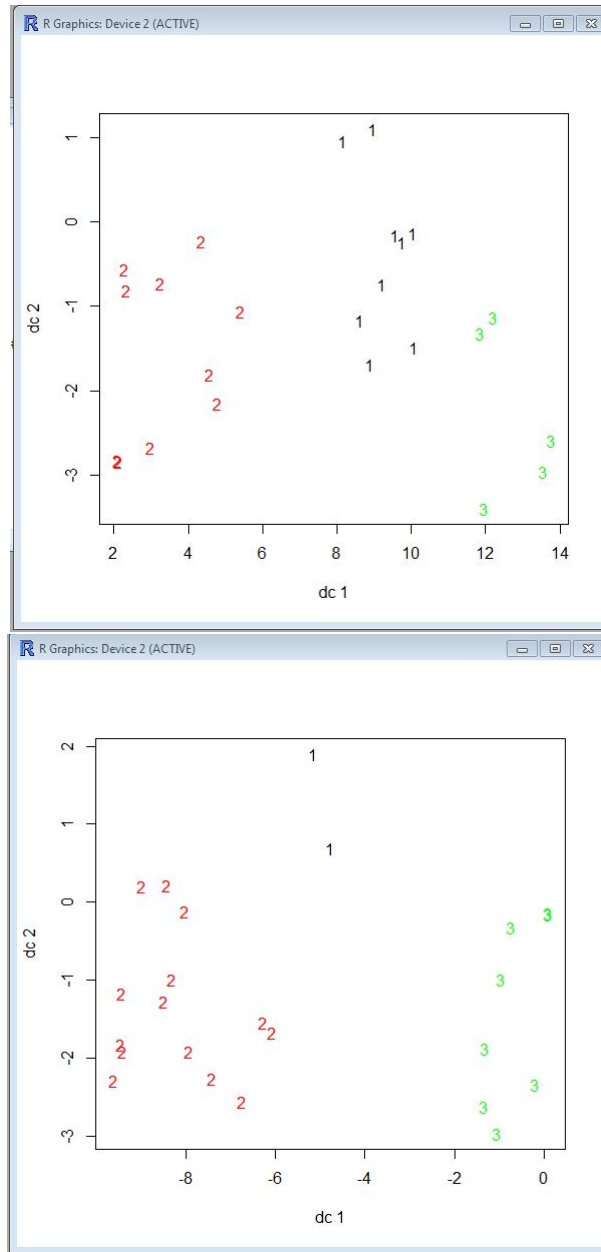
Toutes les expérimentations ont été effectuées sur un ordinateur portable TOSHIBA Satellite, équipé d'un processeur Intel Core i7 à 2,2 GHz et de 8 Go de RAM, sous MATLAB 2015b. Les résultats de l'étude sont résumés dans les tableaux suivants [2.11](#), [2.12](#), [2.13](#), [2.14](#).

n		20		50		100		150	
	Grps	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT
m=3	K=3	4	0.3 min	150	1.8 min	2680	1.09 min	5099	4.3635 min
	K=4	5	0.36min	51	2 min	55915	29.62168 min	89047	31.6184 min
	K=5	3	0.37 min	103	1.5 min	69025	36.81586 min	39598	30.2617

**Tableau 2.11:** Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour  $m = 3$  critères et  $n = 20, 50, 100, 150$ .

Les graphiques suivants [2.8](#), [2.9](#), [2.10](#) présentent les résultats du clustering pour divers groupes de données :

*Remarque.* Après de multiples illustrations de l'algorithme, nous constatons que les groupes sont triés en fonction du centre de chaque groupe, offrant une bonne perspective sur l'ordre



**Figure 2.5:** Premier clustering en 3 groupes en 25,47 secondes avec 3 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means

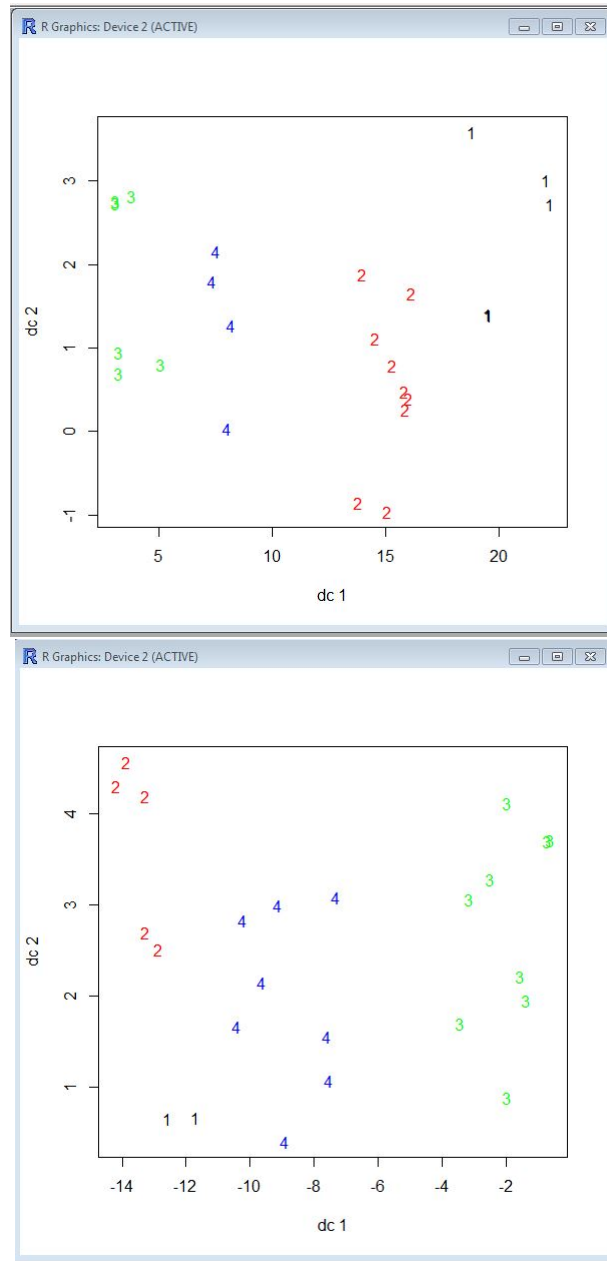
n		20		50		100		150		200	
	Grps	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT
m=5	K=3	2	0.3 min	7	0.4 min	68	1.4 min	230	5.5 min	1000	30 min
	K=4	6	0.36min	29	0.66 min	18	0.6 min	57723	38.333 min	61045	35.27165 min
	K=5	1	0.3 min	38	0.8 min	3078	56.5 min	111054	1.017987 hours		

**Tableau 2.12:** Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour  $m = 5$  critères et  $n = 50, 100, 150, 200$ .

du clustering.

### Objectifs de la méthodologie

Les principaux objectifs de la méthodologie proposée sont les suivants :

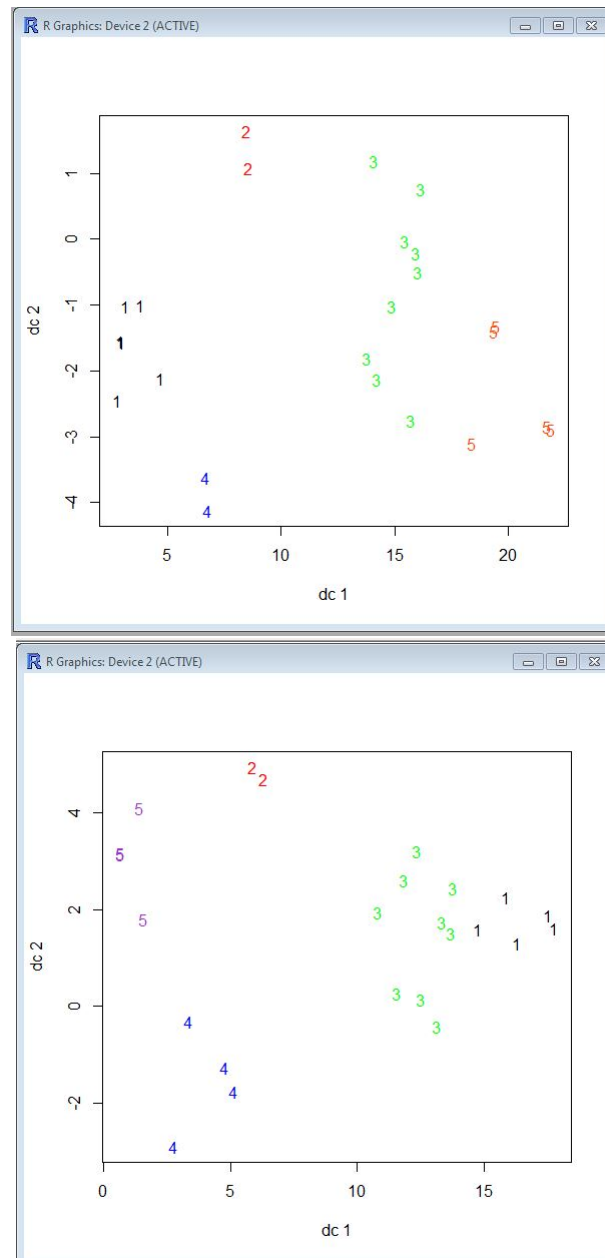


**Figure 2.6:** Premier clustering en 4 groupes en 40,1273 secondes avec 4 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means

n		20		50		100		150		200		500		1000	
	Grps	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT
m=10	K=3	2	0.37 min	4	0.42 min	4	0.5 min	6	0.6 min	10	0.95 min	120	10.5 min	886	3.37 min
	K=4	7	0.56 min	4	0.45 min	12	0.8 min	10	0.85 min	17	1.3 min	400	48	16599	1.071 hours
	K=5	2	0.4 min	3	0.44 min	9	0.7 min	16	1.1 min	38	2.5 min	126	14.5 min	22094	1.43 hours

**Tableau 2.13:** Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour  $m = 10$  critères et  $n = 20, 50, 100, 150, 200, 500, 1000$ .

- Réduire le temps de calcul de l'algorithme K-means lors du traitement de grands ensembles de données et améliorer la précision des clusters produits, en particulier lorsque les données sont très variées ou contiennent du bruit.



**Figure 2.7:** Premier clustering en 5 groupes en 42,99746 secondes avec 6 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-Means

- Adapter l’algorithme K-means afin qu’il puisse traiter efficacement des ensembles de données de haute dimension tout en minimisant l’impact des valeurs aberrantes et des outliers.

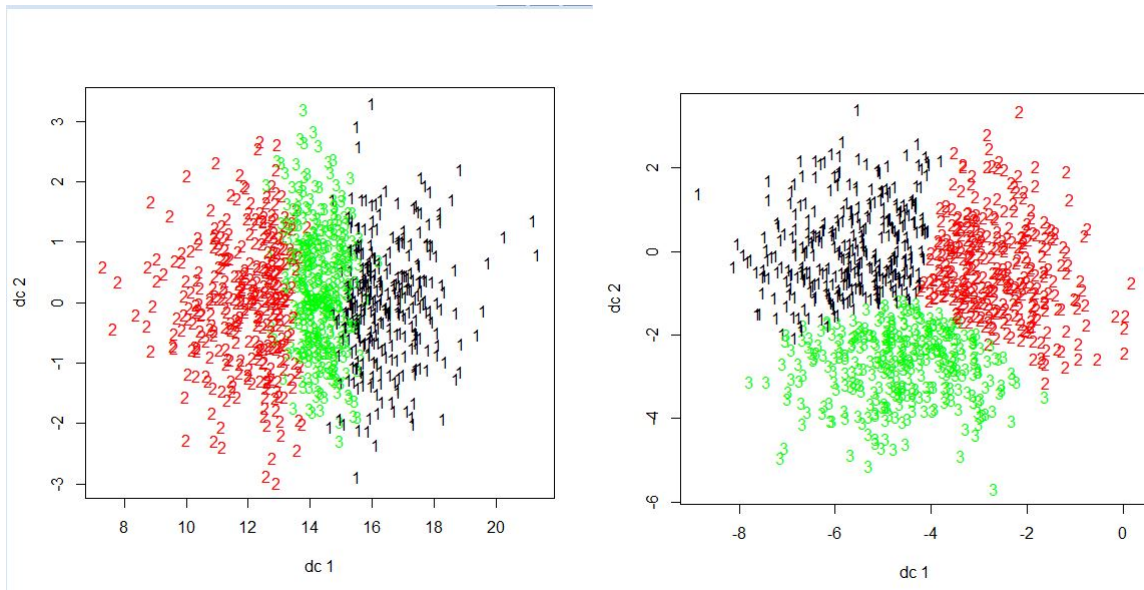
### Perspectives et Remarques

L’algorithme K-means utilise la distance euclidienne, basée sur des données agrégées, ce qui peut entraîner une perte d’information. Nous avons proposé une version modifiée de l’algorithme K-means utilisant l’intégrale de Choquet en tant que fonction d’agrégation, sous le concept de mesure floue.

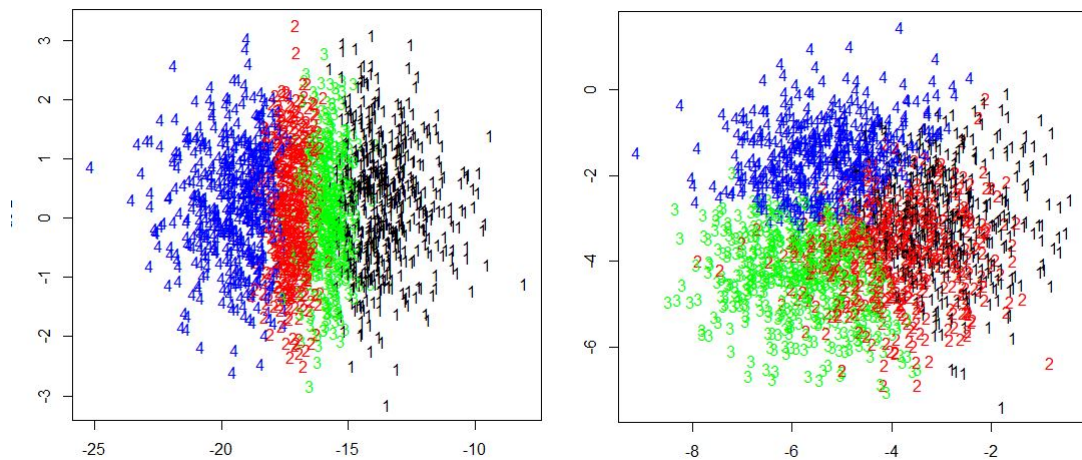
En appliquant l’intégrale de Choquet pendant l’exécution de la procédure, nous obser-

n	20		50		100		150		200		500		1000		
m=15	Grps	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT
	K=3	1	28.5 sec.	7	1.5 min	6	1.7 min	4	47.1 sec	7	1.9 min	5	1.8 min	30	6.6 min
	K=4	5	40.5 sec	4	56 sec	5	57 sec	11	3.4 min	15	4.4 min	22	5.7 min	8	1.2 min
	K=5	3	27.7 sec	5	42 sec	5	42 sec	11	3.5 min	7	2.4 min	12	4 min	24	7.8 min
n	1500		2000		2500		3000		3500		4000		5000		
m=15	Grps	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT	it	RT
	K=3	19	2.5 min	25	3.5 min	29	4.3 min	25	3.8 min	110	17 min	41	6.3 min	510	1.4 hrs
	K=4	44	5.4 min	28	4 min	58	7.8 min	65	12.3 min	16	2.5 min	68	12 min	430	1.1 hrs
	K=5	51	6.3 min	49	16 min	214	34.1 min	387	53 min	186	62.7 min	-	-	-	-

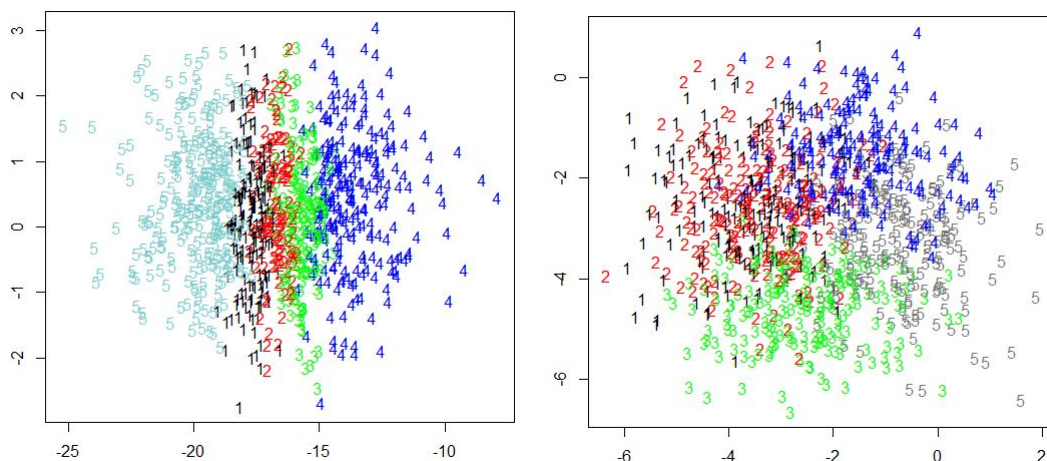
**Tableau 2.14:** Temps d'exécution et nombre d'itérations de la méthode K-Means Choquet (KMC) pour  $m = 15$  critères et  $n = 20, 50, 100, 150, 200, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 5000$ .



**Figure 2.8:** Premier clustering en 3 groupes avec 1000 actions et 15 critères en 3,5 minutes avec 15 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-means



**Figure 2.9:** Premier clustering en 4 groupes avec 2000 actions et 15 critères en 53 secondes avec 25 itérations, comparé au clustering obtenu avec K-means



**Figure 2.10:** Premier clustering en 5 groupes avec 1000 actions et 15 critères comparé au clustering obtenu avec K-means

vons des résultats encourageants sur des ensembles de données généralisés. La comparaison des résultats montre que cette approche pratique produit des résultats plus précis et interprétables, avec un temps de traitement réduit. Bien que cette étude constitue une première étape, des expérimentations supplémentaires sont nécessaires sur divers ensembles de données. Les futures études porteront sur l'application de ce concept de clustering multicritère à d'autres algorithmes de clustering ou de classification avec des ensembles de données réels, tels que le risque pays ou le diagnostic d'entreprises.

## 2.14 Nouvelle Méthode de Clustering Hiérarchique sur des Données d'Intervalle

Le clustering est une tâche essentielle en analyse de données, consistant à regrouper des individus similaires en clusters à partir d'un ensemble de données donné. Cette technique permet d'identifier des structures intéressantes et des relations dans les données, ouvrant ainsi la voie à des découvertes ou à des hypothèses pour mieux comprendre leur structure. L'analyse de clusters repose sur des groupes distincts d'observations similaires. Cette approche est largement utilisée dans divers domaines scientifiques.

Dans la littérature, les méthodes de clustering se divisent généralement en deux grandes catégories : les méthodes hiérarchiques, basées sur différentes règles de liaison, et les algorithmes de partitionnement, tels que K-means. Ces deux approches diffèrent par leur nature : les algorithmes hiérarchiques construisent une structure imbriquée de clusters, tandis que les algorithmes de partitionnement divisent les données en un nombre prédéfini de clusters  $k$ . Ces derniers nécessitent comme entrées les données, une métrique de distance et le nombre de clusters  $k$ , produisant en sortie un ensemble de clusters où les individus similaires appartiennent au même groupe.

L’algorithme de partitionnement K-means est l’un des plus populaires de sa catégorie [81]. Cependant, il souffre d’un inconvénient majeur : la nécessité de prédéterminer le nombre optimal de clusters  $k$ , une tâche souvent délicate en l’absence d’une méthode universelle pour en garantir la pertinence. Ce problème constitue l’un des défis majeurs de l’algorithme K-means.

Le clustering hiérarchique représente une solution prometteuse à cette limitation [82]. Contrairement aux méthodes de partitionnement, cette approche commence par considérer chaque individu comme un cluster individuel, puis fusionne progressivement les clusters les plus proches jusqu’à atteindre un critère d’arrêt. La relation entre les données initiales et les résultats finaux est visualisée à travers un arbre, appelé *dendrogramme*. Cette représentation hiérarchique offre une vue claire des données à différents niveaux d’abstraction, faisant des algorithmes de clustering hiérarchique un outil idéal pour la visualisation et l’exploration des données.

Dans notre méthodologie proposée [83], nous cherchons à intégrer une nouvelle approche dans l’algorithme de clustering hiérarchique appliqué aux données d’intervalle. Alors que l’algorithme standard fusionne les individus en fonction d’une distance prédéfinie, notre méthode améliore ce processus en introduisant une distance directionnelle adaptative, optimisée pour chaque étape du regroupement. En utilisant cette stratégie, nous visons à capturer des niveaux de clustering plus significatifs.

Afin de démontrer l’efficacité de notre approche, nous avons conduit des études empiriques approfondies, utilisant à la fois des ensembles de données synthétiques et des données réelles issues de [84]. Les résultats montrent que notre méthode surpasse nettement les techniques existantes en termes de qualité des clusters, tant pour le clustering hiérarchique classique que pour le clustering sur données d’intervalle.

Dans cette étude, nous introduisons d’abord le concept de *distance directionnelle* [84] et détaillons son calcul pour chaque alternative, afin d’établir une information mutuelle ordonnée. Nous appliquons ensuite ce concept au clustering hiérarchique, proposant ainsi une méthode adaptée aux ensembles d’alternatives avec des valeurs d’intervalle. Enfin, nous validons notre méthodologie en utilisant un cas réel issu de [84], confirmant ainsi l’efficacité et la robustesse de l’approche présentée.

### 2.14.1 Problème de Clustering Hiérarchique

Le problème de clustering hiérarchique a été exploré selon différentes approches. Dans ce cadre, un ensemble d’objets est organisé en plusieurs niveaux de clusters, allant des plus petits aux plus grands. Chaque niveau dans cette hiérarchie représente une agrégation des clusters issus du niveau inférieur. L’avantage principal de cette méthode réside dans sa capacité à représenter les relations hiérarchiques naturelles entre les données. Cependant, elle souffre parfois de l’inconvénient de produire des clusters de faible qualité

lorsque le nombre de clusters devient important, en raison de la nature non supervisée de l'algorithme.

De nombreuses méthodes de clustering hiérarchique existent, mais dans ce travail, nous nous concentrons sur une approche spécifique combinant la relation de dominance et une distance directionnelle adaptée aux données d'intervalle. Cette méthode permet de capturer plus efficacement les relations entre les clusters tout en réduisant les coûts de calcul.

## 2.14.2 Méthodologie Proposée

Nous proposons une nouvelle méthode de clustering hiérarchique basée sur la relation de dominance et la distance directionnelle. L'objectif principal est d'améliorer la précision du clustering pour des données d'intervalle tout en maintenant des coûts de calcul modérés [83].

### 2.14.2.1 Relation de Dominance

La relation de dominance est un concept clé en théorie de la décision multicritères. Elle permet de comparer deux alternatives sur la base de leurs performances sur plusieurs critères. Une alternative domine une autre si elle est au moins aussi performante sur tous les critères et strictement meilleure sur au moins un critère. Cette relation est utilisée pour établir un ordre partiel entre les alternatives, ce qui est particulièrement pertinent dans le contexte du clustering. Cette notion est décrite en détail au chapitre 3.

### 2.14.2.2 Distance Directionnelle

La distance directionnelle est une mesure conçue pour les données d'intervalle, qui prend en compte à la fois la direction et l'amplitude des différences entre les objets. Contrairement à la distance euclidienne, qui capture uniquement l'amplitude des écarts, la distance directionnelle reflète également les tendances et les directions de variation. Elle est particulièrement utile lorsque les objets présentent des différences en termes de valeurs et de trajectoires.

**Définition 2.11.** [84] Soient deux intervalles  $f(x_i, c) = [\underline{c}(x_i), \bar{c}(x_i)]$  et  $f(x_j, c) = [\underline{c}(x_j), \bar{c}(x_j)]$ . La distance directionnelle entre ces deux alternatives, selon le critère  $c$ , est définie comme suit :

$$DDI_c(x_i, x_j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{c}(x_i) - \bar{c}(x_j) + \underline{c}(x_i) - \underline{c}(x_j)}{\max(\bar{c}(x)) - \min(\underline{c}(x))}, \quad (2.16)$$

où  $\max(\bar{c}(x)) = \max\{\bar{c}(x_1), \dots, \bar{c}(x_n)\}$  et  $\min(\underline{c}(x)) = \min\{\underline{c}(x_1), \dots, \underline{c}(x_n)\}$ .

Dans le cas où  $\max(\bar{c}(x)) = \min(\underline{c}(x))$ , alors  $DDI_c(x_i, x_j) = \frac{1}{2}$ .

Pour comparer deux objets selon plusieurs critères, on calcule la distance directionnelle agrégée comme suit :

$$DDI_{C'}(x_i, x_j) = \frac{1}{|C'|} \sum_{\forall c \in C'} DDI_c(x_i, x_j), \quad (2.17)$$

où  $C' \subseteq C$ , et  $|C|$  représente la cardinalité de l'ensemble des critères.

### 2.14.2.3 Algorithme de Clustering Hiérarchique Proposé

L'algorithme proposé repose sur les étapes suivantes :

1. **Initialisation** : Créer un ensemble initial de clusters en utilisant la relation de dominance entre les objets.
2. **Calcul des distances directionnelles** : Pour chaque paire d'objets, calculer la distance directionnelle en tenant compte des valeurs des critères.
3. **Regroupement des objets** : Regrouper les objets en clusters en fonction des distances directionnelles et des relations de dominance.
4. **Construction de la hiérarchie** : Construire une hiérarchie de clusters en combinant les clusters formés à chaque itération.

### 2.14.2.4 Critères de Validation

Pour évaluer la qualité des clusters générés, plusieurs critères de validation sont utilisés, notamment :

- **Cohésion intra-cluster** : Mesure de la similarité des objets au sein d'un même cluster.
- **Séparation inter-cluster** : Évaluation de la distinction entre différents clusters.
- **Relation de dominance** : Analyse de la dominance des clusters en termes de performances sur les critères.

### 2.14.2.5 Résultats Expérimentaux

Afin d'évaluer l'efficacité de notre algorithme, nous avons testé son application sur l'exemple suivant :

#### Exemple : Système d'information par intervalles

Considérons le tableau suivant représentant un système d'information par intervalles :

L'ensemble des étapes du processus de clustering est résumé dans le dendrogramme suivant :

Cette expérimentation montre que notre algorithme est capable de regrouper efficacement des alternatives en fonction de leurs évaluations multicritères.

$X$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$x_1$	1	[0, 1]	2	1	[1, 2]
$x_2$	[0, 1]	0	[1, 2]	0	1
$x_3$	[0, 1]	0	[1, 2]	1	1
$x_4$	0	0	1	0	1
$x_5$	2	[1, 2]	3	[1, 2]	[2, 3]
$x_6$	[0, 2]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 2]	[2, 3]
$x_7$	1	1	2	1	2
$x_8$	[1, 2]	[1, 2]	[2, 3]	2	[2, 3]
$x_9$	[1, 2]	2	[2, 3]	[0, 2]	3
$x_{10}$	2	2	3	[0, 1]	3

Tableau 2.15: Système d'information par intervalles

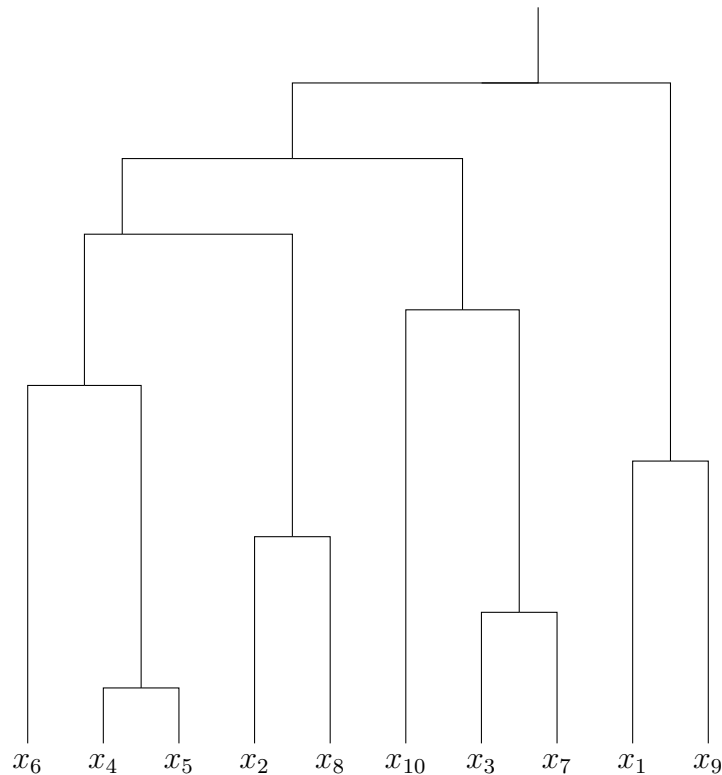


Figure 2.11: Dendrogramme du clustering pour de l'exemple 2.15

### 2.14.2.6 Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté un nouvel algorithme de clustering hiérarchique appliqué aux données d'intervalle, basé sur l'indice de distance directionnelle. Contrairement à la plupart des méthodes classiques de clustering hiérarchique, notre objectif est de partitionner un ensemble d'alternatives sous forme d'intervalles en plusieurs clusters cohérents.

En particulier, nous avons exploré des méthodes dynamiques de clustering adaptées aux données d'intervalle. L'algorithme proposé génère une partition des données d'en-

trée tout en définissant un prototype représentatif pour chaque classe. À chaque étape du processus, deux alternatives d'intervalle les plus proches, selon l'indice de distance directionnelle, sont regroupées.

Dans les deux variantes de la méthode, le prototype de chaque classe est représenté par un vecteur d'intervalles, où les bornes des intervalles sont calculées comme suit :

- La borne inférieure est obtenue en calculant la moyenne des bornes inférieures des éléments appartenant à la classe.
- La borne supérieure est obtenue en calculant la moyenne des bornes supérieures des éléments appartenant à la classe.

La convergence de ces algorithmes ainsi que la diminution progressive du critère de partitionnement à chaque itération sont garanties par l'optimisation du critère d'adéquation.

Les résultats expérimentaux démontrent l'efficacité de notre approche par rapport aux méthodes classiques de clustering appliquées aux données d'intervalle. L'algorithme proposé constitue ainsi un outil général permettant de structurer et de regrouper des données sous forme d'intervalles, et son fonctionnement est synthétisé dans le dendrogramme final.

Pour l'avenir, nous envisageons d'étendre cette méthode à d'autres types de données, notamment les données catégoriques et ordinales, et d'intégrer des techniques d'apprentissage automatique pour renforcer davantage la précision et l'efficacité du clustering.

## 2.15 Conclusion Générale

Dans ce chapitre, nous avons exploré un large éventail de méthodes d'aide à la décision multicritère, allant des méthodes scalaires classiques, telles que la méthode de la somme pondérée, la théorie de l'utilité multi-attribut (MAUT) et la méthode AHP, aux méthodes de surclassement, telles que PROMETHEE et les approches basées sur le degré de dominance. En complément, nous avons également examiné l'application des méthodes de clustering, notamment l'algorithme K-Means, dans un contexte décisionnel multicritère.

En plus de cette présentation des méthodes existantes, nous avons introduit des approches novatrices basées sur des opérateurs d'agrégation avancés. En particulier, nous avons appliqué différentes fonctions d'agrégation, notamment les moyennes de Bonferroni, Héronienne, Harmonique et Géométrique, ainsi que l'intégrale de Choquet, à la méthode PROMETHEE. Cette approche nous a permis d'améliorer la qualité des classements obtenus et de mieux capturer les interactions entre les critères. Les résultats expérimentaux ont confirmé la pertinence de ces agrégations en apportant des classements plus cohérents et plus robustes.

De manière similaire, nous avons exploré l'intégration de l'intégrale de Choquet dans la méthode de clustering K-Means afin d'enrichir le processus de regroupement en tenant compte des interactions entre critères. Les résultats obtenus ont montré que cette approche permet d'améliorer la cohérence des clusters formés en affinant la mesure de similarité utilisée dans l'algorithme.

Ainsi, ce chapitre a mis en lumière l'importance des méthodes multicritères dans la prise de décision et a démontré l'intérêt d'intégrer des outils avancés d'agrégation pour affiner les résultats obtenus. Nos travaux ouvrent la voie à de futures recherches sur l'amélioration des méthodes existantes, notamment en explorant d'autres opérateurs d'agrégation ou en testant ces approches dans des contextes applicatifs variés.

Dans la continuité de ces travaux, le chapitre suivant s'intéressera aux **méthodes de classement fondées sur le degré de dominance**, en mettant en évidence les phénomènes d'**inversions de rang**. Alors que les méthodes explorées jusqu'à présent se concentrent principalement sur l'agrégation des critères pour établir un classement des alternatives, le degré de dominance offre une approche différente en évaluant la supériorité relative des alternatives à travers une analyse des préférences partielles et des comparaisons binaires. Ce cadre théorique permettra d'examiner les limites des classements obtenus par certaines méthodes classiques et d'identifier des situations où les inversions de rang affectent la robustesse des décisions finales. En analysant ces inversions, nous chercherons à affiner les techniques existantes et à proposer des ajustements permettant d'améliorer la stabilité des classements dans les environnements décisionnels complexes.

# Chapitre 3

## Étude de variantes d'une méthode de classement basée sur le degré de dominance : robustesse et phénomène d'inversion de rang

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au traitement de données évaluées sous forme d'intervalles, en utilisant le concept de *Degré de dominance*. La méthode basée sur ce concept, ainsi que ses variantes que nous avons développées, permet de classer un ensemble d'alternatives en tenant compte de leurs évaluations sous forme d'intervalles sur différents critères.

La notion de *Degré de dominance* joue un rôle central dans cette méthodologie. L'objectif principal de notre étude est d'examiner l'impact de l'ajout ou de la suppression d'une alternative dans l'ensemble des options disponibles et d'analyser ses effets sur le classement final.

Au cours des deux dernières décennies, une méthode de notation basée sur le degré de dominance a été proposée pour classer des données sous forme d'intervalles [85]. Cet indice est ordinal, car il repose uniquement sur l'ordre des extrémités des intervalles d'évaluation. Cependant, cette méthode présente une particularité : le classement des objets peut varier lorsque l'ensemble des alternatives est modifié. Ce phénomène est connu sous le nom d'\*\*\*inversion de rang\*\* ( *rank reversal* en anglais).

#### 3.1.1 Problématique et Approches Multicritères

Les méthodes d'analyse multicritère et la théorie du vote abordent depuis longtemps la question de l'agrégation d'évaluations multiples en une structure ordonnée unique. Par

exemple, la célèbre règle de Borda [86] propose un classement des candidats à une élection en sommant leurs rangs dans les préférences des électeurs.

Deux grandes familles de méthodes multicritères se distinguent [1] :

- **Méthodes basées sur un score** : Ces méthodes agrègent les performances des objets sur plusieurs critères. Parmi elles, on trouve le modèle de *fonction de valeur additive* [13], AHP [87] et TOPSIS [88].
- **Méthodes basées sur les comparaisons par paires** : Ces méthodes, comme ELECTRE [53] et PROMETHEE [89], s'appuient sur des relations de surclassement et permettent de gérer des préférences incomplètes ou intransitives.

Dans de nombreuses situations, les évaluations des alternatives sont imprécises et représentées sous forme d'intervalles. Ce type de données soulève des défis spécifiques pour les méthodes de classement, en particulier lorsqu'il s'agit de comparer des alternatives de manière fiable et cohérente.

Les méthodes de classement fondées sur le degré de dominance reposent exclusivement sur des informations ordinales, extraites de la comparaison des évaluations des objets sur l'ensemble des critères. À l'inverse, la relation de préférence valorisée employée dans la méthode PROMETHEE est de nature *cardinale*, car elle s'appuie sur des opérations arithmétiques appliquées directement aux valeurs d'évaluation.

### 3.1.2 Objectifs et Contributions

Nous nous appuyons ici sur l'approche du *Degré de dominance*, développée par [84,90], afin de classer des objets évalués sous forme d'intervalles sur plusieurs critères. Cette méthode calcule le degré de dominance en tenant compte de l'ensemble des alternatives disponibles. Par conséquent, la position relative de deux objets peut être affectée par l'ajout ou la suppression d'autres alternatives, entraînant ainsi le phénomène d' *inversion de rang*.

Notre objectif est d'étudier la sensibilité des classements basés sur le degré de dominance face à ces perturbations. Nous analysons également deux variantes du degré de dominance : le *degré dominé*, qui mesure la proportion d'objets dominants, et le *degré de dominance net*, défini comme la différence entre le degré de dominance et le degré dominé.

Enfin, nous comparons les classements obtenus par ces méthodes avec ceux générés par des approches classiques comme la règle de Borda et explorons les conditions dans lesquelles l'inversion de classement est susceptible de se produire.

Dans le contexte des récents efforts visant à développer des méthodes résistantes, voire insensibles, au phénomène d'inversion de rangs (voir Section 3.2.2 ci-dessous), nous examinons, en fin de chapitre, dans quelle mesure le degré de dominance et ses variantes peuvent être rendus robustes face à ce phénomène. L'idée principale, qui sous-tend plusieurs méthodes récemment proposées et résistantes à l'inversion de rangs, consiste à s'appuyer sur

un ensemble fixe de points de référence. Nous avons mené des expérimentations en accord avec cette approche.

## 3.2 Positionnement par rapport à l'état de l'art

L'approche fondée sur le *degré de dominance* présente plusieurs caractéristiques distinctives :

- Elle repose uniquement sur des informations ordinales issues des évaluations des objets par rapport à plusieurs critères.
- Elle ne nécessite ni paramétrage, ni élucidation préalable de la part du décideur.
- L'évaluation d'un objet pour chaque critère se traduit soit par un niveau unique sur l'échelle ordinale du critère (cas de certitude), soit par deux niveaux encadrant avec certitude l'intervalle dans lequel se situe l'évaluation.

En raison de la manière dont le score de dominance est construit — en tenant compte de l'ensemble des objets du domaine de décision —, le classement obtenu peut être sensible aux modifications de cet ensemble. En particulier, l'ajout ou la suppression d'une alternative peut entraîner un phénomène d'*inversion de rang* (*rank reversal*).

Dans cette section, nous proposons un aperçu des principales problématiques liées à l'inversion de rang dans les méthodes d'aide multicritère à la décision (AMCD), ainsi que des stratégies développées pour y remédier. Nous abordons également la manière dont l'incertitude est traitée dans ces méthodes, et la question de la pondération des critères. Enfin, nous situons la méthode de classement fondée sur le degré de dominance au regard de ces différentes dimensions.

### 3.2.1 Le phénomène d'inversion de rang (*Rank Reversal*)

Le phénomène d'inversion de rang a d'abord été largement étudié dans le cadre de la théorie du choix social et de la théorie du vote. Il est étroitement lié à l'hypothèse d'indépendance des alternatives non pertinentes, formulée dans le célèbre théorème d'Arrow [91]. Parmi les règles de vote ne respectant pas cette propriété, la règle de Borda (ou méthode des comptes de Borda) [92] classe les candidats à une élection selon la somme de leurs rangs attribués par chaque électeur. Il est évident que, lorsqu'un candidat se retire ou qu'un nouveau candidat rejoint l'élection, le recalcul des sommes de rangs peut modifier l'ordre final des candidats, et en particulier celui du candidat arrivé en tête. Malgré cette limitation, certains chercheurs influents (voir par exemple [93]) ont fortement plaidé en faveur de l'utilisation de la règle de Borda.

Le phénomène d'inversion de rang a également été examiné dans le domaine des méthodes multicritères (AMCD), notamment dans les méthodes qui agrègent des évaluations

ordinales à travers des comparaisons par paires, mais aussi dans certaines méthodes de notation. En particulier, des inversions de rangs peuvent survenir lors de l'utilisation de méthodes de scoring telles que l'AHP [94–97] ou TOPSIS [98]. Le phénomène a également été analysé dans le cas des méthodes de surclassement comme ELECTRE [99] et PROMETHEE [100, 101]. Dans ce dernier travail, l'accent est mis sur l'identification des situations dans lesquelles une inversion de rang est susceptible de se produire.

Un certain nombre de méthodes ont été proposées dans le but de construire un score basé uniquement sur les évaluations des alternatives, c'est-à-dire sans interaction significative, voire sans aucune interaction, avec le décideur. Les évaluations des alternatives sur chaque critère (souvent appelées matrice de décision) sont d'abord normalisées, puis agrégées pour produire un score, généralement à l'aide d'une pondération des critères. Ces méthodes sont notamment passées en revue dans la section II de [102]. Plusieurs méthodes de normalisation y sont présentées et comparées, comme détaillé dans [103]. Celles-ci s'appuient généralement uniquement sur les données, en utilisant par exemple les valeurs maximales et/ou minimales des évaluations des alternatives sur chaque critère, ou encore des statistiques comme la moyenne et/ou l'écart-type. Il est évident que ces méthodes sont sensibles à toute modification de l'ensemble des alternatives.

Le tableau 2 de [102] répertorie les méthodes MCDA ainsi que les approches de normalisation utilisées dans différentes applications. De manière analogue, les techniques de pondération basées sur les données (parfois appelées pondérations « objectives ») reposent souvent sur des mesures d'information telles que l'entropie ou l'écart-type, qui dépendent également de l'ensemble des alternatives considérées. Toutes ces méthodes d'agrégation sont donc susceptibles de produire des inversions de rang lorsque l'ensemble des alternatives est modifié. De plus, dans ces méthodes, les évaluations sont numériques et des opérations arithmétiques sont effectuées sur ces évaluations. Par conséquent, elles ne sont pas bien adaptées à un usage avec des données purement ordinales.

### 3.2.2 Méthodes résistantes aux inversions de rang

La première et la plus importante méthode d'aide multicritère à la décision (AMCD) ne souffrant pas du phénomène d'inversion de rang (*Rank Reversal*, RR) provient de la théorie des fonctions de valeur multi-attributs (*Multi-Attribute Value Theory*) [13, 104]. Dans le cas le plus simple, une fonction de valeur additive est construite, par exemple à l'aide de la méthode des séquences standards. Concrètement, le décideur est invité à formuler des jugements d'indifférence, qui permettent de construire une fonction de valeur marginale pour chaque critère. Ces fonctions traduisent la manière dont le décideur évalue l'ensemble des niveaux possibles sur chaque critère et intègrent également les compromis entre critères (i.e., les poids). La valeur d'une alternative correspond alors à la somme des valeurs marginales de ses évaluations. Ce modèle est indépendant de l'ensemble d'alternatives

considéré, ce qui le rend insensible aux inversions de rang. Cependant, une telle approche implique un effort cognitif important de la part du décideur. Elle ne convient donc pas pour classer un ensemble d'alternatives uniquement sur la base de leurs évaluations, sans interaction directe avec un décideur. Dans le cas d'évaluations ordinales sur une échelle finie de niveaux ordonnés, il est parfois possible de construire des fonctions de valeur marginales représentant les préférences du décideur pour chaque critère [104], mais il reste difficile de garantir, en pratique, l'existence d'une fonction de valeur additive satisfaisant les conditions théoriques [105].

Une autre méthode insensible aux inversions de rang et nécessitant également l'intervention du décideur est la méthode d'agrégation par profils de référence [106, 107]. Elle appartient à la famille des méthodes ELECTRE [16, 108, 109]. Comme toutes les méthodes de surclassement, elle repose sur une relation de comparaison binaire valorisée (relation de surclassement). Ce qui distingue cette méthode des versions classiques d'ELECTRE est que la comparaison se fait entre les alternatives et des profils de référence fixes, au lieu de comparer directement les alternatives entre elles. Un classement est ainsi obtenu sans recourir à une procédure d'exploitation, laquelle est généralement responsable de la perte de la propriété d'indépendance aux alternatives non pertinentes. Les profils de référence sont considérés dans un ordre donné. Les alternatives sont classées selon leur degré de surclassement vis-à-vis du premier profil, puis en cas d'égalité, vis-à-vis du deuxième, et ainsi de suite. Cette méthode, adaptée aux données ordinales, suppose une interaction avec le décideur pour la définition des paramètres, des profils de référence et de leur ordre d'évaluation.

La méthode *COMET* (*Characteristic Objects METHod*) constitue une approche alternative sans inversion de rang, reposant sur des points de référence appelés objets caractéristiques [110]. Ces objets sont des noyaux de nombres flous triangulaires formant une partition floue de l'espace des critères. Le décideur doit classer ces objets de référence par ordre de préférence, ce qui permet d'associer une « valeur de préférence » à chacun d'eux. Les nombres flous triangulaires servent ensuite de règles floues. Les alternatives sont classées selon la somme pondérée des degrés d'activation de ces règles par les valeurs de préférence associées. Les alternatives les mieux classées sont donc celles les plus proches des objets caractéristiques les mieux notés. Cette méthode, bien qu'efficace, nécessite l'intervention du décideur pour le classement des objets caractéristiques, dont le nombre peut croître rapidement avec le nombre de critères. Une version adaptée aux données incertaines a également été proposée [111].

De nombreuses méthodes résistantes au RR, dont COMET, ont été développées au cours de la dernière décennie. Une liste avec descriptions est fournie dans [112], Tableau 1. Plusieurs d'entre elles s'appuient sur des points de référence, en particulier les points idéaux et anti-idéaux. Le recours à ces points constitue ainsi une stratégie majeure pour éviter les inversions de rang. Toutefois, le classement peut être sensible au choix de ces

points. D'autres choix méthodologiques, tels que la norme utilisée (euclidienne ou autre) pour calculer la distance aux points idéaux, influencent également les résultats. Une approche visant à neutraliser ces choix arbitraires consiste à agréger les classements issus de différentes variantes et à en extraire un consensus robuste. La méthode *Compromise-COMET* [113] illustre cette orientation. Une autre solution repose sur la caractérisation axiomatique des méthodes, comme cela a été initié dans la théorie des fonctions de valeur additives [13, 27]. Certaines méthodes de la famille ELECTRE ont également été caractérisées [114–117]. Une telle formalisation permet de vérifier avec le décideur si le modèle utilisé est bien adapté à la situation décisionnelle en question.

### 3.2.3 Prise en compte de l'incertitude dans l'AMCD

L'incertitude dans les processus de décision multicritère est un sujet vaste. Une revue des approches traitant de l'incertitude dans l'AMCD appliquée aux décisions dans le domaine de la santé a identifié 569 études publiées entre 1986 et 2013 [118]. Les auteurs distinguent deux types d'incertitude dans les problèmes décisionnels : internes et externes. Les incertitudes internes concernent la structuration du problème, notamment les imprécisions dans les jugements humains, qu'il s'agisse de la spécification des préférences (comme les poids des critères) ou de l'évaluation des conséquences des actions. Les incertitudes externes, quant à elles, relèvent d'un manque de connaissance sur les conséquences réelles des décisions.

Ces deux types d'incertitude sont souvent traités à l'aide de modèles similaires. Historiquement, les modèles probabilistes ont été les premiers à être utilisés, notamment dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée [13, 104]. D'autres approches pour modéliser l'incertitude dans les jugements humains utilisent les ensembles flous [119] ou les ensembles approximatifs (rough sets) [120]. Une autre manière de traiter l'incertitude consiste à réaliser une analyse de sensibilité a posteriori afin d'explorer l'espace des valeurs possibles des paramètres [121].

Dans l'approche fondée sur le degré de dominance, l'incertitude d'une évaluation est modélisée comme un intervalle de niveaux, dont les bornes peuvent être interprétées comme des niveaux d'évaluation pessimistes et optimistes. En l'absence d'information complémentaire, ces bornes sont utilisées telles quelles. Dans cette approche, un objet est considéré comme préférable à un autre sur un critère si ses deux bornes d'évaluation (inférieure et supérieure) sont meilleures que celles de l'autre objet. Cette définition n'est pas unique (voir Remarque 3.1), mais elle reste conservatrice, car elle repose sur deux conditions indiscutables.

Lorsqu'un panel d'experts est chargé d'évaluer les objets, l'évaluation d'un objet prend la forme d'une distribution de fréquences sur les niveaux de l'échelle du critère. L'approche par dominance peut alors être utilisée — avec une perte d'information — en considérant

que les bornes de l'intervalle correspondent soit aux valeurs extrêmes de la distribution, soit à des percentiles (par exemple, le premier et le troisième quartile), soit encore en ignorant les valeurs extrêmes. L'intervalle d'évaluation pourrait également être interprété comme un nombre flou rectangulaire, ou triangulaire (à condition de disposer ou supposer une valeur la plus probable dans l'intervalle).

Bien que nous n'explorions pas ces variantes de modélisation de l'incertitude dans ce travail, il est important de noter que les intervalles représentent déjà une forme de prise en compte de l'incertitude. Une « incertitude de second ordre » pourrait toutefois être étudiée via une analyse de sensibilité sur les bornes des intervalles. Nous ne mènerons pas une telle analyse ici, mais rappelons qu'elle peut être appliquée de manière directe.

### 3.2.4 Poids des critères

Outre l'interrogation du décideur (DM) sur les compromis ou l'importance relative des critères, plusieurs méthodes ont été proposées pour attribuer des poids en l'absence d'un décideur. Ces approches, déjà mentionnées dans le dernier paragraphe de la Section 3.2.1, sont qualifiées de méthodes fondées sur les données ou « objectives ». Elles consistent généralement à déduire les poids à partir des évaluations des alternatives elles-mêmes, à l'aide de mesures statistiques telles que l'entropie ou l'écart-type.

En revanche, dans les méthodes fondées sur la dominance, l'affectation de poids aux critères est inutile, voire inappropriée. En effet, une alternative n'est considérée comme dominante qu'à condition qu'elle soit au moins aussi bonne que l'autre sur l'ensemble des critères. Par conséquent, l'importance relative des critères n'intervient pas dans le processus de classement basé sur la dominance.

## 3.3 Définitions et Notations

Nous considérons un ensemble de  $n$  objets (ou alternatives)  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , avec  $n \geq 2$ . Chaque objet  $a \in A$  est évalué selon un ensemble de critères indexé par  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  où  $m \geq 2$ . À chaque critère  $j$  est associée une échelle  $X_j$ , qui est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}$ . Cette échelle est totalement ordonnée par la relation d'ordre naturel  $\geq_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{R}$ . L'inverse de cet ordre est noté  $\leq_{\mathbb{R}}$ . En l'absence d'ambiguïté, nous omettons l'indice  $\mathbb{R}$  et utilisons simplement  $\geq$  et  $\leq$ . Nous supposons, sans perte de généralité, que tous les critères sont à maximiser.

L'évaluation d'un objet  $a$  sur le critère  $j$  est généralement donnée sous forme d'un intervalle fermé  $[\underline{c}_j(a), \bar{c}_j(a)] = \{t \in X_j : \underline{c}_j(a) \leq t \leq \bar{c}_j(a)\}$  de l'échelle  $X_j$ . Le tableau 3.1 illustre une matrice typique d'évaluations intervalle pour un ensemble de  $n$  objets sur  $m$  critères.

Nous définissons la relation  $\geq_j$  sur  $A$  comme suit :

$A$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_m$
$a_1$	$[\underline{c}_1(a_1), \bar{c}_1(a_1)]$	$[\underline{c}_2(a_1), \bar{c}_2(a_1)]$	$\dots$	$[\underline{c}_m(a_1), \bar{c}_m(a_1)]$
$a_2$	$[\underline{c}_1(a_2), \bar{c}_1(a_2)]$	$[\underline{c}_2(a_2), \bar{c}_2(a_2)]$	$\dots$	$[\underline{c}_m(a_2), \bar{c}_m(a_2)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_n$	$[\underline{c}_1(a_n), \bar{c}_1(a_n)]$	$[\underline{c}_2(a_n), \bar{c}_2(a_n)]$	$\dots$	$[\underline{c}_m(a_n), \bar{c}_m(a_n)]$

**Tableau 3.1:** Matrice d'évaluations intervalle des objets selon  $m$  critères.

**Définition 3.1.** Pour  $j \in M$  et pour tout  $a, b \in A$ , nous avons

$$a \succcurlyeq_j b \iff \underline{c}_j(a) \geq \underline{c}_j(b) \text{ et } \bar{c}_j(a) \geq \bar{c}_j(b).$$

*Remarque.* La relation  $\succcurlyeq_j$  définie ci-dessus est l'une des façons possibles de comparer des intervalles. Elle diffère de la notion classique de *préordre d'intervalles* [122, 123], selon laquelle  $a$  est préféré à  $b$  si  $\underline{c}_j(a) > \bar{c}_j(b)$ . Ici,  $\succcurlyeq_j$  correspond à l'intersection de deux préordres complets (réflexifs, transitifs et complets) basés respectivement sur l'ordre des bornes inférieures  $\underline{c}_j$  et celui des bornes supérieures  $\bar{c}_j$ . La partie asymétrique  $>_j$  de  $\succcurlyeq_j$  constitue donc un ordre partiel, c'est-à-dire une relation irreflexive et transitive. Cette manière de comparer des intervalles est appelée *ordre d'intervalles* [124].

En utilisant les relations  $\succcurlyeq_j$  sur les échelles des critères, nous définissons la *relation de dominance*  $\succcurlyeq$  sur l'ensemble des objets  $A$ . Par souci de simplicité, nous utilisons le même symbole  $\succcurlyeq$  pour désigner la relation de dominance sur  $A$  et l'ordre naturel sur  $\mathbb{R}$ . La définition suivante introduit également une notation pour les ensembles d'objets  $[a]^\succcurlyeq$  (*resp.*  $[a]^\not\succcurlyeq$ ) qui dominant (*resp.* ne dominant pas) un objet  $a \in A$ .

**Définition 3.2.** Pour tout  $a, b \in A$  :

- $a \succcurlyeq b$  si  $a \succcurlyeq_j b$  pour tout  $j \in M$  ;
- $[a]^\succcurlyeq = \{b \in A : b \succcurlyeq a\}$  ;
- $[a]^\not\succcurlyeq = A \setminus [a]^\succcurlyeq = \{b \in A : b \not\succcurlyeq a\}$ .

*Remarque.* En général,  $\succcurlyeq$  n'est pas une relation complète. En effet, lorsque :

- il existe un critère  $j \in M$  tel que ni  $a \succcurlyeq_j b$  ni  $b \succcurlyeq_j a$  ne sont satisfaits ;
- ou lorsque  $a >_j b$  pour un critère  $j$  et  $b >_{j'} a$  pour un autre critère  $j'$ ,

nous avons ni  $a \succcurlyeq b$  ni  $b \succcurlyeq a$ .

*Remarque.* [90] définissent une relation de dominance  $\succcurlyeq_C$  par rapport à un sous-ensemble  $C \subseteq M$  des critères. Ils considèrent également les ensembles  $[a]_C^\succcurlyeq$  et  $[a]_C^\not\succcurlyeq$  définis de manière évidente. Cela revient à négliger complètement les critères qui ne figurent pas dans  $C$ . Pour simplifier, nous n'adoptons pas cette définition apparente plus générale, mais il est trivial d'adapter nos résultats au cadre de [90].

## 3.4 Classement des données d'intervalles à l'aide du degré de dominance

Qian et al. [90] ont défini le *degré de dominance* entre deux objets, ainsi que le *degré de dominance global* d'un objet. Ce dernier constitue un score permettant de classer les objets, donnant lieu à un *système d'information ordonné par intervalles*. Afin d'analyser plus en profondeur cette approche, nous rappelons les concepts introduits par [90] et certaines de leurs propriétés. Conformément à la remarque 3.3, nous travaillons sans perte de généralité avec l'ensemble complet des critères  $M$ .

**Définition 3.3.** Le *degré de dominance*  $D(a, b)$  entre deux objets  $a, b \in A$  est défini comme suit :

$$D(a, b) = \frac{|[a]^\neq \cup [b]^\geq|}{|A|}. \quad (3.1)$$

Le *degré de dominance global*  $D(a)$  d'un objet  $a \in A$  est donné par :

$$D(a) = \frac{1}{|A| - 1} \sum_{b \in A \setminus \{a\}} D(a, b). \quad (3.2)$$

Le *degré de dominance global* [84] est utilisé pour classer les objets de  $A$ .

**Définition 3.4.** Le classement obtenu par le degré de dominance global est le préordre complet  $\succ$  sur  $A$  déterminé à l'aide du score  $D$ , c'est-à-dire :

$$a \succ b \quad \text{si et seulement si} \quad D(a) \geq D(b). \quad (3.3)$$

Ce classement est appelé *classement par degré de dominance* dans la suite.

Nous utilisons les notations  $\succ$ ,  $\preceq$  et  $\prec$  de manière évidente.

### 3.4.1 Propriétés du degré de dominance

Les trois premières propriétés suivantes ont été établies par [90], tandis que les quatre dernières sont développés dans le cadre de cette thèse.

*Proposition 1.* Pour tout  $a, b, d \in A$ , les propriétés suivantes s'appliquent :

1.  $\frac{1}{|A|} \leq D(a, b) \leq 1$  ;
2. Si  $b \geq d$ , alors  $D(a, b) \leq D(a, d)$  ;
3. Si  $b \geq d$ , alors  $D(b, a) \geq D(d, a)$  ;
4.  $a \geq b$  si et seulement si  $D(a, b) = 1$  ;
5. Si  $a \geq b$ , alors  $D(a) \geq D(b)$  ;
6.  $\frac{1}{|A|} \leq D(a) \leq 1$  ;

7. Soit  $\Delta D(a, b) = D(a) - D(b)$ . Nous avons :

- a. Si  $a \geq b$  et  $b \geq a$ , alors  $\Delta D(a, b) = 0$ ;
- b. Si  $a \geq b$  et  $b \not\geq a$ , alors  $\Delta D(a, b) \geq \frac{1}{|A|-1} \cdot \frac{1}{|A|}$ ;
- c. Si  $a \not\geq b$ ,  $b \not\geq a$ ,  $|[a]^\geq| = |[b]^\geq|$ , et pour tout  $x \in A \setminus \{a, b\}$ ,  $|[x]^\geq \cap [a]^\geq| \geq |[x]^\geq \cap [b]^\geq|$ , alors  $\Delta D(a, b) \geq 0$ .

*Démonstration.* [125]

**Preuve de la propriété 1. :**

La démonstration est immédiate. Nous avons

$$1 \leq |[b]^\geq| \leq |A| \quad \text{et} \quad 0 \leq |[a]^\not\geq| \leq |A|.$$

Il en découle que :

$$1 \leq |[a]^\not\geq \cup [b]^\geq| \leq |A| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|A|} \leq \frac{|[a]^\not\geq \cup [b]^\geq|}{|A|} \leq 1,$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{|A|} \leq D(a, b) \leq 1.$$

**Preuve de la propriété 2. :**

On a  $b \geq d$  si et seulement si  $[b]^\geq \subseteq [d]^\geq$ . Alors :

$$\begin{aligned} D(a, b) - D(a, d) &= \frac{1}{|A|} \left( |[a]^\not\geq \cup [b]^\geq| - |[a]^\not\geq \cup [d]^\geq| \right) \\ &\leq \frac{1}{|A|} \left( |[a]^\not\geq \cup [d]^\geq| - |[a]^\not\geq \cup [d]^\geq| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où  $D(a, b) \leq D(a, d)$ .

**Preuve de la propriété 3. :**

De même que pour la propriété 2., on a :

$$[b]^\geq \subseteq [d]^\geq \quad \Longleftrightarrow \quad [b]^\not\geq \supseteq [d]^\not\geq.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} D(b, a) - D(d, a) &= \frac{1}{|A|} \left( |[b]^\neq \cup [a]^\geq| - |[d]^\neq \cup [a]^\geq| \right) \\ &\geq \frac{1}{|A|} \left( |[d]^\neq \cup [a]^\geq| - |[d]^\neq \cup [a]^\geq| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique  $D(b, a) \geq D(d, a)$ .

**Preuve de la propriété 4. :**

Nous avons  $a \geq b$  si et seulement si  $[a]^\geq \subseteq [b]^\geq \iff [a]^\neq \supseteq [b]^\neq \iff [a]^\neq \cup [b]^\geq = A \iff D(a, b) = 1$ .

**Preuve de la propriété 5. :**

Si  $a \geq b$ , alors, pour tout  $x \neq a, b$ ,  $D(a, x) \geq D(b, x)$  (par la propriété 3.). De plus,  $D(a, b) = 1$  (par la propriété 4.). En utilisant la définition de  $D(a)$  dans l'équation (3.2), nous avons  $D(a) \geq D(b)$ .

**Preuve de la propriété 6. :**

Cette propriété découle directement de la propriété 1..

**Preuve de la propriété 7. :**

Les preuves des points a., b., et c. utilisent les définitions de  $\Delta D(a, b)$  et des propriétés précédentes pour démontrer les inégalités. Ces résultats montrent la robustesse du degré de dominance pour capturer les relations d'ordre.  $\square$

Cette méthode de comparaison des données intervalles a été illustrée par plusieurs exemples et commentaires dans [90] et [84].

### 3.5 Inversion de classement lors du retrait ou de l'ajout d'un objet

Nous commençons par étudier l'influence du retrait d'un objet sur le classement basé sur le degré de dominance  $\succ$  [126, 127] (le cas de l'ajout d'un objet sera étudié par la suite). L'inversion de classement peut-il se produire? Plusieurs cas d'inversion de classement *Rank Reversal* (RR) sont possibles entre les objets  $a, b \in A$  lorsqu'un objet  $z \neq a, b$  est retiré de  $A$  [125]. Notons  $\succ_{-z}$  la relation de dominance sur  $A \setminus \{z\}$  résultant du retrait de

$z$  (nous utilisons les symboles  $\sim_{-z}$  et  $\succ_{-z}$  de manière évidente). Les situations suivantes peuvent se produire lorsque nous avons initialement  $a \succ b$  :

1.  $a \succ b$  et  $a \sim_{-z} b$ ;
2.  $a \succ b$  et  $b \succ_{-z} a$ ;
3.  $a \sim b$  et  $b \succ_{-z} a$ .

Le premier cas correspond à la création d'une indifférence entre deux objets qui étaient strictement ordonnés. Le deuxième cas inverse strictement l'ordre de deux objets. Le troisième cas rompt une indifférence initiale. Nous désignons le deuxième type comme *inversion de classement strict* (SRR), tandis que les types 1 et 3 seront appelés *inversion de classement faible* (RR).

Puisque l'ensemble des critères  $C \subseteq M$  reste fixe, nous simplifions les notations en écrivant simplement  $\succ, [a]^\succ, [a]^\not\succ, D(a, b), D(a)$  au lieu de  $\succ_C, [a]_C^\succ, [a]_C^\not\succ, D_C(a, b), D_C(a)$ , respectivement.

Un premier résultat simple mais important est que le RR ne se produit pas (pas même un RR faible) entre des objets qui se dominent l'un l'autre [126, 127].

*Proposition 2.* [125] Si  $a \geq b$ , aucune inversion de classement ne se produit lorsqu'un objet différent de  $a$  et  $b$  est retiré ou ajouté.

*Démonstration.* Ceci découle directement de la Proposition 1.5.. En effet, la relation de dominance n'est pas altérée lorsqu'un objet  $z \neq a, b$  est retiré ou ajouté. Par conséquent, la propriété s'applique à l'ensemble modifié des objets  $A \setminus \{z\}$  ou  $A \cup \{z\}$ .  $\square$

Nous étudions maintenant les cas possibles d'inversion de classement entre des objets qui ne se dominent pas mutuellement.

## 3.6 Réformulation Préliminaire

Nous réécrivons d'abord  $\Delta D(a, b)$  en utilisant les expressions explicites suivantes pour  $D(a)$  et  $D(b)$  :

$$D(a) = \frac{1}{|A|(|A| - 1)} \left( |[a]^\not\succ \cup [b]^\succ| + \sum_{x \neq a, b} |[a]^\not\succ \cup [x]^\succ| \right), \quad (3.4)$$

$$D(b) = \frac{1}{|A|(|A| - 1)} \left( |[b]^\not\succ \cup [a]^\succ| + \sum_{x \neq a, b} |[b]^\not\succ \cup [x]^\succ| \right). \quad (3.5)$$

Nous avons alors :

$$|A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) = |[a]^{\neq} \cup [b]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [a]^{\geq}| \quad (3.6)$$

$$+ \sum_{x \neq a, b} \left( |[a]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| \right).$$

Notons  $\Delta = |[a]^{\neq}| - |[b]^{\neq}|$ . Puisque  $|[a]^{\neq} \cup [b]^{\geq}| = |[a]^{\neq}| + |[b]^{\geq} \cap [a]^{\geq}|$  et  $|[b]^{\neq} \cup [a]^{\geq}| = |[b]^{\neq}| + |[a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}|$ , nous avons :

$$|[a]^{\neq} \cup [b]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [a]^{\geq}| = \Delta. \quad (3.7)$$

Définissons  $\Delta_x = |[a]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [x]^{\geq}|$ , pour  $x \neq a, b$ .

Naturellement,  $\Delta$  et  $\Delta_x$  dépendent de  $a$  et  $b$ . En l'absence d'ambiguïté, nous laissons cette dépendance implicite.

*Lemme 1.* Le degré de dominance de  $a$  moins celui de  $b$ ,  $\Delta D(a, b)$ , peut être exprimé comme suit :

$$|A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) = \Delta + \sum_{x \neq a, b} \Delta_x. \quad (3.8)$$

Selon la position de  $x$  par rapport à  $a$  et  $b$ , nous obtenons les expressions suivantes pour  $\Delta_x$  :

- $x \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$  :  $\Delta_x = \Delta - |[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|$ ,
- $x \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$  :  $\Delta_x = \Delta + |[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|$ ,
- $x \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  :  $\Delta_x = \Delta$ ,
- $x \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$  :  $\Delta_x = \Delta - |[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq}| + |[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|$ .

*Démonstration.* Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_x &= |[a]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| \\ &= |[a]^{\neq}| + |[x]^{\geq}| - |[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq}| - |[b]^{\neq}| - |[x]^{\geq}| + |[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq}| \\ &= \Delta - |[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq}| + |[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|. \end{aligned}$$

Les différentes valeurs de  $\Delta_x$  dans les cas spécifiques se calculent comme suit :

- $x \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$  : Puisque  $x \in [b]^{\geq}$ , nous avons  $x \notin [b]^{\neq}$  et  $[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq} = \emptyset$ . D'où  $\Delta_x = \Delta - |[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|$ .
- $x \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$  : Puisque  $x \in [a]^{\geq}$ , nous avons  $x \notin [a]^{\neq}$  et  $[a]^{\neq} \cap [x]^{\geq} = \emptyset$ . D'où  $\Delta_x = \Delta + |[b]^{\neq} \cap [x]^{\geq}|$ .

- $x \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$  : Nous avons  $x \notin [a]^\not\geq$  et  $x \notin [b]^\not\geq$ . D'où  $[a]^\not\geq \cap [x]^\geq = \emptyset = [b]^\not\geq \cap [x]^\geq$ , et donc  $\Delta_x = \Delta$ .
- $x \in [a]^\not\geq \cap [b]^\not\geq$  : Dans ce cas, aucune intersection n'est vide en général. Par conséquent,  $\Delta_x = \Delta - |[a]^\not\geq \cap [x]^\geq| + |[b]^\not\geq \cap [x]^\geq|$ .

□

### 3.6.1 Suppression d'un objet

Considérons la suppression d'un objet  $z \in A$ . Soit  $a, b \in A$  avec  $z \neq a, b$ . Nous introduisons les notations suivantes :

- $A_{-z} = A \setminus \{z\}$ ;
- $[a]_{-z}^\geq = [a]^\geq \setminus \{z\}$ ;
- $[a]_{-z}^\not\geq = [a]^\not\geq \setminus \{z\}$ ;
- $D_{-z}(a, b)$  désigne le degré de dominance entre  $a$  et  $b$  calculé pour  $a, b \in A \setminus \{z\}$ , soit :

$$D_{-z}(a, b) = \frac{|[a]_{-z}^\not\geq \cup [b]_{-z}^\geq|}{|A| - 1}; \quad (3.9)$$

- $D_{-z}(a)$  désigne le degré de dominance total de  $a$  calculé pour  $a \in A \setminus \{z\}$ , soit :

$$D_{-z}(a) = \frac{1}{|A| - 2} \sum_{b \in A_{-z} \setminus \{a\}} D_{-z}(a, b); \quad (3.10)$$

- $\Delta D_{-z}(a, b) = D_{-z}(a) - D_{-z}(b)$ ;
- La relation de classement  $\succ_{-z}$  induite sur  $A \setminus \{z\}$  par le degré de dominance total  $D_{-z}$  est définie par  $a \succ_{-z} b$  si  $\Delta D_{-z}(a, b) \geq 0$ .

La notation  $\succ_{-z}$  (resp.  $\sim_{-z}$ ) correspond à la partie asymétrique (resp. symétrique) de la relation  $\succ_{-z}$ .

La suppression d'un objet  $z \in A$  conduit à une nouvelle différence  $\Delta D_{-z}(a, b) = D_{-z}(a) - D_{-z}(b)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b) &= |[a]_{-z}^\not\geq \cup [b]_{-z}^\geq| - |[b]_{-z}^\not\geq \cup [a]_{-z}^\geq| \\ &+ \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]_{-z}^\not\geq \cup [x]_{-z}^\geq| - |[b]_{-z}^\not\geq \cup [x]_{-z}^\geq| \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

*Lemme 2.* [125] Lors de la suppression de  $z \neq a, b$  de  $A$ , selon la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , la valeur de  $(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b)$  se calcule comme suit :

1. Si  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) \\ &\quad - 1 - \Delta + |[a]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| - |\{x \neq a, b, z : z \in [x]^{\neq}\}|; \end{aligned} \quad (3.12)$$

2. Si  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) \\ &\quad + 1 - \Delta - |[b]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| + |\{x \neq a, b, z : z \in [x]^{\neq}\}|; \end{aligned} \quad (3.13)$$

3. Si  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  :

$$(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b) = |A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) - \Delta; \quad (3.14)$$

4. Si  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) \\ &\quad - \Delta + |[a]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cap [z]^{\geq}|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

*Démonstration.* Dans tous les cas, nous avons :

$$\begin{aligned} |A|(|A| - 1)\Delta D(a, b) &= |[a]^{\neq} \cup [b]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [a]^{\geq}| \\ &\quad + \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cup [x]^{\geq}| \right) \\ &\quad + \Delta - |[a]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| + |[b]^{\neq} \cap [z]^{\geq}|. \end{aligned}$$

En considérant les quatre cas possibles pour la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , les équations ci-dessus s'ensuivent directement.  $\square$

### 3.6.2 Cas d'inversion de classement

Plusieurs cas doivent être considérés pour analyser le phénomène d' *inversion de classement* (Rank Reversal) (RR). Lorsqu'un élément  $z \in A$  est supprimé, selon la position de  $z$  par rapport à deux objets  $a$  et  $b$  avec  $a \succ b$ , peut-on observer un RR strict ou faible entre  $a$  et  $b$ ?

**RR strict** survient lorsque :

$$[a \succ b \text{ et } b \succ_{-z} a] \iff [\Delta D(a, b) > 0 \text{ et } \Delta D_{-z}(a, b) < 0].$$

**RR faible** survient dans l'un des deux cas suivants :

1.  $[a \succ b \text{ et } a \sim_{-z} b]$  si et seulement si  $[\Delta D(a, b) > 0 \text{ et } \Delta D_{-z}(a, b) = 0]$  ;
2.  $[a \sim b \text{ et } b \succ_{-z} a]$  si et seulement si  $[\Delta D(a, b) = 0 \text{ et } \Delta D_{-z}(a, b) < 0]$ .

Nous obtenons le résultat suivant :

*Proposition 3.* [125] Dans le cas où  $z$  est retiré de  $A$  :

1. Aucun RR ne survient pour  $a, b \in A_{-z}$  si  $a \geq b$  ou  $b \geq a$  ;
2. Si  $a \not\geq b$  et  $b \not\geq a$ , un RR strict peut survenir, quelle que soit la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* 1.

2. Si  $a \geq b$ , cette relation reste vraie indépendamment de la présence ou de l'absence de  $z$  dans l'ensemble des objets. Par conséquent, la propriété 5. de la Proposition 1 s'applique à la fois dans  $A$  et dans  $A_{-z}$ . Ainsi, nous avons  $D(a) \geq D(b)$  et  $D_{-z}(a) \geq D_{-z}(b)$ . De plus, l'égalité survient si et seulement si  $a \geq b$  et  $b \geq a$ . Il n'y a donc aucun RR (ni strict ni faible) dans ce cas.
3. La possibilité de RR strict dans les quatre positions de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$  est prouvée en utilisant le Lemme 2 et en fournissant les exemples illustrés ci-dessous. □

*Exemple 1.* Considérons l'exemple décrit dans le Tableau 3.2. L'ensemble des objets est  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Les objets sont évalués selon deux critères  $c_1$  et  $c_2$ , avec des évaluations sous forme d'intervalles fermés (ou parfois réduites à un nombre unique). Le classement basé sur le degré de dominance total est :

$$c \sim a \succ f \succ b \succ e \succ d.$$

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]^\geq$	$D(x)$
$a$	$[4, 5]$	$[0, 1]$	$\{a\}$	$27/30 = 0.9000$
$b$	$[0, 4]$	$[0, 1]$	$\{a, b\}$	$23/30 = 0.7667$
$c$	3	2	$\{c\}$	$27/30 = 0.9000$
$d$	$[0, 2]$	$[0, 1]$	$\{a, b, c, d\}$	$15/30 = 0.5000$
$e$	$[0, 1]$	1	$\{c, e\}$	$22/30 = 0.7333$
$f$	0	$[0, 3]$	$\{f\}$	$25/30 = 0.8333$

**Tableau 3.2:** Exemple 1. Classement :  $c \sim a \succ f \succ b \succ e \succ d$ .

### 3.6.2.1 Cas $z \in [a]^\not\geq \cap [b]^\geq$

Nous considérons l'Exemple 1 et retirons  $z = a \in [f]^\not\geq \cap [b]^\geq$ , où  $b \not\geq f$  et  $f \not\geq b$ . Le tableau résultant est présenté dans Table 3.3.

La suppression de  $a$  entraîne un RR strict :  $f \succ b$  devient  $b \succ_{-a} f$ .

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]_{-a}^{\geq}$	$D_{-a}(x)$
$b$	[0, 4]	[0, 1]	$\{b\}$	$17/20 = 0.8500$
$c$	3	2	$\{c\}$	$18/20 = 0.9000$
$d$	[0, 2]	[0, 1]	$\{b, c, d\}$	$11/20 = 0.5500$
$e$	[0, 1]	1	$\{c, e\}$	$14/20 = 0.7000$
$f$	0	[0, 3]	$\{f\}$	$16/20 = 0.8000$

**Tableau 3.3:** Cas 3.6.2.1 : Suppression de  $a$ . Classement :  $c \succ_{-a} b \succ_{-a} f \succ_{-a} e \succ_{-a} d$ .

### 3.6.2.2 Cas $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$

*Exemple 2.* Considérons l'exemple présenté dans le Tableau 3.4. Les objets  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  sont évalués à l'aide d'intervalles fermés de valeurs selon deux critères  $c_1$  et  $c_2$ .

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]^{\geq}$	$D(x)$
$a$	1.9	6.8	$\{a, i\}$	$64/72 = 0.8889$
$b$	[4.8, 7.8]	[3.8, 5.8]	$\{b, g, h, i\}$	$63/72 = 0.8750$
$c$	[1, 2]	[0, 2.2]	$\{b, c, g, h, i\}$	$55/72 = 0.7639$
$d$	[1.3, 3.2]	[0, 0.8]	$\{b, d, g, h, i\}$	$55/72 = 0.7639$
$e$	[0.5, 3.6]	[1, 1.9]	$\{b, e, g, h, i\}$	$55/72 = 0.7639$
$f$	[0.4, 3.7]	[0.9, 2.1]	$\{b, f, g, h, i\}$	$55/72 = 0.7639$
$g$	[8.7, 9.7]	[5.1, 6.1]	$\{g, h, i\}$	$67/72 = 0.9306$
$h$	[8.9, 9.8]	[5.3, 6.3]	$\{h, i\}$	$70/72 = 0.9722$
$i$	9.9	8	$\{i\}$	$72/72 = 1$

**Tableau 3.4:** Exemple 2 : Évaluations des objets.

Le classement basé sur le degré de dominance total est donné par :

$$i \succ h \succ g \succ a \succ b \succ c \sim d \sim e \sim f.$$

Considérons maintenant la suppression de  $i \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$ . Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.5.

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]_{-i}^{\geq}$	$D_{-i}(x)$
$a$	1.9	6.8	$\{a\}$	$49/56 = 0.8750$
$b$	[4.8, 7.8]	[3.8, 5.8]	$\{b, g, h\}$	$50/56 = 0.8929$
$c$	[1, 2]	[0, 2.2]	$\{b, c, g, h\}$	$43/56 = 0.7679$
$d$	[1.3, 3.2]	[0, 0.8]	$\{b, d, g, h\}$	$43/56 = 0.7679$
$e$	[0.5, 3.6]	[1, 1.9]	$\{b, e, g, h\}$	$43/56 = 0.7679$
$f$	[0.4, 3.7]	[0.9, 2.1]	$\{b, f, g, h\}$	$43/56 = 0.7679$
$g$	[8.7, 9.7]	[5.1, 6.1]	$\{g, h\}$	$53/56 = 0.9464$
$h$	[8.9, 9.8]	[5.3, 6.3]	$\{h\}$	$55/56 = 0.9821$

**Tableau 3.5:** Cas 3.6.2.2 : Suppression de  $i$  de l'Exemple 2. Le classement résultant est :  $h \succ_{-i} g \succ_{-i} b \succ_{-i} a \succ_{-i} c \sim_{-i} d \sim_{-i} e \sim_{-i} f$ .

Dans le classement résultant, la préférence entre  $a$  et  $b$  est inversée : nous avons  $b \succ_{-i} a$

alors que nous avons  $a \succ b$ , ce qui constitue un cas de RR strict (SRR).

*Remarque.* Des indications sur la manière dont l'Exemple 2 a été construit sont fournies en Annexe A.1, avec des considérations sur le rôle de  $\Delta$ .

### 3.6.3 Ajout d'un objet

Lorsque l'on ajoute un objet  $z$  à l'ensemble  $A$ , l'ensemble  $A \cup \{z\}$  joue le rôle de  $A$  dans l'analyse de la sous-section 3.6.1, tandis que  $A$  correspond à  $A \setminus \{z\}$ . La situation est parfaitement symétrique. Il est donc direct de constater que l'inversion de classement (RR) peut se produire pour toutes les positions possibles de l'objet ajouté  $z$ . Pour des raisons de complétude, nous énonçons sans démonstration la proposition équivalente à la Proposition 3.

*Proposition 4.* [125] Lorsqu'un objet  $z$  est ajouté à l'ensemble  $A$ , les cas suivants peuvent se produire :

1. Aucun RR n'a lieu entre deux objets  $a, b \in A \cup \{z\}$  si  $a \geq b$  ou  $b \geq a$ .
2. Si  $a \not\geq b$  et  $b \not\geq a$ , un RR strict (SRR) peut se produire pour toutes les positions de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ .

Cette proposition découle directement de la symétrie de la situation, en considérant  $A \cup \{z\}$  comme  $A$  et  $A$  comme  $A \setminus \{z\}$ . Pour analyser l'impact de l'ajout de  $z$  sur le classement, nous utilisons la notation suivante :

- $A_{+z} = A \cup \{z\}$ ;
- Pour  $a \in A_{+z}$ ,  $[a]_{+z}^{\geq} = \{x \in A_{+z} : x \geq a\}$ ;
- Pour  $a \in A_{+z}$ ,  $[a]_{+z}^{\not\geq} = \{x \in A_{+z} : x \not\geq a\}$ ;
- $D_{+z}(a, b)$  représente le degré de dominance entre  $a$  et  $b$  dans  $A_{+z}$ , défini comme :

$$D_{+z}(a, b) = \frac{|[a]_{+z}^{\not\geq} \cup [b]_{+z}^{\geq}|}{|A| + 1};$$

- $D_{+z}(a)$  représente le degré de dominance total de  $a$  dans  $A_{+z}$ , défini comme :

$$D_{+z}(a) = \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A_{+z} \setminus \{a\}} D_{+z}(a, b);$$

- $\Delta D_{+z}(a, b) = D_{+z}(a) - D_{+z}(b)$ ;
- La relation de classement  $\succ_{+z}$  est définie par :  $a \succ_{+z} b$  si  $\Delta D_{+z}(a, b) \geq 0$ , avec  $\succ_{+z}$  et  $\sim_{+z}$  représentant respectivement les parties asymétrique et symétrique de  $\succ_{+z}$ .

Le calcul explicite de  $\Delta D_{+z}(a, b)$  suit des expressions similaires à celles établies pour la suppression d'un objet, mais adaptées à l'ajout de  $z$ . Ainsi, les valeurs de  $(|A|)(|A| +$

1)  $\Delta D_{+z}(a, b)$  sont données pour les différentes positions possibles de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$  :

- $z \in [a]_{+z}^{\not\geq} \cap [b]_{+z}^{\geq}$  ;
- $z \in [a]_{+z}^{\geq} \cap [b]_{+z}^{\not\geq}$  ;
- $z \in [a]_{+z}^{\geq} \cap [b]_{+z}^{\geq}$  ;
- $z \in [a]_{+z}^{\not\geq} \cap [b]_{+z}^{\not\geq}$ .

*Remarque.* L'analyse des cas spécifiques peut être effectuée en inversant les raisonnements de la sous-section 3.6.1.

### 3.6.4 Proposition concernant l'ajout d'un objet

En dérivant les résultats de l'analyse des cas dans la sous-section 3.6.1 (« Suppression d'un objet »), nous obtenons les conclusions suivantes concernant l'ajout d'un objet  $z$ .

Dans le cas où  $z \in [a]_{+z}^{\not\geq} \cap [b]_{+z}^{\not\geq}$  ou  $z \in [a]_{+z}^{\geq} \cap [b]_{+z}^{\geq}$ , et si  $a \succ b$ , aucun inversion de classement strict tel que  $b \succ_{+z} a$  ne peut se produire. Cela conduit à la proposition suivante :

*Proposition 5.* [125] Soit  $z \in [a]_{+z}^{\geq} \cap [b]_{+z}^{\geq}$  ou  $z \in [a]_{+z}^{\not\geq} \cap [b]_{+z}^{\not\geq}$ . Si  $a \succ b$ , alors en ajoutant l'objet  $z$ , il est impossible d'avoir  $b \succ_{+z} a$ .

*Démonstration.* Lorsque  $a \succ b$ , nous savons que  $\Delta D(a, b) \geq \frac{1}{|A|(|A|-1)}$ . Analysons maintenant l'effet de l'ajout de  $z$  sur cette différence.

Considérons l'expression suivante pour  $\Delta D_{+z}(a, b)$  :

$$(|A|)(|A|+1)\Delta D_{+z}(a, b) = |[a]_{+z}^{\not\geq} \cup [b]_{+z}^{\geq}| - |[b]_{+z}^{\not\geq} \cup [a]_{+z}^{\geq}| + |[a]_{+z}^{\not\geq} \cup [z]_{+z}^{\geq}| - |[b]_{+z}^{\not\geq} \cup [z]_{+z}^{\geq}| + \sum_{x \neq a, b, z} \Delta_x,$$

où  $\Delta_x = |[a]_{+z}^{\not\geq} \cup [x]_{+z}^{\geq}| - |[b]_{+z}^{\not\geq} \cup [x]_{+z}^{\geq}|$  pour tout  $x \neq a, b, z$ .

Les deux premières lignes de cette somme correspondent à des contributions liées aux ensembles  $[a]_{+z}^{\not\geq}$  et  $[b]_{+z}^{\not\geq}$  avant l'ajout de  $z$ . Les termes dépendant de  $z$  sont regroupés dans :

$$\Delta_{abz} = |[a]_{+z}^{\not\geq} \cup [z]_{+z}^{\geq}| - |[b]_{+z}^{\not\geq} \cup [z]_{+z}^{\geq}|.$$

Examinons les différentes positions possibles de  $z$  :

- Si  $z \in [a]_{+z}^{\geq} \cap [b]_{+z}^{\geq}$ , alors  $z \notin [a]_{+z}^{\not\geq}$  et  $z \notin [b]_{+z}^{\not\geq}$ , ce qui implique que  $\Delta_{abz} = \Delta = |[a]_{+z}^{\not\geq}| - |[b]_{+z}^{\not\geq}|$ . Par hypothèse,  $\Delta \geq 0$ , donc  $\Delta_{abz} \geq 0$ .
- Si  $z \in [a]_{+z}^{\not\geq} \cap [b]_{+z}^{\not\geq}$ , les termes  $\Delta_{abz}$  restent également non négatifs car les contributions des ensembles  $[z]_{+z}^{\geq}$  ne changent pas l'ordre entre  $a$  et  $b$ .

Dans ces deux cas,  $\Delta_{abz} \geq 0$ , et la somme totale  $\Delta D_{+z}(a, b)$  reste positive ou nulle. Par conséquent, nous avons  $a \succ_{+z} b$ , ce qui exclut tout inversion strict  $b \succ_{+z} a$ .  $\square$

*Remarque.* Les résultats numériques obtenus dans des simulations avec différentes tailles d'ensembles et dimensions (voir tableaux illustratifs) confirment qu'aucun cas d'inversion strict n'est observé dans les configurations étudiées où  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$  ou  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\neq$ .

### 3.6.5 Résumé et proposition sur l'ajout d'un objet

En dérivant les résultats de l'analyse des cas liés à la suppression d'un objet (section 3.6.1), nous pouvons étendre ces conclusions au cas de l'ajout d'un objet  $z$ .

**Proposition pour le classement basé sur les degrés de dominance :**

*Proposition 6.* Lorsqu'on ajoute un objet  $z$  à l'ensemble  $A$  [125] :

1. Aucune inversion de classement (*Rank Reversal, RR*) ne se produit entre  $a$  et  $b$  si  $a \geq b$  ou  $b \geq a$ .
2. Si  $a \neq b$  et  $b \neq a$ , une inversion strict de classement peut se produire quelle que soit la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ .

**Démonstration :** La démonstration repose sur les symétries entre les cas d'ajout et de suppression d'un objet : - Lorsqu'un objet  $z$  est ajouté, l'ensemble  $A \cup \{z\}$  joue le rôle de  $A$ , et l'ensemble initial  $A$  correspond à  $A \setminus \{z\}$ . - Les conclusions obtenues pour la suppression dans la proposition 3 s'appliquent donc directement avec une simple inversion des rôles.

Ainsi, la preuve suit immédiatement des résultats obtenus pour les cas de suppression.

Considérations sur les cas spécifiques :

1. Cas  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$  :

$$\Delta D_{+z}(a, b) = \frac{|A| - 1}{|A| + 1} \Delta D(a, b) + \frac{|[a]^\neq| - |[b]^\neq|}{(|A|)(|A| + 1)}.$$

- Si  $a \succ b$ , une inversion ne peut se produire que si  $|[a]^\neq| < |[b]^\neq|$ .
- Si  $a \sim b$ , une inversion peut se produire si  $|[a]^\neq| \neq |[b]^\neq|$ .

2. Cas  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\neq$  :

$$\Delta D_{+z}(a, b) = \frac{|A| - 1}{|A| + 1} \Delta D(a, b) - \frac{|[a]^\geq \cap [b]^\neq \cap [z]^\neq| - |[a]^\neq \cap [b]^\geq \cap [z]^\neq|}{(|A|)(|A| + 1)}.$$

- Si  $a \succ b$ , une inversion peut se produire uniquement si :

$$|[a]^\neq \cap [b]^\geq \cap [z]^\neq| < |[a]^\geq \cap [b]^\neq \cap [z]^\neq|.$$

- Si  $a \sim b$ , une inversion peut se produire si ces deux quantités ne sont pas égales.

3. Cas  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\neq$  :

$$\begin{aligned} \Delta D_{+z}(a, b) &= \frac{|A| - 1}{|A| + 1} \Delta D(a, b) \\ &\quad - \frac{1 + |\{x \neq a, b, z : z \in [x]^\neq\}|}{(|A|)(|A| + 1)} \\ &\quad + \frac{|[a]^\geq \cap [b]^\neq \cap [z]^\neq| - |[a]^\neq \cap [b]^\geq \cap [z]^\neq|}{(|A|)(|A| + 1)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

- Si  $a \succ b$ , une inversion peut se produire si :

$$|[a]^\neq \cap [b]^\geq \cap [z]^\neq| < |[a]^\geq \cap [b]^\neq \cap [z]^\neq| + 1 + |\{x \neq a, b, z : z \in [x]^\neq\}|.$$

4. Cas  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\geq$  : Ce cas est symétrique au précédent avec les rôles de  $a$  et  $b$  échangés.

**Observations générales** : - L'ajout d'un objet  $z$  peut modifier significativement les ensembles  $[a]^\neq$  et  $[b]^\neq$ , ce qui peut entraîner des changements dans le calcul des degrés de dominance  $D(a)$  et  $D(b)$ . - Les inversions de classement sont plus probables lorsque  $a$  et  $b$  ne se dominent pas mutuellement, et leur proximité dans les critères est influencée par l'ajout de  $z$ .

Ces résultats confirment l'importance d'une analyse minutieuse pour comprendre les effets de l'ajout ou de la suppression d'objets dans un système basé sur des degrés de dominance.

## 3.7 Degré de domination

Comme le montre la définition de [84] (voir la Définition 3.3), la formule permettant de calculer le degré de dominance entre deux objets  $a, b \in A$  n'est pas symétrique. Le degré de dominance de  $a$  sur  $b$  est mesuré en comptant le nombre d'objets qui ne dominent pas  $a$  ou qui dominent  $b$ .

Dans cette section, nous introduisons un nouveau concept que nous appelons le *degré de domination* [127] [125]. Par dualité, ce concept est complémentaire au degré de dominance. Le degré de domination de  $a$  sur  $b$  est obtenu en comptant le nombre d'objets qui dominent  $a$  ou ne dominent pas  $b$ . Contrairement au degré de dominance, une valeur élevée de ce degré reflète une position défavorable de  $a$  par rapport à  $b$ .

L'objectif de cette section est d'analyser les cas d'inversion de classement (*Rank Reversal*, *RR*) pour le classement global basé sur le degré de domination (défini ci-dessous) [125], comme cela a été fait pour le degré de dominance dans la section précédente. Nous montrerons qu'il existe une configuration spécifique de l'objet retiré dans laquelle aucune inversion de classement ne peut se produire, en contraste avec le degré de dominance.

### 3.7.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.5.** [125] Le *degré de domination*  $D'(a, b)$  entre deux objets  $a, b \in A$  est défini par

$$D'(a, b) = \frac{|[a]^\geq \cup [b]^\not\geq|}{|A|} = D(b, a). \quad (3.17)$$

Le *degré de domination total*  $D'(a)$  de  $a \in A$  est défini par

$$D'(a) = \frac{1}{|A| - 1} \sum_{x \in A \setminus \{a\}} D'(a, x). \quad (3.18)$$

Le *degré de domination total* peut être utilisé pour classer les objets de  $A$ .

**Définition 3.6.** Le classement défini par le degré de domination total est un préordre complet  $\succ'$  sur  $A$ , déterminé en utilisant le score  $D'$  dans l'ordre inverse, c'est-à-dire

$$a \succ' b \text{ si } D'(a) \leq D'(b).$$

Ce classement est appelé *classement par degré de domination* par la suite.

Nous utilisons les notations  $\succ'$ ,  $\sim'$ ,  $\preccurlyeq'$  et  $\prec'$  de manière évidente.

La proposition suivante énumère les propriétés du degré de domination analogues à celles du degré de dominance, énoncées dans la Proposition 1.

*Proposition 7.* [125] Pour tout  $a, b, d \in A$  :

1.  $\frac{1}{|A|} \leq D'(a, b) \leq 1$  ;
2. si  $b \geq d$ , alors  $D'(b, a) \leq D'(d, a)$  ;
3. si  $b \geq d$ , alors  $D'(a, b) \geq D'(a, d)$  ;
4.  $a \geq b$  si et seulement si  $D'(a, b) = \frac{1}{|A|}(|[a]^\geq| + |[b]^\not\geq|)$  ;
5. si  $a \geq b$ , alors  $D'(a) \leq D'(b)$  ;
6.  $\frac{1}{|A|} \leq D'(a) \leq 1$  ;
7. Soit  $\Delta D'(a, b) = D'(a) - D'(b)$ . Nous avons
  - a. si  $a \geq b$  et  $b \geq a$ , alors  $\Delta D'(a, b) = 0$  ;
  - b. si  $a \geq b$  et  $b \not\geq a$ , alors  $\Delta D'(a, b) \leq -\frac{1}{|A|-1} \frac{1}{|A|}$  ;
  - c. si  $a \not\geq b$ ,  $b \not\geq a$ ,  $|[a]^\geq| = |[b]^\geq|$  et, pour tout  $x \in A \setminus \{a, b\}$ ,  $|[x]^\not\geq \cap [a]^\not\geq| \leq |[x]^\not\geq \cap [b]^\not\geq|$ , alors  $\Delta D'(a, b) \leq 0$ .

*Démonstration.* La preuve des points 1. à 3. peut être déduite de la Proposition 1, en utilisant  $D'(a, b) = D(b, a)$ .

Preuve du point 4. On a  $a \geq b$  si et seulement si  $[a]^\geq \cap [b]^\not\geq = \emptyset$ , ce qui équivaut à  $|[a]^\geq \cup [b]^\not\geq| = |[a]^\geq| + |[b]^\not\geq|$ , d'où le résultat.

Les preuves des autres points sont similaires à celles des items correspondants dans la Proposition 1.  $\square$

Le lemme suivant est l'analogie du Lemme 2 pour le degré dominé  $D'$ . Nous utilisons une notation relative à  $D'$  similaire à celle introduite dans la Section 3.6.1 pour  $D$ .

Lorsque nous retirons un objet  $z \in A$ , nous obtenons une nouvelle différence  $\Delta D'_{-z}(a, b) = D'_{-z}(a) - D'_{-z}(b)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b) &= |[a]_{-z}^{\geq} \cup [b]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\geq} \cup [a]_{-z}^{\neq}| \\ &+ \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\neq}| \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Lemme 3.* [125] Lorsque l'on retire  $z \neq a, b$  de  $A$ , la valeur de  $(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b)$  peut être calculée comme suit, en fonction de la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$  :

1. Si  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) \\ &+ 1 + \Delta + |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| - |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| + |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\geq}\}|; \end{aligned} \quad (3.20)$$

2. Si  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) \\ &- 1 + \Delta + |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| - |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| \\ &- |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\geq}\}|; \end{aligned} \quad (3.21)$$

3. Si  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  :

$$(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b) = |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) + \Delta + |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| - |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}|; \quad (3.22)$$

4. Si  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$  :

$$(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D'_{-z}(a, b) = |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) + \Delta + |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| - |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}|. \quad (3.23)$$

*Démonstration.* Dans tous les cas, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) &= |[a]^{\geq} \cup [b]^{\not\geq}| - |[b]^{\geq} \cup [a]^{\not\geq}| \\
 &+ \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]^{\geq} \cup [x]^{\not\geq}| - |[b]^{\geq} \cup [x]^{\not\geq}| \right) \\
 &+ |[a]^{\geq}| + |[z]^{\not\geq}| - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}| \\
 &- |[b]^{\geq}| - |[z]^{\not\geq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}|.
 \end{aligned}$$

En considérant les quatre positions possibles de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , nous obtenons :

1.  $z \in [a]^{\not\geq} \cap [b]^{\geq}$  :

$$\begin{aligned}
 |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) &= |[a]_{-z}^{\geq} \cup [b]_{-z}^{\not\geq}| - |[b]_{-z}^{\geq} \cup [a]_{-z}^{\not\geq}| - 1 \\
 &+ \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\not\geq}| - |[b]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\not\geq}| \right) \\
 &- |\{x \neq a, b, z : z \in [x]^{\geq}\}| - \Delta - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}|.
 \end{aligned}$$

2.  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\not\geq}$  :

$$\begin{aligned}
 |A|(|A| - 1)\Delta D'(a, b) &= |[a]_{-z}^{\geq} \cup [b]_{-z}^{\not\geq}| + 1 - |[a]_{-z}^{\geq} \cup [b]_{-z}^{\not\geq}| \\
 &+ \sum_{x \neq a, b, z} \left( |[a]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\not\geq}| - |[b]_{-z}^{\geq} \cup [x]_{-z}^{\not\geq}| \right) \\
 &- \Delta - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\not\geq}|.
 \end{aligned}$$

□

### 3.7.2 Cas d'inversion de classement

Contrairement à la règle de classement basée sur le degré de dominance, l'inversion de classement (RR) ne peut se produire que dans trois des quatre positions possibles d'un objet retiré. La proposition suivante correspond à la Proposition 3, mais pour la règle de classement basée sur le degré dominé [125].

*Proposition 8.* [125] Lorsque l'on retire  $z$  de  $A$  tout en utilisant la règle de classement basée sur le degré dominé :

1. aucun RR ne se produit pour  $a, b \in A$  si  $a \geq b$  ou  $b \geq a$  ;
2. aucun RR ne se produit pour  $a, b \in A$  lors du retrait d'un objet  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  ;
3. si  $a \not\geq b$  et  $b \not\geq a$ , un RR strict peut se produire dans trois des quatre positions possibles de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire dans tous les cas sauf celui où  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$ .

*Démonstration.* La preuve du point 1. est similaire à celle du premier point de la Proposition 3, en utilisant la Propriété 5. de la Proposition 7.

Pour prouver le point 2., nous utilisons la formule (3.22) et montrons que  $\Delta + |[a]^\geq \cap [z]^\neq| - |[b]^\geq \cap [z]^\neq| = 0$  lorsque  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$ . En effet, en utilisant la complémentarité dans  $A$ , on a  $\Delta = |[a]^\neq| - |[b]^\neq| = |[b]^\geq| - |[a]^\geq|$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \Delta + |[a]^\geq \cap [z]^\neq| - |[b]^\geq \cap [z]^\neq| \\ &= |[b]^\geq| - |[b]^\geq \cap [z]^\neq| - (|[a]^\geq| - |[a]^\geq \cap [z]^\neq|) \\ &= |[b]^\geq \cap [z]^\geq| - |[a]^\geq \cap [z]^\geq|. \end{aligned}$$

Puisque  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$ ,  $[z]^\geq \subseteq [a]^\geq \cap [b]^\geq$ . Par conséquent,  $|[b]^\geq \cap [z]^\geq| = |[z]^\geq| = |[a]^\geq \cap [z]^\geq|$ , ce qui prouve l'énoncé.

La preuve du point 3. découle des exemples ci-dessous. □

*Exemple 3.* Considérons l'exemple décrit dans le Tableau 3.6. L'ensemble des objets est  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Les objets sont évalués par rapport à deux critères  $c_1$  et  $c_2$ . Les évaluations sont des intervalles réels.

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]^\geq$	$D'(x)$
$a$	[8.2, 9.2]	[6.5, 7.5]	$\{a\}$	$31/42 = 0.7381$
$b$	[0, 2]	[9, 10]	$\{b\}$	$29/42 = 0.6905$
$c$	[6.5, 8.5]	[5.4, 7.4]	$\{a, c\}$	$34/42 = 0.8095$
$d$	[0, 1.5]	[5.5, 8.5]	$\{b, d, f\}$	$33/42 = 0.7857$
$e$	[1, 4]	[1.8, 2.8]	$\{a, c, e, f\}$	$38/42 = 0.9048$
$f$	[5.6, 6.6]	[7, 9]	$\{f\}$	$30/42 = 0.7143$
$g$	[5, 8]	[0.4, 1.4]	$\{a, c, g\}$	$35/42 = 0.8333$

**Tableau 3.6:** Exemple 3.

En utilisant le degré dominé total, le classement suivant est obtenu :

$$b \succ' f \succ' a \succ' d \succ' c \succ' g \succ' e$$

### 3.7.2.1 Cas $z \in [a]^\neq \cap [b]^\geq$

En utilisant l'Exemple 3 du Tableau 3.6, on retire  $z = a \in [d]^\neq \cap [g]^\geq$ , ce qui donne le Tableau 3.7.

Un RR strict s'est produit entre les objets  $g$  et  $d$ . Initialement,  $d \succ' g$ ; après le retrait de  $a$ , on a  $g \succ'_{-a} d$ .

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]_{-a}^{\geq}$	$D'_{-a}(x)$
$b$	$[0, 2]$	$[9, 10]$	$\{b\}$	$21/30 = 0.7000$
$c$	$[6.5, 8.5]$	$[5.4, 7.4]$	$\{c\}$	$22/30 = 0.7333$
$d$	$[0, 1.5]$	$[5.5, 8.5]$	$\{b, d, f\}$	$25/30 = 0.8333$
$e$	$[1, 4]$	$[1.8, 2.8]$	$\{c, e, f\}$	$26/30 = 0.8667$
$f$	$[5.6, 6.6]$	$[7, 9]$	$\{f\}$	$22/30 = 0.7333$
$g$	$[5, 8]$	$[0.4, 1.4]$	$\{a, c, g\}$	$23/30 = 0.7667$

**Tableau 3.7:** Cas 3.7.2.1 : Retrait de  $a$  de l'Exemple 3. Le classement obtenu est  $b \succ'_{-a} c \sim'_{-a} f \succ'_{-a} g \succ'_{-a} d \succ'_{-a} e$ .

### 3.7.2.2 Cas $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$

En utilisant le même exemple que pour le cas précédent, on constate à partir des Tableaux 3.6 et 3.7 qu'une inversion strict de classement (RR) s'est également produit entre  $c$  et  $d$ . Nous avons  $d \succ' c$ . Après le retrait de  $z = a \in [c]^{\geq} \cap [d]^{\neq}$ , nous obtenons  $c \succ'_{-a} d$ .

### 3.7.2.3 Cas $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$

En continuant avec l'Exemple 3 du Tableau 3.6, nous retirons maintenant  $z = g \in [c]^{\neq} \cap [d]^{\neq}$ , ce qui donne le Tableau 3.8.

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]_{-g}^{\geq}$	$D'_{-g}(x)$
$a$	$[8.2, 9.2]$	$[6.5, 7.5]$	$\{a\}$	$21/30 = 0.7000$
$b$	$[0, 2]$	$[9, 10]$	$\{b\}$	$20/30 = 0.6667$
$c$	$[6.5, 8.5]$	$[5.4, 7.4]$	$\{a, c\}$	$23/30 = 0.7667$
$d$	$[0, 1.5]$	$[5.5, 8.5]$	$\{b, d, f\}$	$24/30 = 0.8000$
$e$	$[1, 4]$	$[1.8, 2.8]$	$\{a, c, e, f\}$	$27/30 = 0.9000$
$f$	$[5.6, 6.6]$	$[7, 9]$	$\{f\}$	$21/30 = 0.7000$

**Tableau 3.8:** Cas 3.7.2.3 : Retrait de  $g$  de l'Exemple 3. Le classement obtenu est  $b \succ_{-g} a \sim_{-g} f \succ_{-g} c \succ_{-g} d \succ_{-g} e$ .

Un RR strict s'est produit entre  $c$  et  $d$ . Nous avons  $d \succ' c$ . Après le retrait de  $g$ , nous obtenons  $c \succ'_{-g} d$ .

*Remarque (Ajout d'un objet).* Comme pour le degré de dominance (voir Section 3.6.3), il est simple d'adapter la Proposition 8 dans le cas où un objet est ajouté au lieu d'être retiré. Aucun RR (ni strict, ni faible) ne peut se produire entre  $a$  et  $b$  si l'objet ajouté  $z$  appartient à  $[a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$ .

## 3.8 Degré de dominance nette

Le degré de dominance évalue la force de chaque objet, en favorisant ceux qui sont rarement dominés dans  $A$ , tandis que le degré de domination évalue la faiblesse de chaque

objet, en pénalisant ceux qui sont fréquemment dominés. En considérant la différence entre le degré de dominance et le degré de domination, on équilibre les forces et les faiblesses, ce qui permet de définir le *degré de dominance nette* [127]. Dans cette section, nous étudions les cas d'inversion de classement (RR) lors de l'utilisation du classement déterminé par le degré de dominance nette [125].

### 3.8.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.7.** [125] Le *degré de dominance nette*  $D^*(a, b)$  entre deux objets  $a, b \in A$  est défini par :

$$D^*(a, b) = D(a, b) - D'(a, b) = D(a, b) - D(b, a). \quad (3.24)$$

Le *degré de dominance nette global*  $D^*(a)$  pour  $a \in A$  est défini par :

$$D^*(a) = \frac{1}{|A| - 1} \sum_{x \in A \setminus \{a\}} D^*(a, x) = D(a) - D'(a). \quad (3.25)$$

**Définition 3.8.** Le classement obtenu par le degré de dominance nette global est le préordre complet  $\succ^*$  sur  $A$ , déterminé en utilisant le score  $D^*$ , c'est-à-dire :

$$a \succ^* b \text{ si } D^*(a) \geq D^*(b).$$

Ce classement est appelé *classement par degré de dominance nette* par la suite.

Nous utilisons les notations  $\succ^*$ ,  $\sim^*$ ,  $\preceq^*$  et  $\prec^*$  de manière évidente.

La proposition suivante énumère les propriétés du degré de dominance nette, dérivées des propriétés correspondantes des degrés de dominance et de domination.

*Proposition 9.* [125] Pour tout  $a, b, d \in A$  :

1.  $\frac{1}{|A|} - 1 \leq D^*(a, b) \leq 1 - \frac{1}{|A|}$  ;
2. si  $b \geq d$ , alors  $D^*(a, b) \leq D^*(a, d)$  ;
3. si  $b \geq d$ , alors  $D^*(b, a) \geq D^*(d, a)$  ;
4.  $a \geq b$  si et seulement si  $D^*(a, b) = \frac{1}{|A|}(|[a]^\neq| - |[b]^\neq|) = \frac{1}{|A|}(|[b]^\geq| - |[a]^\geq|) = \frac{1}{|A|}|[a]^\neq \cap [b]^\geq|$  ;
5. si  $a \geq b$ , alors  $D^*(a) \geq D^*(b)$  ;
6.  $\frac{1}{|A|} - 1 \leq D^*(a) \leq 1 - \frac{1}{|A|}$  ;
7. Soit  $\Delta D^*(a, b) = D^*(a) - D^*(b) = \Delta D(a, b) - \Delta D'(a, b)$ . Nous avons :
  - a. si  $a \geq b$  et  $b \geq a$ , alors  $\Delta D^*(a, b) = 0$  ;
  - b. si  $a \geq b$  et  $b \not\geq a$ , alors  $\Delta D^*(a, b) \geq \frac{2}{|A|(|A|-1)}$  ;

c. si  $a \not\geq b$ ,  $b \not\geq a$ ,  $|[a]^\geq| = |[b]^\geq|$ , et si, pour tout  $x \in A \setminus \{a, b\}$ , nous avons à la fois :

$$|[x]^\geq \cap [a]^\geq| \geq |[x]^\geq \cap [b]^\geq| \text{ et}$$

$$|[x]^\not\geq \cap [a]^\not\geq| \leq |[x]^\not\geq \cap [b]^\not\geq|,$$

alors  $\Delta D^*(a, b) \geq 0$ .

*Démonstration.* La preuve des points 1. à 3. et des points 5. à 7. découle directement des items correspondants dans les Propositions 1 et 7.

Preuve de l'item 4.. En utilisant l'item 4 des Propositions 1 et 7, nous obtenons  $D^*(a, b) = D(a, b) - D'(a, b) = \frac{1}{|A|}(|A| - |[a]^\geq| - |[b]^\geq|)$ , ce qui correspond aux trois expressions de  $D^*(a, b)$  données dans l'item 4.. Pour obtenir la dernière expression, nous utilisons le fait que  $a \geq b$  implique  $[a]^\not\geq \supseteq [b]^\not\geq$ .  $\square$

*Proposition 10.* [125] Pour tout  $a, b \in A$ , nous avons

$$\Delta D^*(a, b) = \frac{1}{|A| - 1} (|[a]^\not\geq| - |[b]^\not\geq|) = \frac{1}{|A| - 1} \Delta. \quad (3.26)$$

*Démonstration.* Comme observé pour  $a, b \in A$  dans l'équation (3.7), nous avons, pour tout  $x, y \in A$ ,

$$|A|D^*(x, y) = |[x]^\not\geq \cup [y]^\geq| - |[y]^\not\geq \cup [x]^\geq| = |[x]^\not\geq| - |[y]^\not\geq|. \quad (3.27)$$

En utilisant cela, nous pouvons écrire  $D^*(x)$ , pour  $x \in A$ , comme suit :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)|A|D^*(x) &= |A| \sum_{y \neq x} D^*(a, y) = \sum_{y \neq a} (|[a]^\not\geq| - |[y]^\not\geq|) \\ &= |A| |[a]^\not\geq| - [A]^\not\geq, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où  $[A]^\not\geq = \sum_{y \in A} |[y]^\not\geq|$ . Ainsi, pour tout  $a, b \in A$ , nous avons

$$(|A| - 1)|A|\Delta D^*(a, b) = (|A| - 1)|A|(D^*(a) - D^*(b)) = (|A| - 1)|A|(|[a]^\not\geq| - |[b]^\not\geq|).$$

$\square$

Comme conséquence importante de (3.28), nous voyons que l'ordre de dominance nette  $\succ^*$  est l'ordre induit par le nombre d'objets qui ne dominent pas chaque objet. Nous énonçons ce résultat dans le corollaire suivant.

*Corollaire 1.* [125] Pour tout  $a, b \in A$ , nous avons

$$a \succ^* b \quad \text{si et seulement si} \quad |[a]^\not\geq| \geq |[b]^\not\geq|.$$

### 3.8.2 Cas d'inversion de classement

Lorsqu'un objet  $z \neq a, b$  est retiré, nous pouvons appliquer la formule (3.26) au sous-ensemble  $A \setminus \{z\}$ , ce qui donne  $\Delta D_{-z}^*(a, b) = \frac{1}{|A|-1}(|[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}|) := \frac{1}{|A|-1}\Delta_{-z}$ . En comparant  $\Delta$  et  $\Delta_{-z}$  dans les quatre positions possibles de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , nous pouvons analyser les occurrences d'inversion de classement (RR).

*Proposition 11.* [125] Dans le cas où l'on retire  $z$  de  $A$  en utilisant la règle de classement par le degré de dominance net,

1. Aucune inversion de classement (RR) n'a lieu pour  $a, b \in A$  si  $a \geq b$  ou  $b \geq a$ ;
2. Aucun RR n'a lieu pour  $a, b \in A$  lorsque l'on retire un objet  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  ou  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$ ; le RR peut seulement se produire lorsque  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$  ou  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$ ;
3. Aucun RR strict ne se produit.

*Démonstration.* La preuve de l'item 1. découle directement de la propriété 5. dans la proposition 9.

Nous savons que  $\Delta D^*(a, b) = \frac{1}{|A|-1}(|[a]^{\neq}| - |[b]^{\neq}|) = \Delta$ . Lorsque l'objet  $z \neq a, b$  est retiré, nous savons que

$$\Delta D_{-z}^*(a, b) = \frac{1}{|A|-1}(|[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}|) := \frac{1}{|A|-1}\Delta_{-z}.$$

Nous analysons donc les quatre cas possibles pour la position de  $z$ .

Cas  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\geq}$

Nous avons  $\Delta_{-z} = |[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}| = |[a]^{\neq}| - 1 - |[b]^{\neq}| = \Delta - 1$ . Une inversion de classement (RR) ne se produit que si  $\Delta = 0$  ou  $\Delta = 1$ . Dans le premier cas, nous avons  $a \sim^* b$  et nous obtenons  $a \prec_{-z}^* b$ . Dans le second cas, nous avons  $a \succ_{-z}^* b$  et nous obtenons  $a \sim_{-z}^* b$ . Aucun RR strict ne peut se produire.

Cas  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$

Nous avons  $\Delta_{-z} = |[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}| = |[a]^{\neq}| - |[b]^{\neq}| + 1 = \Delta + 1$ . Une inversion de classement (RR) ne se produit que si  $\Delta = 0$  ou  $\Delta = -1$ . Dans le premier cas, nous avons  $a \sim^* b$  et nous obtenons  $a \succ_{-z}^* b$ . Dans le second cas, nous avons  $a \prec_{-z}^* b$  et nous obtenons  $a \sim_{-z}^* b$ . Aucun RR strict ne peut se produire.

Cas  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$

Nous avons  $\Delta_{-z} = |[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}| = |[a]^{\neq}| - 1 - |[b]^{\neq}| + 1 = \Delta$ . Aucun RR, ni strict ni faible, ne peut se produire.

Cas  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$

Nous avons  $\Delta_{-z} = |[a]_{-z}^{\neq}| - |[b]_{-z}^{\neq}| = |[a]^{\neq}| - |[b]^{\neq}| = \Delta$ . Aucun RR, ni strict ni faible, ne peut se produire.

Nous donnons ci-dessous des exemples montrant que des RR faibles peuvent effectivement se produire dans les deux premiers cas ci-dessus.  $\square$

*Lemme 4.* [125] Lorsqu'on retire  $z \neq a, b$  de  $A$ , en fonction de la position de  $z$  par rapport à  $a$  et  $b$ , la valeur de  $(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b)$  peut être calculée comme suit :

1. Si  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\geq$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) + 1 - |A| \\ &\quad - 2\Delta + |[a]^\neq \cap [z]^\geq| - |[a]^\geq \cap [z]^\neq| + |[b]^\geq \cap [z]^\neq|; \end{aligned} \quad (3.29)$$

2. Si  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\neq$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) + |A| - 1 \\ &\quad - 2\Delta - |[a]^\geq \cap [z]^\neq| - |[b]^\neq \cap [z]^\geq| + |[b]^\geq \cap [z]^\neq|; \end{aligned} \quad (3.30)$$

3. Si  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) \\ &\quad - 2\Delta - |[a]^\geq \cap [z]^\neq| + |[b]^\geq \cap [z]^\neq|; \end{aligned} \quad (3.31)$$

4. Si  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\neq$  :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) \\ &\quad - 2\Delta + |[a]^\neq \cap [z]^\geq| - |[a]^\geq \cap [z]^\neq| - |[b]^\neq \cap [z]^\geq| + |[b]^\geq \cap [z]^\neq|; \end{aligned} \quad (3.32)$$

*Démonstration.* Dans tous les cas, nous avons :

$$(|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) = (|A| - 1)(|A| - 2)[\Delta D_{-z}(a, b) - \Delta D'_{-z}(a, b)].$$

Ainsi, en utilisant les cas correspondants dans les lemmes 2 et 3, nous obtenons les formules dans les quatre cas du lemme 4.  $\square$

1.  $z \in [a]^\neq \cap [b]^\geq$  : Dans ce cas, après avoir soustrait l'équation (3.20) de (3.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a; b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a; b) \\ &\quad - 1 - \Delta + |[a]^\neq \cap [z]^\geq| - |\{x \neq a, b, z : z \in x^\neq\}| \\ &\quad - 1 - \Delta - |[a]^\geq \cap [z]^\neq| + |[b]^\geq \cap [z]^\neq| - |\{x \neq a, b, z : z \in x^\geq\}|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Puisque  $|\{x \neq a, b, z : z \in x^{\neq}\}| + |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\geq}\}| = |A| - 3$ , l'élément 3.29 du lemme 4 résulte de l'utilisation de 3.33.

2.  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\neq}$  : Dans ce cas, après avoir soustrait l'équation (3.21) de (3.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) \\ &+ 1 - \Delta - |[b]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| + |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\neq}\}| \\ &+ 1 - \Delta - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| + |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\geq}\}|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Puisque  $|\{x \neq a, b, z : z \in x^{\neq}\}| + |\{x \neq a, b, z : z \in x^{\geq}\}| = |A| - 3$ , l'élément 3.30 du lemme 4 résulte de l'utilisation de 3.33.

3.  $z \in [a]^{\geq} \cap [b]^{\geq}$  : Dans ce cas, après avoir soustrait l'équation (3.22) de (3.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) \\ &- \Delta - \Delta - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}|. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ainsi, les résultats de l'élément 3.31 dans le lemme 4 sont prouvés.

4.  $z \in [a]^{\neq} \cap [b]^{\neq}$  : Dans ce cas, après avoir soustrait l'équation (3.23) de (3.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (|A| - 1)(|A| - 2)\Delta D_{-z}^*(a, b) &= |A|(|A| - 1)\Delta D^*(a, b) \\ &- \Delta + |[a]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| - |[b]^{\neq} \cap [z]^{\geq}| \\ &- \Delta - |[a]^{\geq} \cap [z]^{\neq}| + |[b]^{\geq} \cap [z]^{\neq}|. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ainsi, les résultats de l'élément 3.32 sont prouvés par le lemme 4.

### Exemples d'inversion de rang

Nous reprenons l'exemple 1 dans le tableau 3.2 et calculons le classement basé sur le degré de dominance net. Le résultat est présenté dans le tableau 3.9.

Le classement selon le degré de dominance net est :

$$a \sim^* c \sim^* f \succ^* b \sim^* e \succ^* d$$

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]^\geq$	$D^*(x)$
$a$	$[4, 5]$	$[0, 1]$	$\{a\}$	$5/30 = 0.1667$
$b$	$[0, 4]$	$[0, 1]$	$\{a, b\}$	$-1/30 = -0.0333$
$c$	$3$	$2$	$\{c\}$	$5/30 = 0.1667$
$d$	$[0, 2]$	$[0, 1]$	$\{a, b, c, d\}$	$-13/30 = -0.4333$
$e$	$[0, 1]$	$1$	$\{c, e\}$	$-1/30 = -0.0333$
$f$	$0$	$[0, 3]$	$\{f\}$	$5/30 = 0.1667$

**Tableau 3.9:** Exemple 1 avec le degré de dominance net

Retirons maintenant  $z = c$  et calculons le degré de dominance net  $D_{-c}^*$ . Le résultat est affiché dans le tableau 3.10.

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]_{-c}^\geq$	$D_{-c}^*(x)$
$a$	$[4, 5]$	$[0, 1]$	$\{a\}$	$3/20 = 0.1500$
$b$	$[0, 4]$	$[0, 1]$	$\{a, b\}$	$-2/20 = -0.1000$
$d$	$[0, 2]$	$[0, 1]$	$\{a, b, d\}$	$-7/20 = -0.3500$
$e$	$[0, 1]$	$1$	$\{e\}$	$3/20 = 0.1500$
$f$	$0$	$[0, 3]$	$\{f\}$	$3/20 = 0.1500$

**Tableau 3.10:** Retrait de  $c$  de l'exemple 1. Le classement résultant est :  $a \sim_{-c}^* e \sim_{-c}^* f \succ_{-c}^* b \succ_{-c}^* d$

Nous observons simultanément (une inversion de rang faible) dans deux cas différents :

- $c \in [f]^\not\geq \cap [e]^\geq$ . Nous avons  $f \succ^* e$ , mais après retrait de  $c$ , nous avons  $f \sim_{-c}^* e$ ;
- $c \in [e]^\geq \cap [a]^\not\geq$  et  $c \in [e]^\geq \cap [b]^\not\geq$ . Nous avons  $a \succ^* e$ , mais après retrait de  $c$ , nous avons  $a \sim_{-c}^* e$ . De plus, nous avons  $b \sim^* e$ , mais après retrait de  $c$ , nous avons  $e \succ_{-c}^* b$ .

*Remarque (Ajout d'un objet).* Comme pour les degrés de dominance et de dominés, l'analyse d'inversion de rang lorsque l'on ajoute un objet se déduit immédiatement de ce qui précède. Avec le degré de dominance net, une inversion de rang strict ne se produit jamais lors de l'ajout d'un objet. Seul une inversion de rang faible peut se produire dans les deux positions de l'objet ajouté identifiées ci-dessus pour le cas du retrait d'un objet.

### 3.9 Étude expérimentale

À ce stade, nous avons terminé l'analyse des cas dans lesquels une inversion de rang (RR) peut se produire pour les classements basés sur les degrés de dominance, de dominé et de dominance nette [125] [126, 127]. Cette analyse ne nous indique pas la fréquence à laquelle le RR peut se produire lors de l'utilisation de ces règles de classement. Dans cette section, nous cherchons à explorer cette question par le biais de simulations. Nous commencerons par décrire la manière dont les simulations sont conçues, puis nous présenterons les résultats relatifs au RR avant de conclure en commentant ces résultats.

### 3.9.1 Paramétrage des simulations

Pour nos tests, nous considérons toutes les combinaisons d'objets  $n \in \{3, 5, 7, 10, 20\}$  et de critères  $m \in \{2, 3, 5, 10\}$ . Nous générons des évaluations aléatoires des objets selon deux schémas de simulation, décrits ci-dessous. Pour chaque combinaison de  $n$  objets évalués en fonction de  $m$  critères, nous créons 100 instances par schéma. Pour chaque instance, nous calculons les classements basés sur les degrés de dominance, de dominé et de dominance nette. Ensuite, nous retirons chaque objet à tour de rôle et recalculons les trois classements. Nous comptabilisons alors le nombre de RR et de RR stricts observés, en distinguant la position de l'objet retiré ayant généré chaque RR.

#### 3.9.1.1 Schéma de simulation 1

Pour générer les évaluations par intervalles des objets dans le premier jeu de données ("DataSet1"), nous générons, pour chaque critère, un nombre  $x \in [0, 10]$  et choisissons  $y$  une valeur dans l'ensemble  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . L'évaluation par intervalle d'un objet  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$  selon le critère  $j \in \{1, \dots, m\}$  est alors calculée comme suit :  $a_{i,j} = [\max\{0, \min\{x, x + y\}\}; \min\{10, \max\{x, x + y\}\}]$ .

#### 3.9.1.2 Schéma de simulation 2

Les intervalles d'évaluation des objets sur chaque critère dans le second jeu de données ("DataSet2") sont générés en tirant aléatoirement deux nombres  $x$  et  $x'$  dans l'intervalle  $[0, 10]$ . L'évaluation par intervalle de l'objet  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$  avec  $n \geq 2$ , sur le critère  $j \in \{1, \dots, m\}$  avec  $m \geq 2$ , est alors définie par :

$$a_{ij} = [\min\{x, x'\}, \max\{x, x'\}].$$

Les simulations sont réalisées à l'aide de MATLAB R2018a sur un processeur Intel Core i7 cadencé à 2.40 GHz avec 6.00 Go de RAM.

### 3.9.2 Résultats des simulations

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'étude par simulation sur le phénomène d'inversion de rang (RR) pour les classements basés sur les degrés de dominance et de dominance nette [125]. Les résultats sont résumés dans les tableaux 3.11 et 3.12. Pour chaque combinaison de paramètres  $n$  et  $m$ , nous répétons l'expérience 100 fois. Les tableaux 3.11 et 3.12 fournissent le nombre de fois qu'une inversion de rang est observé en utilisant les notions de degré de dominance (RR), de degré dominé (RR') et de degré de dominance nette (RRNet), incluant les cas d'indifférence. Les autres cas, appelés (SRR) pour le degré de dominance, (SRR') pour le degré dominé et (SRRNet) pour le

degré de dominance nette, représentent le nombre d'inversions de rang stricts, où les cas d'indifférence ne sont pas pris en compte.

Les résultats des simulations sont présentés dans le tableau 3.11 pour le premier schéma de simulation et dans le tableau 3.12 pour le second. Les quatre colonnes de droite correspondent aux nombres de critères  $m = 2, 3, 5, 10$ , respectivement. Les cinq groupes de lignes correspondent aux nombres d'objets  $n = 3, 5, 7, 10, 20$ , respectivement. Chaque groupe de lignes contient six lignes qui décrivent le nombre de RR et de SRR observés pour chacune des trois méthodes de classement : RR et SRR (respectivement RR' et SRR', RRNet et SRRNet), pour les classements basés sur les degrés de dominance (respectivement dominé, et de dominance nette).

Dans chaque ligne des quatre colonnes de droite, les occurrences d'inversion de rang sont encodées dans un vecteur à quatre positions entre crochets. Les quatre nombres de ce vecteur correspondent aux comptages des RR ou des SRR observés lorsque l'objet retiré se trouve dans chacune des quatre positions possibles par rapport à la paire inversée. Par exemple, dans le tableau 3.11, pour  $n = 3$  objets et  $m = 2$  critères, les comptages des RR pour le classement basé sur le degré de dominance sont  $\langle 5, 4, 0, 9 \rangle$ . Cela signifie que des (faibles) RR entre les objets  $a$  et  $b$  ont été observés 5 (respectivement 4, 0, 9) fois lorsque l'objet retiré appartenait à l'ensemble  $[a]^\not\geq \cap [b]^\geq$  (respectivement  $[a]^\geq \cap [b]^\not\geq$ ,  $[a]^\geq \cap [b]^\geq$ ,  $[a]^\not\geq \cap [b]^\not\geq$ ). Ces RR sont observés lors des 100 répétitions de chaque cas.

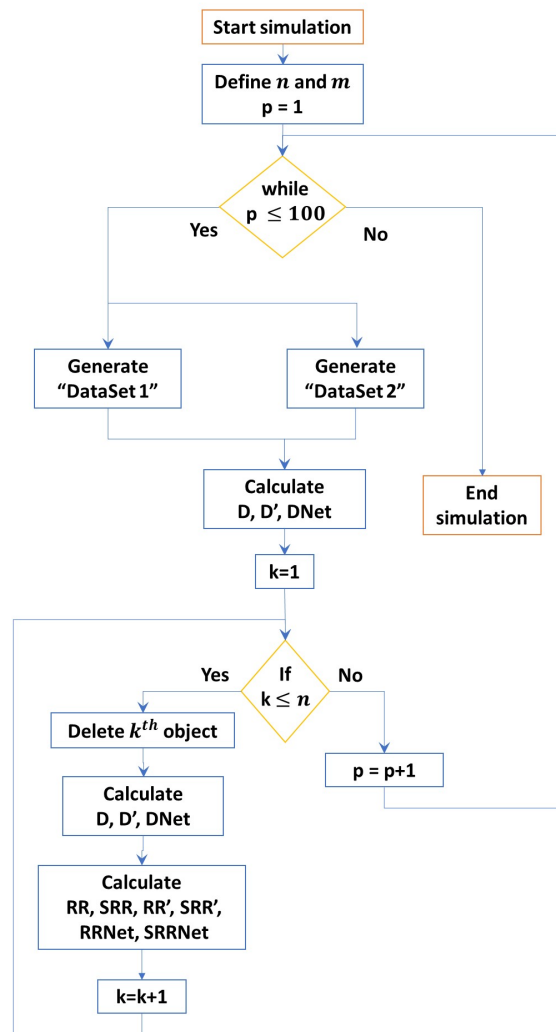


Figure 3.1: Organigramme du processus de simulation

n/m		2	3	5	10
n=3 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 3, 4, 0, 14 >	< 6, 7, 0, 7 >	< 4, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 1 >
	SRR	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 3, 4, 0, 14 >	< 6, 7, 0, 7 >	< 4, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 1 >
	SRR'	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 3, 4, 0, 0 >	< 6, 7, 0, 0 >	< 4, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=5 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 15, 13, 1, 30 >	< 20, 12, 0, 28 >	< 8, 5, 0, 14 >	< 0, 0, 0, 3 >
	SRR	< 3, 3, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 15, 17, 0, 25 >	< 20, 13, 0, 27 >	< 8, 5, 0, 14 >	< 0, 0, 0, 3 >
	SRR'	< 4, 6, 0, 0 >	< 5, 1, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 20, 20, 0, 0 >	< 25, 13, 0, 0 >	< 8, 5, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=7 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 29, 21, 0, 46 >	< 36, 28, 0, 38 >	< 10, 3, 0, 34 >	< 0, 0, 0, 5 >
	SRR	< 7, 7, 0, 0 >	< 8, 1, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 42, 28, 0, 40 >	< 40, 35, 0, 38 >	< 10, 3, 0, 34 >	< 0, 0, 0, 5 >
	SRR'	< 21, 13, 0, 1 >	< 10, 8, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 51, 37, 0, 0 >	< 48, 36, 0, 0 >	< 10, 3, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=10 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 27, 29, 2, 63 >	< 35, 60, 0, 101 >	< 27, 15, 0, 46 >	< 4, 4, 0, 0 >
	SRR	< 16, 13, 0, 1 >	< 5, 13, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 24, 32, 0, 68 >	< 44, 71, 0, 108 >	< 30, 15, 0, 49 >	< 4, 4, 0, 0 >
	SRR'	< 13, 16, 0, 1 >	< 12, 22, 0, 0 >	< 3, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 40, 40, 0, 0 >	< 48, 84, 0, 0 >	< 30, 15, 0, 0 >	< 4, 4, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=20 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 96, 66, 4, 107 >	< 94, 68, 1, 160 >	< 109, 90, 0, 193 >	< 0, 0, 0, 34 >
	SRR	< 76, 52, 0, 9 >	< 68, 37, 0, 2 >	< 2, 7, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 125, 89, 0, 112 >	< 138, 129, 0, 195 >	< 142, 124, 0, 209 >	< 0, 0, 0, 34 >
	SRR'	< 90, 72, 0, 9 >	< 102, 91, 0, 3 >	< 34, 40, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 187, 150, 0, 0 >	< 199, 160, 0, 0 >	< 141, 129, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >

**Tableau 3.11:** Nombre de RR et SRR observés pour DataSet1 généré par le schéma de simulation 1, 100 répétitions.

n/m		2	3	5	10
n=3 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 5, 4, 0, 9 >	< 3, 3, 0, 5 >	< 1, 1, 0, 1 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 5, 4, 0, 9 >	< 3, 3, 0, 5 >	< 1, 1, 0, 1 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR'	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 5, 4, 0, 0 >	< 3, 3, 0, 0 >	< 1, 1, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=5 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 15, 8, 0, 26 >	< 14, 10, 0, 13 >	< 2, 2, 0, 3 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR	< 2, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 12, 10, 0, 26 >	< 15, 10, 0, 13 >	< 2, 2, 0, 3 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR'	< 0, 2, 0, 0 >	< 1, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 15, 10, 0, 0 >	< 15, 10, 0, 0 >	< 2, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=7 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 26, 36, 0, 41 >	< 29, 29, 0, 46 >	< 10, 5, 0, 20 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR	< 6, 11, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 29, 28, 0, 39 >	< 33, 31, 0, 47 >	< 10, 5, 0, 20 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR'	< 8, 5, 0, 0 >	< 4, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 35, 41, 0, 0 >	< 33, 31, 0, 0 >	< 10, 5, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=10 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 43, 35, 0, 88 >	< 53, 47, 0, 87 >	< 5, 3, 0, 8 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR	< 12, 7, 0, 0 >	< 2, 4, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 54, 60, 0, 101 >	< 61, 58, 0, 90 >	< 5, 3, 0, 8 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR'	< 22, 26, 0, 0 >	< 10, 14, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 68, 62, 0, 0 >	< 63, 62, 0, 0 >	< 5, 3, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
n=20 < (1), (2), (3), (4) >	RR	< 70, 75, 0, 140 >	< 149, 95, 0, 143 >	< 52, 98, 0, 82 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR	< 50, 50, 0, 2 >	< 26, 25, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RR'	< 107, 128, 0, 163 >	< 226, 135, 0, 166 >	< 54, 100, 0, 84 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRR'	< 77, 88, 0, 4 >	< 91, 55, 0, 4 >	< 2, 2, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	RRNet	< 159, 185, 0, 0 >	< 253, 163, 0, 0 >	< 54, 100, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >
	SRRNet	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >	< 0, 0, 0, 0 >

**Tableau 3.12:** Nombre de RR et SRR observés pour DataSet2 généré par le schéma de simulation 2, 100 répétitions.

### 3.9.3 Observations et commentaires

Les résultats des simulations présentés dans les tableaux 3.11 et 3.12 donnent lieu aux observations suivantes [125] :

1. Pour chaque nombre de critères, le nombre de cas d'inversion de rang (RR) et d'inversion de rang strict (SRR) **augmente avec le nombre d'objets**. Cela s'explique par le fait que nous supprimons chaque objet à tour de rôle et vérifions la survenue de RR dans toutes les paires restantes. Plus le nombre d'objets est élevé, plus il y a d'opportunités de RR ;
2. Pour chaque nombre d'objets, le nombre de cas de RR et de SRR **diminue avec le nombre de critères**. Cette observation est expliquée par la diminution du nombre de paires d'objets dans la relation de dominance lorsque le nombre de critères augmente. Il s'agit d'un phénomène attendu puisque la dominance est une condition conjonctive exigeant qu'un objet soit au moins aussi bon qu'un autre sur *tous* les

critères. La raréfaction de la relation de dominance lorsque le nombre de critères croît est documentée dans les tableaux 3.13 et 3.14. Puisque la relation de dominance est le seul moyen de distinguer les objets dans les méthodes de classement étudiées, plus la relation de dominance est faible, plus le risque de RR est réduit, mais aussi plus la discrimination dans les classements résultants est faible ;

3. Comme établi par les propositions 7 et 9, aucun RR n'apparaît dans le cas 3 ( $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$ ) pour le classement par degré dominé et dans les cas 3 et 4 ( $z \in [a]^\neq \cap [b]^\neq$ ) pour le classement par degré de dominance nette. De plus, aucun RR strict ne se produit avec le classement par degré de dominance nette ;
4. Le RR strict se produit, de manière triviale, moins fréquemment que le RR ; le SRR pour les classements par degré de dominance et par degré dominé est observé moins fréquemment dans les cas 3 et 4 que dans les cas 1 ( $z \in [a]^\neq \cap [b]^\geq$ ) et 2 ( $z \in [a]^\geq \cap [b]^\neq$ ) ;
5. Bien que le SRR n'ait jamais été observé dans le cas 3 lors des simulations avec le degré de dominance, nous avons construit l'Exemple 2, qui montre que le SRR peut se produire dans ce cas. La complexité de cette construction (voir l'Annexe A1) explique probablement la rareté du SRR dans le cas 3, qui n'a pas été observé au cours de nos simulations ;
6. Expérimentalement, il n'y a pas de différence marquée dans le comportement des classements par degré de dominance et par degré dominé en ce qui concerne le RR et le SRR (bien que le SRR soit prouvé impossible avec le classement par degré dominé dans le cas 3, tandis qu'il n'a été que non observé dans ce cas avec le classement par degré de dominance).

Les fréquences de survenue de RR et SRR observées dans les deux schémas de simulation (tableaux 3.11 et 3.12) ne présentent pas de différences marquées. Ces occurrences semblent légèrement moins fréquentes avec le second schéma de simulation. Cela peut s'expliquer par le fait que la première méthode de simulation génère des bornes d'intervalles corrélées, alors que celles-ci sont générées indépendamment dans la deuxième méthode. Par conséquent, la relation de dominance est généralement plus faible dans la deuxième méthode (comme l'indiquent les tableaux 3.13 et 3.14). Ainsi, les objets sont moins discriminés, ce qui entraîne une diminution plus marquée du nombre d'inversions de rang à mesure que le nombre de critères augmente.

n/m	2	3	5	10
n=3	1.23	0.58	0.1	0.01
n=5	4.41	1.61	0.34	0.01
n=7	7.54	3.46	0.75	0.02
n=10	18.68	8.01	1.68	0.05
n=20	78.34	36.4	7.25	0.11

**Tableau 3.13:** Nombre moyen de paires dans la relation de dominance  $\geq$  (en excluant les paires identiques) avec le schéma de simulation 1, 100 répétitions pour chaque cas

n/m	2	3	5	10
n=3	0.67	0.22	0.03	0.00
n=5	2.29	0.61	0.07	0.00
n=7	4.87	1.74	0.12	0.00
n=10	9.69	3.36	0.29	0.00
n=20	43.76	13.4	1.67	0.03

**Tableau 3.14:** Nombre moyen de paires dans la relation de dominance  $\geq$  (en excluant les paires identiques) avec le schéma de simulation 2, 100 répétitions pour chaque cas

### 3.10 Comparaison des classements obtenus par différentes méthodes

Dans cette section, nous comparons expérimentalement les classements obtenus par les trois méthodes  $D$ ,  $D'$ , et  $D^*$ . Nous les comparons également avec une règle classique d'agrégation, la règle de Borda [92]. Comme mentionné dans la remarque de la section 3.3, le problème de classer des objets évalués par des intervalles sur  $n$  critères à partir de la relation de dominance équivaut à classer des objets évalués sur les  $2n$  critères correspondant aux bornes inférieures et supérieures des intervalles. Nous pouvons donc comparer les méthodes basées sur la dominance avec des méthodes issues de la théorie du choix social. Ici, nous nous concentrons sur l'une des plus célèbres : la règle de Borda.

Pour rappel, la règle de Borda appliquée à l'agrégation de préordres fonctionne comme suit [92, 128] : pour chaque critère parmi les  $2n$ , les objets sont classés par ordre croissant de leurs évaluations. Le rang 1 est attribué à l'objet le moins performant, le rang 2 au second moins performant, et ainsi de suite. En cas d'ex-æquo, les objets reçoivent le rang moyen des positions qu'ils auraient occupées. Les rangs sont ensuite additionnés pour obtenir le score de Borda de chaque objet. Les objets sont finalement classés par ordre décroissant de leur score (le plus élevé étant préférable).

*Remarque.* Comme le note [92], le classement des objets selon le score de Borda (appelé « classement de Borda ») peut également être obtenu en évaluant, pour chaque paire d'objets  $a, b$ , le pourcentage de critères  $r(a, b)$  pour lesquels  $a$  a une meilleure évaluation que  $b$ . Le classement de Borda est alors obtenu en classant les objets par ordre décroissant de la valeur suivante :

$$R(a) = \frac{1}{|A| - 1} \sum_{x \in A \setminus \{a\}} [r(a, x) - r(x, a)].$$

En comparant cette définition à celle du degré de dominance net  $D^*$  (définition 3.7), on peut écrire :

$$D^*(a) = \frac{1}{|A| - 1} \sum_{x \in A \setminus \{a\}} [D(a, x) - D(x, a)].$$

Ainsi, les scores  $R$  et  $D^*$  sont obtenus en calculant le flux net moyen des arcs sortants et entrants dans une matrice de relation évaluée :  $r(x, y)$  pour  $R$ , et  $D(x, y)$  pour  $D^*$ . La différence entre les classements résulte donc uniquement de la définition des matrices  $r(x, y)$  et  $D(x, y)$ .

La *méthode du flux net* est une approche générale pour obtenir un score, et donc un classement, à partir d'une relation binaire évaluée. Le score d'un objet  $a$  est calculé comme la somme des valeurs des arcs sortants de  $a$ , moins la somme des arcs entrants, divisée par le nombre total d'objets moins un. Cette méthode a été caractérisée par [129]. En plus des méthodes de Borda et de dominance nette, la méthode du flux net est également utilisée dans l'approche PROMETHEE [89], où la relation binaire évaluée est obtenue en agrégeant les différences d'évaluations pour chaque paire d'objets sur l'ensemble des critères.

### 3.10.1 Exemple

Considérons l'exemple donné dans le tableau 3.15, généré par la méthode de simulation 1 (voir section 3.9.1.1). Cet exemple concerne 10 objets évalués sur 2 critères. En prenant séparément les bornes inférieure et supérieure des intervalles, on évalue les objets sur 4 critères. Les rangs des objets calculés pour les bornes des intervalles sont présentés dans le tableau 3.16. En cas d'ex-æquo (par exemple, pour les objets  $c$  et  $g$  sur le critère  $c_1$ , où les deux bornes inférieures valent 0), on attribue le rang moyen (ici, 9.5). Les scores de Borda sont affichés dans la colonne « somme » et les rangs de Borda dans la colonne « Borda ».

$x$	$c_1$	$c_2$	$[x]^\geq$	$D(x)$	$D'(x)$	$D^*(x)$
$a$	0.1	[1.1, 2.1]	$\{a, d, f, h, i, j\}$	0.64	0.93	-0.28
$b$	[1, 3]	[0.9, 3.9]	$\{b, d, f, h, i\}$	0.72	0.90	-0.17
$c$	[0, 2]	[3, 4]	$\{c, d, f, h, i\}$	0.72	0.90	-0.17
$d$	[2.3, 4.3]	[7.1, 8.1]	$\{d, i\}$	0.90	0.74	0.15
$e$	[5, 8]	[0, 0.5]	$\{e, f, h, j\}$	0.74	0.81	-0.06
$f$	[9.4, 10]	[3.5, 6.5]	$\{f\}$	0.95	0.68	0.26
$g$	[0, 1.4]	[0, 1]	$\{b, c, d, f, g, h, i, j\}$	0.46	0.97	-0.51
$h$	[8.9, 10]	[3.6, 5.6]	$\{h\}$	0.95	0.68	0.26
$i$	6.9	[7.2, 8.2]	$\{i\}$	0.95	0.68	0.26
$j$	[6.1, 9.1]	3.8	$\{j\}$	0.93	0.66	0.26

**Tableau 3.15:** Exemple avec 2 critères et 10 objets générés par le schéma de simulation 1

$x$	$c_1$	$c_2$	sum	$Borda$		
$a$	8	10	7	8	33	9
$b$	7	7	8	6	28	6
$c$	9.5	8	6	5	28.5	7.5
$d$	6	6	2	2	16	4
$e$	5	4	9.5	10	28.5	7.5
$f$	1	1.5	5	3	110.5	2
$g$	9.5	9	9.5	9	37	10
$h$	2	1.5	4	4	11.5	3
$i$	3	5	1	1	10	1
$j$	4	3	3	7	17	5

**Tableau 3.16:** Score de Borda

Le tableau 3.16 présente les rangs calculés pour chaque méthode. Nous comparons les classements obtenus avec les trois méthodes basées sur la dominance ( $D$ ,  $D'$ ,  $D^*$ ) et la règle de Borda à l'aide des coefficients de Kendall et de Spearman, présentés respectivement dans les tableaux 3.18 et 3.19.

$D$	$h \sim i \sim f \succ j \succ d \succ e \succ b \sim c \succ a \succ g$
	$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad j$
	9 7.5 7.5 5 6 2 10 2 2 4
$D'$	$j \succ' h \sim' i \sim' f \succ' d \succ' e \succ' b \sim' c \succ' a \succ' g$
	$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad j$
	9 7.5 7.5 5 6 3 10 3 3 1
$D^*$	$h \sim^* i \sim^* f \sim^* j \succ^* d \succ^* e \succ^* b \sim^* c \succ^* a \succ^* g$
	$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad j$
	9 7.5 7.5 5 6 2.5 10 2.5 2.5 2.5

**Tableau 3.17:** Rangement des objets à l'aide des scores  $D$ ,  $D'$ ,  $D^*$  et de leur rang calculé

	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties
$D$	1	0.85	0.96	0.85	4
$D'$	0.85	1	0.96	0.71	4
$D^*$	0.96	0.96	1	0.81	7
$Borda$	0.85	0.71	0.81	1	1

**Tableau 3.18:** Coefficient tau de Kendall et nombre de paires à égalité

	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$
$D$	1	0.93	0.98	0.95
$D'$	0.93	1	0.98	0.84
$D^*$	0.98	0.98	1	0.91
$Borda$	0.95	0.84	0.91	1

**Tableau 3.19:** Rho de Spearman

### 3.10.2 Résultats expérimentaux

Nous étudions la corrélation entre les classements obtenus par les quatre procédures  $D$ ,  $D'$ ,  $D^*$  et la règle de Borda à l'aide de simulations [125]. Nous utilisons les 100 exemples de 10 objets et de 2, 3, et 5 critères générés par les schémas de simulation 1 et 2 décrits dans la section 3.9. Nous calculons le tau de Kendall pour les classements obtenus par les quatre méthodes ainsi que le nombre de paires ex-æquo. Les valeurs moyennes du tau de Kendall et des paires ex-æquo sont présentées dans le tableau 3.20 pour  $m = 2, 3$  critères et pour les schémas de simulation 1 et 2. Les valeurs moyennes pour 5 critères sont disponibles en annexe, dans la section A.2.2. Les valeurs moyennes du rho de Spearman pour les six cas sont également reportées en annexe dans les sections A.2.1 et A.2.2.

<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>D</math></th> <th><math>D'</math></th> <th><math>D^*</math></th> <th><math>Borda</math></th> <th>ties</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>D</math></td> <td>1</td> <td>0.64</td> <td>0.90</td> <td>0.89</td> <td>2.6</td> </tr> <tr> <td><math>D'</math></td> <td>0.64</td> <td>1</td> <td>0.90</td> <td>0.60</td> <td>2.6</td> </tr> <tr> <td><math>D^*</math></td> <td>0.90</td> <td>0.90</td> <td>1</td> <td>0.81</td> <td>9.4</td> </tr> <tr> <td><math>Borda</math></td> <td>0.89</td> <td>0.60</td> <td>0.81</td> <td>1</td> <td>1.1</td> </tr> </tbody> </table> <p>(a) <math>n = 2</math>, Scheme 1</p>		$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties	$D$	1	0.64	0.90	0.89	2.6	$D'$	0.64	1	0.90	0.60	2.6	$D^*$	0.90	0.90	1	0.81	9.4	$Borda$	0.89	0.60	0.81	1	1.1	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>D</math></th> <th><math>D'</math></th> <th><math>D^*</math></th> <th><math>Borda</math></th> <th>ties</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>D</math></td> <td>1</td> <td>0.42</td> <td>0.84</td> <td>0.77</td> <td>5.9</td> </tr> <tr> <td><math>D'</math></td> <td>0.42</td> <td>1</td> <td>0.83</td> <td>0.37</td> <td>6.2</td> </tr> <tr> <td><math>D^*</math></td> <td>0.84</td> <td>0.83</td> <td>1</td> <td>0.70</td> <td>16.7</td> </tr> <tr> <td><math>Borda</math></td> <td>0.77</td> <td>0.37</td> <td>0.68</td> <td>1</td> <td>1.8</td> </tr> </tbody> </table> <p>(b) <math>n = 2</math>, Scheme 2</p>		$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties	$D$	1	0.42	0.84	0.77	5.9	$D'$	0.42	1	0.83	0.37	6.2	$D^*$	0.84	0.83	1	0.70	16.7	$Borda$	0.77	0.37	0.68	1	1.8
	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties																																																								
$D$	1	0.64	0.90	0.89	2.6																																																								
$D'$	0.64	1	0.90	0.60	2.6																																																								
$D^*$	0.90	0.90	1	0.81	9.4																																																								
$Borda$	0.89	0.60	0.81	1	1.1																																																								
	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties																																																								
$D$	1	0.42	0.84	0.77	5.9																																																								
$D'$	0.42	1	0.83	0.37	6.2																																																								
$D^*$	0.84	0.83	1	0.70	16.7																																																								
$Borda$	0.77	0.37	0.68	1	1.8																																																								
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>D</math></th> <th><math>D'</math></th> <th><math>D^*</math></th> <th><math>Borda</math></th> <th>ties</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>D</math></td> <td>1</td> <td>0.33</td> <td>0.81</td> <td>0.74</td> <td>8.1</td> </tr> <tr> <td><math>D'</math></td> <td>0.33</td> <td>1</td> <td>0.81</td> <td>0.28</td> <td>8.2</td> </tr> <tr> <td><math>D^*</math></td> <td>0.81</td> <td>0.81</td> <td>1</td> <td>0.62</td> <td>19.9</td> </tr> <tr> <td><math>Borda</math></td> <td>0.74</td> <td>0.28</td> <td>0.62</td> <td>1</td> <td>0.9</td> </tr> </tbody> </table> <p>(c) <math>n = 3</math>, Scheme 1</p>		$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties	$D$	1	0.33	0.81	0.74	8.1	$D'$	0.33	1	0.81	0.28	8.2	$D^*$	0.81	0.81	1	0.62	19.9	$Borda$	0.74	0.28	0.62	1	0.9	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>D</math></th> <th><math>D'</math></th> <th><math>D^*</math></th> <th><math>Borda</math></th> <th>ties</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>D</math></td> <td>1</td> <td>0.14</td> <td>0.65</td> <td>0.57</td> <td>19.2</td> </tr> <tr> <td><math>D'</math></td> <td>0.14</td> <td>1</td> <td>0.65</td> <td>0.14</td> <td>19.3</td> </tr> <tr> <td><math>D^*</math></td> <td>0.65</td> <td>0.65</td> <td>1</td> <td>0.46</td> <td>29.7</td> </tr> <tr> <td><math>Borda</math></td> <td>0.57</td> <td>0.14</td> <td>0.46</td> <td>1</td> <td>1.4</td> </tr> </tbody> </table> <p>(d) <math>n = 3</math>, Scheme 2</p>		$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties	$D$	1	0.14	0.65	0.57	19.2	$D'$	0.14	1	0.65	0.14	19.3	$D^*$	0.65	0.65	1	0.46	29.7	$Borda$	0.57	0.14	0.46	1	1.4
	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties																																																								
$D$	1	0.33	0.81	0.74	8.1																																																								
$D'$	0.33	1	0.81	0.28	8.2																																																								
$D^*$	0.81	0.81	1	0.62	19.9																																																								
$Borda$	0.74	0.28	0.62	1	0.9																																																								
	$D$	$D'$	$D^*$	$Borda$	ties																																																								
$D$	1	0.14	0.65	0.57	19.2																																																								
$D'$	0.14	1	0.65	0.14	19.3																																																								
$D^*$	0.65	0.65	1	0.46	29.7																																																								
$Borda$	0.57	0.14	0.46	1	1.4																																																								

**Tableau 3.20:** Tau de Kendall pour  $m = 2, 3$  et les schémas de simulation 1 et 2

**Observations** À partir de ces résultats, nous pouvons formuler les observations suivantes [125] :

- La corrélation entre  $D$  et  $D'$  est relativement faible, et plus faible que celle entre  $D$  et Borda.
- Les corrélations diminuent avec le nombre de critères et sont plus faibles dans les exemples générés par le schéma 2 par rapport au schéma 1. Ce phénomène est

lié à l'appauvrissement de la relation de dominance lorsque le nombre de critères augmente et à la dé-corrélation des bornes des intervalles générées dans le schéma 2 (voir Tables 3.13 et 3.14). Cela entraîne une augmentation du nombre de paires ex-æquo pour les méthodes basées sur la dominance ( $D$ ,  $D'$ ,  $D^*$ ), contrairement à la règle de Borda.

- Les mêmes tendances se vérifient en utilisant le rho de Spearman. Les corrélations mesurées par Spearman sont systématiquement plus élevées que celles mesurées par Kendall, mais montrent une diminution similaire avec l'augmentation du nombre de critères.

**Analyse comparative** La règle de Borda est plus discriminante, produisant un plus petit nombre de paires ex-æquo. Cela s'explique par le fait que Borda prend en compte les écarts relatifs entre les objets pour chaque critère, tandis que les méthodes basées sur la dominance ne considèrent que les objets dominants ou dominés. Cependant, la capacité de discrimination ne suffit pas à justifier le choix d'une méthode ; d'autres propriétés doivent être prises en compte selon le contexte d'application [105].

## 3.11 Comment et quand utiliser ces méthodes

Dans cette section, nous présentons les principes fondamentaux qui sous-tendent les méthodes fondées sur le degré de dominance. Nous examinons ensuite comment ces méthodes pourraient être rendues plus résistantes au phénomène d'inversion de classement (rank reversal), en s'appuyant notamment sur l'utilisation de points de référence telle qu'elle est proposée dans la littérature, comme discuté dans la Section 3.2.2.

### 3.11.1 Interprétation des méthodes fondées sur le degré de dominance

Dans le cadre des méthodologies d'aide à la décision multicritère, les alternatives dominées, ou objets dominés, sont généralement écartées dès une phase préliminaire de filtrage, car elles ne jouent habituellement aucun rôle dans le processus décisionnel. Toutefois, une telle approche serait manifestement inappropriée lorsqu'on utilise des méthodes basées sur le degré de dominance. En effet, pour ces méthodes, la présence d'objets dominés constitue la seule source de discrimination permettant d'établir un classement des objets appartenant à l'ensemble  $A$ .

Plutôt que d'exclure les objets dominés de l'ensemble  $A$ , il convient au contraire de veiller à ce que  $A$  soit conservé ou construit comme un ensemble représentatif des objets possibles. Si l'on suppose que  $A$  est un échantillon (au sens statistique) de l'ensemble des

objets possibles avec leurs évaluations, alors les méthodes de classement fondées sur le degré de dominance peuvent recevoir une interprétation statistique.

**Classement selon le degré net de dominance.** En se basant sur le Corollaire 1, on sait qu'un objet  $a$  est classé avant un objet  $b$  s'il existe moins d'objets qui dominent  $a$  que d'objets qui dominent  $b$ , c'est-à-dire si  $|[a]^\geq| \leq |[b]^\geq|$ . Si  $A$  est un échantillon statistique d'une distribution d'objets possibles avec leurs évaluations, alors  $|[a]^\geq|$  (resp.  $|[a]^\geq|$ ) est proportionnel à une estimation de la probabilité que  $a$  (resp.  $b$ ) soit dominé. Plus cette probabilité estimée est élevée, moins la position de l'objet dans le classement est favorable.

**Classement selon les degrés de dominance et de domination.** Dans ces cas, l'interprétation est légèrement plus complexe. Le degré de dominance d'un objet  $a$  sur un objet  $b$  est proportionnel à  $|[a]^\not\geq| \cap |[b]^\geq|$ , c'est-à-dire proportionnel à la probabilité du sous-ensemble des objets qui ne dominent pas  $a$  tout en dominant  $b$ . Le degré global de dominance  $D(a)$  est alors proportionnel à la moyenne de ces probabilités par rapport à tous les objets  $b \neq a$ . Une interprétation similaire — et symétrique — peut être formulée pour le degré de domination.

### 3.11.2 Rendre les méthodes fondées sur le degré de dominance plus résistantes aux inversions de classement (RR)

Nous avons souligné précédemment l'importance de disposer d'un ensemble  $A$  suffisamment large et représentatif d'objets afin de rendre les méthodes basées sur le degré de dominance discriminantes. Dans l'esprit des méthodes utilisant des points de référence (voir Section 3.2.2), il est possible d'envisager, en plus de l'ensemble  $A$  des objets d'intérêt, un ensemble  $R$  d'objets de référence. Ces objets, bien que réels et évalués selon les mêmes critères que ceux de  $A$ , ne sont pas destinés à être classés. Si l'on considère que l'ensemble  $R$  reste fixe tout au long de l'application (c'est-à-dire qu'aucun objet n'y est ajouté ou retiré), alors ces objets peuvent servir à la fois à discriminer les objets de  $A$  et à limiter les effets du phénomène d'inversion de classement (RR).

Une méthode exempte de RR pour le classement des éléments de  $A$  peut être obtenue en calculant les degrés de dominance et/ou de domination d'un objet  $a \in A$  en ne considérant que les objets  $b \in R$ . Lorsqu'un élément est retiré (ou ajouté) à l'ensemble  $A$ , les scores  $D$ ,  $D'$  et  $D^*$ , calculés de cette manière, restent inchangés, et par conséquent, le classement des objets de  $A$  ne varie pas. Il s'agit là d'un moyen efficace pour éliminer les inversions de classement avec ces méthodes, similaire à ce qui est pratiqué dans les méthodes évoquées à la Section 3.2.2.

Une approche moins radicale consiste à calculer les scores à partir des éléments de l'ensemble  $A \cup R$ . Ainsi, le score d'un objet  $a \in A$  est calculé en tenant compte de tous les

éléments de  $A \cup R \setminus \{a\}$ . Des simulations ont été réalisées selon les schémas 1 et 2 décrits à la Section 3.9. Un troisième schéma de génération d'objets (schéma 3) a également été considéré, défini comme suit :

- générer une valeur  $x$  selon une loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 10 ;
- générer une valeur  $x'$  selon une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 3 ;
- l'évaluation d'un objet est l'intervalle  $[\min\{x, x'\}, \max\{x, x'\}]$ .

Les simulations sont effectuées pour un nombre de critères  $m = 3, 5, 10$ . Le nombre  $n$  d'objets d'intérêt dans l'ensemble  $A$  est pris égal à  $n = 5, 10, 15$ . Le nombre d'objets de référence dans  $R$  varie selon  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Le cas  $r = 0$  correspond aux résultats présentés dans les Tableaux 3.11 et 3.12. Le nombre de classes d'équivalence dans le classement de  $A$  en présence du point de référence  $R$  est enregistré. Ensuite, chaque objet de  $A$  est retiré un à un, tandis que l'ensemble  $R$  reste inchangé. Le nombre d'inversions de classement (RR) et d'inversions faibles (SRR) dans le classement des éléments de  $A$  est relevé. Chaque simulation est répétée 500 fois pour les trois schémas.

**Nombre moyen d'inversions de classement.** Le nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) est présenté dans les Tableaux 3.21, 3.22 et 3.23 pour le schéma de simulation 1, avec respectivement  $m = 3, m = 5$  et  $m = 10$  critères. Les résultats issus du schéma de simulation 2 sont reportés dans les Tableaux 3.24, 3.25 et 3.26, tandis que ceux correspondant au schéma de simulation 3 figurent dans les Tableaux 3.27, 3.28 et 3.29. L'observation principale est que le nombre d'inversions RR tend à diminuer lorsque la taille  $r$  de l'ensemble de référence  $R$  augmente. Ce comportement est également observé dans les tableaux du matériel complémentaire, et concerne aussi bien les inversions RR que les SRR. À cela s'ajoute le fait que les autres constats sont compatibles avec ceux discutés à la Section 3.9.3. Le schéma de simulation 3 ne montre pas de comportement fondamentalement différent par rapport aux deux premiers.

**Amélioration de la discrimination.** Le nombre moyen de classes d'équivalence dans les classements des objets de  $A$  augmente avec la taille de l'ensemble de référence  $R$ , comme illustré dans le Tableau 3.30. Pour toutes les variantes du degré de dominance, ce nombre semble tendre vers  $n$  (le nombre d'objets dans  $A$ ) lorsque  $r$  devient grand. Autrement dit, les objets de  $A$  sont de mieux en mieux discriminés à mesure que  $r$  augmente, et les égalités de classement deviennent de plus en plus rares. Comme le suggèrent les données des dernières colonnes des Tableaux 3.18 et 3.20, l'augmentation du nombre de classes d'équivalence avec  $r$  est plus rapide avec  $D$  qu'avec  $D'$ , et la plus lente avec  $D^*$ .

Les expériences ci-dessus montrent que le fait de considérer autant d'objets évalués que possible, même s'ils ne sont pas réellement candidats à la sélection finale :

- réduit le risque d'inversions de classement (RR) parmi les véritables candidats ;

- contribue à une meilleure discrimination entre objets, en réduisant le nombre d'ex-aequo.

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.70	0.75	0.4	0.26	0.3	0.15	0.17	0.22	0.16
	SRR	0	0.05	0	0.04	0.05	0	0.04	0.06	0
10	RR	1.73	1.99	1.15	1.06	1.35	0.99	0.66	0.89	0.66
	SRR	0.19	0.36	0	0.24	0.38	0	0.21	0.31	0
15	RR	2.60	3.31	2.31	1.70	2.42	1.74	1.32	1.94	1.51
	SRR	0.56	0.86	0	0.49	0.83	0	0.53	0.81	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.09	0.10	0.11	0.02	0.04	0.04	0.01	0.02	0.01
	SRR	0.05	0.05	0	0.02	0.02	0	0.01	0.01	0
10	RR	0.40	0.52	0.48	0.18	0.27	0.22	0.07	0.11	0.09
	SRR	0.21	0.24	0	0.10	0.14	0	0.05	0.06	0
15	RR	0.84	1.18	1.04	0.44	0.58	0.57	0.21	0.33	0.33
	SRR	0.45	0.54	0	0.29	0.30	0	0.15	0.21	0

**Tableau 3.21:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec  $m = 3$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

## 3.12 Discussion

Cette section finale se divise en trois parties. Nous résumons tout d'abord les résultats de nos analyses [125], à titre de conclusion. Ensuite, nous proposons quelques indications sur la manière et les circonstances dans lesquelles il serait judicieux d'utiliser les méthodes basées sur le degré de dominance pour classer des objets. Enfin, nous présentons des perspectives pour des travaux futurs.

### 3.12.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié le phénomène d'inversion de rangs (Rank Reversal, RR) dans la méthode de classement des données intervalle basée sur le degré de dominance, introduite par [84, 90]. Nous avons montré que des inversions de rangs strictes peuvent se produire dans tous les cas de suppression ou d'ajout d'un objet. L'occurrence des inversions de rangs (faibles et strictes) a été analysée de manière analytique et par

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.24	0.24	0.11	0.2	0.21	0.1	0.13	0.16	0.1
	SRR	0	0.004	0	0	0.004	0	0.004	0.03	0
10	RR	0.99	1.06	0.55	0.70	0.76	0.41	0.66	0.75	0.38
	SRR	0.01	0.07	0	0.05	0.08	0	0.04	0.1	0
15	RR	2.64	2.92	1.97	1.91	2.13	1.36	1.18	1.41	0.83
	SRR	0.06	0.28	0	0.1	0.25	0	0.08	0.21	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.04	0.03	0.04	0.03	0.02	0.04	0.03	0.04	0.03
	SRR	0.02	0	0.012	0.002	0	0.02	0	0.012	0.002
10	RR	0.26	0.19	0.11	0.16	0.13	0.26	0.19	0.11	0.16
	SRR	0.07	0	0.05	0.07	0	0.07	0	0.05	0.07
15	RR	0.74	0.37	0.23	0.37	0.26	0.74	0.37	0.23	0.37
	SRR	0.16	0	0.07	0.13	0	0.16	0	0.07	0.13

**Tableau 3.22:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec  $m = 5$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

simulation. Nous avons également introduit et étudié deux variantes de la règle du degré de dominance, à savoir le degré dominé et le degré de dominance nette [125]. Ces trois méthodes, toutes basées sur la relation de dominance, ont été comparées en termes d'occurrence des inversions de rangs. Il a été possible de déterminer analytiquement dans quels cas des inversions de rangs (RR) ou strictes (SRR) peuvent ou ne peuvent pas survenir. Des simulations ont permis de comparer les fréquences d'occurrence des inversions dans différents cas [125].

Nous avons observé que la règle du degré de dominance, ainsi que ses deux variantes, traite de manière indépendante les bornes inférieure et supérieure des évaluations intervalles des objets sur chaque critère. Cela implique qu'un critère peut être divisé en deux, l'un correspondant aux bornes inférieures et l'autre aux bornes supérieures. Une caractéristique supplémentaire de cette méthode est que les valeurs des évaluations n'importent pas réellement : seul leur *ordre* sur les échelles des critères est pris en compte. La méthode peut donc être considérée comme une méthode d'agrégation ordinale des évaluations sur  $2n$  critères. Cela permet de comparer les méthodes basées sur la dominance à des règles de vote, telles que la règle de Borda. Nous avons analysé les corrélations entre les classements obtenus avec la règle de Borda et les trois variantes basées sur la dominance.

Les simulations montrent que la méthode du degré de dominance nette est moins sujette aux inversions de rangs que celles basées sur le degré de dominance ou le degré

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.006	0.006	0.006	0	0	0	0.006	0.006	0.006
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0.032	0.032	0	0	0	0	0.03	0.032	0.016
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0.002	0
15	RR	0.128	0.13	0.078	0	0	0	0.178	0.178	0.074
	SRR	0	0.002	0	0	0	0	0	0	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0.092	0.092	0.048	0.016	0.016	0.016	0.032	0.032	0.016
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	RR	0.258	0.26	0.182	0.046	0.05	0.05	0.124	0.124	0
	SRR	0	0.002	0	0	0.004	0	0	0	0

**Tableau 3.23:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, avec  $m = 10$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

dominé. Cela pourrait constituer une raison pour privilégier la méthode du degré de dominance nette [125], bien que cette méthode soit moins discriminante (c.-à-d. elle produit plus de paires ex-æquo). En ce qui concerne la comparaison avec la règle de Borda, la méthode du degré de dominance est celle qui produit les classements les plus corrélés avec ceux donnés par Borda. Cependant, la règle de Borda est généralement plus discriminante, produisant moins de paires ex-æquo que les trois méthodes basées sur la relation de dominance, tout en étant au moins aussi sujette aux inversions de rangs.

### 3.12.2 Quand et comment utiliser ces méthodes

Dans la méthodologie de l'aide à la décision multicritère, les alternatives ou objets dominés sont généralement écartés dans une phase préliminaire de filtrage. Une telle procédure serait évidemment une mauvaise idée dans la perspective d'utiliser des méthodes basées sur le degré de dominance. Avec ces méthodes, la présence d'objets dominés est en effet la seule source de discrimination permettant de classer les objets dans  $A$  [125].

Au lieu d'exclure les objets dominés, il serait préférable de veiller à constituer l'ensemble  $A$  comme un ensemble *représentatif* des objets. Si  $A$  peut être considéré comme un échantillon (au sens statistique) des objets possibles, alors la méthode de classement basée sur le degré de dominance nette acquiert une interprétation statistique.

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.446	0.454	0.228	0.256	0.286	0.146	0.122	0.168	0.11
	SRR	0	0.01	0	0.006	0.03	0	0.006	0.042	0
10	RR	1.752	1.9	1.058	1.084	1.182	0.6	0.798	0.996	0.546
	SRR	0.07	0.198	0	0.1	0.136	0	0.084	0.18	0
15	RR	2.642	3.048	1.926	2.074	2.476	1.43	1.456	1.902	1.174
	SRR	0.252	0.494	0	0.274	0.436	0	0.208	0.412	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.082	0.08	0.04	0.048	0.078	0.03	0.01	0.028	0.018
	SRR	0.018	0.008	0	0.008	0.028	0	0.006	0.02	0
10	RR	0.538	0.64	0.338	0.206	0.304	0.27	0.11	0.152	0.144
	SRR	0.098	0.126	0	0.098	0.132	0	0.066	0.08	0
15	RR	1.006	1.554	1.004	0.476	0.702	0.498	0.216	0.324	0.248
	SRR	0.164	0.532	0	0.184	0.25	0	0.098	0.126	0

**Tableau 3.24:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec  $m = 3$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

À partir du Corollaire 1, nous savons qu'un objet  $a$  est mieux classé qu'un objet  $b$  si le nombre d'objets dominant  $a$  est inférieur à celui dominant  $b$  (c.-à-d.  $||[a]^\geq| \leq |[b]^\geq|$ ). Si  $A$  est un échantillon statistique d'une distribution d'objets possibles, alors  $||[a]^\geq|$  (resp.  $|[b]^\geq|$ ) est proportionnel à une estimation de la probabilité que  $a$  (resp.  $b$ ) soit dominé. Plus cette probabilité est élevée, plus la position d'un objet dans le classement est défavorable.

En conclusion, dans la perspective d'utiliser une méthode de classement basée sur le degré de dominance, il est crucial de constituer soigneusement l'ensemble  $A$ , sans exclure les objets réalistes, même s'ils sont dominés.

### 3.12.3 Perspectives

Les quatre méthodes analysées dans ce travail appartiennent à une classe générale de méthodes de classement en deux étapes [125]. Dans une première étape, une relation binaire évaluée est construite pour comparer les objets de manière paire-à-paire. Dans une seconde étape, cette relation est utilisée pour calculer un score associé à chaque objet, permettant ainsi de les classer. Trois approches typiques existent pour dériver un score à partir d'une relation évaluée : le flux sortant, le flux entrant, ou le flux net pour chaque objet. Concernant la relation binaire évaluée, il est possible d'envisager de nombreuses façons de la construire. Nous avons considéré deux cas particuliers : le degré de dominance

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.05	0.05	0.02	0.066	0.068	0.036	0.06	0.064	0.03
	SRR	0	0	0	0	0.002	0	0	0.004	0
10	RR	0.468	0.474	0.278	0.37	0.378	0.16	0.45	0.458	0.208
	SRR	0	0.006	0	0	0.006	0	0.004	0.008	0
15	RR	0.65	0.658	0.388	0.744	0.754	0.29	0.944	0.976	0.502
	SRR	0	0.006	0	0.006	0.01	0	0.004	0.028	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.046	0.046	0.03	0.022	0.024	0.008	0.014	0.02	0.006
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0.006	0
10	RR	0.194	0.204	0.14	0.166	0.18	0.066	0.206	0.218	0.14
	SRR	0.002	0.012	0	0.002	0.008	0	0.016	0.016	0
15	RR	0.584	0.642	0.378	0.348	0.402	0.198	0.16	0.18	0.132
	SRR	0.008	0.06	0	0.012	0.048	0	0.01	0.02	0

**Tableau 3.25:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec  $m = 5$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

et la fraction des critères pour lesquels un objet est mieux évalué qu'un autre (ce dernier donnant la règle de Borda lorsque la méthode du flux net est appliquée). Ces quatre méthodes ont été comparées en termes d'occurrence des inversions de rangs, ainsi qu'en termes de pouvoir discriminant.

Dans ce cadre, plusieurs questions méritent une attention particulière pour des recherches futures. Parmi celles-ci, nous soulignons les points suivants :

- Existe-t-il d'autres façons intéressantes de construire une relation binaire valuée en utilisant uniquement l'information *ordinaire* déduite des positions des intervalles d'évaluation des objets? Ces constructions pourraient s'inspirer de procédures de choix social appropriées (comme dans le cas de la méthode de Borda, voir par exemple [92]).
- Existe-t-il des façons intéressantes de construire des relations binaires valuées en utilisant des informations *cardinales* liées aux évaluations des objets? La relation de surclassement utilisée dans la méthode PROMETHEE [89] est un exemple de relation valuée. Le phénomène d'inversions de rangs a été largement étudié pour PROMETHEE [100, 101]. Le comportement d'autres relations de surclassement (*e.g.* les différentes formes des relations de ELECTRE, voir [15, 130]) pourrait être exploré sous cet angle (au-delà des investigations expérimentales de [99]).

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Tableau 3.26:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 2, avec  $m = 10$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

- Comparer ces procédures de classement peut aider les utilisateurs à choisir une méthode adaptée à leurs applications spécifiques. L'occurrence plus ou moins fréquente des inversions de rangs est un critère de choix, tout comme le pouvoir discriminant de la méthode. D'autres critères de sélection peuvent être envisagés, comme le caractère ordinal ou quantitatif des évaluations des objets, ou encore la pertinence des modèles utilisés pour agréger les évaluations multicritères des objets dans une relation binaire évaluée (voir [105], chapitres 4, 5, 6).

### 3.13 Conclusion

Ce chapitre a étudié en profondeur l'application du degré de dominance dans le classement des alternatives évaluées sous forme d'intervalles. Nous avons d'abord introduit les notations et rappelé les définitions fondamentales du degré de dominance pour les données intervalles. Ensuite, nous avons établi de nouvelles propriétés et analysé les limites de cette approche, notamment à travers le phénomène d'inversion de rangs (*rank reversal*).

Une contribution majeure de ce chapitre a été l'introduction et l'étude de deux variantes du degré de dominance : le **degré dominé** et le **degré de dominance net**. Ces nouvelles métriques ont été évaluées dans un cadre expérimental rigoureux, mettant en

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.688	0.744	0.392	0.294	0.334	0.234	0.186	0.266	0.162
	SRR	0.01	0.078	0	0.062	0.078	0	0.048	0.088	0
10	RR	1.764	2.222	1.45	1.07	1.388	1.08	0.644	0.856	0.678
	SRR	0.282	0.554	0	0.306	0.468	0	0.258	0.346	0
15	RR	2.38	3.282	2.252	1.628	2.292	1.792	1.33	1.66	1.556
	SRR	0.646	1.004	0	0.58	0.884	0	0.658	0.684	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.092	0.112	0.116	0.032	0.026	0.026	0.018	0.012	0.028
	SRR	0.052	0.048	0	0.014	0.014	0	0.016	0.006	0
10	RR	0.388	0.552	0.474	0.182	0.232	0.244	0.098	0.11	0.138
	SRR	0.194	0.256	0	0.116	0.136	0	0.076	0.084	0
15	RR	0.872	1.184	1.082	0.538	0.592	0.706	0.232	0.268	0.33
	SRR	0.492	0.55	0	0.366	0.36	0	0.172	0.186	0

**Tableau 3.27:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec  $m = 3$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

évidence leurs forces et faiblesses respectives. L'analyse comparative a permis d'examiner leur comportement face aux inversions de rangs et de comparer leurs performances à celles d'autres méthodes de classement, notamment la règle de Borda.

L'étude expérimentale a mis en évidence que :

- La méthode du degré de dominance est la plus proche de la règle de Borda en termes de corrélation des classements.
- La méthode du degré de dominance net est moins sujette aux inversions de rangs, bien qu'elle produise davantage d'ex-æquo.
- La prise en compte indépendante des bornes inférieures et supérieures des intervalles dans ces méthodes en fait une approche ordinale, se rapprochant ainsi des règles de vote en théorie du choix social.

Ces résultats ouvrent plusieurs perspectives de recherche. Une extension naturelle serait d'explorer d'autres techniques d'agrégation plus robustes aux inversions de rangs, notamment en intégrant des modèles flous ou probabilistes. Une autre voie d'étude serait l'application du degré de dominance dans des contextes plus larges, tels que la prise de décision en environnement incertain ou la classification automatique des données complexes.

Enfin, cette étude apporte une contribution importante aux méthodes multicritères

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.32	0.33	0.18	0.20	0.22	0.12	0.14	0.15	0.09
	SRR	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0.01	0
10	RR	1.60	1.67	0.83	0.93	0.98	0.56	0.73	0.83	0.46
	SRR	0.03	0.08	0	0.07	0.08	0	0.06	0.11	0
15	RR	2.60	2.91	1.59	2.32	2.69	1.58	1.40	1.73	0.90
	SRR	0.08	0.27	0	0.14	0.35	0	0.11	0.32	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.13	0.14	0.06	0.05	0.06	0.04	0.01	0.01	0.02
	SRR	0.01	0.02	0	0.01	0.01	0	0.01	0.01	0
10	RR	0.52	0.65	0.38	0.22	0.31	0.21	0.15	0.18	0.12
	SRR	0.05	0.13	0	0.05	0.10	0	0.06	0.05	0
15	RR	1.11	1.47	0.91	0.43	0.66	0.55	0.24	0.36	0.25
	SRR	0.18	0.35	0	0.17	0.25	0	0.10	0.16	0

**Tableau 3.28:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec  $m = 5$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

en fournissant des outils analytiques et expérimentaux permettant d'évaluer la robustesse des classements produits par les méthodes basées sur la dominance. Ces avancées méthodologiques pourront servir de base pour de futures améliorations et applications pratiques dans divers domaines décisionnels.

r/n		0			5			10		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0.03	0.03	0.02	0.09	0.09	0.08	0.06	0.06	0.02
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	RR	0.31	0.31	0.15	0.13	0.13	0.08	0.10	0.10	0.05
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0

r/n		20			50			100		
		D	D'	D*	D	D'	D*	D	D'	D*
5	RR	0.006	0.006	0	0.006	0.006	0.006	0.012	0.012	0.006
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	RR	0.076	0.076	0.048	0.032	0.032	0.032	0.044	0.046	0.048
	SRR	0	0	0	0	0	0	0	0.002	0
15	RR	0.154	0.156	0.052	0.174	0.174	0.130	0.110	0.112	0.058
	SRR	0	0.002	0	0.004	0.004	0	0.004	0.004	0

**Tableau 3.29:** Nombre moyen d'inversions de classement (RR) et d'inversions strictes (SRR) dans l'ensemble  $A$  de taille  $n = 5, 10, 15$ , en présence d'un ensemble fixe de points de référence  $R$  de taille  $r = 0, 5, 10, 20, 50, 100$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 3, avec  $m = 10$  critères, et chaque cas est répété 500 fois

**Tableau 3.30:** Nombre moyen de classes d'équivalence dans les classements obtenus par le degré de dominance (resp. le degré de domination et le degré de dominance net) pour  $n$  alternatives,  $n \geq 2$ , en présence d'un ensemble de référence de taille  $r$ . Les objets sont générés selon le schéma de simulation 1, chaque simulation étant répétée 500 fois.

r/n	degré de dominance			degré de domination			degré de dominance net		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
0	2.58	6.30	10.57	2.53	6.48	10.04	2.30	4.92	7.50
5	3.88	8.00	11.87	3.91	7.67	11.98	3.13	6.17	9.53
10	4.29	8.44	12.73	4.27	8.42	13.02	3.59	7.10	10.52
20	4.73	9.37	13.95	4.76	9.31	13.50	4.33	8.26	10.52
50	4.98	9.82	14.75	4.97	9.82	14.61	4.75	8.73	13.32
100	4.98	9.97	14.94	4.99	9.95	14.89	4.91	9.69	13.49

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié en profondeur différentes approches de l'aide multicritère à la décision (AMCD), en explorant à la fois les méthodes existantes et en proposant des améliorations basées sur des techniques avancées d'agrégation. Nous avons structuré notre travail en quatre chapitres, chacun apportant une contribution spécifique à la modélisation des préférences et à l'amélioration des méthodes de classement.

Le premier chapitre a rassemblé l'ensemble des fondements théoriques nécessaires à cette thèse en unifiant, dans un même cadre, les principes de l'aide multicritère à la décision et la modélisation évolutive des préférences. Il a présenté à la fois les notions essentielles de la décision multicritère — processus décisionnel, structures de préférences, critères, problématiques et méthodes d'agrégation — et les mécanismes permettant de représenter, d'apprendre et de mettre à jour les profils décisionnels. Ce chapitre a ainsi posé un socle conceptuel complet, intégrant les dimensions statiques et dynamiques de la décision multicritère.

Le deuxième chapitre a approfondi l'application des méthodes multicritères en développant de nouvelles approches d'agrégation dans le cadre des méthodes de surclassement et de classification. Nous y avons exploré l'intégration d'opérateurs d'agrégation avancés — tels que les moyennes de Bonferroni, Héronienne, Harmonique et Géométrique, ainsi que l'intégrale de Choquet — afin d'améliorer la capacité de la méthode PROMETHEE à capturer les interactions entre critères. Nous avons également examiné leur incorporation dans des techniques de clustering, notamment une variante modifiée de K-Means et une approche hiérarchique adaptée aux données intervalles. Les résultats expérimentaux ont confirmé la valeur ajoutée de ces agrégateurs pour obtenir des classements plus robustes et mieux structurés.

Enfin, le troisième chapitre s'est focalisé sur les méthodes de classement fondées sur le degré de dominance, avec une attention particulière portée au phénomène d'inversion de rang. Nous avons analysé l'effet de l'ajout ou du retrait d'alternatives dans un ensemble décisionnel et proposé deux variantes du degré de dominance : le degré dominé et le degré de dominance net. Les expérimentations ont permis d'évaluer la pertinence de ces mesures et leur sensibilité aux variations d'alternatives. Nous avons notamment observé que le degré de dominance net présente une plus grande stabilité face aux inversions de rang, bien qu'il tende à produire davantage de classements ex æquo. Ces travaux ont

également mis en lumière des liens avec des méthodes issues de la théorie du choix social, notamment la règle de Borda.

## Perspectives et Travaux Futurs

Les contributions de cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de recherche. Une première direction consiste à approfondir l'étude des **opérateurs d'agrégation avancés**, en explorant d'autres approches basées sur des modèles flous, probabilistes ou issus de l'apprentissage automatique. L'intégration de ces nouvelles techniques pourrait permettre de mieux capturer la complexité des relations entre critères et d'améliorer la précision des classements obtenus.

Une seconde piste d'exploration concerne l'**adaptabilité des modèles** de prise de décision dans des environnements dynamiques. La prise en compte de préférences évolutives, combinée à des techniques d'apprentissage, pourrait renforcer la pertinence des recommandations et la robustesse des classements.

Enfin, l'application des méthodes développées dans cette thèse à des **cas concrets** constitue une perspective prometteuse. L'intégration des approches proposées dans des domaines tels que la gestion de projets, la finance, le diagnostic médical ou encore l'optimisation des systèmes autonomes permettrait d'évaluer leur performance en situation réelle et d'affiner les modèles en fonction des contraintes spécifiques à chaque domaine.

En conclusion, cette thèse contribue à l'enrichissement des méthodes multicritères en proposant des techniques avancées d'agrégation et en analysant les effets des inversions de rangs dans les classements fondés sur la dominance. Les résultats obtenus fournissent un cadre analytique et expérimental pour améliorer la robustesse des décisions multicritères, tout en offrant des pistes pour de futures améliorations et applications pratiques.

# Bibliographie

- [1] B. Roy. *Multicriteria methodology for decision aiding*. Kluwer, Dordrecht, 1996. Original version in French : “*Méthodologie multicritère d’aide à la décision*”, Economica, Paris, 1985.
- [2] B. Roy and V. Mousseau. A theoretical framework for analysing the notion of relative importance of criteria. *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, 5(2) :145–159, 1996.
- [3] D. Bouyssou. *Approches descriptives et constructives d’aide à la décision : Fondements et comparaison*. Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris Dauphine, 1984.
- [4] Peter C. Fishburn. Utility theory. *Manage. Sci.*, 14(5) :335–378, jan 1968.
- [5] Alexis Tsoukiàs. From decision theory to decision aiding methodology. *European Journal of Operational Research*, 187(1) :138–161, 2008.
- [6] David E. Bell. *Decision Making : Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.
- [7] Hélène Raynaud. *La théorie de la décision : Principes et méthodes*. La Découverte, Paris, France, 1997.
- [8] B. Roy. Science de la décision ou science de l’aide à la décision ? Technical report, Cahier du LAMSADE N° 97, Université Paris-Dauphine, Paris, 1990.
- [9] Jean Bouchet. *Aide à la décision et modèles formels*. Economica, Paris, France, 1993.
- [10] David E. Bell, Howard Raiffa, and Amos Tversky. Descriptive, normative, and prescriptive interactions in decision making. In David E. Bell, Howard Raiffa, and Amos Tversky, editors, *Decision Making : Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*, pages 9–30. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [11] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. *Evaluation and decision models : A critical perspective*. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [12] J.-L. Genard and M. Pirlot. Multiple criteria decision aid in a philosophical perspective. In D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Slowinski, D. Vanderpooten, and Ph. Vincke, editors, *Aiding decisions with multiple criteria : essays in honour of Bernard Roy*, pages 89–117. Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.

- [13] R. L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives : Preferences and value tradeoffs*. Wiley, New York, 1976.
- [14] Bernard Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision : théorie et pratique*. Economica, Paris, France, 1990.
- [15] Ph. Vincke. *Multi-criteria decision aid*. Wiley, New York, 1992. Original version in French : “*L'aide multicritère à la décision*”, Éditions de l'Université de Bruxelles–Éditions Ellipses, Brussels, 1989.
- [16] Bernard Roy and Denis Bouyssou. *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*. Économica, Paris, 1993.
- [17] Bernard Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica, Paris, 1985.
- [18] J.M. Martel and B. Roy. Analyse de la signifiante de diverses procédures d'agrégation multicritère. *Annales du LAMSADE 1*, Université Paris-Dauphine, 2002.
- [19] Michel Grabisch. K-order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy sets and systems*, 92(2) :167–189, 1997.
- [20] Johannes Fürnkranz and Eyke Hüllermeier. *Preference Learning*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [21] Tie-Yan Liu. Learning to rank for information retrieval. *Found. Trends Inf. Retr.*, 3(3) :225–331, March 2009.
- [22] Mohand Boughanem, Hamid Tebri, and Mohamed Tmar. Apprentissage par renforcement dans un système de filtrage adaptatif. In *Actes de la conférence*, pages 27–40, 2004.
- [23] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1944.
- [24] Denis Bouyssou, Didier Dubois, Marc Pirlot, and Henri Prade, editors. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision 3 : Analyse multicritère*, volume 3 of *Traité IC2 – Informatique et Systèmes d'Information*. Lavoisier, Paris, 2006.
- [25] P. C. Fishburn. *Utility theory for decision-making*. Wiley, New York, 1970.
- [26] R.L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Trade-Offs*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics. Cambridge University Press, 1993.
- [27] D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes, and A. Tversky. *Foundations of measurement*, volume 1 : Additive and polynomial representations. Academic Press, New York, 1971.
- [28] Gebhard Fuhrken and Marcel K Richter. Additive utility. *Economic Theory*, 1(1) :83–105, 1991.

- [29] D. Bouyssou and M. Pirlot. Nontransitive decomposable conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 46(6) :677–703, 2002.
- [30] Michel Grabisch and Patrice Perny. Agrégation multicritère. *Logique floue, principes, aide à la décision*, pages 81–120, 2003.
- [31] Didier Dubois and Henri Prade. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *Information sciences*, 39(2) :205–210, 1986.
- [32] Ronald R Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 18(1) :183–190, 1988.
- [33] Johannes Fürnkranz and Eyke Hüllermeier. Preference learning and ranking by pairwise comparison. In *Preference learning*, pages 65–82. Springer, 2010.
- [34] Ivan Kojadinovic. *Contributions à l'interprétation de mesures non additives et à l'identification de modèles décisionnels fondés sur l'intégrale de Choquet*. PhD thesis, Université de Nantes, 2006.
- [35] Roumeissa Kerbouï and Moncef Abbas. Application of the choquet integral in K-Means clustering method. In *Proceedings of the MCDM Conference*, Istanbul, Turkey, June 2019.
- [36] Roumeissa Kerbouï and Moncef Abbas. Application of the choquet integral in clustering method : K-Means Choquet. In *Proceedings of the AFROS Conference*, Tunis, Tunisia, July 2018. The Tunisian Decision Aid Society.
- [37] Roumeissa Kerbouï and Moncef Abbas. Ranking with promethee method by using aggregation operators. In *Proceedings of the Tunisian Decision Aid Society Conference*, pages 44–45, Hammamet, Tunisia, July 2016. The Tunisian Decision Aid Society.
- [38] J. Ross Quinlan. Induction of decision trees. *Machine learning*, 1 :81–106, 1986.
- [39] J. Ross Quinlan. Simplifying decision trees. *International journal of man-machine studies*, 27(3) :221–234, 1987.
- [40] Ryszard S Michalski and Yves Kodratoff. Research in machine learning : Recent progress, classification of methods, and future directions. *Machine learning*, pages 3–30, 1990.
- [41] Michel Grabisch, Marc Roubens, et al. Application of the choquet integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Measures and Integrals-Theory and Applications*, pages 348–374, 2000.
- [42] Michel Grabisch and Christophe Labreuche. *Fuzzy measures and integrals in MCDA*. Springer, 2016.

- [43] Michel Grabisch, Ivan Kojadinovic, and Patrick Meyer. A review of methods for capacity identification in choquet integral based multi-attribute utility theory : Applications of the kappalab r package. *European journal of operational research*, 186(2) :766–785, 2008.
- [44] Ph. Vincke. Vrai, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini : propriétés et algorithmes. Cahier du LAMSADE 27, Université Paris-Dauphine, Paris, 1980.
- [45] B. Roy and Ph. Vincke. Pseudo-orders : Definition, properties and numerical representation. *Mathematical Social Sciences*, 14(2) :263–274, 1987.
- [46] D. Bouyssou. Building criteria : A prerequisite for MCDA. In C. A. Bana e Costa, editor, *Readings in multiple criteria decision aid*, pages 58–80. Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
- [47] Philippe Vincke. Aggregation of preferences : a review. *European journal of operational research*, 9(1) :17–22, 1982.
- [48] J-P Ancot and JHP Paelinck. Recent experiences with the qualiflex multicriteria method. In *Qualitative and quantitative mathematical economics*, pages 217–266. Springer, 1982.
- [49] Jean-Charles Pomerol. *Decision making and action*. John Wiley & Sons, 2012.
- [50] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Słowiński. Decision rule approach. In J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott, editors, *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, pages 507–562. Springer-Verlag, Boston, 2005.
- [51] Thomas L Saaty. *Décider face à la complexité : une approche analytique multicritère d'aide à la décision*, volume 7. Esf Editeur, 1984.
- [52] Nolberto Munier, Eloy Hontoria, et al. *Uses and Limitations of the AHP Method*. Springer, 2021.
- [53] Bernard Roy. Classement et choix en présence de points de vue multiples. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 2(8) :57–75, 1968.
- [54] J.P. Brans, B. Mareschal, and Ph. Vincke. PROMETHEE : a new family of outranking methods in multicriteria analysis. In J.P. Brans, editor, *Operational Research, IFORS 84*, pages 477–490. North Holland, Amsterdam, 1984.
- [55] Kary Främling. *Modélisation et apprentissage des préférences par réseaux de neurones pour l'aide à la décision multicritère*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1996.
- [56] K Paul Yoon and Ching-Lai Hwang. *Multiple attribute decision making : an introduction*. Sage publications, 1995.
- [57] Thomas L Saaty and Gang Hu. Ranking by eigenvector versus other methods in the analytic hierarchy process. *Applied Mathematics Letters*, 11(4) :121–125, 1998.
- [58] Thomas L Saaty. Decision making—the analytic hierarchy and network processes (ahp/anp). *Journal of systems science and systems engineering*, 13 :1–35, 2004.

- 
- [59] Yann Collette and Patrick Siarry. *Optimisation multiobjectif*. Editions Eyrolles, 2002.
- [60] Bernard Roy and Patrice Bertier. La méthode ELECTRE II : une application au média-planning. *METRA*, pages 291–302, 1973.
- [61] Bernard Roy. Electre iii : Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle (RIRO)*, 12(5) :47–73, 1978.
- [62] Jean-Pierre Brans, Philippe Vincke, and Bertrand Mareschal. How to select and how to rank projects : The promethee method. *European Journal of Operational Research*, 24(2) :228–238, 1986.
- [63] JP Brans, B Mareschal, and Ph Vincke. A new family of outranking methods in multi-criteria analysis. *Cahiers du Centre d'études de Recherche Opérationnelle*, pages 3–24, 1978.
- [64] Philippe Vincke. *Multicriteria Decision-Aid*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1992.
- [65] Gleb Beliakov, Ana Pradera, and Tomasa Calvo. *Aggregation Functions : A Guide for Practitioners*. Springer, Berlin, Allemagne, 2007.
- [66] Carlo Bonferroni. *Elementi di Statistica Generale*. Libreria internazionale Seeber, Firenze, Italie, 1950.
- [67] Ronald R. Yager. Generalized bonferroni mean based on ordered weighted averaging. *Information Sciences*, 179(18) :3091–3101, 2009.
- [68] Gleb Beliakov and Tomasa Calvo. On some properties of the heronian mean and its generalizations. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(8) :939–951, 2007.
- [69] K. Smith. *Statistical Methods*. Dover Publications, New York, USA, 1995.
- [70] A. W. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold. *Inequalities : Theory of Majorization and Its Applications*. Springer, New York, USA, 2nd edition, 2011.
- [71] Gustave Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5 :131–295, 1954.
- [72] Anil K. Jain and Richard C. Dubes. *Algorithms for Clustering Data*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [73] T. Velmurugan. Performance based analysis between k-means and fuzzy c-means clustering algorithms for connection oriented telecommunication data. *Applied Soft Computing*, 19 :134 – 146, 2014.
- [74] Brian S. Everitt. *Cluster Analysis*. Heinemann Educational Books, London, 1977.
- [75] Michael R. Anderberg. *Cluster Analysis for Applications*. Academic Press, New York, 1973.

- [76] François Baulieu. Theoretical and practical developments in measuring the dissimilarity between objects : A survey. *International Journal of General Systems*, 15(4) :253–283, 1989.
- [77] J. C. Dunn. Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions. *Journal of Cybernetics*, 4(1) :95–104, 1974.
- [78] James C. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.
- [79] Alexandru-Livin Olteanu Patrick Meyer. Formalizing and solving the problem of clustering in mcda. *European Journal of Operational Research*, January 2013.
- [80] Miłosz Kadziński, Salvatore Greco, and Roman Słowiński. Preference learning in multiple criteria decision aiding : An overview. *European Journal of Operational Research*, 233(2) :401–418, 2014.
- [81] Elaheh Rashedi, Abdolreza Mirzaei, and Mohammad Rahmati. An information theoretic approach to hierarchical clustering combination. *Neurocomputing*, 148 :487–497, 2015.
- [82] Ruichu Cai, Zhenjie Zhang, Anthony K. H. Tung, Guojie Song, and Zhifeng Hao. A general framework of hierarchical clustering and its applications. *Information Sciences*, 272 :29–48, 2014.
- [83] Roumeissa Kerboui and Moncef Abbas. New hierarchical clustering method in interval data. In *Proceedings of the AFROS Conference*, Tunis, Tunisia, July 2018. The Tunisian Decision Aid Society.
- [84] Peng Song, Jiye Liang, and Yuhua Qian. A two-grade approach to ranking interval data. *Knowl.-Based Syst.*, 27 :234–244, 2012.
- [85] Yuhua Qian, Jiye Liang, and Chuangyin Dang. Interval dominance degree : A new approach for ranking interval data. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(5) :523–541, 2008.
- [86] J.-Ch. de Borda. *Mémoire sur les élections au scrutin*. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris, 1781. Translated by Alfred de Grazia as “Mathematical derivation of an election system”, *Isis*, Vol. 44, pp. 42–51.
- [87] T.L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation*. McGraw-Hill, New york, 1980.
- [88] C.L. Hwang and K. Yoon. *Multiple attribute decision making : Methods and applications*. Springer-Verlag, 1981.
- [89] J.-P. Brans and Ph. Vincke. A preference ranking organisation method. (The PROMETHEE method for multiple criteria decision-making). *Management Science*, 31(6) :647–656, 1985.

- [90] Yuhua Qian, Jiye Liang, and Chuangyin Dang. Interval ordered information systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(8) :1994–2009, 2008.
- [91] K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, 2nd edition, 1963.
- [92] P. C. Fishburn. *The theory of social choice*. Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [93] Donald G. Saari. Advocating the borda count. *Mathematical Social Sciences*, 119 :21–35, 2022.
- [94] V. Belton and T. Gear. On a short-coming of Saaty’s method of analytic hierarchies. *Omega*, 11(3) :228 – 230, 1983.
- [95] J.S. Dyer. Remarks on the Analytic Hierarchy Process. *Management Science*, 36(3) :249–258, 1990.
- [96] H. Maleki and S. Zahir. A Comprehensive Literature Review of the Rank Reversal Phenomenon in the Analytic Hierarchy Process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2012.
- [97] E. Triantaphyllou. Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 10(1) :11–25, 2001.
- [98] M.S. García-Cascales and M.T. Lamata. On rank reversal and TOPSIS method. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(5-6) :123 – 132, 2012.
- [99] X. Wang and E. Triantaphyllou. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some electre methods. *Omega*, 36(1) :45 – 63, 2008.
- [100] S. Eppe and Y. De Smet. On the influence of altering the action set on PROMETHEE II’s relative ranks. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization - 9th International Conference, EMO 2017, Münster, Germany, March 19-22, 2017, Proceedings*, pages 206–220, 2017.
- [101] C. Verly and Y. De Smet. Some results about rank reversal instances in the PROMETHEE methods. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 3(4) :325–345, 2013.
- [102] Bożena Kizielewicz, Ewa Roszkowska, and Marzena Smolarek. Normalization techniques in mcda : Review and comparative study. *European Journal of Operational Research*, 308 :115–130, 2024.
- [103] Ali Jahan and Kenneth L. Edwards. A review of data normalization methods for mcdm. In *Materials Selection Techniques in Mechanical Design*, pages 53–66. Springer, 2015.
- [104] D. von Winterfeldt and W. Edwards. *Decision analysis and behavioral research*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [105] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. *Evaluation and decision models with multiple criteria : Stepping stones for the analyst*. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [106] Denis Bouyssou and Thierry Marchant. Multiattribute preference models with reference points. *European Journal of Operational Research*, 229(2) :470–481, 2013.
- [107] Agnès Rolland. *Modèle de tri multicritère fondé sur des profils de référence*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 2013.
- [108] José Figueira, Salvatore Greco, Bernard Roy, and Roman Słowiński. Electre methods : main features and recent developments. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 6(1) :61–85, 2016.
- [109] Arwa Khannoussi, Alexandru-Liviu Olteanu, Christophe Labreuche, and Patrick Meyer. Simple ranking method using reference profiles : incremental elicitation of the preference parameters. *4OR : A Quarterly Journal of Operations Research*, 20(3) :499–530, September 2022.
- [110] Wojciech Sałabun. Comet : An outranking-based decision-making method for multicriteria problems. *Symmetry*, 7(4) :1500–1513, 2015.
- [111] Wojciech Sałabun and Jarosław Wątróbski. Fuzzy comet for uncertain data in mcdm. *Journal of Decision Systems*, 27(1) :19–32, 2018.
- [112] B. Kizielewicz, W. Sałabun, et al. Towards rank reversal-resistant decision methods. *Expert Systems with Applications*, 2024.
- [113] Bartłomiej Kizielewicz, Andrii Shekhovtsov, Jakub Więckowski, Jarosław Wątróbski, and Wojciech Sałabun. The compromise-comet method for identifying an adaptive multi-criteria decision model. *IEEE Access*, October 2024.
- [114] Denis Bouyssou and Thierry Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in mcdm, i : The case of two categories. *European Journal of Operational Research*, 178(1) :217–245, April 2007.
- [115] Denis Bouyssou and Thierry Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in mcdm, ii : More than two categories. *European Journal of Operational Research*, 178(1) :246–276, April 2007.
- [116] Denis Bouyssou and Marc Pirlot. A consolidated approach to the axiomatization of outranking relations : a survey and new results. *Annals of Operations Research*, 229(1) :159–212, 2015.
- [117] Denis Bouyssou, Thierry Marchant, Marc Pirlot, Alexis Tsoukias, and Philippe Vincke. *ELECTRE Methods : Foundations and Recent Developments*. Decision Engineering. Springer, Cham, 2023.

- [118] T. J. Stewart and I. N. Durbach. Dealing with uncertainty in mcda : A survey of methods and applications. *European Journal of Operational Research*, 247(2) :393–403, 2016.
- [119] George J. Klir and Tina A. Folger. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. Prentice Hall, 1988.
- [120] Salvatore Greco, Benedetto Matarazzo, and Roman Slowinski. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129(1) :1–47, 2001.
- [121] David Rios Insua and Simon French. A framework for sensitivity analysis in discrete multiobjective decision-making. *European Journal of Operational Research*, 54(2) :176–190, 1991.
- [122] P.C. Fishburn. Interval representations for interval orders and semiorders. *Journal of Mathematical Psychology*, 10 :91–105, 1973.
- [123] P.C. Fishburn. *Interval Orders and Interval Graphs*. J. Wiley, New York, 1985.
- [124] Farid Aiche, Moncef Abbas, and Didier Dubois. Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients. *Fuzzy Optim. Decis. Mak.*, 12(2) :125–152, 2013.
- [125] Roumeissa Kerbouli, Moncef Abbas, and Marc Pirlot. Ranking methods based on the dominance degree. an investigation of rank reversal. *Computers & Operations Research*, 183 :107196, 2025.
- [126] Moncef Abbas, Marc Pirlot, and Roumeissa Kerbouli. Multicriteria dominance degree method : Rank reversal in case of interval data. In *Proceedings of the TORS Conference*, Hammamet, Tunisia, December 2023. Tunisian Operational Research Society.
- [127] Marc Pirlot, Roumeissa Kerbouli, and Moncef Abbas. Ranking alternatives based on the dominance degree : An investigation of rank reversal. In *Proceedings of the MCDM Conference*, page 11, Hammamet, Tunisia, June 2024. The Tunisian Decision Aid Society.
- [128] V. Giakoumakis and B. Monjardet. Coefficients d’accord entre deux préordres totaux. *Statistique et analyse des données*, 12(1-2) :46–99, 1987.
- [129] D. Bouyssou. Ranking methods based on valued preference relations : A characterization of the net flow network. *European Journal of Operational Research*, 60(1) :61–67, 1992.
- [130] J.R. Figueira, V. Mousseau, and B. Roy. ELECTRE Methods. In S. Greco, M. Ehrgott, and J.R. Figueira, editors, *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, pages 155–185. Springer, New York, NY, 2nd edition, 2016.

# Annexe A

## A.1 Relation de dominance stricte avec le degré de dominance : rôle de $\Delta$

Le Lemme 1 montre que  $\Delta = |[a]^\neq| - |[b]^\neq|$  joue un rôle central dans la détermination du signe de  $\Delta D$ , et donc dans l'établissement de la relation  $a \succ b$ . Dans l'Exemple 1, il n'arrive jamais que  $x \succ y$  avec  $\Delta(x, y) = |[x]^\neq| - |[y]^\neq| < 0$ , pour  $x, y \in A$ .

Cependant, l'inverse n'est pas toujours vrai : le fait que  $\Delta(x, y) < 0$  n'implique pas nécessairement que  $y \succ x$ . Le couple  $x = g, y = a$  dans l'Exemple 2 (voir Table 3.4) constitue un contre-exemple :  $\Delta(g, a) = -1$  alors que  $g \succ a$ .

Le cas  $z = i \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$  présenté en Section 3.6.2.2 illustre bien le rôle de  $\Delta$ . L'équation (3.14) montre ce qu'il se passe lorsqu'on retire un objet  $z$  appartenant à  $[a]^\geq \cap [b]^\geq$  : la valeur de  $\Delta$  est alors soustraite de  $|A|(|A| - 1)\Delta D(a, b)$ , ce qui donne la nouvelle valeur  $|A - 1|(|A - 2|)\Delta D_{-z}(a, b)$ .

Pour construire l'Exemple 2, qui illustre un cas de relation de dominance stricte (strict RR), il fallait un couple  $(a, b)$  tel que  $a \succ b$  mais  $b \succ_{-z} a$ . Cela implique que  $\Delta(a, b) = |[a]^\neq| - |[b]^\neq| \geq 2$ .

Cet exemple instancie un *schéma d'exemples* dans lequel une relation stricte RR apparaît lorsque l'on retire un élément  $z \in [a]^\geq \cap [b]^\geq$ . L'ensemble des objets dans ce schéma est constitué de  $a, b, z$ , et de deux sous-ensembles  $C$  et  $G$ , avec les relations suivantes vis-à-vis de la relation  $\geq$  :

- $[a]^\geq = \{a, z\}$  ;
- $[b]^\geq = \{b, z\} \cup G$  ;
- Les objets de  $C$  sont tous incomparables entre eux (par rapport à  $\geq$ ), dominés par  $b, z$  et tous les éléments de  $G$ , mais incomparables à  $a$ . Ainsi, pour tout  $c \in C$ , on a  $[c]^\geq = \{b, c, z\} \cup G$  ;
- Les objets de  $G$  dominent tous  $b$  et tous les objets de  $C$ , et sont totalement ordonnés

entre eux (c.-à-d.  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  avec  $g_i > g_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, k$ ); ils sont dominés par  $z$  et incomparables à  $a$ ;

—  $z$  domine tous les autres objets, donc  $[z]^\geq = \{z\}$ .

Il est facile de voir (par exemple dans l'Exemple 2) qu'un tel schéma est réalisable avec deux critères seulement : il est possible d'attribuer des évaluations sur deux critères à tous les objets de manière à respecter toutes les contraintes décrites, quel que soit le nombre d'éléments dans  $C$  et  $G$ . Le nombre total d'objets est  $n = 3 + |C| + k$ , et  $\Delta = |[a]^\not\geq| - |[b]^\not\geq| = k$ .

En appliquant la formule (3.6) à ce schéma, on obtient :

$$n(n-1)\Delta D(a,b) = k + \sum_{x \neq a,b} \left( |[a]^\not\geq \cup [x]^\geq| - |[b]^\not\geq \cup [x]^\geq| \right). \quad (\text{A.1})$$

Pour  $x \in C$ , on a :

$$|[a]^\not\geq \cup [x]^\geq| - |[b]^\not\geq \cup [x]^\geq| = (n-1) - n = -1.$$

Pour  $x \in G$ , on obtient :

$$|[a]^\not\geq \cup [x]^\geq| - |[b]^\not\geq \cup [x]^\geq| = k(n-1) - \sum_{i=1}^k (n-i) \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{k(k-1)}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Enfin, pour  $x = z$ , on a :  $|[a]^\not\geq \cup [z]^\geq| - |[b]^\not\geq \cup [z]^\geq| = \Delta = k$ .

Ainsi, l'équation (A.1) devient :

$$n(n-1)\Delta D(a,b) = k - |C| + \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k+3)}{2} - |C|. \quad (\text{A.4})$$

Dans l'Exemple 2, on a  $|G| = k = 2$ ,  $\Delta = 2$  et  $|C| = 4$ . Donc :

$$n(n-1)\Delta D(a,b) = 2 - 4 + 1 + 2 = 1,$$

et donc  $a \succ b$ . Après suppression de  $z = i$ , on a :

$$(n-1)(n-2)\Delta D_{-z}(a,b) = n(n-1)\Delta D(a,b) - \Delta = 1 - 2 = -1,$$

d'où  $b \succ_{-z} a$ .

De manière générale, pour qu'une relation stricte de type RR apparaisse après suppression de  $z$ , il faut que :

$$1 \leq n(n-1)\Delta D(a,b) \leq \Delta - 1 \quad \text{et} \quad (n-1)(n-2)\Delta D_{-z}(a,b) \leq -1.$$

Cela implique que  $|C|$  doit satisfaire :

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 \leq |C| \leq \frac{k(k+3)}{2} - 1,$$

ce qui est réalisable pour tout  $k \geq 2$ . Par exemple : - pour  $k = 2$ , on a  $|C| = 4$  comme unique valeur possible ; - pour  $k = 3$ ,  $|C| \in [7, 8]$  ; - pour  $k = 4$ ,  $|C| \in [11, 13]$ .

## A.2 Corrélations de rang entre quatre méthodes de classement

### A.2.1 Rho de Spearman pour $m = 2, 3$

**Tableau A.1:** Rho de Spearman pour  $m = 2, 3$  et les schémas de simulation 1 et 2

	$D$	$D'$	$D^*$	Borda		$D$	$D'$	$D^*$	Borda
$D$	1	0,80	0,95	0,95	$D$	1	0,60	0,90	0,86
$D'$	0,80	1	0,94	0,75	$D'$	0,60	1	0,88	0,50
$D^*$	0,95	0,94	1	0,89	$D^*$	0,90	0,88	1	0,76
Borda	0,95	0,75	0,89	1	Borda	0,86	0,50	0,76	1
(a) $m = 2$ , schéma 1					(b) $m = 2$ , schéma 2				
	$D$	$D'$	$D^*$	Borda		$D$	$D'$	$D^*$	Borda
$D$	1	0,49	0,86	0,83	$D$	1	0,24	0,67	0,64
$D'$	0,49	1	0,86	0,40	$D'$	0,24	1	0,68	0,22
$D^*$	0,86	0,86	1	0,71	$D^*$	0,67	0,68	1	0,53
Borda	0,83	0,40	0,71	1	Borda	0,64	0,22	0,53	1
(c) $m = 3$ , schéma 1					(d) $m = 3$ , schéma 2				

## A.2.2 Corrélations pour $m = 5$

**Tableau A.2:** Tau de Kendall pour  $m = 5$ , schémas de simulation 1 et 2

	$D$	$D'$	$D^*$	Borda	Égalités		$D$	$D'$	$D^*$	Borda	Égalités
$D$	1	0,10	0,53	0,42	27,9	$D$	1	0,02	0,16	0,12	40,8
$D'$	0,10	1	0,53	0,05	27,9	$D'$	0,01	1	0,16	0,01	40,8
$D^*$	0,53	0,53	1	0,31	35,0	$D^*$	0,16	0,16	1	0,09	42,7
Borda	0,42	0,05	0,31	1	0,7	Borda	0,12	0,01	0,09	1	1,0

(a) Schéma 1

(b) Schéma 2

**Tableau A.3:** Rho de Spearman pour  $m = 5$ , schémas de simulation 1 et 2

	$D$	$D'$	$D^*$	Borda		$D$	$D'$	$D^*$	Borda
$D$	1	0,16	0,55	0,48	$D$	1	0,03	0,17	0,14
$D'$	0,16	1	0,55	0,09	$D'$	0,03	1	0,17	0,02
$D^*$	0,55	0,55	1	0,36	$D^*$	0,17	0,17	1	0,11
Borda	0,48	0,09	0,36	1	Borda	0,14	0,02	0,11	1

(a) Schéma 1

(b) Schéma 2

## A.3 Renversement de classement avec la règle de Borda

**Tableau A.4:** Nombre de renversements de classement (RR) et de renversements stricts (BSRR) observés pour le jeu de données 1 avec la règle de Borda (100 répétitions). Les valeurs entre parenthèses indiquent le nombre de cas pour chaque position de l'objet supprimé.

n/m		2	3	5	10
$n = 3$	RR	<b>23</b> (3,3,0,17)	<b>11</b> (1,2,0,8)	<b>16</b> (0,0,0,16)	<b>13</b> (0,0,0,13)
	BSRR	<b>0</b> (0,0,0,0)	<b>2</b> (0,0,0,2)	<b>2</b> (0,0,0,2)	<b>5</b> (0,0,0,5)
$n = 5$	RR	<b>44</b> (8,8,0,28)	<b>46</b> (5,4,0,37)	<b>59</b> (0,0,0,59)	<b>37</b> (0,0,0,37)
	BSRR	<b>11</b> (3,3,0,5)	<b>15</b> (1,3,0,11)	<b>17</b> (0,0,0,17)	<b>13</b> (0,0,0,13)
$n = 7$	RR	<b>85</b> (16,16,0,53)	<b>86</b> (5,3,1,77)	<b>66</b> (0,0,0,66)	<b>64</b> (0,0,0,64)
	BSRR	<b>23</b> (5,5,0,13)	<b>25</b> (3,2,0,20)	<b>26</b> (0,0,0,26)	<b>37</b> (0,0,0,37)
$n = 10$	RR	<b>108</b> (22,20,0,66)	<b>131</b> (8,13,0,110)	<b>137</b> (1,1,0,135)	<b>120</b> (0,1,0,119)
	BSRR	<b>22</b> (7,5,0,10)	<b>36</b> (3,6,0,27)	<b>53</b> (0,1,0,52)	<b>72</b> (0,1,0,71)
$n = 20$	RR	<b>276</b> (51,51,0,174)	<b>268</b> (28,18,1,222)	<b>287</b> (5,10,0,272)	<b>296</b> (0,0,0,296)
	BSRR	<b>72</b> (17,19,0,36)	<b>70</b> (8,6,0,56)	<b>135</b> (4,6,0,125)	<b>179</b> (0,0,0,179)

**Tableau A.5:** Nombre de RR et BSRR observés pour le jeu de données 2 avec la règle de Borda (100 répétitions).

n/m		2	3	5	10
$n = 3$	RR	<b>22</b> (2,2,0,18)	<b>20</b> (2,1,0,17)	<b>21</b> (0,1,0,20)	<b>13</b> (0,0,0,13)
	BSRR	<b>0</b> (0,0,0,0)	<b>0</b> (0,0,0,0)	<b>0</b> (0,0,0,0)	<b>1</b> (0,0,0,1)
$n = 5$	RR	<b>61</b> (7,0,0,54)	<b>68</b> (4,1,0,63)	<b>42</b> (1,0,0,41)	<b>41</b> (0,0,0,41)
	BSRR	<b>3</b> (0,0,0,3)	<b>8</b> (3,0,0,5)	<b>6</b> (1,0,0,5)	<b>13</b> (0,0,0,13)
$n = 7$	RR	<b>74</b> (8,5,0,61)	<b>91</b> (2,4,0,85)	<b>97</b> (1,0,0,96)	<b>89</b> (0,0,0,89)
	BSRR	<b>1</b> (1,0,0,0)	<b>7</b> (1,1,0,5)	<b>20</b> (1,0,0,19)	<b>27</b> (0,0,0,27)
$n = 10$	RR	<b>145</b> (12,17,0,116)	<b>157</b> (5,6,0,146)	<b>151</b> (0,0,0,151)	<b>165</b> (0,0,0,165)
	BSRR	<b>7</b> (0,2,0,5)	<b>20</b> (1,1,0,18)	<b>32</b> (0,0,0,32)	<b>54</b> (0,0,0,54)
$n = 20$	RR	<b>335</b> (40,40,0,255)	<b>379</b> (12,16,0,351)	<b>398</b> (4,3,0,391)	<b>319</b> (0,0,0,319)
	BSRR	<b>15</b> (2,6,0,7)	<b>35</b> (3,4,0,28)	<b>70</b> (0,1,0,69)	<b>94</b> (0,0,0,94)