



N° d'ordre : 01/2005 - D/MT

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE**

FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

**PRESENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES
SPECIALITÉ : RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Par

Mustapha CHELLALI

THEME

ETUDE DE QUELQUES INVARIANTS DE GRAPHS

Soutenue le 22 février 2005, devant le jury composé de:

A. BERRACHEDI, Professeur, USTHB
A. KHELLADI, Professeur, USTHB
M. BLIDIA, Maître de Conférences, Univ. Blida
M. ABBAS, Professeur, USTHB
M. AIDER, Professeur, USTHB
I. BOUCHEMAKH, Maître de Conférences, USTHB
F. MAFFRAY, Directeur de recherche, CNRS/Grenoble

Président
Directeur de thèse
Codirecteur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma reconnaissance à mes directeurs de thèse, Abdelkader KHELLADI, Professeur à l'U.S.T.H.B et Mostafa BLIDIA, Maître de Conférences à l'université de Blida de m'avoir introduit dans ce sujet passionnant qui est la domination dans les graphes, d'avoir été à mes côtés depuis novembre 1995 pour la préparation du magister et du doctorat.

Je remercie Abdelhafid BERRACHEDI, Professeur à l'U.S.T.H.B pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également Moncef ABBAS et Meziane AIDER, Professeurs à l'U.S.T.H.B, Isma BOUCHEMAKH, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, ainsi que Frédéric MAFFRAY, Directeur de recherche à Grenoble pour l'honneur qu'ils me font d'avoir acceptés de faire partie du jury.

Je voudrais à la fin remercier toute personne ayant contribué à la réalisation de cette thèse.

RESUME :

L'objet principal de cette thèse est l'étude de quelques aspects théoriques des problèmes liés à la théorie de la domination dans les graphes.

Un sous-ensemble S de sommets d'un graphe $G=(V,E)$ est dit dominant si tout sommet de $V-S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G . La détermination de $\gamma(G)$ dans un graphe quelconque est extrêmement difficile. Plusieurs types de domination sont définis en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, citons la domination stable, double et couplée dont les paramètres associés sont désignés respectivement par $i(G)$, $\gamma_{x2}(G)$ et $\gamma_{pr}(G)$.

On commence par établir une nouvelle borne supérieure pour $i(G)$ améliorant la célèbre et vieille borne de Claude Berge établie pour $\gamma(G)$. Ensuite on caractérise les arbres extrémaux atteignant la borne pour les deux paramètres ainsi qu'une caractérisation des graphes réguliers atteignant la borne sur $\gamma(G)$. D'autres résultats sont obtenus en conséquence de cette nouvelle borne pour la somme et le produit des paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique d'un graphe.

On entame par la suite l'étude de la domination double où on établit une condition nécessaire et suffisante pour la minimalité (au sens de l'inclusion) des ensembles dominants doubles ainsi que divers bornes sur $\gamma_{x2}(G)$, en particulier dans le cas des arbres, suivies par des caractérisations des arbres extrémaux. On initie l'étude de la domination double exacte dans les graphes. On montre que le problème d'existence d'un ensemble dominant double exact est NP-complet en général et nous caractérisons par construction les arbres admettant de tels ensembles.

Concernant la domination couplée, nous citons en particulier une caractérisation par construction des arbres admettant un ensemble dominant couplé minimum unique. Nous montrons que $\gamma_{x2}(G) \geq \gamma_{pr}(G)$ si G est sans griffes ou bien un arbre non trivial et nous caractérisons les arbres extrémaux pour l'égalité.

Table des Matières

1	Concepts fondamentaux	6
1.1	Définitions préliminaires	6
1.2	Quelques graphes particuliers	7
1.3	Invariants de graphes	8
1.4	Apperçu sur la domination	9
1.5	Quelques types de domination	10
2	Une nouvelle borne supérieure pour les paramètres de domination inférieurs	13
2.1	Introduction	13
2.2	Une nouvelle borne supérieure	14
2.3	Graphes G tels que $\Psi(G) = n - \Delta'(G)$	16
2.3.1	Graphes G tels $i(G) = n - \Delta'(G)$	17
2.3.2	Graphes G tels que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$	21
2.4	Sommes et produits d'invariants	36
2.4.1	Les paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique d'un graphe	36
2.4.2	Relations Nordhaus-Gaddum pour le nombre de domination stable	42
3	La domination double dans les graphes	44
3.1	Introduction	44
3.2	Minimalité, bornes inférieures et supérieures	46
3.3	La domination double dans les arbres	51
3.3.1	Bornes inférieures	52
3.3.2	Bornes supérieures	56
3.4	La domination double exacte dans les graphes	66
3.4.1	Propriétés des ensembles dominants doubles exacts . . .	66
3.4.2	La NP-completude	68
3.4.3	Graphes ayant des ensembles dominants doubles exacts	70
4	La domination couplée dans les graphes	76
4.1	Introduction	76

4.2	Minimalité et bornes supérieures	78
4.3	L'unicité des ensembles dominants couplés	80
4.4	Relation entre les nombres de domination couplée et double .	87
4.5	Le nombre de domination couplée d'un graphe et de son complémentaire	96
5	Conclusion	99
6	Références bibliographiques	102

INTRODUCTION

Souvent, le moyen le plus commode lorsqu'on veut représenter certaines situations ou les relations existants entre les éléments d'un même système, est de dessiner des points et des traits joignant ces points. Ce dessin est appelé graphe, les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes (arcs, si les traits ont une orientation). La théorie des graphes qui consiste à étudier les différentes propriétés de ces graphes est devenue un outil puissant de la recherche opérationnelle pour la modélisation et la résolution de beaucoup de problèmes pratiques. Actuellement, la théorie des graphes englobe plusieurs domaines les uns aussi intéressant que les autres, citons par exemple la coloration, la stabilité, le couplage, la connectivité, etc..

L'objet principal de cette thèse est l'étude de quelques aspects théoriques des problèmes liés à la théorie de la domination.

La domination dans les graphes est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes, elle trouve son origine dans les problèmes de jeux d'échecs. Elle devient un domaine théorique à partir de 1958 grâce à Claude Berge et ne connaîtra sa véritable expansion qu'à partir de 1977 grâce aux travaux de Cockayne et Hedeniemi. L'intéressement majeur à cette théorie est dû à sa richesse dans de nombreuses applications (réseaux de communications, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc.) et aussi par ses multiples problèmes ouverts.

Qu'est ce qu'un dominant dans un graphe ?.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. En général, le problème de chercher l'ensemble dominant ayant la petite ou la grande taille est un problème extrêmement difficile. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination.

Plusieurs types de domination sont définis sur la base de définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants. Par exemples,

si on impose à ce que le dominant soit un stable alors on a la domination stable, si on impose à ce que tout sommet du graphe soit dominé au moins deux fois on a la domination double, et si on impose à ce que les sommets du dominant lui même soient couplés deux à deux on a la domination couplée. En particulier ces deux derniers types seront détaillés dans cette thèse. Les plus petits cardinaux de ces types de dominants sont appelés respectivement, les nombres de domination stable, domination double et domination couplée.

Vu la difficulté de la détermination de ces paramètres de domination, nous nous sommes fixés dans cette thèse les objectifs suivants :

- établir des bornes supérieures et inférieures simple à vérifier pour ces paramètres.
- chercher des inégalités entre ces paramètres permettant d'avoir une comparaison.
- Caractériser les graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans les inégalités et bornes établies.
- Etudier les différentes propriétés des ensembles liés à la domination (existence, minimalité, unicité). Sont ils disjoints ?.

Il est à signaler que les travaux qui sont exposés dans cette thèse sont le fruit d'une collaboration avec beaucoup de chercheurs, dont certains sont des spécialistes dans le domaine de la domination dans les graphes.

Le chapitre 1 contient les principales définitions et terminologies de la théorie des graphes utilisées dans cette thèse et donne aussi un aperçu général sur la domination dans les graphes.

On commence le chapitre 2 par donner une amélioration significative de la borne déjà établie sur le nombre de domination stable et sur le nombre de domination dans tout graphe (la borne supérieure sur ce dernier datait de 1958 et est due à Claude Berge). Nous donnons une caractérisation des arbres pour lesquels la nouvelle borne est atteinte pour les deux paramètres. On donnera aussi une caractérisation descriptive complète des graphes réguliers atteignant la borne supérieure pour le nombre de domination. Nous nous intéresserons par la suite à la somme et produit d'invariants, en particulier le cas des paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique. Nous établissons ainsi de nouvelles bornes qui pour certaines améliorent celles de Gernert, Topp et Volkmann. Nous clôturons ce chapitre en donnant une nouvelle borne supérieure de type Nordhauss-Gaddum pour le produit des nombres de domination stable d'un graphe et de son complémentaire.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la domination double dans les graphes introduite assez récemment par Haynes et Harary (article paru en 2000 à la revue

Ars Combinatoria). Nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour la minimalité (au sens de l'inclusion) des ensembles dominants doubles ainsi que divers bornes sur le nombre de domination. Nous étudions dans ce chapitre d'une part la domination double dans la classe des arbres où plusieurs bornes sont établies suivies dans la plupart des cas par une caractérisation des arbres atteignant l'égalité pour ces bornes. D'autre part, on aborde l'étude de la domination double exact (tout sommet du graphe est dominé exactement deux fois). Divers propriétés sont établies sur les ensembles dominants doubles exacts, en particulier si un graphe admet de tels ensembles alors ils sont tous de même taille. Nous montrons que le problème d'existence de ces ensembles dans un graphe quelconque est NP-complet, et donnons en particulier une caractérisation constructive des arbres possédant des ensembles dominants doubles exact ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de tels ensembles dans les graphes 3-réguliers connexes.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à la domination couplée introduite aussi assez récemment par Haynes et Slater (article paru en 1998 à la revue *Networks*). Outre la minimalité (au sens de l'inclusion) des ensembles dominants couplés et les divers bornes sur le nombre de domination couplé qui sont établies, les résultats principaux de ce chapitre concernent premièrement l'unicité des ensembles dominants couplés dans les arbres où une caractérisation par construction des arbres possédant un unique dominant couplé minimum est donnée. Deuxièmement, on cherche à établir une comparaison entre le nombre de domination double et couplé. Les deux paramètres sont incomparables en général mais on montre que pour les graphes sans griffes et les arbres le nombre de domination couplé est borné supérieurement par le nombre de domination double. A cet effet, on présente deux caractérisations (descriptive et constructive) des arbres pour lesquels les deux paramètres sont égaux.

La thèse s'achève par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé et sur les perspectives futures dans ce domaine.

Chapitre 1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Nous donnons dans cette partie les terminologies et définitions usuelles utilisées le long de cette thèse. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux livres de Berge ([5, 6]) ou bien au livre de Chartrand et Lesniak ([15]).

1.1 Définitions préliminaires

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E . Le cardinal de V est appelé *l'ordre* de G , noté souvent par n . Une *arête* $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par abus $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de e . On dira dans ce cas que u et v sont *adjacent* et que e est *incidente* à u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis. Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. S'il n'y a pas de confusion, nous écrirons $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement, de même pour $N_G(S)$ et $N_G[S]$. Le *degré* d'un sommet $v \in V$ noté $d_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul sera dit un *sommet isolé* et un sommet de degré égal à un sera dit *pendant* tandis que le sommet adjacent à un sommet pendant sera dit *support*. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum* dans G respectivement. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $d(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

Une *chaîne* C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \dots, v_k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k - 1$ représente la longueur de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne C . Une chaîne est dite *élémentaire* (resp. *simple*) si tous ses sommets sont distincts (resp. toutes ses arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs

dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets et notée par P_n est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe G notée $d(x, y)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant x et y . L'*excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max\{d(v, w), w \in V\}$ et le *diamètre* de G noté $diam(G)$ est égal à $\max\{exc(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé *centre*.

1.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous graphe induit* par S noté par $G[S]$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S . Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$, le *graphe partiel* de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U .

Le *graphe complémentaire* de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G .

Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

Un graphe est dit *biparti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impair. Un graphe *bipartit complet* est $K_{p,q}$ avec p et q des entiers positifs. Un *arbre* est un graphe biparti connexe ayant exactement $(n - 1)$ arêtes. Une *forêt* est un graphe ou chaque composante connexe est un arbre.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe *k -régulier*. Ainsi les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-régulier.

La *couronne* H^* d'un graphe H est un graphe obtenu par une copie de H où chaque sommet de H est adjacent à un sommet pendant (voir Figure 1.).

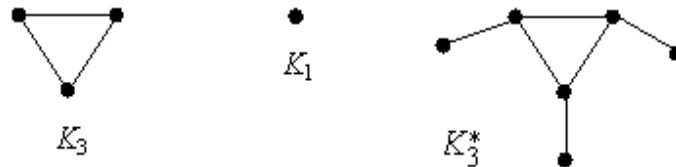


Figure 1. Graphe couronne K_3^*

Il est à noter que l'ordre de H^* est $2|V(H)|$.

1.3 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriété stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Voici les définitions de quelques invariants de graphes utilisés dans cette thèse. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n .

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. On notera par $\beta(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G . Le couplage est dit *parfait* dans G si $\beta(G) = n/2$. Il est à noter que $\beta(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G (Voir [28]).

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *stable* de G si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal de G noté $i(G)$ (resp. $\alpha(G)$) est appelé le *nombre de domination stable* (resp. le *nombre de stabilité*) de G .

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *2-stable* dans G si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble de 2-stable de G noté $\rho(G)$ est appelé le *nombre de 2-stabilité*.

Une *coloration* d'un graphe G est une affectation des couleurs aux sommets de G de telle manière que deux sommets adjacents quelconques sont affectés de couleurs différentes. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour une coloration de G . L'un des vieux résultats établis sur $\chi(G)$ est celui de Brooks [13].

Théorème 1.1 (Brooks [13]) *Pour tout graphe G , $\chi(G) \leq \Delta + 1$. L'égalité est atteinte si et seulement si $\Delta \neq 2$ et G contient un sous graphe $K_{\Delta+1}$ qui soit une composante connexe ou bien $\Delta = 2$ et G possède un cycle C_{2k+1} qui soit une composante connexe.*

1.4 Apperçu sur la domination

Commençons par donner la définition des ensembles dominants dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets D de V est un *dominant* si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G appelé *nombre de domination* est noté par $\gamma(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G appelé *nombre de domination supérieur* est noté par $\Gamma(G)$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{ème} siècle en Inde (Voir [55]). En 1862 De Jaenisch [27] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [38].

En 1958, Claude Berge [5] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [66] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [24] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [11, 61, 62]). Une étude approfondie de quelques types de domination sera l'objet des prochains chapitres. Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple: la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

En 1990, Un numéro spécial de la revue Discrete Mathematics édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar (Voir [56]) ont inclus une liste de quelques 400 références.

On dénombre actuellement quelques 80 types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 1200 références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([46], [47]).

1.5 Quelques types de domination

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement aux types de domination qui seront étudiés ou ayant un lien avec les types étudiés. Pour en savoir plus sur les types de domination, voir [46].

La notion de stabilité dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable est maximal si et seulement si c'est un dominant. Par conséquent la stabilité maximal peut être vue comme un cas particulier des ensembles dominants. Dans ce cas, on a pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G)$. En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller [25] ont donné une extension à cette chaîne d'inégalités en introduisant une nouvelle notion liée à la domination à savoir l'irrédondance définie comme suit:

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *irrédondant* si pour tout sommet $x \in S$ on a, $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$. Dans ce cas, l'ensemble $N[x] - N[S - \{x\}]$ est appelé le *voisinage privé de x relatif à S* et il est noté par $pn(x, S)$. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté $ir(G)$ (resp. $IR(G)$) est appelé le *nombre d'irrédondance* (resp. *le nombre d'irrédondance supérieure*). Aussi, il est facile de voir ici que tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant. En conséquence, on a la célèbre chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [25] qui relient les six paramètres de domination pour tout graphe G :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

Les paramètres $ir(G)$, $\gamma(G)$ et $i(G)$ (resp. $\alpha(G)$, $\Gamma(G)$ et $IR(G)$) sont appelés les *paramètres de domination inférieurs* (resp. *supérieurs*).

Pour un graphe G , un ensemble S est dit $\gamma(G)$ -ensemble si S est un dominant et $|S| = \gamma(G)$. Il en sera similairement pour les autres paramètres.

Plusieurs problèmes ont été posés sur la chaîne d'inégalités précédente, on cite par exemple:

- La caractérisation des graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans une ou plusieurs inégalités, en particulier l'égalité entre $\gamma(G)$ et $i(G)$. Il faut noter qu'une caractérisation par sous graphes interdit ne peut avoir lieu car tout graphe H tel que $\gamma(H) \neq i(H)$ est contenu dans un graphe G pour le quel on a $\gamma(G) = i(G)$, en effet il suffit d'ajouter un sommet attaché à tous les autres sommets de H . Nous aurons dans ce cas $\gamma(G) = i(G) = 1$. Ce problème est considéré comme étant très difficile. Il faut signaler que deux remarquables travaux assez récent ont été réalisés dans ce sens, le premier est celui de Cockayne, Favaron, Mynhardt et Puech [22] et le second est celui de Haynes et Henning [49] généralisant le premier travail.
- Un cas particulier du problème précédent est de caractériser les graphes pour lesquels deux paramètres sont fortement égaux. Ce problème introduit par Haynes et Slater [53] est posé comme suit:
 Deux paramètres $\mu_1(G)$ et $\mu_2(G)$ avec $\mu_1(G) \leq \mu_2(G)$ sont dit fortement égaux si $\mu_1(G) = \mu_2(G)$ et de plus tout $\mu_1(G)$ -ensemble est aussi un $\mu_2(G)$ -ensemble. La forte égalité de $\mu_1(G)$ et $\mu_2(G)$ est désignée par $\mu_1(G) \equiv \mu_2(G)$. Le lecteur peut consulter les deux travaux réalisés dans ce sens par Haynes, Henning et Slater (Voir [51, 52])
- Donner une extension de cette chaîne à d'autres paramètres de domination.

En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi [23] introduisent les ensembles dominants totaux qui sont définis comme étant des ensembles dominants sans sommets isolés, c'est à dire que chaque sommet de l'ensemble possède au moins un autre voisin dans le même ensemble. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total $\gamma_t(G)$ est appelé le *nombre de domination totale*. Dans ce cas pour tout graphe G sans sommets isolés on a $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$.

Deux autres types de domination introduits assez récemment seront l'objet des chapitres 3 et 4, à savoir la domination double et la domination couplé dans les graphes.

Nous clôturons ce chapitre en donnant un résumé des problèmes les plus importants posés dans l'étude de l'ensemble de ces types de domination, à savoir:

- 1) Vu la NP-complétude de la détermination de ces paramètres, il est normal de chercher des algorithmes polynomiaux dans des classes particulières de graphes ayant des structures simples. Par exemples, les arbres, les graphes triangulés, les graphes d'intervalles, les blocs graphes, les graphes fortement triangulés, les graphes bipartis,.....

- 2) En l'absence de valeurs exactes pour ces paramètres, on est poussé aussi vers la recherche de bornes supérieures et inférieures simples à vérifier, c'est à dire qu'elles soient en fonction de l'ordre de G , degré maximum, degré minimum, etc..
- 3) Chercher les graphes extrémaux c'est à dire caractériser les graphes pour les quelles ces bornes sont atteintes.
- 4) Pour un parametre de domination quelconque $\mu(G)$, déterminer des relations de type Nordhauss-Gaddum pour le produit et la somme, i.e: trouver deux fonctions $f_1(n, \Delta, \delta)$ et $f_2(n, \Delta, \delta)$ telles que:

$$\begin{aligned}\mu(G) + \mu(\overline{G}) &\leq f_1(n, \Delta, \delta) \text{ et} \\ \mu(G)\mu(\overline{G}) &\leq f_2(n, \Delta, \delta)\end{aligned}$$

- 5) Etudier en général, la relation entre ces paramètres. Détermination des bornes supérieures et inférieures pour une fonction $f(\mu(G), \lambda(G))$ de deux paramètres. Sont ils comparables?, pour quelles classes de graphes sont t-ils comparables?.

Chapitre 2

UNE NOUVELLE BORNE SUPÉRIEURE POUR LES PARAMÈTRES DE DOMINATION INFÉRIEURS

2.1 Introduction

Dans l'étude des paramètres de domination, on s'intéresse en premier lieu à déterminer leurs valeurs d'une façon exactes, grâce à des relations directes en fonction des données (l'ordre, degré maximum,...) ou bien par des algorithmes polynomiaux. Cependant pour un graphe quelconque, la détermination de la plupart de ces paramètres est un problème NP-complet. D'où le recours à la recherche des bornes supérieures et inférieures. Evidemment, la borne qui sera atteinte sera acceptable et souvent il est difficile de l'améliorer.

Les deux premières bornes établies pour le nombre de domination $\gamma(G)$ sont celles de Berge [5] et d'Ore [66].

Théorème 2.1 ([5]) *Pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq n - \Delta$.*

Cette borne a été étendue par Domke, Dunbar et Markus [26] pour les paramètres de domination inférieurs.

Théorème 2.2 ([26]) *Pour tout graphe G , $\Psi(G) \leq n - \Delta$, où $\Psi = ir, \gamma$ ou i .*

Théorème 2.3 ([66]) *Si G est un graphe sans sommets isolés alors $\gamma(G) \leq n/2$.*

Des problèmes intéressants se posent dès lors, établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces bornes soient atteintes.

Une vingtaine d'années après son établissement, une caractérisation des graphes atteignant la borne supérieure de Ore a été donnée indépendamment par Payan et Xuong [67] et Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [35].

Théorème 2.4 ([67, 35]) *Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n pair. Alors $\gamma(G) = n/2$ si et seulement si toutes les composantes connexes de G sont des cycles C_4 ou bien des couronnes H^* où H est un graphe connexe quelconque.*

Dans [26], Domke, Dunbar et Markus ont caractérisé les graphes bipartis pour lesquels la borne du Théorème 2.2 est atteinte pour chacun des trois paramètres. Par la suite, Favaron et Mynhardt [32], ont établi une condition nécessaire et suffisante pour que cette borne soit atteinte pour tout graphe dans chaque cas.

2.2 Une nouvelle borne supérieure

Nous proposons dans cette partie une borne supérieure pour les paramètres de domination inférieurs améliorant ainsi la borne de Domke, Dunbar et Markus. Voici d'abord un résultat nécessaire pour la suite.

Théorème 2.5 ([74]) *Pour tout graphe G on a,*

- a) $\beta(G) \leq \frac{n}{2}$,
- b) $\alpha(G) + \beta(G) \leq n$.

Notons par $\overline{N}(v) = V(G) - N[v]$ le non-voisinage d'un sommet v de G et par $\beta_v(G)$ le couplage maximum dans le sous graphe induit par $\overline{N}(v)$.

Théorème 2.6 ([9]) *Si G est un graphe alors pour tout sommet v de G on a,*
 $i(G) \leq n - d(v) - \beta_v(G)$.

Preuve. Soient v un sommet de $V(G)$ et S un i -ensemble du graphe $G[\overline{N}(v)]$. Alors $S \cup \{v\}$ est un ensemble stable maximal de G . Donc

$$i(G) \leq |S| + 1 = i(G[\overline{N}(v)]) + 1.$$

D'après le théorème 2.5-b,

$$i(G[\overline{N}(v)]) \leq \alpha(G[\overline{N}(v)]) \leq n - (d(v) + 1) - \beta(G[\overline{N}(v)])$$

et par conséquent $i(G) \leq n - d(v) - \beta_v(G)$. ■

On notera pour la suite $\Delta'(G)$ la quantité $\max\{d(v) + \beta_v(G) \mid v \in V(G)\}$. On appellera alors un *sommet bon* tout sommet v pour lequel $d(v) + \beta_v(G) = \Delta'(G)$. Il est à rappeler que $\beta_v(G)$ peut être calculer polynomialement (voir [28]) et par suite $\Delta'(G)$ se calcule aussi polynomialement.

Corollaire 2.7 *Pour tout graphe G , on a*

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq n - \Delta'(G). \quad (*)$$

Introduisons quelques définitions et notation supplémentaires. Pour un sous-ensemble X de V , on écrit parfois $G - X$ pour désigner le sous graphe induit par les sommets de $V - X$.

Définition 2.8 *Un graphe G est dit couronné, si pour tout sommet bon $v \in V(G)$ toute composante connexe de $G[\overline{N}(v)]$ est ou bien un sommet isolé ou bien un cycle C_4 ou bien une couronne H^* , où H est un graphe connexe quelconque.*

Notation 2.9 *Soit v un sommet bon de $G = (V, E)$. On désignera par $B(v)$ l'ensemble des composantes non triviales de $G[\overline{N}(v)]$. Il faut noter que $\beta_v(G) = \sum \{\beta(C) \mid C \in B(v)\}$. On utilisera aussi la notation suivante (voir Figure 2):*

- $N^0(v) = \{x \in N(v) \mid x \text{ n'a aucun voisin dans } \overline{N}(v)\},$
- $I(v)$ ensemble des sommets isolés dans $G[\overline{N}(v)],$
- $N^I(v) = \{x \in N(v) \mid x \text{ a un voisin dans } I(v)\},$
- Pour un sommet $z \in N(v)$, on désigne par $P_z(v)$ l'ensemble des voisins de z qui sont pendants dans une composante connexe de $G[\overline{N}(v)]$ d'ordre au moins 4,
- $P(v) = \bigcup \{P_z(v) \mid z \in N(v)\},$
- $N^P(v) = \{z \in N(v) \mid P_z(v) \neq \emptyset\},$
- $N^X(v) = N(v) - (N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v)),$
- Pour $Y \in \{I, P, X\}$, $B_Y(v)$ désignera l'ensemble des composantes non triviales de $G[\overline{N}(v)]$ adjacent à au moins un sommet de $N^Y(v)$.
Donc $B(v) = B_I(v) \cup B_P(v) \cup B_X(v)$, et
- $B'(v) = \{C \in B_P(v) \mid C \cap P(v) \neq \emptyset\}$, i.e: $B'(v)$ est l'ensemble des composantes connexes de $B_P(v)$ contenant les sommets de $P(v)$. Il faut noter que $B'(v) \subseteq B_P(v)$.

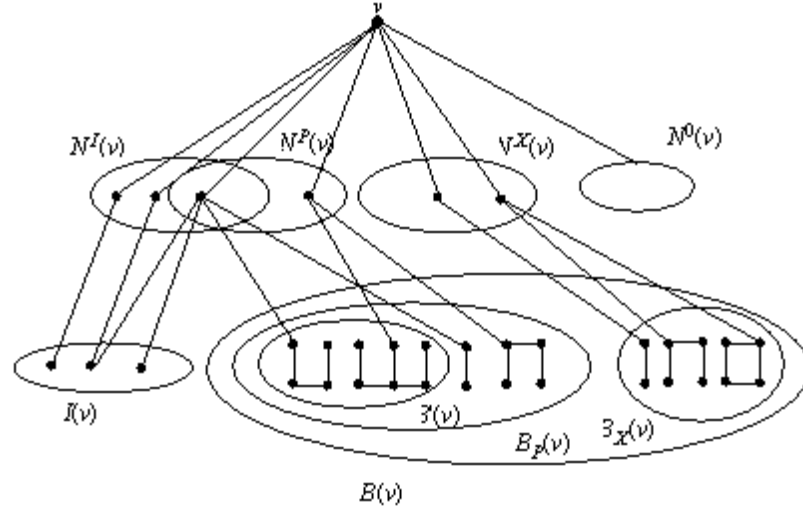


Figure 2.2. Un graphe couronné

Remarque 2.10 Soit H^* une couronne du graphe H . Alors l'ordre de H^* est $2|V(H)|$ et H^* admet un couplage parfait unique. De plus:

- Tout ensemble stable maximal S^* de H^* contenant un ensemble stable S de H contient les sommets pendants de H^* adjacents aux sommets de $H - S$. Par conséquent, tous les ensembles stables maximaux de H^* sont de même cardinal et donc $i(H^*) = \alpha(H^*) = |V(H)| = \beta(H^*)$. Par ailleurs si y est un sommet pendant de H^* alors $i(H^* - y) = i(H^*) - 1$ et si x est un sommet de H alors $i(H^* - x) = i(H^*)$.
- Si D est ensemble dominant de H^* de cardinal minimum alors pour chaque sommet pendant y de H^* , D contient y ou bien son voisin. Par conséquent $\gamma(H^*) = |V(H)|$. Par ailleurs, si y est un sommet pendant de H^* alors $\gamma(H^* - y) = \gamma(H^*) - 1$ et si x est un sommet de H alors $\gamma(H^* - x) = \gamma(H^*)$.

2.3 Graphes G tels que $\Psi(G) = n - \Delta'(G)$

La question immédiate qui suit l'établissement de la borne (*) est la suivante:

Quels sont les graphes G pour lesquels on a $\Psi(G) = n - \Delta'(G)$?

Nous donnons dans cette partie une réponse à cette question dans les cas suivants:

- G est un arbre et $\Psi = i$,

- G est un arbre et $\Psi = \gamma$,
- G est un graphe régulier et $\Psi = \gamma$.

2.3.1 Graphes G tels $i(G) = n - \Delta'(G)$

Nous commençons par donner une condition nécessaire pour les graphes satisfaisant $i(G) = n - \Delta'(G)$.

Un graphe G est dit bien couvert si tout ensemble stable maximal est maximum, i.e: $\alpha(G) = i(G)$. Les graphes bien couvert ont été introduits en 1970 par Plummer [68].

Lemme 2.11 *Soit G un graphe satisfaisant $i(G) = n - \Delta'(G)$. Alors pour tout sommet bon v , $G[\overline{N}(v)]$ est bien couvert.*

Preuve. Soient G un graphe satisfaisant $i(G) = n - \Delta'(G)$, v un sommet bon et Y un ensemble stable maximal de $G[\overline{N}(v)]$ tel que $|Y| = i(G[\overline{N}(v)])$. Alors $Y \cup \{v\}$ est un ensemble stable maximal de G , d'où $|Y \cup \{v\}| \geq i(G)$. Donc

$$\beta_v(G) + d(v) + |Y| + 1 \geq i(G) + \beta_v(G) + d(v) = n.$$

Ceci implique que,

$$\beta_v(G) + |Y| \geq n - (d(v) + 1) = |\overline{N}(v)|.$$

D'un autre côté, d'après le Théorème 2.5-b,

$$|\overline{N}(v)| \geq \beta_v(G) + \alpha(G[\overline{N}(v)]) \geq \beta_v(G) + i(G[\overline{N}(v)]) \geq |\overline{N}(v)|.$$

Par conséquent, $\alpha(G[\overline{N}(v)]) = i(G[\overline{N}(v)])$, i.e: $G[\overline{N}(v)]$ est bien couvert. ■

Dans [71], Ravindra caractérise les arbres bien couverts comme suit.

Théorème 2.12 ([71]) *Un arbre T est bien couvert si et seulement si T est réduit à un sommet ou bien T est une couronne d'un arbre.*

Le résultat suivant est une conséquence du Lemme 2.11 et le Théorème 2.12.

Corollaire 2.13 *Pour tout arbre T , si $i(T) = n - \Delta'(T)$ alors T est un arbre couronné.*

Preuve. Supposons que T est un arbre satisfaisant $i(T) = n - \Delta'(T)$ et v un sommet bon de T . D'après le Lemme 2.11 et le Théorème 2.12, $T[\overline{N}(v)]$ est bien couvert et donc toute composante connexe de $T[\overline{N}(v)]$ est ou bien un sommet isolé ou bien une couronne H^* où H est un arbre quelconque. ■

Remarque 2.14 Soient T un arbre couronné tel que $i(T) = n - \Delta'(T)$ et v un sommet bon de T . Alors $\beta_v(T) = i(T[\overline{N}(v) - I(v)]) = (n - (d(v) + 1) - |I(v)|)/2$ et $n - \Delta'(T) = \beta_v(T) + |I(v)| + 1$.

Remarque 2.15 Soient T un arbre couronné et v un sommet bon de T . Alors le sous graphe $T[\overline{N}(v)]$ est une forêt et donc un graphe biparti. Vu que T est un arbre, alors chaque composante connexe C_i de $T[\overline{N}(v)]$ est connectée à un seul sommet de $N(v)$. Donc l'union U de toutes les composantes non triviales de $T[\overline{N}(v)]$ admet une bipartition A_1, A_2 telle que A_1 contient les sommets de U adjacents à $N(v)$. Vu que chaque composante non triviale de $T[\overline{N}(v)]$ est une couronne alors le sous graph $G[U]$ admet un couplage parfait et donc on a,

$$|A_1| = |A_2| = |U|/2 = |\overline{N}(v) - I(v)|/2 = \beta_v(T)$$

Le résultat suivant est une caractérisation des arbres tels que $i(T) = n - \Delta'(T)$.

Théorème 2.16 Soit T un arbre. Alors $i(T) = n(T) - \Delta'(T)$ si et seulement si T est un arbre couronné et pour tout sommet bon $v \in V(T)$ on a ou bien $N(v) = N^X(v)$ ou bien $|N(v) - N^X(v)| > |I(v)| + |P(v)|$.

Preuve. Etablissons la condition nécessaire. Soit T un arbre avec $i(T) = n(T) - \Delta'(T)$. D'après le Corollaire 2.13, T est un arbre couronné. Soit v un sommet bon de T et considérons les ensembles de sommets suivants:

$$\begin{aligned} S_1 &= N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) = N(v) - N^X(v), \\ S_2 &= \bigcup \{A_1 \cap C \mid C \in B_X(v)\}, \\ S_3 &= \bigcup \{A_1 \cap C \mid C \in B'(v)\} - P(v), \\ S_4 &= \bigcup \{A_2 \cap C \mid C \in B_P(v) - B'(v)\}. \end{aligned}$$

Si $N(v) \neq N^X(v)$, alors $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ est un stable maximal de T . D'après la remarque 2.15, on a

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= |N(v) - N^X(v)| + \beta_v(T) - |P(v)| \\ &\geq i(T) = \beta_v(T) + |I(v)| + 1. \end{aligned}$$

Donc $|N(v) - N^X(v)| > |I(v)| + |P(v)|$.

Inversement, soit v un sommet bon de T et supposons que T est un arbre couronné vérifiant ou bien $N(v) = N^X(v)$ ou bien $|N(v) - N^X(v)| > |I(v)| + |P(v)|$. Soit S un i -ensemble de T et considérons les deux cas suivants:

Cas 1. S contient v . Dans ce cas S ne contient aucun sommet de $N(v)$. Par conséquent $I(v) \subset S$ et toute composante non triviale C de $T[\overline{N}(v)]$, possède exactement $\beta(C)$ sommets dans S , car C est une couronne. Et d'après la remarque 2.14 on a,

$$|S| = \beta_v(T) + |I(v)| + 1 = n - \Delta'(T).$$

Cas 2. S ne contient pas v . On supposera de plus que parmi tous les i -ensembles de T ne contenant pas v , S contient le maximum de sommets de $N(v)$. Alors il est à remarquer que:

- $N^0(v) \subseteq S$.
- Pour tout $y \in I(v)$, S contient ou bien y ou bien un sommet de $N(v) \cap N(y)$.
- Si $x \in N^I(v) - N^P(v)$ alors $x \in S$ sinon l'ensemble $S \cup \{x\} - (N(x) \cap I(v))$ est un i -ensemble de T possédant plus de sommets de $N(v)$ que S , contradiction avec le choix de S .
- Considérons un sommet $x \in N^P(v)$ et soit C l'union de toutes les composantes connexes non triviales de $B'(v)$ qui ont un sommet pendant dans $P_x(v)$.
Si $x \in S$ alors $S \cap C$ est un ensemble stable maximal de $C - C \cap N(x)$. Donc $|S \cap C| = \beta(C) - |P_x(v)|$, vu la Remarque 2.10 et que C est une couronne.
Si $x \notin S$ alors $S \cap C$ est un ensemble stable maximal de C et donc $|S \cap C| = \beta(C)$, vu la Remarque 2.10. Dans ce cas, considérons l'ensemble stable maximal

$$S' = (S \cup \{x\} \cup (C \cap A_1 - P_x(v))) - ((S \cap C) \cup (N(x) \cap I(v))).$$

Alors on a $|S'| \leq |S|$ et S' contient plus de sommets de $N(v)$ que S , contradiction. Donc on supposera que $x \in S$.

- Pour toute composante $C \in B(v) - B'(v)$, S contient $\beta(C)$ sommets de C , indépendamment du statut du sommet de $N(v)$ adjacent à C s'il est dans S ou non.

D'après ces remarques et le choix de l'ensemble S , on conclut que $N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) \subseteq S$. On distingue les deux sous cas suivants:

Cas 2.1. $N(v) = N^X(v)$, i.e., $N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) = \emptyset$.

Dans ce cas $I(v) = \emptyset$. Supposons que $|S \cap N(v)| \geq 2$, et désignons par U l'union de toutes les composantes connexes non triviales de $T[\overline{N}(v)]$ adjacentes à $S \cap N(v)$. Par la Remarque 2.10 on a, $|S \cap U| = \beta(U)$, mais dans ce cas l'ensemble $S \cup \{v\} - (S \cap N(v))$ est un stable maximal de T de cardinal strictement inférieur à celui de S , contradiction. Par conséquent, $|S \cap N(v)| = 1$ et donc on a,

$$|S| = \beta_v(T) + 1 = n - d(v) - \beta_v(T) = n - \Delta'(T).$$

Cas 2.2. $N(v) \neq N^X(v)$, i.e., $N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) \neq \emptyset$.

Rappelons que $N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) \subseteq S$. Ceci implique que $S \cap N^X(v) = \emptyset$, sinon $S - (S \cap N^X(v))$ est un stable maximal de T de cardinal inférieur à celui de S , contradiction. Donc,

$$S = N^0(v) \cup N^I(v) \cup N^P(v) = N(v) - N^X(v).$$

Par conséquent,

$$|S| = |N(v) - N^X(v)| + \beta_v(T) - |P(v)|.$$

D'après la seconde condition de l'hypothèse on a,

$$|S| > |I(v)| + |P(v)| + \beta_v(T) - |P(v)| = n - d(v) - 1 - \beta_v(T).$$

Ceci implique que $|S| \geq n - d(v) - \beta_v(T) = n - \Delta'(T)$.

Par conséquent, dans tous les cas, tout i -ensemble de T contient au moins $n - \Delta'(T)$ sommets. L'égalité est obtenue par le Corollaire 2.7. ■

Le résultat suivant est une caractérisation des cycles C_n satisfaisant $i(C_n) = n - \Delta'(C_n)$.

Théorème 2.17 ([9]) *Soit G un cycle d'ordre n . Alors $i(C_n) = n - \Delta'(C_n)$ si et seulement si $G = C_3, C_4, C_5$ ou C_7 .*

Preuve. Soit G un cycle tel que $i(C_n) = n - \Delta'(C_n)$ et considérons un sommet v quelconque de C_n . D'après le Lemme 2.11 $G[\overline{N}(v)]$ est bien couvert. Il est clair dans ce cas que $|I(v)| \leq 1$.

Si $\overline{N}(v) = \emptyset$ alors $G = C_3$.

Si $\overline{N}(v) \neq \emptyset$ alors ou bien $|I(v)| = 1$, et donc $G = C_4$ car $G[\overline{N}(v)]$ ne contient aucune composante non triviale, ou bien $|I(v)| = 0$, et donc $G = C_5$ ou C_7 car les composantes non triviales de $G[\overline{N}(v)]$ sont P_2 ou P_2^* respectivement.

La condition suffisante est facile à vérifier. ■

2.3.2 Graphes G tels que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$

Nous commençons par donner une condition nécessaire pour tout graphe G satisfaisant $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$.

Lemme 2.18 ([9]) *Soit G un graphe tel que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$. Alors G est un graphe couronné et $\gamma(G) = \beta_v(G) + |I(v)| + 1$ pour tout sommet bon de G .*

Preuve. Soit G un graphe vérifiant $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$. Soient v un sommet bon de G et D un γ -ensemble de $G[\overline{N}(v) - I(v)]$. Alors $D \cup I(v) \cup \{v\}$ est un ensemble dominant de G et donc $\gamma(G) \leq |D| + |I(v)| + 1$. Puisque $G[\overline{N}(v) - I(v)]$ est sans sommets isolés, alors d'après les Théorèmes 2.3 et 2.5-a on a, $|D| \leq |\overline{N}(v) - I(v)| / 2$ et $\beta_v(G) \leq |\overline{N}(v) - I(v)| / 2$.

Maintenant, comme G satisfait $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ on a,

$$\begin{aligned} n &= \gamma(G) + \beta_v(G) + d(v) \leq |D| + |I(v)| + 1 + \beta_v(G) + d(v) \\ &\leq |\overline{N}(v) - I(v)| + |I(v)| + 1 + d(v) = n. \end{aligned}$$

Ceci implique,

$$\beta_v(G) + |D| = n - (d(v) + 1) - |I(v)| = |\overline{N}(v) - I(v)|$$

et donc $|D| = \beta_v(G) = |\overline{N}(v) - I(v)| / 2$.

D'après le Théorème 2.4, chaque composante connexe de $G[\overline{N}(v) - I(v)]$ est ou bien un cycle C_4 ou bien une couronne H^* . Par conséquent, G est un graphe couronné. Dans ce cas, on a aussi $\gamma(G) = n - \Delta'(G) = \beta_v(G) + |I(v)| + 1$. ■

Lemme 2.19 ([9]) *Soit G un graphe tel que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$. Alors pour tout sommet bon v de G , tout sommet de $N^I(v)$ est adjacent à exactement un sommet de $I(v)$.*

Preuve. D'après le Lemme 2.18, G est un graphe couronné. Soient v un sommet bon de G et D un γ -ensemble de $G[\overline{N}(v) - I(v)]$. Il est clair que $|D| = \beta_v(G)$. Supposons que x est un sommet de $N^I(v)$ adjacent à deux sommets y et w de $I(v)$. Dans ce cas, $D \cup (I(v) - \{y, w\}) \cup \{v, x\}$ est un ensemble dominant de G de taille $\beta_v(G) + |I(v)| < n - \Delta'(G)$, contradiction. ■

Nous donnons maintenant une caractérisation des arbres T tels que $\gamma(T) = n - \Delta'(T)$.

Théorème 2.20 ([9]) *Soit T un arbre. Alors $\gamma(T) = n - \Delta'(T)$ si et seulement si T est un arbre couronné et pour tout sommet bon v de T , les conditions suivantes sont vérifiées:*

- (a) $|N^I(v)| = |I(v)|$,
- (b) pour tout sommet $z \in N(v) - N^I(v)$ on a, $|P_z(v)| \leq 1$,
- (c) $N^I(v) \cap N^P(v) = \emptyset$,
- (d) ou bien $N^0(v) \neq \emptyset$ ou bien $I(v) = \emptyset$ et $N^P(v) = \emptyset$.

Preuve. Soit T un arbre vérifiant $\gamma(T) = n - \Delta'(T)$. D'après le Lemme 2.18, T est un arbre couronné. Soit v un sommet bon de T . On utilisera les arguments et notations donnés dans la Remarque 2.15.

(a) D'après le Lemme 2.19 et puisque T est un arbre on a $|N^I(v)| = |I(v)|$.

(b) Supposons qu'il existe un sommet $z \in N(v) - N^I(v)$ avec $|P_z(v)| > 1$, et soient x, y deux sommets de $P_z(v)$. Alors $x, y \in A_1$. D'où $(A_1 - \{x, y\}) \cup I(v) \cup \{v, z\}$ est un dominant de T de taille $n - \Delta'(T) - 1$, contradiction.

(c) Supposons qu'il existe $z \in N^I(v)$ avec $P_z(v) \neq \emptyset$ et soit y l'unique voisin de z dans $I(v)$. Alors d'après la Remarque 2.15 on a $P_z(v) \subset A_1$.

Donc $(A_1 - P_z(v)) \cup (I(v) - \{y\}) \cup \{v, z\}$ est un dominant de T de taille

$$\beta_v(T) - |P_z(v)| + |I(v)| + 1 \leq \beta_v(T) + |I(v)| < n - \Delta'(T),$$

contradiction.

(d) Supposons que $N^0(v) = \emptyset$. Examinons d'abord le cas $I(v) \neq \emptyset$. Dans ce cas $A_1 \cup N^I(v)$ est un dominant de T . Comme $|N^I(v)| = |I(v)|$, on a

$$|A_1 \cup N^I(v)| = \beta_v(T) + |I(v)| < n - \Delta'(T),$$

contradiction.

Deuxièmement, supposons qu'il existe un sommet $z \in N(v)$ avec $P_z(v) \neq \emptyset$ et soit $x \in P_z(v)$. Alors $x \in A_1$. Par conséquent, $(A_1 - \{x\}) \cup \{z\} \cup N^I(v)$ est un ensemble dominant de T , d'où $\gamma(T) \leq \beta_v(T) + |N^I(v)| < n - \Delta'(T)$, contradiction.

Inversement, soient T un arbre couronné et v un sommet bon de T . Supposons que T satisfait les conditions (a) – (d) du Théorème 2.20. Parmi tous les dominants de taille $\gamma(T)$, soit D celui qui contient le plus de sommets de $N(v)$. Alors il est à remarquer que:

- D contient $N^I(v)$ car $|N^I(v)| = |I(v)|$.
- Pour toute composante connexe $C \in B'(v)$, D contient le voisin de C dans $N(v)$ et $|D \cap C| = \beta(C) - 1$ vu la Remarque 2.10. Par conséquent, $N^P(v) \subset D$ et $|D \cap B'(v)| = |B'(v)|/2 - |N^P(v)|$.
- Pour toute composante connexe $C \in B(b) - B'(v)$, on a $|D \cap C| = \beta(C)$ vu la Remarque 2.10 et donc

$$|D \cap (B(b) - B'(v))| = |B(b) - B'(v)|/2 = \beta_v(T) - |B'(v)|/2.$$

Maintenant, distinguons les deux cas suivants:

Cas 1. $N^0(v) = \emptyset$. Alors d'après la condition (d), $N^I(v) = N^P(v) = \emptyset$. D'où D doit contenir un sommet de $N(v)$ pour dominer v . Ce qui implique $|D| \geq \beta_v(T) + 1$ et donc $\gamma(T) = n - \Delta'(T)$.

Cas 2. $N^0(v) \neq \emptyset$. Alors $v \in D$ et donc $|D| \geq |N^I(v)| + \beta_v(T) + 1$. D'où $\gamma(T) = n - \Delta'(T)$. Ceci termine la preuve du théorème. ■

En considérant les graphes réguliers connexes, nous donnons une caractérisation descriptive complète des graphes G tels que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$. Pour des raisons de simplicité, on introduit quelques définitions.

Un graphe G vérifiant $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ est appelé un *graphe extrémal*. Il est à noter que dans un graphe régulier, un sommet v est bon si et seulement si $\beta_v(G) = \max\{\beta_x(G) = \beta(G[\overline{N}(x)]) : x \in G\}$. On dira qu'un sommet w est *illégal* si $\beta_w(G) = \max\{\beta_x(G) : x \in G\}$ mais le sous graphe $G[\overline{N}(w)]$ contient au moins une composante connexe qui n'est ni un sommet isolé, ni un cycle C_4 , ni une couronne. On rappelle par le Lemme 2.18, qu'un graphe extrémal ne contient pas de sommets illégaux.

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.17.

Corollaire 2.21 *Soit G un cycle d'ordre n . Alors $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ si et seulement si $G = C_3, C_4, C_5$ ou C_7 .*

Considérons les graphes 3-réguliers.

Théorème 2.22 ([9]) *Soit G un graphe 3-régulier connexe. Alors $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ si et seulement si G est l'un des graphes de la Figure 3.*

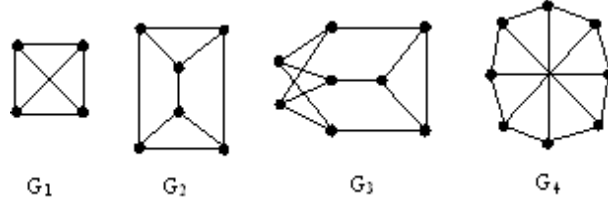


Figure 3. Graphes extrémaux 3-régulier.

Preuve. Soit G un graphe 3-régulier connexe tel que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$. Alors d'après le Lemme 2.18, G est un graphe couronné. Soit v un sommet bon de G . Alors d'après le Lemme 2.19, il est facile de voir que $|I(v)| \leq 1$.

Si $\beta_v(G) = 0$ alors $I(v) = \emptyset$ et donc $G = G_1$.

Supposons maintenant que $\beta_v(G) \neq 0$. Remarquer que le nombre d'arêtes entre les sommets de $N(v)$ et ceux de $\overline{N}(v)$ est au plus 6. Ce qui implique que le sous graphe $G[\overline{N}(v)]$ contient une seule composante connexe non triviale qui est $P_2, C_4, P_4 (= P_2^*,$ la couronne de $P_2)$ ou bien K_3^* (la couronne de K_3). Dans chacun de ces cas, $I(v) = \emptyset$. Notons par $\{x_1, x_2, x_3\}$ les sommets de $N(v)$ et considérons les quatre cas suivants:

Cas 1. $C = K_1^* = P_2$. Alors $G = G_2$.

Cas 2. $C = C_4$. Dans ce cas, $\beta_v(G) = 2$. Il existe alors exactement un sommet de $N(v)$ adjacent à $y_1, y_2 \in V(C)$ sinon G n'est pas un graphe régulier. Soit x_1 ce sommet. Si $y_1 y_2 \notin E(C)$ alors $G = G_3$. Si $y_1 y_2 \in E(C)$ alors x_2 est un sommet illégal ($\beta_{x_2}(G) = 2$ mais $G[\overline{N}(x_2)]$ n'est ni C_4 , ni une couronne), contradiction.

Cas 3. $C = P_2^*$. Dans ce cas aussi on a $\beta_v(G) = 2$. Soit $V(C) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ avec les arêtes $y_1 y_2, y_2 y_3, y_3 y_4$. Alors il existe un sommet de $N(v)$, disons x_1 adjacent à y_1 and y_4 . Par ailleurs, y_1 et y_2 ne peuvent avoir un voisin commun dans $N(v)$ sinon y_4 sera un sommet illégal. Par symétrie y_3 et y_4 ne peuvent avoir de voisin commun dans $N(v)$. Maintenant si x_2 est adjacent à y_1 et y_3 alors $G = G_4$ (similairement, si x_2 est adjacent à y_2 et y_4) et si x_2 est adjacent à y_2 et y_3 alors $G = G_4$.

Cas 4: $C = K_3^*$. Dans ce cas, $\beta_v(G) = 3$ et un sommet x de la clique K_3 est illégal.

La condition suffisante est simple à voir. ■

Avant de donner la description complète des graphes réguliers G satisfaisant $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$, on établit le résultat suivant:

Lemme 2.23 ([9]) Soient G un graphe couronné tel que $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ et v un sommet bon de G . Soient x un sommet de $N(v)$ et $C_1, C_2, \dots, C_k$ des composantes non triviales de $G[\overline{N}(v)]$ qui contiennent les voisins de x . Ecrivons $H = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k$. Alors:

- Si $x \in N(v) - N^I(v)$ alors $\gamma(G[H \cup \{x\}]) \geq |H|/2$.
- Si $x \in N^I(v)$ et $y \in I(v)$ est le voisin de x alors $\gamma(G[H \cup \{x, y\}]) \geq |H|/2 + 1$.

Preuve. Soit Q un γ -ensemble du sous graphe induit par $B(v) - H$. Alors $|Q| = \beta_v(G) - |H|/2$.

Supposons que $x \in N(v) - N^I(v)$ et qu'il existe un ensemble dominant D de $G[H \cup \{x\}]$ tel que $|D| \leq |H|/2 - 1$. Alors $Q \cup I(v) \cup D \cup \{v\}$ est un dominant de G de taille $\beta_v(G) + |I(v)| < n - \Delta'(G)$, contradiction.

Supposons maintenant que $x \in N^I(v)$ et qu'il existe un ensemble dominant D de $G[H \cup \{x, y\}]$ tel que $|D| \leq |H|/2$. Alors $Q \cup (I(v) - \{y\}) \cup D \cup \{v\}$ est un dominant de G de taille $\beta_v(G) + |I(v)| < n - \Delta'(G)$, contradiction. ■

Théorème 2.24 ([9]) Soit G un graphe Δ -régulier connexe d'ordre n . Alors $\gamma(G) = n - \Delta'(G)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- $\Delta \in \{0, 1, n-1, n-2\}$ et G est un Δ -régulier quelconque.
- $\Delta = n-3$ et G est un Δ -régulier quelconque d'ordre $n \geq 7$.
- $\Delta = 2$ et $G = C_3, C_4, C_5$ ou C_7 .
- $\Delta \in \{3, 4\}$ et G est l'un des graphes des Figures 3-4.
- $\Delta = 6$ et le complémentaire de G est le graphe de la Figure 5.

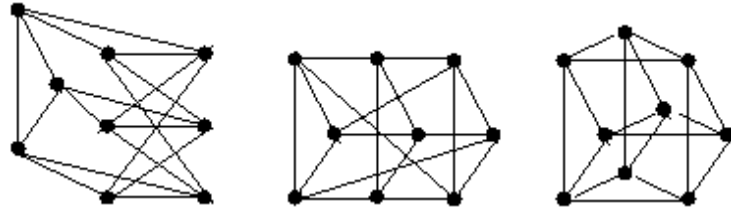


Figure 4. Graphes extrémaux 4-régulier.

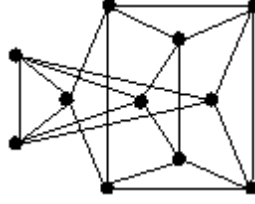


Figure 5. Graphe complémentaire du graphe extrémal 6-régulier.

Preuve. La condition suffisante peut être vérifiée en examinant les graphes dans les différentes figures. Pour les graphes de la Figure 4 on a, $\Delta = 4, \beta_v(G) = 2$ et tout sommet est bon. Donc $\Delta'(G) = 6$ et $\gamma(G) \leq n - \Delta'(G) = 3$. Par ailleurs, pour tout sommet x , le non-voisinage de x induit un P_4 ou un C_4 et aucun sommet n'est adjacent à tout $\overline{N}(x)$, d'où $\gamma(G) \geq 3$. Donc $\gamma(G) = 3 = n - \Delta'(G)$. Similairement, on peut voir que le graphe dont le complémentaire est celui de la Figure 5 est extrémal.

Etablissons la condition nécessaire. Les cas $\Delta = 0$ et 1 sont simples à vérifier et les cas $\Delta = 2$ et 3 ont été déjà montrés plus haut. Donc on supposera que $\Delta \geq 4$.

Supposons d'abord que $\Delta \geq 9$. D'après le Lemme 2.18, G est couronné. Soit v un sommet bon de G . Rappelons dans ce cas que chaque composante connexe de $\overline{N}(v) - I(v)$ est une couronne ou bien un cycle C_4 . D'autres part, d'après le Lemme 2.19, $|I(v)| \leq 1$. Si Δ est un impair alors $I(v) = \emptyset$ sinon G aura un ordre impair car $|B(v)|$ est pair.

Nous utiliserons les notations suivantes. Pour un sommet $x \in V$ on écrira $N_v(x) = N(x) \cap N(v)$, $d_v(x) = |N_v(x)|$ et $\overline{N}_v(x) = \overline{N}(x) \cap N(v) = N(v) - N(x)$. Pour une composante C de $\overline{N}(v)$ d'ordre au moins deux on écrit $N_C(x) = N(x) \cap C$ et $d_C(x) = |N_C(x)|$. Il est clair que pour $z \in C$, on a $d_v(z) = \Delta - d_C(x)$.

Soit C une composante de $G[\overline{N}(v)]$ d'ordre au moins deux. D'après le Lemme 2.23, un sommet $z \in N(v) - N^0(v)$ est adjacent à au plus 3 sommets de C si $C = C_4$ ou P_2^* et à au plus 2 sommets pendants de C si $C = H^*$ avec $|V(H)| \geq 3$. Par conséquent:

- Si $C = C_4$ alors on doit avoir $3\Delta \geq 4(\Delta - 2)$. D'où $\Delta \leq 8$.
- Si $C = P_2^*$ alors on doit avoir $3\Delta \geq 2(\Delta - 2) + 2(\Delta - 1)$. D'où $\Delta \leq 6$.
- Si $C = H^*$ avec $|V(H)| \geq 3$, alors on doit avoir $2\Delta \geq |V(H)|(\Delta - 2)$. D'où $\Delta \leq 6$.

Puisque $\Delta \geq 9$, on ne peut avoir aucune de ces composantes. Donc la seule composante non triviale possible dans $G[\overline{N}(v)]$ est $P_2 = K_1^*$. Aussi, puisque $\Delta \geq 9$, si $G[\overline{N}(v)]$ contient plus d'une composante de type P_2 alors il existe $z \in N(v)$ qui domine

totalelement au moins deux de ces composantes, ce qui contredit le Lemme 2.23. Par conséquent, $G[\overline{N}(v)]$ contient au plus un sommet isolé et une composante de type P_2 . Si $I(v) = \emptyset$ et $\beta_v(G) = 0$ alors $G = K_n$. Si $I(v) = \emptyset$ et $\beta_v(G) > 0$ alors $\Delta = n - 3$. Si $|I(v)| = 1$ alors le Lemme 2.23 implique que $B(v) = \emptyset$ et donc $\Delta = n - 2$.

Supposons maintenant que $4 \leq \Delta \leq 8$. Nous faisons les remarques suivantes nécessaire pour la suite de la preuve:

- Chaque composante non triviale C de $\overline{N}(v)$ est ou bien P_2, P_4 ou bien C_4 . En effet, supposons que C est une couronne H^* d'un graphe H . Alors chaque sommet pendant $x \in C$ a $d_v(x) = \Delta - 1$. D'après le Lemme 2.23, un sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus 2 sommets pendants de C . Par conséquent $|V(H)|(\Delta - 1) \leq 2\Delta$. Avec $4 \leq \Delta \leq 8$, ceci implique que $|V(H)| \leq 2$. D'où, $C = P_2$ ou P_4 .
- Chaque sommet $z \in \overline{N}(v)$ a $d_v(z) \geq \Delta - 2$. Ceci découle du cas précédent car $d_C(z) \leq 2$.
- Si une composante C de $\overline{N}(v)$ est C_4 ou P_4 alors par le Lemme 2.23, on a $d_v(w) \leq \Delta - 3$ pour tout sommet $w \in N(v)$.
- Supposons que le non-voisinage de chaque sommet bon v induit un C_4 (donc $\beta_v(G) = 2$). Alors $G[N(v)]$ ne contient pas de sous graphe constitué d'un triangle T (graphe complet d'ordre 3) plus un sommet isolé. En effet, supposons le contraire et soient $u \in N(v)$ et $z \in \overline{N}(v)$ un sommet tel que $uz \notin E$ (un tel sommet existe car $d_C(u) \leq 3$). Alors z possède au moins un voisin dans T (car $d_v(z) \geq \Delta - 3$), donc $\beta_u(G) = 2$ et u est un sommet bon mais $\overline{N}(u)$ ne contient pas de sous graphe induisant un C_4 , contradiction. On appellera cet argument, la *propriété du triangle* pour $G[N(v)]$.

Si $\beta_v(G) = 0$ alors ou bien $I(v) = \emptyset$ et donc $\Delta = n - 1$ (et G est une clique $K_{\Delta+1}$), ou bien $|I(v)| = 1$ et donc $\Delta = n - 2$ (et G est le complémentaire de kP_2 où $k = n/2$). Maintenant supposons que $\beta_v(G) > 0$.

Désignons par $u_1, \dots, u_\Delta$ les voisins de v et examinons les différents cas de Δ :

Cas 1. $\Delta = 8$.

Supposons qu'une composante C de $\overline{N}(v)$ est $P_4 = abcd$. On a $d_v(a) = d_v(d) = 7$ et $d_v(b) = d_v(c) = 6$. Donc il existe un sommet de $N(v)$ dominant toute la composante C , contradiction avec le Lemme 2.23.

Si une composante C de $\overline{N}(v)$ est P_2 alors au moins chacun des 6 sommets de $N(v)$ domine toute la composante. Si une composante C de $\overline{N}(v)$ est C_2 alors chaque

sommet de $N(v)$ est adjacent à 3 sommets de C . Par conséquent, si $\overline{N}(v)$ contient deux composantes non triviales C_1 et C_2 alors il existe $u \in N(v)$ tel que $C_1 \cup C_2 \cup \{u\}$ contredit le Lemme 2.23. Donc $\overline{N}(v)$ contient une seule composante non triviale C .

Si $I(v) \neq \emptyset$ alors il existe un sommet de $N(v)$ adjacent à tous les sommets de $C \cup I(v)$ ou bien à tous les sommets sauf un. Ceci contredit le Lemme 2.23. D'où $I(v) = \emptyset$ et $\overline{N}(v) = C$.

Si $C = P_2$, alors $\Delta = n - 3$ et on a le résultat.

Maintenant, supposons que $C = C_4$. Donc $\beta_v(G) = 2$ et le non-voisinage de chaque sommet bon de G induit un C_4 . Aussi le voisinage de chaque sommet bon satisfait la propriété du triangle. Dans ce cas, on $n = 13$, $\Delta'(G) = 8 + 2 = 10$ et donc $\gamma(G) = 3$. Désignons les sommets de $C = C_4$ par a, b, c, d avec $ab, bc, cd, da \in E$. Alors on a $d_v(x) = 6$ pour tout $x \in C$. Comme aucun sommet de $N(v)$ ne domine complètement C , on supposera sans perte de généralité que $\overline{N}_v(a) = \{u_1, u_2\}$, $\overline{N}_v(b) = \{u_3, u_4\}$, $\overline{N}_v(c) = \{u_5, u_6\}$, $\overline{N}_v(d) = \{u_7, u_8\}$. Dans ce cas, $G[N(v)]$ est un graphe 4-régulier. Puisque $\overline{N}(a) = \{v, u_1, u_2, c\}$ avec $vu_1, cu_1, cu_2 \in E$, alors $\beta_v(G) = 2$, a est un sommet bon; donc $\overline{N}(a)$ induit un C_4 , d'où $u_1u_2 \notin E$. Similairement, $u_3u_4, u_5u_6, u_7u_8 \notin E$. Aussi puisque $\beta_v(G) = 2$, $G[N(v)]$ satisfait la propriété du triangle. Une recherche exhaustive montrera qu'il existe exactement deux graphes $G[N(v)]$ satisfaisant les propriétés précédentes, à savoir le graphe biparti complet $K_{4,4}$ et le graphe G_8 de la Figure 6.

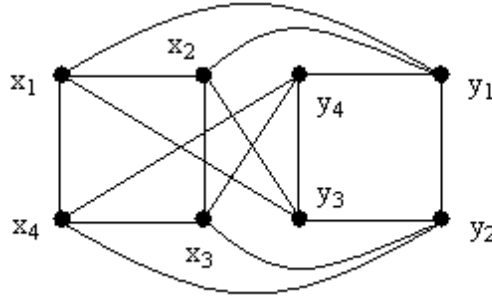


Figure 6. Graphe G_8 .

- Supposons que $G[N(v)] = K_{4,4}$. Alors par symétrie, il y'a deux possibilités: **(a)** $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ sont deux ensembles stables dans $G[N(v)]$ ou bien **(b)** $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$ et $\{u_3, u_4, u_7, u_8\}$ sont deux ensembles stables dans $G[N(v)]$. Dans chaque cas, u_7 est adjacent à tous les sommets de $\overline{N}(a) = \{u_1, u_2, v, c\}$ et donc $\{u_7, a\}$ est un ensemble dominant de cardinal 2, ce qui contredit $\gamma(G) = 3$.

- Supposons maintenant que $G[N(v)] = G_8$. Sans perte de généralité, on a $u_1 = x_1$. Donc $\overline{N}(u_1) = \{y_2, x_3, y_4, a\}$, où $y_2x_3y_4$ est un P_3 et on sait que a possède deux voisins dans cette chaîne car $u_2 \in \overline{N}(u_1) \cap \overline{N}(a)$. Donc la seule possibilité (sinon u_1 serait illégal) est d'avoir $u_2 = x_3$. Par symétrie, on supposera que ou bien $u_3 = x_2$ (ou x_4) ou bien $u_3 = y_1$ (ou y_2, y_3, y_4).

Si $u_3 = x_2$ alors u_3 est adjacent à tout $\overline{N}(a)$ et donc $\{u_3, a\}$ est un ensemble dominant de cardinal 2, contradiction avec $\gamma(G) = 3$.

Si $u_3 = y_1$ alors on doit avoir $u_4 = y_3$, dans le cas contraire $\overline{N}(u_3) = \{b, y_3, x_3, x_4\}$ induira un P_4 . Donc on a ou bien $\{u_5, u_6\} = \{x_2, x_4\}$ et $\{u_7, u_8\} = \{y_2, y_4\}$ et dans ce cas $\{b, u_1\}$ est un ensemble dominant de G de taille 2, ou bien $\{u_5, u_6\} = \{y_2, y_4\}$ et $\{u_7, u_8\} = \{x_2, x_4\}$ et dans ce cas $\{a, u_7\}$ est un ensemble dominant de G de taille 2. Dans les deux cas on a une contradiction. Par conséquent, il n'existe pas de graphes extrémaux 8-réguliers.

Cas 2. $\Delta = 7$.

D'après ce qu'a été remarqué plus haut, $I(v) = \emptyset$ puisque Δ est impair.

Supposons qu'une composante C de $\overline{N}(v)$ est une chaîne $P_4 = abcd$. Alors on a, $d_v(a) = d_v(d) = 6$ et $d_v(b) = d_v(c) = 5$. Donc il existera un sommet de $N(v)$ adjacent à tous les sommets de C , contradiction avec le Lemme 2.23.

Si une composante C de $\overline{N}(v)$ est une chaîne P_2 , alors au moins 5 sommets de $N(v)$ domineront chacun C . Si une composante C de $\overline{N}(v)$ est un cycle C_4 alors au moins 6 sommets de $N(v)$ sont adjacent chacun à 3 sommets de C . Par conséquent, si il existe deux composantes C_1, C_2 de $\overline{N}(v)$ alors le Lemme 2.23 sera violé par $C_1 \cup C_2$ et un sommet quelconque de $N(v)$. Soit alors C l'unique composante de $\overline{N}(v)$.

Si $C = P_2$ alors $\Delta = n - 3$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que $C = C_4$. Donc $\beta_v(G) = 2$ et le non-voisinage de tout sommet bon induira un C_4 . Aussi le voisinage ouvert de chaque sommet bon satisfait la propriété du triangle. Pour ce cas on a $n = 12$, $\Delta'(G) = 7 + 2 = 9$ et donc $\gamma(G) = 3$.

Désignons par a, b, c, d les sommets de C , avec $ab, bc, cd, da \in E$. Puisque aucun sommet de $N(v)$ ne domine C et que chacun des sommets a, b, c, d a 5 voisins dans $N(v)$, on peut supposer alors que les ensembles $\overline{N}_v(x)$, $x \in \{a, b, c, d\}$ sont $\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}, \{u_5, u_6\}, \{u_6, u_7\}$ (pas nécessairement dans cet ordre). Soient y, z deux sommets de $\{a, b, c, d\}$ tel que $\overline{N}_v(y) = \{u_5, u_6\}$ et $\overline{N}_v(z) = \{u_6, u_7\}$ (y et z peuvent être adjacents ou non). Pour un sommet $x \in \{a, b, c, d\}$, soit $x' \in \{a, b, c, d\}$ le sommet non adjacent à x . On constate que $\overline{N}(x) = \overline{N}_v(x) \cup \{v, x'\}$ et que x est un

sommet bon. Donc $\overline{N}(x)$ induit un C_4 , d'où $\overline{N}_v(x)$ ne contient aucune arête. Par conséquent, $u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_6u_7 \notin E$. Maintenant $\overline{N}(u_6) = \{u_5, u_7, y, z\}$ avec $yu_7 \in E$ et $zu_5 \in E$, donc u_6 est un sommet bon, d'où $\overline{N}(u_6)$ induit un C_4 , par suite $yz \in E$ et $u_5u_7 \in E$. On peut supposer maintenant que $y = c, z = d, \overline{N}_v(a) = \{u_1, u_2\}$ et $\overline{N}_v(b) = \{u_3, u_4\}$. Pour avoir $d(u_6) = 7$, on doit avoir $u_1u_6, u_2u_6, u_3u_6, u_4u_6 \in E$. Maintenant $\overline{N}(c) = \{u_5, u_6, v, a\}$ et donc $u_3u_5 \notin E$ (sinon $\{c, u_3\}$ est un dominant de G de taille 2); de même on a $u_4u_5, u_1u_7, u_2u_7 \notin E$. Pour avoir le degré 7 pour tout sommet, on constate que dans le graphe $H = G[N(v) - \{u_6\}] - \{u_5u_7\}$ chaque sommet doit avoir un degré 2. Ceci n'est possible que si $u_3u_7, u_4u_7, u_1u_5, u_2u_5 \in E$ et par symétrie $u_1u_3, u_2u_4 \in E$. Mais dans ce cas u_1 est un sommet illégal. On conclut qu'il n'existe pas de graphes extrémaux 7-réguliers.

Cas 3. $\Delta = 6$.

Soit C une composante connexe de $G[\overline{N}(v)]$. Si $C = P_2$ alors il existe au moins 4 sommets de $N(v)$ qui soient adjacents à tous les sommets de C . Si $C = C_4$ alors il y'a au moins 4 sommets de $N(v)$ adjacent à 3 sommets de C . Si $C = P_4$ alors tout sommet de $N(v)$ est adjacent à 3 sommets de C . Par conséquent, s'il y'a au moins deux composantes non triviales C_1, C_2 dans $G[\overline{N}(v)]$ alors le Lemme 2.23 sera violé par $C_1 \cup C_2$ et un sommet de $N(v)$. Donc, soit C l'unique composante non triviale de $G[\overline{N}(v)]$.

Si $I(v) \neq \emptyset$ alors il existe un sommet de $N(v)$ adjacent ou bien à tous les sommets de $C \cup I(v)$ ou bien à tous sauf un, ce qui contredit aussi le Lemme 2.23. Donc $I(v) = \emptyset$.

Si $C = P_2$ alors $\Delta = n - 3$, d'où on a le résultat.

Supposons que $C = P_4 = abcd$. Dans ce cas on a, $\beta_v(G) = 2, d_v(a) = d_v(d) = 5, d_v(b) = d_v(c) = 4$ et aucun sommet de $N(v)$ ne domine complètement C . Ceci est possible seulement si -par symétrie- $\overline{N}_v(a) = \{u_1\}, \overline{N}_v(b) = \{u_2, u_3\}, \overline{N}_v(c) = \{u_4, u_5\}, \overline{N}_v(d) = \{u_6\}$. Mais dans ce cas, $\overline{N}(a) = \{v, u_1, c, d\}$ avec $vu_1, cd \in E$, ce qui implique que a est bon car $\beta_a(G) = 2 = \beta_v(G)$ mais $\overline{N}(a)$ n'induit pas de C_4 ou de P_4 , contradiction.

Supposons maintenant que $C = C_4$. Donc $\beta_v(G) = 2$ et le non-voisinage de chaque sommet bon de G induit un C_4 . Aussi le voisinage de chaque sommet bon satisfait la propriété du triangle. Pour ce cas on a $n = 11, \Delta'(G) = 8$ et donc $\gamma(G) = 3$.

Soient a, b, c, d les sommets de C avec $ab, bc, cd, da \in E(G)$. Rappelons qu'il y'a au moins 4 sommets $u \in N(v)$ tel que $d_C(u) = 3$. On distingue les deux cas suivants:

Cas 1. Deux sommets quelconque parmi les sommets $u \in N(v)$ tel que $d_C(u) = 3$, n'ont pas trois voisins communs dans C .

Donc on peut supposer que ces sommets sont u_1, u_2, u_3, u_4 et que $u_1a \notin E$, $u_2b \notin E$, $u_3c \notin E$, $u_4d \notin E$. Ce qui implique que $d_C(u_5) = d_C(u_6) = 2$.

Dans $G[N(v)]$, les sommets u_1, u_2, u_3, u_4 sont de degré 2 et u_5, u_6 sont de degré 3 chacun. Par ailleurs, $G[N(v)]$ satisfait la propriété du triangle. Par isomorphisme, il y'a deux graphes satisfaisant à ces propriétés: (a) le graphe que nous appellerons C_6^+ obtenu à partir du cycle C_6 en ajoutant une arête entre deux sommets à distance trois. (b) le graphe que nous appellerons C_5' obtenu à partir du cycle C_5 en ajoutant un nouveau sommet que l'on fait joindre par des arêtes à deux sommets non voisins du C_5 .

Dans le cas (a), soit u_1 un sommet de degré deux dans $G[N(v)]$, alors son non-voisinage dans $G[N(v)]$ induit un $P_3 = xyz$ où x, y sont de degré 2 dans $G[N(v)]$ (et z a un degré 3). Si on ajoute le sommet a qui sera adjacent à x et y , on voit que u_1 est un sommet bon car $\beta_{u_1}(G) = 2 = \beta_v(G)$, mais $\overline{N}(u_1)$ n'induit pas de C_4 , contradiction.

Dans le cas (b), soit u_1 un sommet de degré deux appartenant au cycle C_4 dans $G[N(v)]$. Alors ses non voisins dans $G[N(v)]$ sont u_2, u_3, u_4 qui induisent un $P_2 \cup P_1$. Si on ajoute le sommet a qui sera adjacent à ces trois sommets, on constate que u_1 est un sommet bon car $\beta_{u_1}(G) = 2 = \beta_v(G)$, mais $\overline{N}(u_1)$ n'induit pas de C_4 , contradiction.

Cas 2. Deux sommets parmi les sommets $u \in N(v)$ tel que $d_C(u) = 3$, ont trois voisins commun dans C .

Supposons que $N_C(u_1) = N_C(u_2) = \{a, b, c\}$. Donc $N_v(d) = \{u_3, u_4, u_5, u_6\}$. Sans perte de généralité, $N_v(b) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Dans ce cas on a, $\overline{N}(b) = \{v, u_5, u_6, d\}$. Donc $\beta_b(G) = 2 = \beta_v(G)$ et b est bon, par suite $u_5u_6 \notin E$. D'une façon similaire on aura $u_1u_2 \notin E$ en considérant $\overline{N}(d)$.

Jusqu'à ce point, les sommets u_1 et u_2 jouent le même rôle. De même pour u_3, u_4 et u_5, u_6 . Aussi a et c jouent le même rôle, chacun deux possède exactement deux voisins parmi u_3, u_4, u_5, u_6 . On ne peut avoir au_3 et $cu_3 \in E$ car $d_C(u_3) \leq 3$. Analogiquement, on ne peut avoir au_4 et $cu_4 \in E$. Donc par symétrie, ceci engendre 5 cas (a)-(e) comme suit:

- (a) Le sommet a est adjacent à u_3 et u_4 . Donc c est adjacent à u_5 et u_6 . On a $\overline{N}(c) = \{v, u_3, u_4, a\}$ ce qui implique que $u_3u_4 \notin E$. Dans $G[N(v)]$, les sommets u_1, u_2, u_3, u_4 sont de degré 2 et les sommets u_5, u_6 sont de degré 3 avec $u_5u_6 \notin E$. Par isomorphisme, il existe un seul graphe satisfaisant à ces conditions, à savoir le graphe C_5' défini plus haut. Par symétrie, l'un des deux sommets de degré 2 dans le cycle C_4 de ce graphe doit être u_1 ou u_2 , disons u_1 . Mais dans ce cas son non-voisinage dans $G[N(v)]$ est formé de u_2, u_3, u_4 et qui induisent un $P_2 \cup P_1$

dans lequel u_2 n'est pas le sommet isolé. En ajoutant le sommet d , on constate que $\overline{N}(u_1)$ induit un P_4 , contradiction.

- (b) Le sommet a est adjacent à u_3 et u_5 , et c est adjacent à u_4 et u_5 . Dans ce cas on constate que $\beta_c(G) = 2$ mais le sous graphe induit par $\overline{N}(c) = \{v, u_3, u_6, a\}$ n'est pas un C_4 , contradiction.
- (c) Le sommet a est adjacent à u_3 et u_5 , et c est adjacent à u_4 et u_6 . Puisque le sous graphe induit par $\overline{N}(c)$ doit être un C_4 , alors $u_3u_5 \notin E$. De même, en considérant $\overline{N}(a)$, on voit que $u_4u_6 \notin E$. Dans $G[N(v)]$, les sommets u_1, u_2, u_3, u_4 sont de degré 2, et les sommets u_5 et u_6 sont de degré 3. Il existe un seul graphe $G[N(v)]$ satisfaisant à ces conditions avec les arêtes suivantes: $u_1u_5, u_1u_6, u_2u_5, u_2u_6, u_3u_4, u_3u_6, u_4u_5$ ce qui donne le graphe 6-régulier dont le complémentaire est celui de la Figure 5.
- (d) Le sommet a est adjacent à u_3 et u_5 , et c est adjacent à u_5 et u_6 . Dans ce cas on constate que $\beta_a(G) = 2$ mais le sous graphe induit par $\overline{N}(a) = \{v, u_4, u_6, c\}$ n'est pas un C_4 , contradiction.
- (e) Les sommets a et c sont adjacents à u_5 et u_6 . Dans $G[N(v)]$, u_3 et u_4 sont de degré 3 et u_1, u_2, u_5, u_6 sont de degré 2. Par ailleurs, puisque $G[N(v)]$ satisfait la propriété du triangle, il existe deux graphes possible pour $G[N(v)]$ à savoir C_6^+ ou bien C_5' . Si $G[N(v)] = C_6^+$ alors par isomorphisme, il y'a deux manière pour identifier les arêtes de $G[N(v)]$: la première induit un graphe dans lequel u_1 est un sommet illégal et la second nous donne le graphe 6-régulier dont le complémentaire est celui de la Figure 5. Si $G[N(v)] = C_5'$ alors par isomorphisme, ça consiste en $C_5 = u_1u_3u_6u_2u_4$ avec en plus les arêtes u_3u_5 et u_4u_5 . Mais dans ce cas u_5 est un sommet illégal, d'où la contradiction.

Cas $\Delta = 5$.

Comme il a été déjà mentionné plus haut, on a $I(v) = \emptyset$ car Δ est impair. Soient t, f, s les nombres de composantes connexes de $G[\overline{N}(v)]$ de type P_2, P_4 et C_4 respectivement. En considérant le nombre d'arêtes maximum noté h entre les sommets de $N(v)$ et $\overline{N}(v)$ on constate qu'on a d'une part $h = 8t + 14f + 12s$ car chaque sommet de $\overline{N}(v)$ est de degré 5, et d'autre part $h \leq 20$ car chacun des 5 sommets de $N(v)$ est

adjacent à au plus 4 sommets de $\overline{N}(v)$. Par conséquent $h = 8t + 14f + 12s \leq 20$. Ce qui implique que les composantes connexes possibles constituant $G[\overline{N}(v)]$ sont: (a) P_2 , (b) $2P_2$, (c) $P_2 \cup C_4$, (d) P_4 , (e) C_4 . Il faut noter que $G[N(v)]$ comportera $10 - h/2$ arêtes. Examinons ces cas un par un .

- Dans le cas (a) on a $n = 8$ et donc $\Delta = n - 3$, ce cas est annoncé dans le théorème.
- Dans le cas (b) on a $h = 16$, donc $G[N(v)]$ contient exactement 2 arêtes. Par conséquent, un sommet u_i de $N(v)$ sera isolé dans $G[N(v)]$, d'où u_i est adjacent à tous les sommets de $\overline{N}(v)$, contradiction avec le Lemme 2.23.
- Dans le cas (c) on a $h = 20$, donc $G[N(v)]$ ne contient aucune arête. Soit a le sommet de la composante P_2 de $G[\overline{N}(v)]$. On peut supposer que $\overline{N}_v(a) = \{u_1\}$. Donc $\overline{N}(a) = \{v, u_1\} \cup C'$ où C' est la composante C_4 de $G[\overline{N}(v)]$. Par suite, a est un sommet bon car $\beta_a(G) = 3$, donc $\overline{N}(a)$ induit un $P_2 + C_4$ et u_1 n'est adjacent à aucun sommet de C' . Mais alors dans ce cas $d(u_1) = 5$ ce qui est impossible.
- Dans le cas (d), soit $abcd$ la chaîne P_4 induit par $\overline{N}(v)$. Puisque $d_v(a) = d_v(d) = 4$ alors au moins 3 sommets de $N(v)$, disons u_2, u_3, u_4 sont adjacents à a et d . Aussi, puisque $d_v(b) = d_v(c) = 3$, au moins un sommet u_i de $N(v)$ est adjacent à b et c . D'après le Lemme 2.23, $i \neq 2, 3, 4$. Supposons que u_1 est adjacent à b et c . Si u_1 est adjacent à a alors $u_1d \notin E$ d'après le Lemme 2.23, mais dans ce cas d est un sommet illégal, contradiction. Donc u_1 n'est adjacent pas à a et similairement à d . Alors a, d sont adjacents à u_5 , et u_1 est l'unique sommet de $N(v)$ adjacent à b et c . Sans perte de généralité, b est adjacent à u_2, u_3 et c est adjacent à u_4, u_5 . En observant $\overline{N}(b) = \{v, u_4, u_5, d\}$ on constate que b est un sommet bon et donc $u_4u_5 \notin E$. Similairement, en observant $\overline{N}(c) = \{v, u_2, u_3, a\}$ on a $u_2u_3 \notin E$. Maintenant, sans perte de généralité les 3 arêtes qui restent de $G[N(v)]$ sont u_1u_2, u_1u_4, u_3u_5 mais dans ce cas u_1 est illégal, contradiction.
- Dans le cas (e), puisque les cas (a)–(d) sont exclus, on peut supposer que le non-voisinage de chaque sommet bon induit un C_4 . Soient a, b, c, d le non-voisinage de v , avec les arêtes ab, bc, cd, da . Si $N_v(a) = N_v(c)$ et $N_v(b) = N_v(d)$ alors puisque la taille de ces ensembles est 3, il existe un sommet appartenant aux 4 ensembles ce qui contredit le Lemme 2.23. Donc, supposons que $N_v(a) \neq N_v(c)$, disons $N_v(a) = \{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 \notin N_v(c)$ et $u_5 \in N_v(c) - N_v(a)$, et $u_3 \in N_v(c)$. Dans ce cas, $\overline{N}(a) = \{v, u_4, u_5, c\}$, donc a est bon et $\overline{N}(a)$ induit un C_4 , d'où $cu_4 \in E$ et $u_4u_5 \notin E$. De même, $\overline{N}(c) = \{v, u_1, u_2, a\}$, donc c est bon et $\overline{N}(c)$ induit un C_4 , d'où $u_1u_2 \notin E$. Par le Lemme 2.23, u_3 ne sera pas adjacent à au moins b ou d , disons b . Sans perte de généralité $N_v(b) = \{u_1, u_2, u_4\}$.

Si d est adjacent à u_5 alors $\overline{N}(b) = \{v, u_3, u_5, d\}$, donc b est bon, d'où $du_3 \in E$ et $u_3u_5 \notin E$. Dans ce cas pour réaliser $d(u_5) = 5$ on doit avoir $u_1u_5, u_2u_5 \in E$. Par suite $\overline{N}(u_5) = \{a, u_3, u_4, b\}$, donc u_5 est bon, d'où $\overline{N}(u_5)$ doit induire un C_4 , ainsi $u_3u_4 \in E$. Maintenant pour compléter le degré 5 pour d , u_1, u_2, u_4 la seule possibilité est d'avoir (par symétrie) $u_1u_4, du_2 \in E$. Mais dans ce cas d sera un sommet illégal, contradiction.

Si d n'est pas adjacent à u_5 alors d n'est pas adjacent à u_3 , sinon b sera illégal. Donc d est adjacent à u_1, u_2, u_4 . Dans $G[N(v)]$, les sommets $u_1, \dots, u_5$ ont la séquence des degrés 1, 1, 2, 1, 3 respectivement, ce qui implique que $u_3u_5 \in E$ et (par symétrie de u_1, u_2) $u_1u_5 \in E$. Alors $\overline{N}(u_1) = \{u_2, u_3, u_4, c\}$ et exactement l'une des arêtes u_2u_3, u_3u_4 existe, donc $u_3u_4 \in E$ (sinon u_1 sera illégal) et par suite $u_2u_5 \in E$. Mais dans ce cas u_3 est adjacent à $\overline{N}(a)$ et donc $\{a, u_3\}$ domine G , contradiction car $\gamma(G) = 3$. Par conséquent il n'y a pas de graphes extrémaux 5-réguliers.

Cas $\Delta = 4$.

Soient t, f, s, h les nombres déjà définis au début du Cas $\Delta = 5$. Dans ce cas, $h = 6t + 10f + 8s + 4i$ où $i = |I(v)|$ et $h \leq 12$ puisque chaque u_i possède au plus 3 voisins dans $G[\overline{N}(v)]$. Donc on a, $6t + 10f + 8s + 4i \leq 12$, ce qui implique que $G[\overline{N}(v)]$ est isomorphe à (a) P_2 , (b) $P_2 \cup K_1$, (c) $2P_2$, (d) P_4 , ou bien (e) C_4 ou $C_4 \cup K_1$.

- Dans le cas (a) on a, $n = 7$ et donc $\Delta = n - 3$, d'où le résultat.
- Dans le cas (b), il existe un sommet de $N(v)$ adjacent à tout sommet de $\overline{N}(v)$, ce qui donne une contradiction avec le Lemme 2.23.
- Dans le cas (c), soient v_1, v_2, v_3, v_4 les sommets de $\overline{N}(v)$ avec $v_1v_2, v_3v_4 \in E$. On a $h = 12$ et donc $G[N(v)]$ ne contient aucune arête. Par isomorphisme, la seule possibilité d'adjacence des sommets de $\overline{N}(v)$ et ceux de $N(v)$ est telle que les arêtes u_jv_j ($j = 1, \dots, 4$) n'existent pas. Mais dans ce cas, v_1 sera un sommet illégal.
- Dans le cas (d), soient $abcd$ la chaîne P_4 induite par $\overline{N}(v)$. Puisque $d_v(a) = d_v(d) = 3$ alors au moins 2 sommets de $N(v)$ sont adjacent à la fois à a et d .

Premièrement, supposons que 3 sommets de $N(v)$, disons u_1, u_2, u_3 sont adjacent à la fois à a et d . D'où $\overline{N}(a) = \{v, u_4, c, d\}$ et a est un sommet bon. Puisque les cas (a) – (c) sont exclus et v ne peut être adjacent à c, d , alors $\overline{N}(a)$ peut induire uniquement un P_4 , i.e. $u_4c \in E$. De la même manière en considérant $\overline{N}(d)$, on a $u_4b \in E$. Sans perte de généralité on a u_1b et $u_2c \in E$. Finalement, $u_3u_4 \in E$ d'où on obtient le premier graphe 4-régulier de la Figure 4.

Maintenant, supposons que exactement 2 sommets de $N(v)$, disons u_2, u_3 sont adjacent à la fois à a et d . Sans perte de généralité on a $au_1 \in E$ et $du_4 \in E$. D'où $\overline{N}(a) = \{v, u_4, c, d\}$ et a est un sommet bon. Comme précédemment, ceci entraîne que $\overline{N}(a)$ induit un P_4 , i.e. $cu_4 \in E$. De la même manière, en considérant $\overline{N}(d)$, on a $bu_1 \in E$. En considérant la séquence des degrés, ceci nous donne $cu_1, cu_4 \in E$ et par suite $bu_4 \in E$ et $u_1u_4 \in E$. On obtient alors le second graphe 4-régulier de la Figure 4.

- Dans le cas (e), si $G[\overline{N}(v)]$ possède un sommet isolé alors un sommet de $N(v)$ sera adjacent à ce sommet isolé et la composante C_4 de $G[\overline{N}(v)]$, ce qui contredit le Lemme 2.23. Donc $\overline{N}(v)$ induit un C_4 avec les sommets a, b, c, d et les arêtes ab, bc, cd, da . On supposera aussi que le non-voisinage de tout sommet bon induit un C_4 . Dans ce cas, $n = 9, \Delta' = 4 + 2 = 6$ et donc $\gamma(G) = 3$.

Supposons tout d'abord que $N_v(a) \neq N_v(c)$. Sans perte de généralité, $N_v(a) = \{u_1, u_2\}$ et $cu_4 \in E$. Alors a est bon, donc $\overline{N}(a)$ doit induire un C_4 , i.e. $cu_3 \in E$ et $u_3u_4 \notin E$. Similairement, $\overline{N}(c)$ induit un C_4 , et donc $u_1u_2 \notin E$. Par isomorphisme, il y'a deux façons pour réaliser $d_v(b) = 2$. La première est que $bu_2, bu_3 \in E$. Dans ce cas, si $du_1 \notin E$ alors en considérant la séquence des degrés, on doit avoir u_1u_3 et $u_1u_4 \in E$, d'où $du_2, du_4 \in E$, mais alors u_4 sera illégal. Par conséquent $du_1 \in E$, et similairement $du_4 \in E$. Alors d est un sommet bon, donc $\overline{N}(d)$ induit un C_4 , i.e. $u_2u_3 \notin E$. En considérant la séquence des degrés, on doit avoir u_1u_3 et $u_2u_4 \in E$, et ceci nous donne le troisième graphe 4-régulier de la Figure 4.

La seconde possibilité pour réaliser $d_v(b) = 2$ est d'avoir $bu_1, bu_2 \in E$. Dans ce cas, si $du_3 \in E$ alors on doit avoir $du_4 \in E$, $u_3u_4 \notin E$ (sinon b sera illégal) et par isomorphisme u_1u_3 et $u_2u_4 \in E$. Mais alors u_1 est un sommet illégal. Par conséquent, $du_3 \notin E$, et similairement $du_4 \notin E$. Donc $du_1, du_2 \in E$. Mais dans ce cas tous les sommets sont de degré 4 sauf u_3 et u_4 et qui ne sont pas adjacent, contradiction.

Maintenant, supposons que $N_v(a) = N_v(c)$ et similairement $N_v(b) = N_v(d)$. Ces deux ensembles sont disjoints (sinon un sommet de $N(v)$ est adjacent à tout

sommet de $\overline{N}(v)$, ce qui contredit le Lemme 2.23), donc on peut supposer que $N_v(a) = N_v(c) = \{u_1, u_2\}$ et $N_v(b) = N_v(d) = \{u_3, u_4\}$. Si $u_1u_2 \in E$ alors (vu la séquence des degrés) on a $u_3u_4 \in E$, mais dans ce cas u_1 est illégal. Par conséquent, $u_1u_2 \notin E$. Similairement $u_3u_4 \notin E$. Mais alors $\{u_1, u_4\}$ est un dominant de G de taille 2, contradiction.

■

2.4 Sommes et produits d'invariants

Nous nous intéresserons dans cette partie à la somme et le produit de deux invariants, en particulier quand l'un des invariants est un paramètre de domination inférieur et l'autre est le nombre chromatique. Dans le cas général, il s'agit d'établir bornes supérieures et inférieures en référence aux résultats de Gallai [39] (concernant le stable maximum, le transversal minimum, le couplage maximum et le recouvrement minimum) et ceux de Nordhauss-Gaddhum [65] (concernant le nombre chromatique d'un graphe et de son complémentaire) qui étaient à l'origine de ces travaux. Le premier résultat publié de type Nordhauss-Gaddhum sur la domination est apparu en 1972 et est dû à Jaeger et Payan [59].

Théorème 2.25 ([59]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$$

$$\gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \leq n$$

2.4.1 Les paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique d'un graphe

Gernert [41] était le premier à considérer la somme et le produit du nombre de domination et le nombre chromatique d'un graphe. Par la suite, Topp et Volkmann [73] ont amélioré les résultats de Gernert pour le produit.

Théorème 2.26 ([41]) *Pour tout graphe G , $\gamma(G) + \chi(G) \leq n + 1$.*

Avec l'égalité atteinte si et seulement si G est un graphe complet ou le complémentaire d'un graphe complet.

Théorème 2.27 ([73]) *Pour tout graphe G de degré au moins deux on a,*

- $\gamma(G) \cdot \chi(G) \leq \frac{\delta}{8(\delta-1)} (n+1)^2$ si $\delta \geq 2$

- $\gamma(G) \cdot \chi(G) \leq \frac{2}{9} (n+1)^2$ si $\delta = 2$.

Dans ce contexte, Volkmann et moi même [20] avons établi de nouvelles bornes supérieures pour la somme et le produit en considérant les paramètres de domination inférieur $\mu(G) = ir(G), \gamma(G)$ ou $i(G)$ et le nombre chromatique $\chi(G)$. Nous avons utilisé pour ce fait, le théorème de Brooks [13] et la borne établie par Blidia, Chellali et Maffray [9], dont en voici un rappel.

Proposition 2.28 ([9]) *Pour tout graphe G ,*

$$\mu(G) \leq n - \Delta - \beta_{\Delta}(G) \quad (2.1)$$

Théorème 2.29 ([13]) *Pour tout graphe G ,*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1. \quad (2.2)$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $\Delta \neq 2$ et G contient un sous graphe $K_{\Delta+1}$ qui soit une composante connexe ou bien $\Delta = 2$ et G possède un cycle C_{2k+1} qui soit une composante connexe.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 2.28 et le Théorème 2.29 améliorant ainsi celui de Gernert [41].

Corollaire 2.30 ([20]) *Pour tout graphe G ,*

$$\mu(G) + \chi(G) \leq n - \beta_{\Delta}(G) + 1 \quad (2.3)$$

Nous donnons ci-dessous pour chacun des paramètres de domination inférieures une caractérisation des graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans (2.3).

Théorème 2.31 ([20]) *Soit G un graphe connexe. Alors $i(G) + \chi(G) = n - \beta_{\Delta}(G) + 1$ si et seulement si $G = K_n, C_5, C_7$.*

Preuve. La condition nécessaire implique que les inégalités (2.1) et (2.2) sont atteintes. Donc $G = K_n$ ou C_{2k+1} . Maintenant, puisque $i(G) = n - \Delta - \beta_{\Delta}(G)$, il est facile de voir que $k = 1, 2, 3$. ■

Théorème 2.32 ([20]) Soit G un graphe. Alors $\mu(G) + \chi(G) = n - \beta_\Delta(G) + 1$ avec $\mu = ir$ ou γ si et seulement si $G = H \cup (t_1 C_4) \cup (t_2 K_1) \cup (\bigcup_{j \in S} G_j o K_1)$ où $H = K_{\Delta+1}$, C_5, C_7 et $\Delta(H) = \Delta$, G_j est un graphe connexe, $S \subset IN$, $t_i \in IN$, $i = 1, 2$.

Preuve. Il est facile de vérifier la condition suffisante pour $\Delta = 0$ or 1 . Supposons que $\Delta \geq 2$, et considérons les cas suivants:

Cas 1. Soit $H = K_{\Delta+1}$. Alors

$$\begin{aligned} n &= \Delta + 1 + 4t_1 + t_2 + 2 \sum_{j \in S} |V(G_j)|, \\ \chi(G) &= \Delta + 1, \\ \beta_\Delta(G) &= 2t_1 + \sum_{j \in S} |V(G_j)|, \mu(G) = 1 + 2t_1 + t_2 + \sum_{j \in S} |V(G_j)| \end{aligned}$$

et l'égalité est atteinte.

Cas 2. Soit $H = C_{2k+1}$ avec $k = 2, 3$. Alors $G_j = K_1$ ou K_2 pour tout j ,

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 + 4t_1 + t_2 + 2 \sum_{j \in S} |V(G_j)|, \beta_\Delta(G) = k - 1 + 2t_1 + \sum_{j \in S} |V(G_j)| \\ \chi(G) &= 3, \\ \mu(G) &= k + 2t_1 + t_2 + \sum_{j \in S} |V(G_j)| \end{aligned}$$

et donc on a l'égalité.

Inversement, soit G un graphe tel que $\chi(G) + \gamma(G) = n + 1 - \beta_\Delta(G)$. Ceci implique d'une part que $\chi(G) = \Delta + 1$, en utilisant le Théorème 2.29, il existe un sous graphe H qui soit une composante connexe de G tel que ou bien $H = K_{\Delta+1}$ et $\Delta \neq 2$ ou bien $H = C_{2k+1}$ et $\Delta = 2$. D'autre part, on a $\gamma(G) = n - \Delta - \beta_\Delta(G)$, ce qui implique en utilisant le Lemme 2.18, que G est un graphe couronné. Maintenant, soit v un sommet bon de G , alors:

Cas 1. Soit $H = K_{\Delta+1}$ et $\Delta \neq 2$. Puisque le graphe G est couronné alors $v \in V(K_{\Delta+1})$. Donc chaque composante connexe de $G - H$ est ou bien un sommet isolé, ou un cycle C_4 ou une couronne $G_j o K_1$ avec $\Delta(G_j) \leq \Delta - 1$.

Cas 2. Soit $H = C_{2k+1}$ et $\Delta = 2$. Puisque G est un graphe couronné alors $v \in V(C_{2k+1})$ et $k \leq 3$. Donc chaque composante connexe de $G - H$ est ou bien un sommet isolé, ou un cycle C_4 ou une couronne $G_j o K_1$ avec $\Delta(G_j) \leq 1$.

Finalement, si $\chi(G) + ir(G) = n + 1 - \beta_\Delta(G)$ alors $\chi(G) + \gamma(G) = n + 1 - \beta_\Delta(G)$, d'où le résultat. ■

L'exemple suivant montre que le Théorème 2.32 n'est pas vérifié si $\mu = i$. Soit F un graphe formé d'un cycle $C_4 = x_1x_2x_3x_4x_1$, deux sommets supplémentaires u_1 et u_2 avec les arêtes x_1u_1 et x_2u_2 . Si on définit le graphe $G_1 = F \cup K_4$, on voit que $\chi(G_1) + i(G_1) = 8 = n(G_1) + 1 - \beta_\Delta(G_1)$ alors que le graphe G_1 ne figure pas dans la famille des graphes définie dans le Théorème 2.32.

Considérons maintenant le produit des paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique.

Théorème 2.33 ([20]) *Soit $G \neq C_5, C_7$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$ et de degré maximum Δ . Alors*

$$\mu(G)\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{(n - \beta_\Delta(G))^2}{4} \right\rfloor \quad (2.4)$$

avec l'égalité si et seulement si $G = K_4, C_9, C_{11}$ ou $\chi(G) = \Delta$, $\mu(G) = n - \Delta - \beta_\Delta(G)$ avec ou bien $n - \beta_\Delta(G) - 2\Delta = 0$ si $n - \beta_\Delta(G)$ est pair ou bien $n - \beta_\Delta(G) - 2\Delta = \pm 1$ si $n - \beta_\Delta(G)$ est impair.

Preuve. Si $G = K_n$ alors l'inégalité (2.4) vérifiée. L'égalité est atteinte si et seulement si $G = K_4$. Si $G = C_{2k+1}$ avec $k \geq 4$, alors $\mu(G) = \lceil \frac{2k+1}{3} \rceil$, $\chi(G) = 3$ et $\beta_\Delta(G) = k - 1$. En utilisant l'inégalité $3 \lceil \frac{2k+1}{3} \rceil \leq \left\lfloor \frac{(k+2)^2}{4} \right\rfloor$ pour $k \geq 4$, on voit que (2.4) est vérifiée, avec l'égalité si et seulement si $G = C_9, C_{11}$.

Supposons maintenant que $G \neq K_n, C_{2k+1}$, et soit $t = \frac{n - \beta_\Delta(G)}{2} - \Delta$. D'après le Théorème 2.29 et le Corollaire 2.28, on a:

$$\begin{aligned} \mu(G)\chi(G) &\leq (n - \Delta - \beta_\Delta(G))\Delta = \left(\frac{n - \beta_\Delta(G)}{2} + t\right)\left(\frac{n - \beta_\Delta(G)}{2} - t\right) \\ &= \left(\frac{n - \beta_\Delta(G)}{2}\right)^2 - t^2 \leq \left(\frac{n - \beta_\Delta(G)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

et puisque $(n - \Delta - \beta_\Delta(G))\Delta$ est un entier, alors:

$$\mu(G)\chi(G) \leq (n - \Delta - \beta_\Delta(G))\Delta \leq \left\lfloor \frac{(n - \beta_\Delta(G))^2}{4} \right\rfloor \quad (*)$$

et (2.4) est vérifiée.

Si on a l'égalité en (2.4), alors (*) montre avec le Théorème 2.29 et le Corollaire 2.28 que $\chi(G) = \Delta$, $\mu(G) = n - \Delta - \beta_\Delta(G)$ et

$$(n - \Delta - \beta_\Delta(G))\Delta = \left\lfloor \frac{(n - \beta_\Delta(G))^2}{4} \right\rfloor.$$

Ce qui donne $n - \beta_\Delta(G) - 2\Delta = 0$ si $n - \beta_\Delta(G)$ est pair, et $n - \beta_\Delta(G) - 2\Delta = \pm 1$ si $n - \beta_\Delta(G)$ est impair. Il est clair que l'inverse est aussi juste, et la preuve du Théorème 2.33 est achevée. ■

A partir du Théorème 2.33, on déduit les deux corollaires suivants:

Corollaire 2.34 (Gernert [41]) *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, alors*

$$\gamma(G)\chi(G) \leq n^2/4.$$

Corollaire 2.35 *Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 4$. Alors $\mu(G)\chi(G) = \lfloor (n - \beta_\Delta(G))^2 / 4 \rfloor$ si et seulement si $G = C_4, P_4, P_5, P_7$.*

Nous présentons dans ce qui suit deux familles de graphes infinis pour lesquels l'inégalité (2.4) est atteinte. Pour la première famille, le nombre $n - \beta_\Delta(G)$ est pair et pour la seconde, le nombre $n - \beta_\Delta(G)$ est impair. Ceci montre que le Théorème 2.33 est le meilleur possible.

Soit H un graphe complet avec un ensemble de sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$. Le graphe $H \diamond K_2$ est obtenu en considérant le graphe H et q copies $P_1, P_2, \dots, P_q$ du graphe complet K_2 en attachant le sommet x_i avec exactement un sommet de P_i pour tout $1 \leq i \leq q$. Maintenant, supprimons un sommet pendant dans le graphe $H \diamond K_2$ ($q \geq 2$) et notons par G le graphe résultant. Alors, $n(G) = 3q - 1$, $i(G) = \gamma(G) = ir(G) = q$, $\chi(G) = q$, et $\beta_\Delta(G) = q - 1$. Par conséquent,

$$\mu(G)\chi(G) = q^2 = \frac{(n(G) - \beta_\Delta(G))^2}{4}$$

et l'inégalité (2.4) est atteinte.

Maintenant soit F le graphe formé par $H \diamond K_2$ ($q \geq 2$) défini plus haut en ajoutant un sommet u que l'on attache avec un sommet pendant quelconque de $H \diamond K_2$. Alors, $n(F) = 3q + 1$, $\mu(F) = q + 1$, $\chi(F) = q$, et $\beta_\Delta(F) = q$. Par conséquent,

$$\mu(F)\chi(F) = q^2 + q = \left\lfloor \frac{(n(F) - \beta_\Delta(F))^2}{4} \right\rfloor$$

et l'inégalité (2.4) est atteinte.

Le résultat suivant est une relation entre le nombre de domination stable et le nombre de 2-stabilité dans un graphe G .

Théorème 2.36 ([20]) *Pour tout graphe G d'ordre n ,*

$$i(G) + \delta \cdot \rho(G) \leq n. \quad (2.5)$$

Preuve. Soit S un ρ -ensemble de G . Puisque par définition, $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ pour tous $x, y \in S$, alors $|N[S]| \geq (\delta + 1) |S|$. Soit S' un ensemble stable maximal du graphe induit par les sommets $V(G) - N[S]$. Alors $S \cup S'$ est un stable maximal de G et par conséquent:

$$\begin{aligned} i(G) &\leq |S| + |S'| \leq |S| + |V(G)| - |N[S]| \\ &\leq |V(G)| - \delta \cdot |S| \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

La borne du Théorème 2.36 est atteinte. En effet, considérons le graphe G formé par un graphe complet K_{p^2} avec un ensemble de sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_{p^2}\}$, en ajoutant p sommets $u_1, u_2, \dots, u_p$ où chaque sommet u_i est attaché aux sommets $x_{(i-1)p+1}, \dots, x_{ip}$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Alors $n = p^2 + p$, $i(G) = \rho(G) = \delta = p$. Par conséquent,

$$i(G) = p = p^2 + p - p^2 = n - \delta \rho(G),$$

d'où on a l'égalité en (2.5).

Théorème 2.37 ([20]) *Pour tout graphe Δ -régulier connexe avec $\Delta \geq 3$,*

$$\mu(G)\chi(G)\rho(G) \leq n^2/4. \quad (2.6)$$

Preuve. Soit $G \neq C_n$ un graphe régulier connexe. Si $G = K_n$ avec $n \geq 4$ alors $\mu(G) = \rho(G) = 1$, $\chi(G) = n$, et donc l'inégalité (2.6) est vérifiée. Supposons que $G \neq K_n$ et soit $t = \rho(G)\Delta - \frac{n}{2}$. D'après le Théorème 2.29 et le Théorème 2.36,

$$\begin{aligned} \mu(G)\chi(G) &\leq i(G)\chi(G) \leq (n - \Delta\rho(G))\Delta = \frac{1}{\rho(G)}\left(\frac{n}{2} - t\right)\left(\frac{n}{2} + t\right) \\ &\leq \frac{n^2}{4\rho(G)}. \end{aligned}$$

■

Dans [73], Topp et Volkmann ont montré que pour tout graphe régulier connexe $G \neq C_7$ avec $n \geq 6$, $\chi(G)\gamma(G) \leq \frac{(n+1)^2}{8}$. Donc on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.38 *Soit $G \neq C_n$ un graphe régulier connexe avec $\rho(G) \geq 2$, alors*

$$\chi(G)\mu(G) \leq \frac{n^2}{8}.$$

Il faut noter que si G est un graphe régulier d'ordre n , alors Caro et Roditty [14] ont montré que:

$$\chi(G)\gamma(G) \leq n(1 + \log n)$$

Cette borne est meilleure que $n^2/8$ pour $n \geq 38$.

2.4.2 Relations Nordhauss-Gaddum pour le nombre de domination stable

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la somme et le produit du nombre de domination stable d'un graphe et de son complémentaire. Trivialement, pour la somme on a, $i(G) + i(\overline{G}) \leq n + 1$ pour tout graphe G . L'égalité est atteinte pour les graphes complets. Ce resultat peut être amélioré par le Corolaire 2.30 étant donné que pour tout graphe G , on a $i(\overline{G}) \leq \chi(G)$.

Proposition 2.39 *Pour tout graphe G ,*

$$i(G) + i(\overline{G}) \leq n - \beta_{\Delta}(G) + 1.$$

Avec l'égalité atteinte si et seulement si $G = K_n, C_5, C_7$.

Par contre, pour le produit $i(G) \cdot i(\overline{G})$, le meilleur résultat connu est celui dû à Cockayne, Favaron, Li et MacGillivray [21].

Théorème 2.40 ([21]) *pour tout graphe G d'ordre n on a,*

- $i(G) \cdot i(\overline{G}) \leq (n + 3)^2 / 8$ si $n \leq 27$
- $i(G) \cdot i(\overline{G}) \leq (n + 8)^2 / 10.8$ sinon.

Nous établissons une borne supérieure pour $i(G) \cdot i(\overline{G})$ en fonction de l'ordre n et du nombre de 2-stabilité. En particulier, cette borne améliore celle de Cockayne et al. [21] pour tout graphe ayant un nombre de 2-stabilité au moins 3.

Théorème 2.41 ([20]) *Pour tout graphe G avec $\rho(G) = \rho$,*

$$i(G) \cdot i(\overline{G}) \leq (n + \rho)^2 / 4\rho.$$

Preuve. Il est bien connu (voir [46]) que pour tout graphe G on a, $i(\overline{G}) \leq \delta + 1$. Soit $t = \rho(\delta + 1) - \frac{n+\rho}{2}$. D'après le Théorème 2.36, on a :

$$\begin{aligned} i(G)i(\overline{G}) &\leq (n - \rho\delta)(\delta + 1) = \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{n + \rho}{2} \right) + t \right) \left(\left(\frac{n + \rho}{2} \right) - t \right) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \left(\frac{n + \rho}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

■

Puisque le deuxième terme de l'inégalité dans le Théorème 2.41 est une fonction décroissante en ρ , on a les corollaires suivants:

Corollaire 2.42 *Pour tout graphe G avec $\rho(G) \geq 3$,*

$$i(G)i(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{(n+3)^2}{12} \right\rfloor$$

Il faut noter que la borne donnée dans le Corollaire 2.42 est atteinte et peut être vu en considérant la couronne $K_3 \circ K_1$, ce qui montre que cette borne est la meilleure possible.

Corollaire 2.43 *Pour tout graphe G avec $\rho(G) = 2$,*

$$i(G)i(\overline{G}) \leq \min \left\{ \frac{(n+2)^2}{8}, \frac{(n+8)^2}{10.8} \right\}$$

Enfin, on note aussi que si $n \leq 35$ alors la première borne du Corollaire 2.43 est meilleure que la seconde.

Chapitre 3

LA DOMINATION DOUBLE DANS LES GRAPHEs

Ce chapitre est consacré à l'étude du concept de la domination double dans les graphes introduit par Harary et Haynes [43] (article paru dans la revue *Ars Combinatoria* en 2000). Il faut signaler que peu de travaux ont été réalisés sur ce sujet. Plus précisément, on retrouve les travaux de Harary et Haynes (Voir [43, 44, 45]) et le récent travail de Liao et Chang [63]. Différents travaux ont été menés en collaboration avec Blidia, Haynes et Henning (Voir [17, 8, 10]), Khelladi et Maffray (Voir [19]) consacrés à l'étude de la domination double dans les graphes et des résultats intéressants ont été obtenus. Nous présentons dans ce chapitre l'essentiel de ces résultats.

3.1 Introduction

Commençons par définir les ensembles dominants doubles dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble S de V est un dominant double de G si pour tout sommet $v \in S$, on a $|N[v] \cap S| \geq 2$, c'est à dire ou bien le sommet $v \in S$ et possède au moins un voisin dans S , ou bien $v \in V - S$ et possède au moins deux voisins dans S . Le nombre de domination double noté $\gamma_{\times 2}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G . (Voir Figure 7). Il est clair qu'un graphe simple possède un ensemble dominant double si et seulement si il est sans sommets isolés.

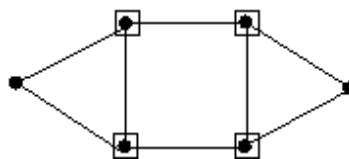


Figure 7. Graphe G avec $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

La domination double est riche en application. Par exemple, le problème du placement des gardiens dans une prison. Un gardien placé sur un sommet v peut garder tous les sommets de $N[v]$. Dans ce cas, un ensemble dominant double S représente un ensemble de gardiens avec la propriété que tout prisonnier (un sommet de $V - S$) est

surveillé par au moins deux gardiens et chaque gardien (un sommet de S) est voisin d'un autre gardien en vue de s'assurer une mutuelle aide et assistance en cas de besoin.

Dans un travail très récent, Liao et Chang [64] montrent que le problème de la détermination du nombre de domination double dans un graphe quelconque est NP-Complet. Ils donnent aussi dans [64] un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination double dans les graphes fortement triangulés. Cependant, Voici des exemples de graphes où le nombre de domination double est donné d'une façon exacte (Voir [43]).

- 1) $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$ pour $n \geq 2$.
- 2) $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.
- 3) $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$ pour $r \geq 3, s \geq 3$.
- 4) $\gamma_{\times 2}(K_{1,m}) = m + 1 = n$.

Nous résumons ci-dessous quelques bornes établies par Harary et Haynes [43] concernant le nombre de domination double.

Théorème 3.1 ([43]) *Soit G un graphe sans sommets isolés ayant n sommets et m arêtes, alors:*

- a) $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$.
- b) *Si G admet deux $\gamma(G)$ -ensembles disjoints alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$.*
- c) $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$.
- d) $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{4n-2m}{3}$.
- e) $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$.
- f) *Si $\delta \geq 2$ alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor + \gamma(G)$ si $n = 3$ ou 5 et $\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor + \gamma(G) - 1$ sinon.*

3.2 Minimalité, bornes inférieures et supérieures

Nous nous intéresserons dans cette partie à la minimalité des ensembles dominants doubles et à l'établissement des bornes supérieures et inférieures pour le nombre de domination dans un graphe quelconque. Les bornes concernant les arbres seront exposées et détaillées dans la prochaine section réservée à cette classe de graphes.

L'étude de la minimalité se résume à chercher des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un ensemble dominant double soit minimal dans un graphe quelconque G .

Le premier résultat sur la minimalité des ensembles dominants est dû à Ore [66] en 1962.

Théorème 3.2 ([66]) *Un ensemble dominant S d'un graphe $G = (V, E)$ est minimal si et seulement si pour tout sommet $u \in S$ l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- 1) *u est un sommet isolé dans le sous graphe induit par S ,*
- 2) *il existe un sommet $v \in V - S$ tel que $N(v) \cap S = \{u\}$.*

Pour la minimalité des ensembles dominants doubles, nous avons établi le résultat suivant:

Théorème 3.3 ([17]) *Soient G un graphe sans sommets isolés et S un ensemble dominant double de G . Alors S est minimal si et seulement si chaque sommet $v \in S$ satisfait à l'une des conditions suivantes:*

- 1) *v est un sommet pendant dans le sous graphe induit par les sommets de S ,*
- 2) *v est adjacent à un sommet pendant dans $\langle S \rangle$,*
- 3) *il existe un sommet u dans $V - S$ tel que $N(u) \cap S = \{v, w\}$.*

Preuve. Soient G un graphe sans sommets isolés et S un ensemble dominant double de G . Etablissons d'abord la condition nécessaire. Donc supposons que S est minimal, alors pour tout sommet $v \in S$, l'ensemble $S - \{v\}$ n'est pas un ensemble dominant double de G . Ceci implique qu'il existe un sommet $u \in V$ qui n'est pas dominé d'une façon double par $S - \{v\}$. Maintenant, si $u = v$, alors v est un sommet de degré un dans $\langle S \rangle$. Si $u \in S - \{v\}$, alors u est un sommet pendant dans $\langle S \rangle$ adjacent à v . Enfin, si $u \in V - S$, alors $v \in N(u)$ et $|N(u) \cap S| = 2$.

Inversement, supposons que S est un ensemble dominant double de G et que chaque sommet de S satisfait à l'une des trois conditions du théorème. Supposons que S n'est pas minimal, alors il existe un sommet $v \in S$ tel que $S - \{v\}$ est un dominant double. Puisque v possède au moins deux voisins dans $S - \{v\}$, alors la condition 1 n'est pas vérifiée pour v . Aussi, puisque $S - \{v\}$ est un dominant double, il n'existe pas de sommets isolés dans $S - \{v\}$, ce qui entraîne que la condition 2 n'est pas vérifiée aussi pour v . D'autre part, chaque sommet de $N(v) \cap (V - S) \neq \emptyset$ a au moins deux voisins dans $S - \{v\}$ et donc la condition 3 n'est pas vérifiée pour v , contradiction. Ceci achève la preuve. ■

Nous établissons maintenant une relation entre le nombre de domination double et le nombre de 2-stabilité pour tout graphe sans sommets isolés.

Théorème 3.4 ([19]) *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2\rho(G)$.*

Preuve. Soit S un ensemble 2-stable maximum de G . Alors pour tout sommet $v \in S$, chaque ensemble dominant double de G doit contenir au moins deux sommets de $N[v]$ pour dominer doublement v . Et puisque $N[v] \cap N[u] = \emptyset$ pour toute paire de sommets v, u de S , on a $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2|S|$. ■

Dans [30], Farber a montré que le nombre de domination et le nombre de 2-stabilité sont égaux pour tout graphe fortement triangulé. Par conséquent on a le corollaire suivant qui généralise le résultat de Blidia, Chellali, Haynes et Henning [10] pour les arbres (Voir Section 3 de ce chapitre):

Corollaire 3.5 *Si G est un graphe fortement triangulé sans sommets isolés, alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2\gamma(G)$.*

La borne supérieure établie au Théorème 3.1-c étant triviale pour tout graphe sans sommets isolés, nous proposons ci-dessous une borne qui l'améliore.

Théorème 3.6 ([17]) *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq n + 1 - \delta.$$

Preuve. Si $\delta = 1$, alors l'inégalité est vérifiée. Supposons que $\delta \geq 2$. Soient v un sommet de V de degré minimum et w un sommet de $N(v)$. Il faut noter qu'aucun sommet de V n'a tous ses voisins dans $N(v) - \{w\}$ car $|N(v) - \{w\}| = \delta - 1$. Donc, $S = V - (N(v) - \{w\})$ est un dominant double de G , puisque chaque sommet de S a au moins un voisin dans S et chaque sommet de $N(v) - \{w\}$ possède v et au moins un

autre sommet comme voisins dans S . Par conséquent, $\gamma_{\times 2}(G) \leq |V - (N(v) - \{w\})| = n + 1 - \delta$. ■

Dans [44], Harary et Haynes ont établi les résultats de type Nordhauss-Gaddum suivants:

Théorème 3.7 ([44]) *Si G et $\overline{G}$ sont deux graphes sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq 2n,$$

et cette borne est atteinte si et seulement si $G = P_4$.

Théorème 3.8 [44] *Si G est un graphe tel que $\gamma(G) \geq 5$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 5$, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq n - \Delta + \delta - 1 \leq n - 1.$$

Dans [44], Haynes et Harary conjecturent le résultat du théorème pour un graphe G tel que $\gamma(G) \geq 4$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 4$. La conjecture a été montrée récemment par Erfang, Chuangyin and Liying [29].

Comme conséquence directe du Théorème 3.6, le corollaire suivant améliore la borne du Théorème 3.7.

Corollaire 3.9 *Si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq n + 3 + \Delta - \delta,$$

et cette borne est atteinte.

Le cycle C_5 est un exemple de graphe où la borne précédente est atteinte.

Corollaire 3.10 *Pour tout graphe régulier $G \neq K_n$ on a,*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq n + 3.$$

En se restreignant aux graphes de degré minimum au moins deux, nous présentons une borne supérieure pour le nombre de domination double en fonction de l'ordre du graphe et du nombre de domination total.

Proposition 3.11 ([17]) *Pour tout graphe G avec $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n + \gamma_t(G)}{2}.$$

Et cette borne est atteinte.

Preuve. Soient G un graphe de degré minimum $\delta \geq 2$ et S un $\gamma_t(G)$ -ensemble. Soit A l'ensemble des sommets isolés dans $\langle V - S \rangle$. Alors chaque sommet de A a au moins deux voisins dans S . Soit D l'ensemble dominant minimum de $\langle (V - S) - A \rangle$. Puisque $\langle (V - S) - A \rangle$ est sans sommets isolés, il s'ensuit d'après le Théorème d'Ore (Voir Chapitre 2, Théorème 2.3) que $|D| \leq \frac{|V-S-A|}{2} \leq \frac{|V-S|}{2}$. Donc $S \cup D$ est un ensemble dominant double de G , et par conséquent:

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq |S \cup D| \leq |S| + \frac{|V - S|}{2} = \frac{n + \gamma_t(G)}{2}.$$

■

Le cycle C_5 est un exemple de graphe où la borne de la Proposition 3.11 est atteinte.

Dans [57], Henning établit la borne supérieure suivante pour le nombre de domination total.

Théorème 3.12 [57] *Si $G \notin \{C_3, C_5, C_6, C_{10}\}$ est un graphe d'ordre n avec $\delta \geq 2$, alors*

$$\gamma_t(G) \leq 4n/7.$$

Notre prochain résultat découle directement de la Proposition 3.11 et le Théorème 3.12.

Corollaire 3.13 *Si $G \neq C_5$ est un graphe d'ordre n avec $\delta \geq 2$, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor 11n/14 \rfloor.$$

Dans [1], Allan, Laskar, et Hedetniemi montrent que $\gamma_t(G) \leq 2ir(G)$ pour tout graphe G sans sommets isolés. Par conséquent, on a le corollaire suivant:

Corollaire 3.14 *Pour tout graphe G avec $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n}{2} + ir(G) \leq \frac{n}{2} + \gamma(G).$$

Le résultat suivant est une borne supérieure pour la somme du nombre de domination double et le nombre de 2-stabilité dans un graphe G .

Proposition 3.15 ([17]) *pour tout graphe G avec $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \rho(G) \leq n,$$

et cette borne est atteinte.

Preuve. Soient G un graphe avec $\delta \geq 2$ et S un ensemble 2-stable maximum de G . Alors $N(v) \subset V - S$ pour tout sommet $v \in S$, et donc v est adjacent à au moins deux sommets de $V - S$. Aussi, chaque sommet de $V - S$ a au moins un voisin dans $V - S$, car les voisinages de tout couple de sommets de S sont disjoints. Par conséquent, $V - S$ est un dominant double de G , et donc $\gamma_{\times 2}(G) \leq |V - S| = n - \rho(G)$.

Les Cycles C_{3k} sont des graphes pour lesquels la borne est atteinte. ■

Comme conséquence, on a le corollaire suivant pour les graphes fortement triangulés vu que $\gamma(G) = \rho(G)$ (voir [30]).

Corollaire 3.16 *Si G est un graphe fortement triangulé avec $\delta \geq 2$, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma(G) \leq n,$$

et cette borne est atteinte.

La borne supérieure du Corollaire 3.16 est atteinte. Par exemple, le graphe G_k obtenu à partir de k copies de K_3 en identifiant un sommet de la i^{eme} copie avec le i^{eme} sommet de la chaîne P_k . Alors G_k est un graphe tel que $n = 3k$, $\gamma(G_k) = k$, et $\gamma_{\times 2}(G_k) = 2k$. Le graphe de la Figure 8 illustre le graphe G_4 . Pour voir que la condition sur le degré minimum est nécessaire dans l'énoncé du corollaire 3.16, considérons la couronne $G = H \circ K_1$ où H est un graphe fortement triangulé d'ordre k . Dans ce cas G est aussi fortement triangulé d'ordre $n = 2k$ avec $\delta = 1$, $\gamma(G) = k$, et $\gamma_{\times 2}(G) = 2k$. Maintenant pour voir que la condition sur les graphes fortement triangulés est nécessaire dans l'énoncé du corollaire 3.16, considérons le graphe H_k obtenu à partir de k copies du cycle C_4 en identifiant un sommet de la i^{eme} copie avec le i^{eme} sommet de la chaîne P_k . Alors H_k est d'ordre $n = 4k$ avec $\gamma(H_k) = k + \lceil k/3 \rceil$, et $\gamma_{\times 2}(H_k) = 3k$.



Figure 8. Le graphe G_4 .

3.3 La domination double dans les arbres

Nous initions dans cette partie l'étude de la domination double dans la classe des arbres. Pour cela, nous introduisons quelques définitions supplémentaires. Un arbre T *enraciné* est une arboréscence (arbre où les arêtes sont remplacées par des arcs) admettant un sommet r à partir duquel il existe un chemin à tout autre sommet de T . Le sommet r est unique et est appelé *racine*. Pour un sommet v d'un arbre enraciné, le *parent* $p(v)$ de v est l'unique sommet tel que il existe un arc de $p(v)$ vers v , le *fil*s de v est un sommet u tel que $p(u) = v$ et un *descendant* de v est un sommet u pour lequel il existe un chemin de v à u dans T . Il faut noter que quand on considère un arbre enraciné, l'orientation ne sera pas mentionnée explicitement et on parlera aussi d'arêtes au lieu d'arcs. Pour un arbre enraciné, on utilisera aussi les notations suivantes:

$$\begin{aligned} C(v) &= \{u \in V : u \text{ est un fils de } v\} \\ D(v) &= \{u \in V : u \text{ est un descendant de } v\} \\ D[v] &= D(v) \cup \{v\}. \end{aligned}$$

Il est à noter que $C(v) \subset D(v)$. Un *sous arbre maximal* enraciné en w noté par T_w est le sous arbre de T induit par $D[w]$.

On notera respectivement par $L(T)$ et $S(T)$ l'ensemble des sommets pendants et supports de T , où $|L(T)| = \ell(T)$. Une *étoile* d'ordre $p \geq 2$ est le graphe biparti complet $K_{1,p-1}$ et une *étoile subdivisée* est un arbre obtenu à partir d'une étoile où chaque arête est subdivisée une seule fois. Un arbre T est une *étoile double* s'il contient exactement deux sommets supports adjacents. Une étoile double est notée par $S_{p,q}$ où $p+q = \ell(T)$.

Avant de présenter les résultats établis sur le nombre de domination double dans les arbres, il est utile de faire les deux remarques suivantes:

Remarque 3.17 *Dans un arbre, tout ensemble dominant double contient tous les sommets pendants et supports.*

Remarque 3.18 *Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, on a:*

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(P_n) &= 2 \lceil n/3 \rceil + 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ et} \\ \gamma_{\times 2}(P_n) &= 2 \lceil n/3 \rceil \text{ sinon} \end{aligned}$$

3.3.1 Bornes inférieures

Nous établissons dans cette partie quelques bornes inférieures sur le nombre de domination double en caractérisant pour certaines d'entre elles les arbres qui atteignent l'égalité.

Proposition 3.19 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$,*

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \ell(T).$$

Preuve. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après la remarque précédente, $L(T) \subset D$ et $S(T) \subset D$. Donc $D - L(T)$ est un dominant de T et par conséquent: $\gamma(T) \leq |D - L(T)| = \gamma_{\times 2}(T) - \ell(T)$. ■

Puisque tout arbre contient au moins $\Delta(T)$ sommets pendants où $\Delta(T)$ est le degré maximum de T , alors comme conséquence à la proposition précédente, on a le corollaire suivant:

Corollaire 3.20 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$,*

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \Delta(T).$$

Afin de donner une caractérisation des arbres pour lesquels la borne inférieure du Corollaire 3.20 est atteinte, nous définissons la famille des arbres notée $\mathcal{S}$ obtenus à partir de l'étoile $K_{1,t}$ pour $t \geq 3$, ou bien en subdivisant chaque arête une fois (ce qui donne une étoile subdivisée) ou bien en subdivisant au plus $(t-1)$ arêtes au plus deux fois.

Théorème 3.21 ([10]) *Soit T un arbre. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma(T) + \Delta(T)$ si et seulement si $T = P_n$ pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ou bien $T \in \mathcal{S}$.*

Preuve. Pour des raisons de simplicité, soient $\Delta = \Delta(T)$ et $\ell = \ell(T)$. Soit T un arbre vérifiant $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma(T) + \Delta$. Puisque $\gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$, alors d'après la Remarque 3.18, on déduit que T est une chaîne P_n si et seulement si $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Donc, on suppose que $\Delta \geq 3$.

D'après la Proposition 3.19, on a $\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \ell \geq \gamma(T) + \Delta = \gamma_{\times 2}(T)$, et donc $\ell = \Delta$. Par conséquent, tous les sommets de T à l'exception du sommet de degré maximum Δ , ont un degré un ou deux dans T . Alors, $T = K_{1,\Delta}$ ou bien T est obtenu à partir de $K_{1,\Delta}$ par une subdivision successive des arêtes. Si $T = K_{1,\Delta}$, alors $T \in \mathcal{S}$. Donc on suppose que T est obtenu par des subdivisions successives des arêtes de $K_{1,\Delta}$.

Soit x le sommet de degré maximum Δ . Par supposition, $V(T) - N[x] \neq \emptyset$. Enracinons maintenant T en x . Chaque sous arbre T enraciné en un fils de x est une chaîne. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après la Remarque 3.17, tous les sommets pendants et supports de T appartiennent à D .

On va voir maintenant que chaque sommet pendant de T est à une distance au plus 3 de x . Supposons le contraire, qu'il existe un sommet pendant u à distance au moins 4 de x , et soit $x = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = u$ la chaîne de x à u . Alors $\{u_k, u_{k-1}, u_{k-3}, u_{k-4}\} \subseteq D$. Donc, $D - (L(T) - \{u_{k-3}\})$ est un ensemble dominant de T de cardinalité $\gamma_{\times 2}(T) - \ell - 1 = \gamma_{\times 2}(T) - \Delta - 1$, contradiction avec le fait que $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma(T) + \Delta$. Par conséquent, chaque sommet pendant est à distance au plus 3 de x .

Montrons maintenant que $T \in \mathcal{S}$. Si tous les sommets pendants de T sont à distance 2 de x ou bien au moins un sommet pendant est adjacent à x , alors $T \in \mathcal{S}$. Donc supposons que T n'est pas une étoile subdivisée et que x n'est pas un sommet support, c'est à dire qu'il existe un sommet pendant, disons w , qui soit à distance 3 de x . Soit x, y, z, w la chaîne de x à w . D'après la Remarque 3.17, z et w sont dans D . Par ailleurs, au moins l'un de x ou y est dans D pour dominer de façon double y . Si x est adjacent à un sommet support alors $D - (L(T) \cup \{x, y\})$ est un ensemble dominant de cardinal au plus $\gamma_{\times 2}(T) - \Delta - 1$, d'où la contradiction. Donc on supposera que chaque sommet pendant de T est à distance 3 de x . Dans ce cas, au moins deux sommets de $N[x]$ sont dans D pour dominer de façon double x . Mais alors en supprimant l'un de ces sommets et l'ensemble $L(T)$ de D , le reste forme un ensemble dominant de T de cardinal $\gamma_{\times 2}(T) - \Delta - 1$, ce qui donne encore une fois une contradiction. Par conséquent, $T \in \mathcal{S}$.

La condition suffisante est simple à vérifier. Ceci achève la preuve du Théorème.

■

Nous montrons par le résultat suivant que le nombre de domination double d'un arbre est égal à au moins deux fois le nombre de domination stable de l'arbre.

Théorème 3.22 ([10]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, on a $\gamma_{\times 2}(T) \geq 2i(T) \geq 2\gamma(T)$.*

Preuve. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Soit F un graphe partiel de T obtenu en supprimant toutes les arêtes sauf deux joignant chaque sommet de $V(T) - D$ à ceux de D . Donc F est une forêt et D est un dominant double de F , de plus chaque sommet de $V(F) - D$ a exactement deux voisins de D dans F . Soit T_D le graphe défini comme suit: $V(T_D) = D$ et deux sommets x et y de $V(T_D)$ sont adjacents dans T_D si $xy \in E(T)$ ou bien il existe un sommet $v \in V(F) - D$ adjacent à la fois à x et y dans F . Puisque

T est un arbre et F est une forêt, il s'ensuit que T_D est une forêt et donc un graphe biparti.

Soit (A, B) la bipartition de T_D où sans perte de généralité $|A| \leq |B|$. Puisque D est un dominant double de T , A (respectivement, B) domine D dans T . Par ailleurs, chaque sommet de $V(T) - D$ est adjacent dans F , et par suite dans T , à un sommet de A et à un sommet de B . Par conséquent, les ensembles A et B constituent chacun un dominant stable de T , d'où $i(T) \leq |A| \leq \gamma_{\times 2}(T)/2$. ■

Il faut remarquer que pour la couronne d'un arbre, la borne inférieure du Théorème 3.22 est atteinte, en effet, le nombre de domination double est égal à l'ordre de la couronne qui est n tandis que le nombre de domination stable est égal à $n/2$. Par ailleurs, la différence $\gamma_{\times 2}(T) - 2i(T)$ peut être aussi grande que l'on veut, et ceci peut être vu en considérant le graphe T_j obtenu à partir de la chaîne P_{2j+1} dont les sommets sont numérotés de 1 à $2j+1$ en attachant deux sommets pendants adjacent à chaque sommet numéroté impair. Dans ce cas, $i(T) = j+1$, alors que $\gamma_{\times 2}(T) = 3j+3$.

Nous notons aussi que le Théorème 3.22 n'est pas valable pour tout graphe. Pour voir, considérons le graphe G formé à partir de t copies d'un cycle C_4 en identifiant un sommet de chaque copie du cycle C_4 en un seul sommet. Alors, $i(G) = t+1$ et $\gamma_{\times 2}(G) = 2t+1$.

Nous remarquons enfin que contrairement au nombre de domination stable, $\gamma_{\times 2}(T)$ est incomparable avec $2\gamma_t(T)$ et la différence peut être aussi grande que l'on veut. Pour voir que $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma_t(T)$, considérons l'arbre T_k ($k \geq 1$) formé par la couronne $P_{2k} \circ K_1$ où chaque arête pendante est subdivisée une seule fois. Dans ce cas, T_k possède $6k$ sommets où $\gamma_t(T) = 4k$ et $\gamma_{\times 2}(T) = 5k$. Maintenant pour voir que $\gamma_{\times 2}(T) \geq 2\gamma_t(T)$, on considère l'étoile double $S_{r,r}$ ($r \geq 2$). Alors $\gamma_t(S_{r,r}) = 2$ mais $\gamma_{\times 2}(S_{r,r}) = 2r+2$.

Avant de caractériser les arbres T vérifiant $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$, on montre le résultat suivant:

Lemme 3.23 *Si G est un graphe sans sommets isolés possédant deux $i(G)$ -ensembles disjoints alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2i(G)$.*

Preuve. Soient D et D' deux $i(G)$ -ensembles disjoints. Alors le sous-graphe induit par les sommets de $D \cup D'$ est sans sommets isolés. Aussi, chaque sommet de $V(G) - (D \cup D')$ est adjacent à au moins deux sommets, l'un dans D et l'autre dans D' . Par conséquent, $D \cup D'$ est un dominant double de G , d'où $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + |D'| = 2i(G)$. ■

Théorème 3.24 ([10]) *Soit T un arbre. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$ si et seulement si T possède deux $i(T)$ ensembles disjoints.*

Preuve. La condition suffisante découle du Théorème 3.22 et du Lemme 3.23. Maintenant supposons que T est un arbre tel que $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$, et soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. En utilisant la notation introduite dans la preuve du Théorème 3.22, supposons que $|A| < |B|$. Alors, A est un ensemble dominant stable de T de cardinal inférieur strictement à $\gamma_{\times 2}(T)/2 = i(T)$, d'où la contradiction. Donc, $|A| = |B| = |D|/2 = i(T)$, ce qui implique que A et B sont deux $i(T)$ -ensembles disjoints. ■

En utilisant le même procédé de démonstration et le fait que $i(G) \geq \gamma(G)$ pour tout graphe G , on établit le résultat suivant:

Théorème 3.25 ([10]) *Soit T un arbre. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si et seulement si T possède deux $\gamma(T)$ ensembles disjoints.*

Notons que $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ implique $\gamma_{\times 2}(T) = 2i(T)$, mais l'inverse n'est pas vraie. Il existe des arbres pour lesquels $2\gamma(T) < 2i(T) = \gamma_{\times 2}(T)$. Prenons l'exemple de l'étoile double $S_{r,r}$ avec $r \geq 2$, où $\gamma_{\times 2}(S_{r,r}) = 2(r+1) = 2i(S_{r,r}) > 4 = 2\gamma(S_{r,r})$.

Dans [3], Bange, Barkauskas et Slater ont donné une caractérisation par construction des arbres ayant deux $\gamma(T)$ -ensembles disjoints, et par suite des arbres tels que $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$. Dans leur manuscrit, Haynes et Henning [48] généralisent le travail de Bange et al. en donnant une caractérisation par construction des arbres ayant deux $i(T)$ -ensembles disjoints. On donne ci dessous une caractérisation descriptive des arbres T appelés *chenilles* tels que $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$. Une *chenille* est un arbre T qui contient une chaîne $P = u_1u_2\dots u_k$ tel que chaque sommet de T est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne P .

Théorème 3.26 *Soit T une chenille. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si et seulement si $T = P_2$ ou bien T est tel que chaque sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et la distance entre deux sommets supports consécutifs est $\equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$.*

Preuve. Soit T une chenille avec $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$. Si $\gamma(T) = 1$ alors $T = P_2$. Donc supposons que $\gamma(T) \geq 2$. D'après le Théorème 3.25, T admet deux $\gamma(T)$ -ensembles disjoints désignés par S_1 et S_2 . Par conséquent tout sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant, dans le cas contraire il sera dans tout $\gamma(T)$ -ensemble. Soient x et y deux sommets supports consécutifs, et soit T_1 la chaîne de T joignant les deux sommets pendants de x et y . Soient $T_2 = T - T_1$ et k l'ordre de T_1 . Puisque $\gamma(T) \geq 2$, $k \geq 4$. Il est clair que si T_2 existe alors chacune de ses composantes est d'ordre au moins deux. Aussi, il est facile de voir que $S_1 \cap T_1$ et

$S_2 \cap T_1$ sont aussi deux $\gamma(T_1)$ -ensembles disjoints. Par suite, d'après le Théorème 3.25 on a, $\gamma_{\times 2}(T_1) = 2\gamma(T_1) = 2 \lceil \frac{k}{3} \rceil$. D'après la Remarque 3.18, on a $k \equiv 1$ or $2 \pmod{3}$. Donc, la distance entre x et y est $\equiv 1$ or $2 \pmod{3}$.

Inversement, si $T = P_2$ alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$. Donc supposons que T est une chenille différente de P_2 et tel que chaque sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et la distance entre deux sommets supports consécutifs est $\equiv 1$ or $2 \pmod{3}$. Alors T possède exactement deux sommets supports de degré 2 et les autres sommets supports (s'ils existent) sont de degré 3. Soit k le nombre de sommets pendants de T que l'on désigne par $x_1, x_2, \dots, x_k$ consécutivement où x_1 et x_k sont les sommets supports de degré deux. Soit C_i la chaîne $x_i - x_{i+1}$ d'ordre n_i pour $1 \leq i \leq k-1$. Alors $\gamma(C_i) = \lceil n_i/3 \rceil$ et $\gamma_{\times 2}(C_i) = 2 \lceil n_i/3 \rceil$ puisque $n_i \equiv 1$ or $2 \pmod{3}$. Aussi, tout $\gamma(C_{i+1})$ -ensemble (resp. $\gamma_{\times 2}(C_{i+1})$ -ensemble) contient un sommet en commun (resp. deux sommets commun) avec $\gamma(C_i)$ -ensemble (resp. $\gamma_{\times 2}(C_i)$ -ensemble), pour $1 \leq i \leq k-1$. Ceci implique, $\gamma(T) = \sum_{i=1}^{k-1} \lceil n_i/3 \rceil - (k-1)$ et $\gamma_{\times 2}(T) = \sum_{i=1}^{k-1} 2 \lceil n_i/3 \rceil - 2(k-1)$. Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$. ■

3.3.2 Bornes supérieures

Nous tournons notre attention maintenant pour établir des bornes supérieures pour le nombre de domination double dans les arbres. Ces bornes seront en fonction de l'ordre, du nombre des sommets pendants et du nombre de domination.

A cet effet, nous introduisons la notion d'ensemble dominant double faible. On dira qu'un sous-ensemble de sommets S est un *ensemble dominant double faible (EDDF)* d'un graphe G si S est un ensemble dominant et chaque sommet de degré au moins deux est dominé au moins deux fois. Le cardinal minimum d'un EDDF de G est appelé le *nombre de domination double faible* noté $\gamma_{\times 2}^w(G)$. Tout graphe G admet un EDDF puisque $V(G)$ constitue un tel ensemble.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir de l'union de $k \geq 1$ copies de P_3 en ajoutant $k-1$ arêtes de telle sorte que chaque arête ajoutée joint deux sommets pendants de deux chaînes P_3 différentes. Ceci est équivalent aussi à dire que $\mathcal{T}$ est l'ensemble de tous les arbres T ayant un ensemble dominant parfait S (unique) dont chaque sommet est de degré 2, i.e, $|N_T[v] \cap S| = 1$ pour tout $v \in V(T)$ et $\deg_T(v) = 2$ pour tout $v \in S$. Par exemple, la chaîne $P_n \in \mathcal{T}$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Lemme 3.27 *Si T est un arbre de $\mathcal{T}$ d'ordre n , alors $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$.*

Preuve. Soit S un ensemble dominant parfait de T dont chaque sommet est de degré 2. Alors, $n = 3|S|$. Pour dominer de façon double chaque sommet de S , tout

EDDF de T doit contenir au moins deux sommets de $N[v]$ pour tout $v \in S$. Puisque le voisinage fermé $N[v]$, $v \in S$, forme une partition de V , $\gamma_{\times 2}^w(T) \geq 2|S| = 2n/3$. D'autre part, $V - S$ est un EDDF de T , et donc $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq |V - S| = 2n/3$. Par conséquent, $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$. ■

Lemme 3.28 *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq 2n/3$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}$ alors d'après le Lemme 3.27, $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$. Pour prouver que si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq 2n/3$ avec l'égalité si et seulement si $T \in \mathcal{T}$, on procède par induction sur l'ordre n . Si $n = 2$ alors $T = P_2$ et $\gamma_{\times 2}^w(T) = 1 < 2n/3$, si $n = 3$, alors $T = P_3 \in \mathcal{T}$ et $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$. Supposons que $n \geq 4$ et que si T' est un arbre d'ordre $n' \geq 2$, où $n' < n$, alors $\gamma_{\times 2}^w(T') \leq 2n'/3$ avec l'égalité si et seulement si $T' \in \mathcal{T}$.

Soit T un arbre d'ordre n . Si T est une étoile $K_{1,n-1}$ alors $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2 < 2n/3$. Si T est une étoile double alors $n \geq 4$ et les deux sommets supports de T forment un EDDF, d'où $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2 < 2n/3$. Donc supposons que $\text{diam}(T) \geq 4$.

Enracinons maintenant l'arbre T en un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T)$. Soit v un sommet support le plus loin de r . Soient w le père de v et x le père de w dans l'arbre enraciné. D'après le choix de v , T_v est une étoile. On considère deux possibilités selon le degré de w .

Case 1. $\deg w \geq 3$.

Soit $T' = T - V(T_v)$ que l'on suppose d'ordre n' . Puisque $\deg_T v \geq 2$, $n' = n - \deg_T(v) \leq n - 2$. En appliquant notre hypothèse d'induction à T' , $\gamma_{\times 2}^w(T') \leq 2n'/3 \leq 2(n-2)/3$. Parmi tous les EDDF minimum de T' , soit S' celui qui contient le moins possible de sommets pendants. Alors $|S'| \leq 2(n-2)/3$ et S' contient tous les sommets supports de T' . En particulier, si w est un sommet support alors $w \in S'$. D'autre part, si w n'est pas un sommet support alors chaque sommet fils v' de w dans T' est un sommet support, d'où $v' \in S'$. Puisque v' est dominé au moins deux fois alors d'après le choix de S' on a $w \in S'$. Par conséquent, $w \in S'$ que ce soit un sommet support ou non. Donc l'ensemble S' peut être élargi à un EDDF de T en ajoutant le sommet v . D'où, $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq |S'| + 1 \leq 2(n-2)/3 + 1 < 2n/3$.

Case 2. $\deg w = 2$.

Soit $T' = T - V(T_w)$ et supposons que T' est d'ordre n' . Alors $n' = n - |V(T_w)| \leq n - 3$. Par induction sur T' , $\gamma_{\times 2}^w(T') \leq 2n'/3$ avec l'égalité si et seulement si $T' \in \mathcal{T}$. Tout EDDF de T' peut être élargi à un EDDF de T en ajoutant les sommets v et w . D'où, $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq \gamma_{\times 2}^w(T') + 2 \leq 2n'/3 + 2 \leq 2(n-3)/3 + 2 = 2n/3$. De plus,

supposons que $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$. Alors on doit avoir l'égalité le long de cette chaîne d'inéquations. En particulier, $\gamma_{\times 2}^w(T') = 2n'/3$, et donc $T' \in \mathcal{T}$. D'où, T' possède un ensemble dominant parfait S' dont chaque sommet est de degré 2. En particulier, $n' = 3|S'|$. Si $x \in S'$ alors $(V(T') - S' - N_{T'}(x)) \cup \{v, w, x\}$ est un EDDF de T de cardinal $n' - |S'| - 2 + 3 = 2|S'| + 1 = 2n'/3 + 1 = 2n/3 - 1$, d'où $\gamma_{\times 2}^w(T) < 2n/3$, contradiction. Par conséquent, $x \notin S'$. D'où, $S' \cup \{v\}$ est un ensemble dominant parfait de T dont chaque sommet est de degré 2, et par suite $T \in \mathcal{T}$. ■

Soit F une forêt où chaque composante connexe appartient à $\mathcal{T}$. Alors chaque composante de F possède un ensemble dominant parfait (unique) dont chaque sommet est de degré 2 dans F . Soit S_F l'union de ces ensembles dominants parfaits. Alors S_F est aussi un ensemble dominant parfait de F dont chaque sommet est de degré 2 dans F . Soit T un arbre dont la suppression de ses sommets supports et pendants engendre la forêt F et tel que un sommet support quelconque de T n'est adjacent à un sommet de S_F (donc, chaque sommet de S_F est de degré 2 dans T). On appellera F la *forêt cachée* par l'arbre T et on désignera par $\mathcal{F}$ l'ensemble de tels arbres T .

Lemme 3.29 *Soit $T \in \mathcal{F}$ un arbre d'ordre n avec ℓ sommets pendants et s sommets supports. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = (2n + \ell + s)/3$.*

Preuve. Soient F la forêt cachée par l'arbre T et S_F l'ensemble dominant parfait de F dont chaque sommet est de degré 2 dans F . Supposons que F est d'ordre n' . Donc $n' = n - \ell - s$ et $n' = 3|S_F|$. D'après la Remarque 3.17, tout ensemble dominant double de T doit contenir les ℓ sommets pendants et les s sommets supports T . Puisque $T \in \mathcal{F}$, aucun sommet de S_F n'est adjacent à un sommet support de T . De plus, les voisinages fermés $N[v]$, $v \in S_F$, forment une partition de $V(F)$. D'où, puisque tout dominant double de T doit contenir au moins deux sommets de $N[v]$ pour tout $v \in S_F$, on a $\gamma_{\times 2}(T) \geq 2|S_F| + \ell + s = 2n'/3 + \ell + s = (2n + \ell + s)/3$.

D'autre part, $V(T) - S_F$ est un dominant double de T et donc $\gamma_{\times 2}(T) \leq |V(T) - S_F| = (2n + \ell + s)/3$. Par conséquent, $\gamma_{\times 2}(T) = (2n + \ell + s)/3$. ■

Théorème 3.30 ([10]) *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ sommets pendants et s sommets supports. Alors $\gamma_{\times 2}(T) \leq (2n + \ell + s)/3$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T \in \mathcal{F}$ ou bien chaque sommet de T est pendant ou support.*

Preuve. Si tout sommet de T est pendant ou support alors $n = \ell + s$ et $V(T)$ est l'unique dominant double de T , et donc $\gamma_{\times 2}(T) = n = (2n + \ell + s)/3$. Supposons que T possède au moins un sommet qui n'est ni pendant ni support. Soit F la forêt obtenue à partir de T en supprimant tous les sommets supports et pendants de T , i.e., $F = T - L(T) - S(T)$. Supposons que F est d'ordre n' . Alors $n' = n - \ell - s$. Soit

$D = L(T) \cup S(T)$. Nous allons maintenant élargir l'ensemble D pour être un dominant double de T comme suit:

Si v est un sommet isolé de F alors v est adjacent à au moins deux sommets supports de T , et donc v est dominé doublement par $S(T)$ et par suite par D . Dans ce cas on n'ajoute aucun sommet à D . Si F possède une composante connexe d'ordre 2 alors chaque sommet de cette composante K_2 est adjacent à au moins un sommet support de T . Dans ce cas, on ajoute à D l'un de ces deux sommets. Si F possède une composante connexe d'ordre au moins 3 alors chaque sommet pendant de cette composante est adjacent à au moins un sommet support de T . Par conséquent, on a besoin d'ajouter à D un EDDF de cette composante afin de dominer doublement tous les sommets de cette composante.

Ceci nous amène d'après le Lemme 3.28 à pouvoir élargir l'ensemble $D = L(T) \cup S(T)$ à un ensemble dominant double de T en lui ajoutant au plus $2n'/3$ sommets. D'où, $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2n'/3 + \ell + s = (2n + \ell + s)/3$.

Supposons maintenant que $\gamma_{\times 2}(T) = (2n + \ell + s)/3$. Dans ce cas, l'ensemble D construit précédemment doit satisfaire $|D| = (2n + \ell + s)/3$. D'où d'après le Lemme 3.28, chaque composante connexe de F appartient à $\mathcal{T}$ et donc possède un dominant parfait (unique) dont chaque sommet est de degré 2 dans cette composante. Soit S_F l'union de ces ensembles dominants parfait de chaque composante de F . Alors, $n' = 3|S_F|$. Si $v \in S_F$ et v est adjacent à un sommet pendant dans T , alors $(V(T) - S_F - N_F(v)) \cup \{v\}$ est un dominant double de T de cardinal $n - |S_F| - 2 + 1 = n - n'/3 - 1 = (2n + \ell + s)/3 - 1$, et donc $\gamma_{\times 2}(T) < (2n + \ell + s)/3$, contradiction. Par conséquent, aucun sommet de S_F n'est adjacent à un sommet support de T . D'où, $T \in \mathcal{F}$ avec F comme forêt cachée. ■

Comme une conséquence aux Théorèmes 3.30 et 3.22 on a le résultat suivant:

Théorème 3.31 ([10]) *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ sommets pendants et s sommets supports. Alors $i(T) \leq (2n + \ell + s)/6$ avec l'égalité atteinte si et seulement si ou bien (i) $T \in \mathcal{F}$ et $\ell = s$ ou bien (ii) $i(T) = n/2$ et chaque sommet de T est un sommet pendant ou un support.*

Preuve. D'après les Théorèmes 3.22 et 3.30, $i(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)/2 \leq (2n + \ell + s)/6$. Supposons que $i(T) = (2n + \ell + s)/6$. Dans ce cas on a aussi $\gamma_{\times 2}(T) = (2n + \ell + s)/3$, et donc d'après le Théorème 3.30, ou bien $T \in \mathcal{F}$ ou bien chaque sommet de T est pendant ou support. Si $\ell + s = n$, alors $i(T) = n/2$. D'autre part, supposons $T \in \mathcal{F}$. Alors l'union de l'ensemble constituant (l'unique) dominant parfait de la forêt cachée par T avec l'ensemble des sommets supports de T forme un dominant stable minimum de T . D'où, $i(T) = (n - \ell - s)/3 + s = (n - \ell + 2s)/3$. Donc, $(2n + \ell + s)/6 = i(T) = (n - \ell + 2s)/3$, et par conséquent $\ell = s$. ■

Puisque tout arbre possède plus de sommets pendants que de sommets supports, alors le théorème suivant dû à Favaron [31] découle immédiatement du Théorème 3.31.

Théorème 3.32 ([31]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ sommets pendants alors $i(T) \leq (n + \ell)/3$.*

Nous établissons dans ce qui suit une borne supérieure pour le nombre de domination double en fonction des nombres de domination et des sommets pendants. Pour cela, on introduit une collection d'arbres notée $\mathcal{G}$ comme suit.

Soit $\mathcal{G}$ la collection de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir de l'union de $k \geq 1$ étoiles, chacune d'ordre au moins 3, en ajoutant $k - 1$ arêtes de telle sorte que les arêtes ajoutées joignant les sommets pendants de ces étoiles forment un couplage dans T . i.e., le sous-graphe de T induit par les $k - 1$ arêtes ajoutées est isomorphe à $(k - 1)K_2$. Par exemple, la chaîne $P_n \in \mathcal{G}$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$. Les k étoiles utilisées seront appelées les *étoiles cachées* par l'arbre T . On dira qu'une étoile cachée T' par T est une *étoile cachée pendante* si $T - V(T')$ est un arbre (i.e., il existe exactement une seule arête joignant $V(T')$ à $V(T) - V(T')$). Il faut noter que si $k \geq 2$ alors T possède deux étoiles cachées pendantes.

Lemme 3.33 *Soit $T \in \mathcal{G}$ un arbre d'ordre n ayant k étoiles cachées. Alors,*

- a) $\gamma(T) = k$,
- b) $\ell(T) = n - 3k + 2$,
- c) $\gamma_{\times 2}(T) = n - k + 1 = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$.

Preuve. (a) Les k sommets centraux (dominants) des k étoiles cachées par T forment à la fois un ensemble 2-stable et dominant de T , d'où $k \geq \gamma(T) \geq \rho(T) \geq k$. Par conséquent, $\gamma(T) = k$.

(b) Soit E_T l'ensemble des $k - 1$ arêtes de T qui n'appartiennent à aucune des étoiles cachées par T . Rappelons que Le sous graphe induit par E_T est isomorphe à $(k - 1)K_2$ et que chaque arête de E_T joint deux sommets pendants de deux étoiles cachées différentes dans T . Par conséquent, tout sommet de T qui n'est ni un sommet centre d'une étoile cachée par T et ni incident à une arête de E_T est un sommet pendent dans T . D'où, $\ell(T) = n - k - 2|E_T| = n - 3k + 2$.

(c) On procède par induction sur le nombre k d'étoiles cachées par T . Si $k = 1$, alors $T = K_{1,n-1}$ et $\gamma_{\times 2}(T) = n = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$. Supposons que $k \geq 2$ et que si $T' \in \mathcal{G}$ possède moins de k étoiles cachées alors $\gamma_{\times 2}(T') = 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$. Soit

$T \in \mathcal{G}$ ayant k étoiles cachées. Soient T_u une étoile cachée pendante de T et uv l'arête de T joignant $V(T_u)$ et $V(T) - V(T_u)$ où $u \in V(T_u)$. Alors v est un sommet pendant d'une étoile cachée par T et dans ce cas $\deg_T v = 2$. Soit $T' = T - V(T_u)$. Alors, $T' \in \mathcal{G}$ ayant $k - 1$ étoiles cachées. Par induction, $\gamma_{\times 2}(T') = 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$.

Maintenant, d'après (a), (i) $k = \gamma(T) = \gamma(T') + 1$. (ii) $\ell(T) = \ell(T') + |V(T_u)| - 3$ puisque v est un sommet pendant dans T' mais pas dans T . On va voir (iii) $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_u)| - 1$. Puisque v est pendant dans T' , tout dominant double de T' contient v et peut être élargi à un dominant double de T en lui ajoutant l'ensemble $V(T_u) - \{u\}$. D'où, $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_u)| - 1$. D'autre part, soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Puisque chaque sommet de $V(T_u) - \{u\}$ est un sommet support ou pendant dans T , alors $V(T_u) - \{u\} \subset D$.

Par ailleurs, au moins l'un des sommets u et v sera dans D pour dominer doublement u . Si $u, v \in D$, alors on peut remplacer u dans D par un voisin de v dans T' . Si $u \in D$ et $v \notin D$ alors remplacer u dans D par v . Donc on peut toujours choisir D de sorte que $u \notin D$ et $v \in D$. Dans ce cas, soit $D' = D - (V(T_u) - \{u\})$. Alors D' est un dominant double de T' et donc $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - |V(T_u)| + 1$. D'où, on a $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - |V(T_u)| + 1$ et (iii) est vérifiée.

Maintenant, par induction sur T' et en utilisant (i), (ii) et (iii), on a:

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &= \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_u)| - 1 = (2\gamma(T') + \ell(T') - 1) + |V(T_u)| - 1 \\ &= 2(\gamma(T) - 1) + (\ell(T) - |V(T_u)| + 3) - 1 + |V(T_u)| - 1 \\ &= 2\gamma(T) + \ell(T) - 1 = n - k + 1. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.34 *Si $T \in \mathcal{G}$ et si T' est une étoile cachée pendante de T , alors il existe un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient chaque sommet de T' .*

Preuve. Soit T d'ordre n ayant k étoiles cachées. Si $k = 1$ alors $T = T'$ est une étoile et $V(T)$ est l'unique ensemble dominant double de T .

Donc supposons que $k \geq 2$. Soit uv l'arête joignant $V(T')$ et $V(T) - V(T')$, où $u \in V(T')$. On va construire maintenant un ensemble dominant double minimum D de T comme suit:

Initialement, soit $D = V(T')$. ajouter à D tous les sommets de l'étoile cachée contenant v à l'exception du sommet v . En général, pour chaque étoile cachée S_x qui à cette étape ne contient aucun sommet de D et attachée par une arête xy à une étoile cachée S_y qui contient des sommets de D , où $x \in V(S_x)$ (et $y \in V(S_y)$), on ajoute à l'ensemble D tous les sommets de S_x à l'exception du sommet x . Par construction, D

est un dominant double de T contenant chaque sommet d'une étoile cachée pendante T' et tous les sommets sauf un de chacune des autres étoiles cachées de T . Donc, $|D| = n - k + 1$. Le Lemme 3.33, confirme que D est un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. ■

Nous pouvons maintenant prouver le théorème suivant:

Théorème 3.35 ([10]) *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T \in \mathcal{G}$.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre $n \geq 2$ de T . Si $n = 2$ alors $T = K_2$ et $\gamma_{\times 2}(T) = 2 < 3 = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$. Donc soit $n \geq 3$ et supposons que tous les arbres T' d'ordre $2 \leq n' < n$ vérifient, $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$.

Soit T un arbre d'ordre n . Si T est une étoile $K_{1,n-1}$ alors $T \in \mathcal{G}$ et $\gamma_{\times 2}(T) = n = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$. Si T est une étoile double alors $\gamma_{\times 2}(T) = n < n + 1 = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$. Donc on peut supposer que $\text{diam}(T) \geq 4$.

Enracinons l'arbre T en un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit v un sommet support le plus éloigné de r . Soient w le père de v , x le père de w et y le père de x (avec la possibilité que $y = r$). D'après le choix de v , T_v est une étoile. Désignons par L_v l'ensemble des sommets pendants adjacent à v . Nous utiliserons les deux faits suivants:

Fait 1 *Si $\deg w \geq 3$ alors $\gamma_{\times 2}(T) < 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$.*

Preuve. Supposons d'abord que w est un sommet support. Dans ce cas, soit $T' = T - V(T_v)$. Alors, $|V(T_v)| = |L_v| + 1$, il est facile de voir $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - |V(T_v)|$, $\gamma(T') = \gamma(T) - 1$, et $\ell(T') = \ell(T) - |L_v|$. Par induction sur T' on a, $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$ ce qui implique que

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &\leq \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_v)| \\ &\leq 2\gamma(T) - 2 + \ell(T) - |L_v| - 1 + |V(T_v)| = 2\gamma(T) + \ell(T) - 2. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que w n'est pas un sommet support. Alors w possède au moins deux sommets fils car $\deg w \geq 3$. Dans ce cas, soit $T' = T - V(T_w)$. Puisque w est le seul sommet de T_w qui n'est ni support ni pendant alors $\gamma_{\times 2}(T_w) = |V(T_w) - \{w\}| = |V(T_w)| - 1$. On va voir maintenant que (i) $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + \gamma_{\times 2}(T_w)$, (ii) $\gamma(T) = \gamma(T') + \gamma(T_w)$, et (iii) $\ell(T') + \ell(T_w) \leq \ell(T) + 1$.

Pour monter (i), soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Alors D contient tous les descendants de w . En particulier, w est dominé de façon double par ses fils. Si $w \in D$ et

$x \in D$ alors on peut remplacer w dans D par l'un des voisins de x dans T' . Si $w \in D$ et $x \notin D$ alors on peut remplacer w dans D par x . Donc on peut supposer sans perte de généralité que $w \notin D$. Dans ce cas, $D \cap V(T')$ est un dominant double de T' et par conséquent $\gamma_{\times 2}(T') \leq |D| - |V(T_w) - \{w\}| = \gamma_{\times 2}(T) - \gamma_{\times 2}(T_w)$.

D'autre part, tout dominant double de T' peut être élargi à un ensemble dominant double de T en lui ajoutant l'ensemble $V(T_w) - \{w\}$, d'où $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + \gamma_{\times 2}(T_w)$. En conséquence on a (i).

Pour montrer (ii), on remarque d'abord que $\gamma(T_w) = |C(w)|$ et que l'ensemble des fils $C(w)$ de w est un $\gamma(T_w)$ -ensemble. Tout ensemble dominant de T' peut être élargi à un ensemble dominant de T en lui ajoutant un $\gamma(T_w)$ -ensemble, et par suite on a, $\gamma(T) \leq \gamma(T_w) + \gamma(T')$. D'autre part, soit S un $\gamma(T)$ -ensemble. On peut supposer que $C(w) \subset S$ (donc S ne contient aucun sommet pendant de T_w). Si $w \in S$ alors on peut remplacer w dans S par x . Par conséquent, on peut supposer que $w \notin S$. Dans ce cas, $S - C(w)$ est un dominant de T' , d'où $\gamma(T') \leq |S| - |C(w)| = \gamma(T) - \gamma(T_w)$. En conséquence on a (ii).

Pour monter (iii), on remarque aussi que si x est un sommet pendant dans T' alors $\ell(T) = \ell(T') + \ell(T_w) - 1$, dans le cas contraire $\ell(T) = \ell(T') + \ell(T_w)$. Par induction sur T' on a, $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$. Par ailleurs, sachant que $\gamma_{\times 2}(T_w) = |V(T_w)| - 1$, $2\gamma(T_w) + \ell(T_w) - 1 = |V(T_w)| + \deg_T(w) - 3$, alors $\gamma_{\times 2}(T_w) \leq 2\gamma(T_w) + \ell(T_w) - 2$ (avec l'égalité atteinte si $\deg_T(w) = 3$).

Maintenant, d'après (i), (ii), et (iii) on a:

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &= \gamma_{\times 2}(T') + \gamma_{\times 2}(T_w) \\ &\leq (2\gamma(T') + \ell(T') - 1) + (2\gamma(T_w) + \ell(T_w) - 2) = 2\gamma(T) + \ell(T) - 2. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du fait 1. ■

Fait 2 Si $\deg w = 2$ et $\deg x \geq 3$ alors $\gamma_{\times 2}(T) < 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$.

Preuve. Soit $T' = T - T_w$. Alors on a, (i) $\gamma(T') = \gamma(T) - 1$ et (ii) $\ell(T) = \ell(T') + |L_v|$. Par induction sur T' , $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$. D'autre part, tout $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble peut être élargi à un ensemble dominant double de T en lui ajoutant l'ensemble $V(T_w)$, d'où $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_w)|$. Si $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 2$, alors il s'ensuit d'après (i) et (ii) que:

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &\leq (2\gamma(T') + \ell(T') - 2) + |V(T_w)| \\ &= 2(\gamma(T) - 1) + (\ell(T) - |L_v|) - 2 + (|L_v| + 2) = 2\gamma(T) + \ell(T) - 2. \end{aligned}$$

D'où on peut supposer que $\gamma_{\times 2}(T') = 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$, sinon la borne supérieure désirée est vraie. Par induction, $T' \in \mathcal{G}$. Supposons que T' possède k étoiles cachées.

Si x appartient à $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble quelconque alors cet ensemble peut être élargi à un ensemble dominant double de T en lui ajoutant l'ensemble $V(T_v)$, d'où $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + |V(T_v)|$. En conséquence de (i) et (ii), et l'hypothèse d'induction on a,

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &\leq (2\gamma(T') + \ell(T') - 1) + |V(T_v)| \\ &= 2(\gamma(T) - 1) + (\ell(T) - |L_v|) - 1 + (|L_v| + 1) \\ &= 2\gamma(T) + \ell(T) - 2. \end{aligned}$$

D'où on peut supposer que x n'appartient à aucun $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, dans le cas contraire on a le résultat. En particulier, ceci implique que x n'est pas un sommet support.

Soit w' un fils de x différent de w , et soit v' le fils de w' . Supposons que v' n'est pas un sommet pendant. Si $\deg w' = 2$, alors il existe un $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble contenant x , ce qui contredit notre précédente supposition. D'où, $\deg w' \geq 3$. Mais dans ce cas, similairement au Fait 1, $\gamma_{\times 2}(T) < 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$. Par conséquent, on peut supposer que pour tout fils w' de x dans T' , chacun des fils de w' est un sommet pendant, sinon on a le résultat. Puisque $T' \in \mathcal{G}$, il s'ensuit que x a un fils unique w' dans T' et que $T_x - V(T_w)$ est une étoile cachée de T' avec w' son sommet centre et x l'un des ses sommets pendants. Puisque les arêtes de T' qui n'appartiennent à aucune des étoiles cachées de T' induisent un couplage dans T' et qui joignent les sommets pendants de différentes étoiles cachées de T' , il s'ensuit que y (le père de x) est un sommet pendant d'une étoile cachée de T' et que $\deg y = 2$. De plus, puisque xy est la seule arête joignant l'étoile cachée $T_x - V(T_w)$ de T' aux reste des sommets de T' , alors l'étoile cachée $T_x - V(T_w)$ de T' est en fait une étoile cachée pendante de T' . Mais dans ce cas d'après le Lemme 3.34, il existe un $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble contenant tous les sommets de l'étoile cachée $T_x - V(T_w)$ de T' . Ceci contredit notre supposition que x n'appartient à aucun $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Ceci complète la preuve du Fait 2. ■

Nous terminons la preuve du Théorème 3.35.

D'après les Faits 1 and 2, on peut supposer que $\deg w = \deg x = 2$. Soit $T' = T - T_w$. Alors on a, (i) $\gamma(T') = \gamma(T) - 1$ et (ii) $\ell(T) = \ell(T') + |L_v| - 1$. Par induction sur T' on a, $\gamma_{\times 2}(T') \leq 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$. Par ailleurs, tout $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble doit contenir le sommet pendant x (car x est pendant dans T') et peut être élargi à un ensemble dominant double de T en lui ajoutant l'ensemble $V(T_w) - \{w\}$. D'où, $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + |L_v| + 1$.

En conséquence de (i) et (ii) et l'hypothèse d'induction on a,

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &\leq (2\gamma(T') + \ell(T') - 1) + |L_v| + 1 \\ &= 2(\gamma(T) - 1) + (\ell(T) - |L_v| + 1) - 1 + (|L_v| + 1) \\ &= 2\gamma(T) + \ell(T) - 1. \end{aligned}$$

De plus si $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$, alors on doit avoir l'égalité le long de cette chaîne d'inégalité. En particulier, $\gamma_{\times 2}(T') = 2\gamma(T') + \ell(T') - 1$, d'où par induction $T' \in \mathcal{G}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en joignant le sommet pendant x de T' et le sommet pendant w de l'étoile T_w , il s'ensuit que $T \in \mathcal{G}$. ■

Il faut signaler que la borne supérieure du Théorème 3.35 est meilleure que celle du Théorème 3.30 pour les arbres ayant un nombre de domination petit, plus précisément, si $\gamma(T) < (2n - 2\ell + s + 3)/6$.

Le corollaire suivant est une conséquence des Théorèmes 3.22 et 3.35.

Corollaire 3.36 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ on a, $i(T) \leq \gamma(T) + (\ell(T) - 1)/2$.*

Notre dernière borne sur le nombre de domination double lie le au nombre de domination total.

Théorème 3.37 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ on a, $\gamma_{\times 2}(T) \leq (n + \gamma_t(T) + \ell(T))/2$.*

Preuve. Soit D un $\gamma_t(T)$ -ensemble ne contenant aucun sommet pendant de T . Soient I_1 l'ensemble des sommets de $(V - D) - L(T)$ ayant exactement un seul voisin dans D , et $I_2 = (V - D) - (L(T) \cup I_1)$. Puisque pour tout sommet $v \in I_1$, $\deg v \geq 2$, il s'ensuit que v a au moins un voisin dans $I_1 \cup I_2$. Soit I'_2 l'ensemble des sommets de I_2 ayant des voisins dans I_1 . Alors $I_1 \cup I'_2$ induit un sous-graphe sans sommets isolés. Soit A un ensemble dominant minimum du sous graphe induit par $I_1 \cup I'_2$. D'après Ore [66], $|A| \leq |I_1 \cup I'_2|/2$. D'où,

$$|A| \leq (|I_1 \cup I_2|)/2 = ((V - D) - L(T))/2 = (n - \gamma_t(T) - \ell)/2.$$

Par conséquent, $D \cup L(T) \cup A$ est un dominant double de T , ce qui donne:

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_t(T) + \ell + |A| \leq (n + \gamma_t(T) + \ell)/2.$$

■

D'après les Théorèmes 3.22 et 3.37, on déduit le corollaire suivant qui dans certains cas est meilleur que le Théorème 3.32.

Corollaire 3.38 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ on a, $i(T) \leq (n + \gamma_t(T) + \ell(T))/4$.*

3.4 La domination double exacte dans les graphes

Nous initions dans cette partie l'étude de la domination double exacte dans les graphes. Ce concept est introduit sans être étudié dans l'article de Harary et Haynes [43] et qui a été défini analogiquement à la domination efficace où parfaite introduite par Bange, Barkauskas et Slater [4]. La domination efficace dans les graphes s'intéresse aux ensembles dominants tel que chaque sommet est dominé une seule fois. Nous présenterons les résultats d'un travail fait conjointement avec Khelladi et Maffray. Commençons par définir un ensemble dominant double exact.

Soient $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et S un sous-ensemble de V . Alors S est dit un *dominant double exact* si tout sommet du graphe est dominé exactement deux fois par S . Il est à noter que les ensembles dominants doubles exacts n'existent pas toujours. Par exemple l'étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 2$ n'admet pas de tels ensembles. A cet effet, Nous verrons plus loin que le problème de décision de l'existence est un problème NP-complet.

3.4.1 Propriétés des ensembles dominants doubles exacts

Commençons par la remarque suivante qui est une propriété directe de ces ensembles.

Remarque 3.39 *Si S est un ensemble dominant double exact d'un graphe G alors S induit un couplage, c'est à dire que $G[S]$ est un graphe 1-régulier.*

Remarque 3.40 *Si S est un ensemble dominant double exact d'un graphe G alors $|S| \geq \gamma_{\times 2}(G)$.*

Par le résultat suivant, nous montrons que les ensembles dominants doubles exacts (s'ils existent) d'un graphe G ont tous le même cardinal.

Proposition 3.41 ([19]) *Si G est un graphe admettant des ensembles dominants doubles exacts alors ils sont tous de même taille.*

Preuve. Soient D_1 et D_2 deux ensembles dominants doubles exacts de G . Notons par $I = D_1 \cap D_2$, et considérons les sous-ensembles X_0 et X_1 de $D_1 - I$ tels que tout sommet de X_0 n'a aucun voisin dans I et tout sommet de X_1 possède un seul voisin dans I . Il est clair que X_0 et X_1 est une partition de $D_1 - I$. On définit d'une façon similaire les sous-ensembles Y_0 et Y_1 de $D_2 - I$. Alors $|X_1| = |Y_1|$. En effet, soit x un sommet de X_1 , adjacent à un sommet $z \in I$. Puisque D_2 est un ensemble dominant double exact le sommet z doit avoir un voisin unique y dans D_2 ; et dans

ce cas $y \in D_2 - I$, car sinon z aura deux voisins x, y dans D_1 , contradiction. Donc $y \in Y_1$. Le même argument est valable pour tout sommet de Y_1 , et par conséquent $|X_1| = |Y_1|$. Puisque D_2 est un ensemble dominant double exact, alors tout sommet de X_1 a exactement un voisin dans $Y_0 \cup Y_1$ et tout sommet de X_0 a exactement deux voisins dans $Y_0 \cup Y_1$.

On a la même chose pour les sommets de Y_1 et Y_0 . Ce qui implique que $|X_0| = |Y_0|$, et donc $|D_1| = |D_2|$. ■

Le résultat suivant exprime la taille d'un ensemble dominant double exact en fonction de l'ordre et le degré minimum d'un graphe G .

Proposition 3.42 ([19]) *Si S est un ensemble dominant double exact d'un graphe G alors $|S| \leq 2n/(\delta + 1)$.*

Preuve. Soit S un ensemble dominant double exact de G . Désignons par t le nombre d'arêtes joignant les sommets de S à ceux de $V - S$. Alors $t = 2|V - S|$ puisque S est un ensemble dominant double exact. D'autre part, d'après la Remarque 3.39, les sommets de S induisent un couplage dans G , d'où chaque sommet v de S a exactement $\deg_G(v) - 1$ voisins dans $V - S$. Par conséquent, $t = \sum_{v \in S} (\deg_G(v) - 1)$ et donc $(\delta - 1)|S| \leq t = 2|V - S|$. D'où on a, $|S| \leq 2n/(\delta + 1)$. ■

Dans [43], Harary et Haynes donnent une borne inférieure du nombre de domination double.

Théorème 3.43 ([46]) *Si G est un graphe sans sommets isolés alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2n/(\Delta + 1)$.*

Par la Proposition 3.42 et le Théorème 3.43, on a:

Corollaire 3.44 *Si S est un ensemble dominant double exact d'un graphe régulier G alors $|S| = 2n/(\Delta + 1) = \gamma_{\times 2}(G)$.*

Il est à remarquer pour la taille des ensembles dominants doubles exacts (s'ils existent) pour les graphes réguliers est égal au nombre de domination double. Par conséquent nous proposons la conjecture suivante:

Conjecture 3.45 ⁽¹⁾ *Si S est un ensemble dominant double exact d'un graphe G alors $|S| = \gamma_{\times 2}(G)$.*

(1) La conjecture a été montrée récemment par Mostafa Blidia.

3.4.2 La NP-complétude

Comme il a été mentionné plus haut, un graphe sans sommets isolés n'admet pas nécessairement un ensemble dominant double exact, ce qui pose un problème d'existence de tels ensembles. Nous considérons dans cette partie la complexité de ce problème.

ENSEMBLE DOMINANT DOUBLE EXACT (EDDE)

Instance: Un graphe G .

Question: Le graphe G admet-il un ensemble dominant double exact?

Nous montrons que ce problème est NP-complet en réduisant le problème 3-COUVERTURE EXACT (3CX) à notre problème.

3-COUVERTURE EXACT (3CX)

Instance: Un ensemble fini X de cardinal $3q$ et une collection C de sous-ensembles de X à 3 éléments.

Question: Existe il une sous-collection C' de C telle que chaque élément de X apparait exactement dans un seul élément de C' ?

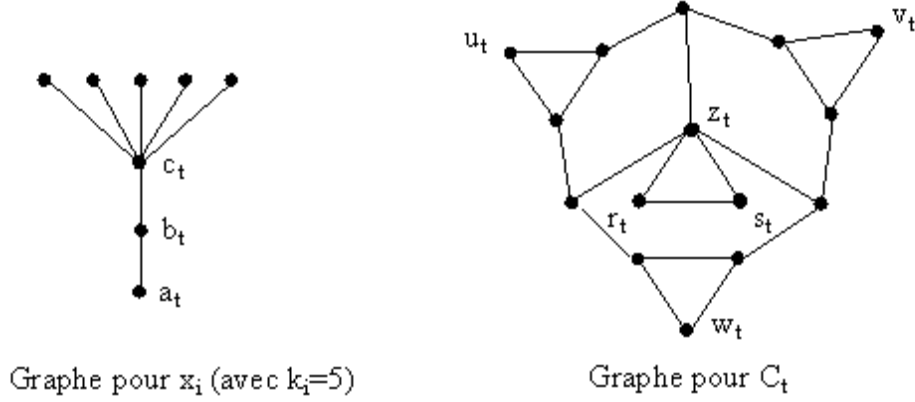
Il est connu que le problème 3-COUVERTURE EXACT est un problème NP-complet (Voir [40]).

Théorème 3.46 ([19]) *Le problème ENSEMBLE DOMINANT DOUBLE EXACT est NP-complet.*

Preuve. Il est clair que EDDE est un problème de NP. Voyons maintenant comment transformer toute instance X, C du problème 3-COUVERTURE EXACT en une instance G du problème ENSEMBLE DOMINANT DOUBLE EXACT et tel que l'un a une solution si et seulement si l'autre possède une solution.

Pour tout $x_i \in X$, on construit un graphe ayant pour sommets a_i, b_i, c_i et $d_i^1, \dots, d_i^{k_i}$, où k_i est le nombre des éléments de C contenant x_i , et avec les arêtes $a_i b_i, b_i c_i$ et $c_i d_i^j$ ($j = 1, \dots, k_i$). Les sommets d_i^j sont considérés comme étant les points de ce graphe et qui seront associés chacun avec un élément de C qui contient x_i . Voir Figure 9.

Pour tout $C_t \in C$, on construit un graphe à 15 sommets $y_t^0, \dots, y_t^8, z_t, r_t, s_t, u_t, v_t, w_t$ avec les arêtes $y_t^j y_t^{j+1}$ ($j = 0, \dots, 8 \bmod 9$) (tel que les sommets y_t^j induisent un cycle C_9) et $z_t y_t^0, z_t y_t^3, z_t y_t^6, z_t r_t, z_t s_t, r_t s_t$ (tel que les sommets z_t, r_t, s_t induisent un triangle), et $u_t y_t^1, u_t y_t^2, v_t y_t^4, v_t y_t^5, w_t y_t^7, w_t y_t^8$. Chacun des sommets u_t, v_t, w_t est considéré comme le point et qui sera associé à un élément de C_t . Voir Figure 9.

Figure 9. Graphes associés à un élément x_i et un triplet C_t .

Maintenant, pour chaque C_t , si par exemple $C_t = \{x_i, x_j, x_k\}$ alors on identifie le premier, le deuxième et le troisième point du graphe associé à C_t avec les points correspondants dans les graphes associés à x_i, x_j, x_k respectivement. On notera par G le graphe résultant. Il est clair que la taille de G est polynomial en fonction de la taille de X et C .

1. Supposons que l'instance X, C de $3XC$ possède une solution C' . Construisons un ensemble de sommets S de G comme suit: pour tout $C_t \in C'$, mettre dans S les sommets $u_t, y_t^1, v_t, y_t^4, w_t, y_t^7, z_t, r_t$; pour tout $C_t \in C - C'$, mettre dans S les sommets $y_t^1, y_t^2, y_t^4, y_t^5, y_t^7, y_t^8, r_t, s_t$; et pour tout $x_i \in X$, mettre dans S les sommets a_i, b_i (il faut noter que exactement un sommet des d_i^j a été mis dans S). Il est facile de voir alors que S est un ensemble dominant double exact de G .

2. Inversement, supposons que G possède un ensemble dominant double exact noté S . Il faut noter dans ce cas que le graphe associé à un triplet donné C_t sera dans l'une des deux situations suivantes:

- (a) $z_t \in S$, et donc l'un exactement de r_t, s_t est dans S , $y_t^0, y_t^3, y_t^6 \notin S$, les six autres sommets y_t^j restant sont dans S , et $u_t, v_t, w_t \notin S$; ou bien
- (b) $z_t \notin S$, dans ce cas $r_t, s_t \in S$; $y_t^0, y_t^3, y_t^6 \notin S$, l'un de ces deux ensembles $\{y_t^1, y_t^4, y_t^7\}$, $\{y_t^2, y_t^5, y_t^8\}$ est dans S et l'autre est dans $V - S$, et $u_t, v_t, w_t \in S$.

Aussi, pour chaque $x_i \in X$, on a $a_i, b_i \in S$ (sinon a_i ne sera pas dominé doublement), d'où $c_i \notin S$ (sinon b_i sera dominé trois fois). Il s'ensuit alors que exactement l'un des d_i^j est dans S . Pour tout $i = 1, \dots, 3q$, soit $t(i)$ l'entier pour lequel d_i^j est identifié avec un point de $C_{t(i)} \in C$, et nous dirons alors que $C_{t(i)}$ a été sélectionné par x_i . Dans ce cas le graphe associé à $C_{t(i)}$ est dans la situation (b), ce qui signifie que $C_{t(i)}$ est sélectionné par chacun de ses 3 éléments. Par conséquent, l'ensemble C' de

tous les éléments sélectionnés de C (i.e., ceux dont les trois points sont dans S) est une 3-couverture exact. ■

3.4.3 Graphes ayant des ensembles dominants doubles exacts

Nous donnons dans cette partie une caractérisation des graphes ayant un ensemble dominant double exact, en particulier les cycles et les arbres. Nous donnons ensuite une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de tels ensembles pour les graphes 3-réguliers connexes. Rappelons d'abord les formules du nombre de domination double pour les cycles et chaînes d'ordre au moins deux données par [43] et [10] respectivement.

- $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ ([43])
- $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2 \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2 \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sinon. ([10])

Proposition 3.47 *Un cycle C_n a un dominant double exact si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$. Si tel est le cas, la taille de cet ensemble est $2n/3$.*

Preuve. Soit S un ensemble dominant double exact de C_n . D'après le Corollaire 3.44, on a $|S| = 2n/3$ et donc $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Inversement, supposons que les sommets de C_n sont notés $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ alors il est facile de voir que l'ensemble $\{v_i, v_{i+1} \mid i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n-1\}$ est un dominant double exact de C_n . ■

Proposition 3.48 *Une chaîne P_n a un dominant double exact si et seulement si $n \equiv 2 \pmod{3}$. Si tel est le cas, la taille de cet ensemble est $2(n+1)/3$.*

Preuve. Le résultat est trivial si $n = 2$. Donc supposons que $n \geq 3$. Soit S un ensemble dominant double exact de P_n . Il faut noter que chaque sommet v de degré 2, ou bien v ou ses deux voisins sont dans S . Donc $V - S$ est un ensemble stable, et $N(v) \cap N(w) = \emptyset$ pour tout couple $v, w \in V - S$. D'après la Remarque 3.39, tout sommet de S (sauf les deux pendants) a exactement un seul voisin dans $V - S$. D'où $|S| - 2 = 2|V - S|$ et donc $n = |S| + |V - S| = 3|V - S| + 2$.

Inversement, supposons que les sommets de P_n sont notés $v_1, v_2, \dots, v_n$. Si $n \equiv 2 \pmod{3}$ alors il est facile de vérifier que l'ensemble $\{v_i, v_{i+1} \mid i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n-1\}$ est un dominant double exact de P_n . ■

Dans [17], Haynes et moi-même avons montré que $\gamma_{\times 2}(G) \leq n - \delta + 1$ pour tout graphe G sans sommets. (Voir Théorème 3.6).

Théorème 3.49 ([19]) *Soit G un graphe admettant un dominant double exact S . Alors $|S| = n - \delta + 1$ si et seulement si ou bien $G = tK_2$ avec $t \geq 1$, si $\delta = 1$, ou bien $G = K_n$ avec $n \geq 3$ sinon.*

Preuve. Soit S un dominant double exact de G tel que $|S| = n - \delta + 1$. Si $\delta = 1$ alors $|S| = n$. Puisque S induit un graphe 1-régulier alors le graphe G est lui-même 1-régulier, i.e., $G = tK_2$ avec $t \geq 1$. Maintenant supposons que $\delta \geq 2$ et soit v un sommet de S . Alors $V - S$ doit contenir tous les voisins de v sauf un, d'où $\deg_G(v) - 1 \leq |V - S| = n - (n - \delta + 1) = \delta - 1$. Donc tous les sommets de S ont le même degré δ , et $|V - S| = \delta - 1$. Soit u un sommet de S et v un sommet de $N(u) \cap S$. Alors v doit être adjacent à tous les sommets de $V - S$ et donc à ce stade tout sommet de $V - S$ est dominé doublement par u et v . D'où $S = \{u, v\}$ et tous les sommets de $V - S$ sont mutuellement adjacents. Par conséquent G est un graphe complet. ■

Avant de donner une caractérisation par construction des arbres admettant un ensemble dominant double exact, il est utile de donner les deux remarques suivantes dont la première est un rappel de la Remarque 3.17.

Remarque 3.50 *Soit G un graphe sans sommets isolés. Si x est un sommet pendant de G alors tout dominant double contient x et son voisin.*

Remarque 3.51 *Soit T un arbre d'ordre au moins deux admettant S comme un ensemble dominant double exact. Alors:*

- *Tout sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant.*
- *Deux sommets supports quelconques ne sont pas adjacents.*

Soit $\mathcal{T}$ la famille des arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$) tels que T_1 est une chaîne $P_2 = xy$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, pour tout i avec $1 \leq i \leq k-1$, alors l'arbre T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des deux opérations ci-dessous. Posons $A(T_1) = \{x, y\}$, $B(T_1) = \{y\}$.

- **Opération type-1:** Attacher une chaîne $P_3 = uvw$ en ajoutant une arête entre w à un sommet de $A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{u, v\}$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i) \cup \{u\}$.
- **Opération type-2:** Attacher une chaîne $P_5 = a_1a_2a_3a_4a_5$ de centre a_3 en ajoutant une arête entre a_3 et un sommet de $V(T_i) - A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i) \cup \{a_1, a_5\}$.

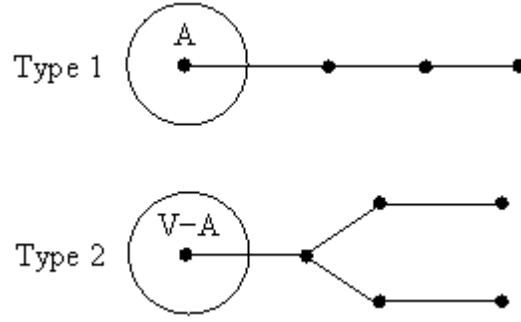


Figure 10. Les deux types d'opérations.

On a le lemme suivant:

Lemme 3.52 *Si $T \in \mathcal{T}$ alors :*

- (a) $B(T)$ est un ensemble 2-stable de T avec $|B(T)| = |A(T)|/2$,
- (b) $A(T)$ est un ensemble dominant double exact de T avec $|A(T)| = \gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$,
et
- (c) $A(T)$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

Preuve. De la manière dont un arbre $T \in \mathcal{T}$ est construit, il est facile de constater que $A(T)$ est un ensemble dominant double exact de T , $B(T)$ est un ensemble 2-stable de T , et que $|A(T)| = 2|B(T)|$. D'où, $\gamma_{\times 2}(T) \leq |A(T)| = 2|B(T)| \leq 2\gamma(T)$. L'égalité est atteinte à partir du Théorème 3.22 (voir section 3 de ce chapitre) ce qui montre (a) et (b).

Pour montrer (c), soit $T \in \mathcal{T}$. Alors T peut être obtenu à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$) tels que T_1 est une chaîne $P_2 = xy$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, pour tout i avec $1 \leq i \leq k-1$, alors l'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par l'une des deux opérations définies. On montre (c) par induction sur k . Si $k = 1$ alors $T = P_2$ et donc $A(T)$ est en effet l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

Supposons maintenant que $k \geq 2$ et que le résultat est valide pour tous les arbres $T \in \mathcal{T}$ pouvant être construits par une séquence de longueur au plus $k-1$, et soit $T' = T_{k-1}$. Par induction sur $T' \in \mathcal{T}$, on sait que $A(T')$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Considérons les deux possibilités suivantes selon que T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération type-1 ou bien type-2.

Cas 1. T est obtenu à partir de T' par l'utilisation de l'opération type-1.

Dans ce cas $A(T') \cup \{u, v\}$ est un ensemble dominant double de T , d'où $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2$. Aussi, d'après la Remarque 3.50, u et v appartiennent à tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et sans perte de généralité il existe un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble S qui ne contient pas w (sinon on remplace w dans un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble par un sommet de $N(w) \cap T'$). Par conséquent, $S - \{u, v\}$ est un dominant double de T' et donc $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$, ce qui implique que $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$. Il s'ensuit que $A(T) = A(T') \cup \{u, v\}$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

Cas 2. T est obtenu à partir de T' par l'utilisation de l'opération type-2.

Dans ce cas $A(T') \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ est un dominant double de T , d'où on a, $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 4$. Aussi, d'après la Remarque 3.50, l'ensemble $\{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ est contenu dans tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, et il existe un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble S ne contenant pas a_3 . D'où, $S - \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ est un ensemble dominant double de T' . Par conséquent $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 4$, et donc $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 4$. Il s'ensuit que $A(T) = A(T') \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. ■

Maintenant nous sommes prêt à donner une caractérisation par construction des arbres possédant un dominant double exact.

Théorème 3.53 ([19]) *Soit T un arbre d'ordre au moins deux. Alors T possède un dominant double exact si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. D'après le Lemme 3.52, si $T \in \mathcal{T}$ alors T possède un dominant double exact de cardinal $\gamma_{\times 2}(T)$ et qui constitue l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Pour monter la condition nécessaire, on procèdera par induction sur l'ordre de T . Si $n = 2$ alors $T = P_2$. D'après la Remarque 3.51, il n'y a pas d'arbre d'ordre 3 et 4 possédant un dominant double exact. Donc soit $n = 5$. Alors d'après la Remarque 3.51, T est une chaîne P_5 . D'où on a $T \in \mathcal{T}$ et peut être obtenu à partir de T_1 en utilisant l'opération type-1.

Soit $n \geq 6$ et supposons que tout arbre T' d'ordre $2 \leq n' < n$ possédant un dominant double exact est dans $\mathcal{T}$. Soient T un arbre d'ordre n et S un ensemble dominant double exact de T .

Enracinons T en un sommet r et soit u un sommet pendant de T le plus loin possible de r . Désignons par v, w les pères respectives de u et v dans l'arbre enraciné. D'après la Remarque 3.51, u est l'unique sommet pendant adjacent à v et w n'est ni un sommet support ni un sommet pendant. Ce qui implique que chaque fils de w est un sommet support. D'autre part, $\deg_T(w) \leq 3$, sinon w sera dominé par au moins 3 sommets fils dans tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, ce qui contredit l'existence d'un dominant

double exact. Donc $w \neq r$. Soit z le sommet père de w dans l'arbre enraciné. On considère les deux cas suivants:

Cas 1. $\deg_T(w) = 2$. Soit $T' = T - \{u, v, w\}$. Il est clair que T' est un arbre d'ordre au moins deux puisque $n \geq 6$. D'après la Remarque 3.50, S contient u et v . D'où, u et v sont dominés exactement deux fois. Ce qui implique que $w \notin S$ et $z \in S$ pour dominer doublement w . Par suite, $S - \{u, v\}$ est un ensemble dominant double de T' . En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$ et $A(T') = S - \{u, v\}$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Par conséquent $T \in \mathcal{T}$ et peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération type-1.

Cas 2. $\deg_T(w) = 3$. Soit T_w le sous arbre de T enraciné en w . Donc T_w est une chaîne P_5 de centre w . Soit $T' = T - T_w$. Puisque w n'est pas un sommet support alors T' est d'ordre au moins deux. Dans ce cas $V(T_w) - \{w\} \subset S$ et tout sommet de T_w est dominé exactement deux fois. Ceci implique que $w \notin S$ et $z \notin S$. Donc z est dominé doublement par $S \cap T'$, d'où l'ensemble $S - (V(T_w) - \{w\})$ est un dominant double exact de T' . Par induction T' , on a $T' \in \mathcal{T}$ et $A(T') = S - (V(T_w) - \{w\})$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble avec $z \notin A(T')$. Par conséquent $T \in \mathcal{T}$ et peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération type-2. Ceci achève la preuve du théorème. ■

Nous considérons maintenant le problème d'existence des ensembles dominants doubles exacts dans les graphes 3-réguliers connexes. Pour un couplage parfait $M = \{e_1, e_2, \dots, e_{n/2}\}$ d'un graphe G , on associe le graphe simple désigné par $G_M = (V_M, E_M)$ où toute arête $e_i \in M$ est représentée par un sommet dans V_M et deux sommets de V_M sont adjacents si les arêtes correspondantes dans M sont adjacentes dans G . Un graphe est dit *biparti équitable* si ses sommets peuvent être partitionné en deux ensembles stables S_1 et S_2 tels que $|S_1| = |S_2|$.

Théorème 3.54 ([19]) *Soit G un graphe 3-régulier connexe. Alors G possède un dominant double exact si et seulement si G admet un couplage parfait M tel que le graphe associé G_M est un graphe biparti équitable.*

Preuve. Soit G un graphe 3-régulier connexe admettant S comme un ensemble dominant double exact. Puisque les sommets de S induisent un graphe 1-régulier (d'après la Remarque 3.39) alors tout sommet de S a deux voisins dans $V - S$. Aussi puisque tout sommet de $V - S$ a deux voisins dans S alors le sous graphe induit par les sommets de $V - S$ est un graphe 1-régulier. Par conséquent G admet un couplage parfait M constitué par les arêtes de $G[S]$ et celles de $G[V - S]$. Il faut noter que toute arête de $E - M$ est adjacente à une arête de S et une autre de $V - S$. Il faut noter aussi que puisque le graphe partiel $(S, V - S; E - M)$ est un graphe 2-régulier alors on a $|S| = |V - S|$. A partir de ce qu'a été noté ci-dessus, il est clair que le graphe G_M associé à M est un graphe biparti équitable.

Inversement, soit M un coulage parfait de G et G_M le graphe biparti équitale associé à M . Il faut noter d'abord que G_M est sans sommets isolés car M contient au moins deux arêtes. Soient (A, B) la bipartition du graphe biparti G_M . Désignons par A_M (resp. B_M) les sommets de G sur les arêtes correspondantes au sommets de A (resp. B). Puisque A (resp. B) est un stable alors le sous graphe de G induit par les sommets de A_M (resp. par B_M) est un graphe 1-régulier. Ceci implique aussi que tout sommet de A_M (resp. of B_M) a deux voisins dans B_M (resp. dans A_M) puisque G est un graphe 3-régulier. Par conséquent, A_M et B_M sont des ensembles dominants doubles exacts disjoints de G . Ceci achève la preuve du Théorème. ■

Chapitre 4

LA DOMINATION COUPLÉE DANS LES GRAPHEs

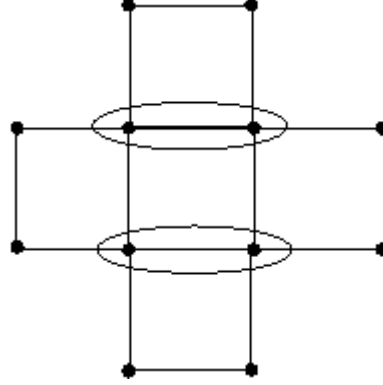
Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la domination couplée dans les graphes. Un concept assez récent introduit par Haynes et Slater [53] (article paru dans la revue *Networks* en 1998). Jusqu'à présent, la littérature ne compte pas plus d'une dizaine de travaux sur la domination couplée, citons les travaux de Haynes et Slater (Voir [53, 54]), Proffitt, Haynes et Slater [69], Fitzpatrick et Hartnell [37], Studer, Haynes et Lawson [72] et tout récemment le travail de Qiao, Kang, Cardei et Du [70]. Lors de la rédaction de cette thèse, on a eu connaissance aussi de trois nouveaux travaux exposés dans des séminaires, le premier concerne la domination couplée dans les graphes planaires, le second la domination couplée dans les "inflated graphs", dûs respectivement à Banerjee et Ferrero [2], et Kang et Sohn [60], et le troisième dû à Fitzpatrick [36] sur les "Well paired dominated graphs".

On exposera dans ce chapitre quelques résultats obtenus en collaboration avec Haynes [17], [18] et Blidia et Haynes [8].

4.1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de V est dit un *dominant couplé* de G si S est un dominant de G et le sous graphe induit par les sommets de S contient au moins un couplage parfait. Soit S un ensemble dominant couplé avec un couplage parfait M . Si l'arête $v_j v_k \in M$ alors on dit que les sommets v_j et v_k sont couplés dans S . Le *nombre de domination couplée* noté $\gamma_{pr}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G . (Voir Figure 11)

Il est à noter que tout graphe sans sommets isolés admet un dominant couplé, il suffit de prendre l'ensemble des sommets sur les arêtes d'un couplage maximal quelconque dans G .

Figure 11. Graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 4$.

Pour monter l'aspect pratique de la domination couplée, reprenons l'exemple du placement des gardiens dans une prison (voir introduction du Chapitre 3). Si l'on veut que les gardiens soient affectés par couples, c'est à dire que chaque gardien doit avoir un partenaire désigné, dans ce cas l'ensemble S cherché n'est autre qu'un ensemble dominant couplé minimum.

Dans [53], Haynes et Slater ont montré que le problème de la recherche du nombre de domination couplée est NP-Complet. Le côté algorithmique est traité uniquement pour la classe des arbres, citons le travail de Qiao, Kang, Cardei et Du [70] qui donnent un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination couplée dans les arbres.

Le théorème suivant regroupe quelques résultats établis sur la domination couplée

Théorème 4.1 ([53]) *Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n , alors:*

- 1) $2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq n$,
- 2) $\gamma_{pr}(G) \geq n/\Delta$,
- 3) Si $n \geq 6$ et $\delta \geq 2$ alors $\gamma_{pr}(G) \leq 2n/3$,
- 4) Si $\overline{G}$ est sans sommets isolés alors

$$\begin{aligned} \gamma_{pr}(G) + \gamma_{pr}(\overline{G}) &\leq n + 3 \text{ si } n \text{ est impair et} \\ \gamma_{pr}(G) + \gamma_{pr}(\overline{G}) &\leq n + 2 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

4.2 Minimalité et bornes supérieures

On commence par donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble dominant couplé soit minimal dans un graphe G .

Théorème 4.2 *Soient G un graphe sans sommets isolés et S un dominant couplé de G . Alors S est minimal si et seulement si toute paire de sommets x, y de S satisfait l'une des condition suivante:*

- 1) $\langle S - \{x, y\} \rangle$ ne contient pas de couplage parfait,
- 2) ou bien x est un sommet pendant dans $\langle S \rangle$ adjacent à y ou bien y est un sommet pendant dans $\langle S \rangle$ adjacent à x ,
- 3) il existe un sommet $u \in V - S$ tel que $N(u) \cap S \subseteq \{x, y\}$.

Preuve. Soient G un graphe sans sommets isolés et S un ensemble dominant couplé de G . Alors $|S|$ est pair. Supposons que S est minimal. Alors pour toute paire de sommets x et y de S , $S - \{x, y\}$ n'est pas un dominant couplé. ce qui entraîne que ou bien $S - \{x, y\}$ ne contient pas un couplage parfait et donc on a la Condition 1, ou bien il existe un sommet $u \in V$ qui n'est pas dominé par $S - \{x, y\}$.

Maintenant, si $u = x$ (respectivement, y), alors x (respectivement, y) est un sommet pendant dans $\langle S \rangle$ adjacent à y (respectivement, à x). Si $u \in S - \{x, y\}$, on a la Condition 1 puisque u est un sommet isolé dans $\langle S - \{x, y\} \rangle$. Si $u \in V - S$ alors $N(u) \cap S \subseteq \{x, y\}$.

Inversement, supposons que chaque paire de sommets de S satisfait l'une des conditions du théorème et supposons que S n'est pas minimal. Alors il existe deux sommets x, y dans S tel que $S - \{x, y\}$ est un dominant couplé de G . Il est clair que les Conditions 1 et 2 ne sont pas vérifiées pour la paire x, y . Par ailleurs, puisque $S - \{x, y\}$ domine G , alors aucun sommet y dans $V - S$ n'a $N(y) \cap S = \{x, y\}$. Par conséquent, la Condition 3 n'est pas vérifiée pour x et y , d'où la contradiction. ■

Nous donnons dans ce qui suit deux bornes supérieures pour le nombre de domination couplée, la première borne améliore celle de Haynes et Slater [53] (Voir Théorème 4.1-1).

Théorème 4.3 *Pour tout graphe G sans sommets isolés on a,*

$$\gamma_{pr}(G) \leq n - \delta + 1.$$

Et cette borne est atteinte.

Preuve. Si $\delta = 1$ alors l'inégalité est vérifiée. Donc supposons que $\delta \geq 2$, et soit v un sommet de degré minimum et w un sommet voisin de v . Alors parmi tous les dominants couplés minimum de $\langle (V - N(v)) \cup \{w\} \rangle$, soit S celui qui contient l'arête vw (un tel ensemble existe puisque $\langle (V - N(v)) \cup \{w\} \rangle$ est sans sommets isolés possédant un couplage maximal contenant l'arête vw). Dans ce cas, S est aussi un dominant couplé de G , d'où,

$$\gamma_{pr}(G) \leq |S| \leq |(V - N(v)) \cup \{w\}| = n + 1 - \delta.$$

Le cycle C_5 est un exemple de graphe pour lequel la borne est atteinte. ■

Proposition 4.4 ([17]) *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

$$\gamma_{pr}(G) + 2\delta\rho \leq 2n.$$

Preuve. Soient S un ensemble 2-stable maximum de G et Y un sous-ensemble de $N(S)$ tel que $V - N[S] \subset N(Y)$, c'est à dire que Y domine $V - N[S]$. Soit A_1 un couplage maximal dans le graphe biparti formé par les sommets de Y et ceux de $V - N[S]$ où les seules arêtes autorisées sont celles de G entre Y et $V - N[S]$. Il est clair que $|A_1| \leq |V - N[S]| \leq n - (\delta + 1)\rho$. Maintenant pour chaque sommet $v \in S$ tel que $N(v) \not\subseteq Y$, on choisit une arête vw où $w \in N(v) - Y$, et soit A_2 l'ensemble de ces arêtes choisies. Notons que puisque $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ pour tous $x, y \in S$ alors les arêtes de A_2 n'ont aucune extrémité commune. Donc $|A_2| \leq |S|$.

Désignons par D_i (pour $1 \leq i \leq 2$) l'ensemble des sommets qui sont extrémités des arêtes de A_i . Dans ce cas, D_2 domine $N[S] - N[Y]$. Donc, $D = D_1 \cup D_2$ est un dominant couplé de G puisque $\langle D \rangle$ a $A_1 \cup A_2$ comme un couplage parfait. Par conséquent, $\gamma_{pr}(G) \leq |D| = |D_1 \cup D_2| \leq 2(n - (\delta + 1)\rho) + 2\rho = 2n - 2\delta\rho$. ■

Puisque pour tout graphe G fortement triangulé, $\gamma(G) = \rho(G)$ (voir Farber [30]) alors on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.5 *Pour tout graphe fortement triangulé G sans sommets isolés,*

$$\gamma_{pr}(G) + 2\delta\gamma(G) \leq 2n.$$

Il est à noter que cette borne peut donner une estimation du nombre de domination couplée dans les graphes fortement triangulés sans sommets isolés étant donné qu'il existe des algorithmes polynomiaux pour le calcul de $\gamma(G)$ dans cette classe de graphes.

4.3 L'unicité des ensembles dominants couplés

Le premier travail s'intéressant à l'unicité des ensembles dominants dans les graphes est celui dû à Hopkins et Staton [58] en 1985 qui caractérisaient en particulier les arbres ayant un stable maximum unique. Par la suite, en 1994, Gunther, Hartnell, Markus et Rall [42], ont caractérisé les arbres ayant un dominant minimum unique. Ce dernier travail fût généralisé par Fischermann et Volkmann [34] en caractérisant les arbres ayant un k -dominant minimum unique (un sous-ensemble S de V est un k -dominant de G si pour tout $x \in V - S$, la distance entre x et S est au plus k). Le travail de Gunther et al. a été aussi généralisé par Fischermann [33] à la classe des bloc-graphes qui inclut les arbres. Enfin, dans un travail récent, Haynes et Henning [50] ont donné une caractérisation des arbres ayant un dominant total minimum unique.

Nous nous intéresserons dans cette partie à l'unicité des ensembles dominants couplés dans les graphes, en particulier on donne une caractérisation par construction des arbres ayant un dominant couplé minimum unique (**DCMU**). Ce résultat a été obtenu conjointement avec Haynes (voir [18]).

Avant d'établir une condition suffisante pour qu'un arbre admette un dominant minimum couplé unique, Nous donnons quelques remarques nécessaires pour la suite.

Remarque 4.6 *Si v est un sommet support d'un graphe G alors v est dans tout dominant couplé et appartient à un dominant minimum de G .*

Remarque 4.7 *Si T est un arbre tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ alors aucun sommet support n'est couplé avec son sommet pendant.*

Théorème 4.8 ([18]) *Si T est arbre tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ alors T admet un dominant couplé minimum unique.*

Preuve. Procédons par induction sur l'ordre n de T . Puisque il n'existe pas d'arbres T d'ordre 2 ou 3 tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$, soit $n \geq 4$. Si $n \in \{4, 5\}$ alors il est simple de vérifier que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ si et seulement si T est une étoile double et donc T est un arbre ayant un DCMU.

Soit $n \geq 6$ et supposons que tout arbre T' d'ordre n' , pour $4 \leq n' < n$, tel que $\gamma(T') = \gamma_{pr}(T')$ admet un DCMU. Soient T un arbre d'ordre n tel que $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$ et S un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble.

Enracinons T en un sommet r et soit u un sommet support à distance maximum de r . D'après la Remarque 4.6, on a $u \in S$. D'après le choix de u , tout sommet fils de

u est un sommet pendant. D'où, la Remarque 4.7 implique que u est couplé dans S avec son sommet père, disons w . La Remarque 4.7 entraîne aussi que tout sommet fils de w autre que u est pendant. Puisque $\gamma(T) = \gamma_{pr}(T)$, alors T n'est pas une étoile et donc $\deg(w) \geq 2$. Si $w = r$ alors T est une étoile double et d'où T admet un DCMU.

Donc, supposons que $w \neq r$ et soit v le sommet père de w dans T . Si $\deg(v) = 1$ alors T est encore une étoile double et le résultat est valide. En conséquence, supposons que $\deg(v) \geq 2$ et considérons les deux cas suivants:

Cas 1. $v \notin pn(w, S)$. Soit $a \neq w$ un sommet de $N[v] \cap S$ et soit b un sommet couplé avec a dans S . (il est possible que $a = v$.) Si $x \in \{a, b, w\}$ est un sommet qui ne possède pas de voisin privé dans $V - S$ alors $S - \{x\}$ est un dominant de T de cardinal inférieur à $\gamma(T)$, contradiction. Donc, w est un sommet support et chacun de a et b possède un voisin privé dans $V - S$. Soit $T' = T - T_w$. Alors T' est un arbre d'ordre au moins 4. Puisque $S \cap V(T')$ est un ensemble dominant (couplé) de T' , il s'ensuit que $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 2$ et $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2$. D'autre part, pour tout $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble (respectivement, $\gamma(T')$ -ensemble) S' , $S' \cup \{u, w\}$ est un dominant couplé (respectivement, dominant) de T . Par conséquent,

$$\gamma(T) \leq \gamma(T') + 2 \text{ et } \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$$

d'où,

$$\gamma(T') = \gamma(T) - 2 = \gamma_{pr}(T) - 2 = \gamma_{pr}(T').$$

Par induction sur T' , T' admet un DCMU. Il faut noter que $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Et puisque u et w sont dans tout $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, on déduit que T admet un DCMU.

Cas 2. $v \in pn(w, S)$. Dans ce cas $v \notin S$, d'où v n'est pas un sommet support. D'après le choix de u et la Remarque 4.7, on doit avoir chaque sommet fils de v dans S . D'où, w est l'unique fils de v , i.e., $\deg(v) = 2$. Soit z le sommet père de v dans T . Puisque ni z ou v est dans S , alors z doit être dominé par S par un sommet disons a . Soit b le sommet couplé avec a dans S . Alors b doit avoir un sommet privé dans $V - S$, dans le cas contraire, $S - \{b\}$ est un dominant de T de cardinal inférieur à $\gamma(T)$, contradiction.

Soit $T' = T - T_v$. Alors T' est un arbre d'ordre au moins 4. Il est clair que $S \cap V(T')$ est un dominant (couplé) de T' , d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 2$ et $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2$.

Maintenant, si $S' \neq S - \{w, u\}$ est un dominant (couplé) de T' , alors $S' \cup \{w, u\}$ est un dominant (couplé) de T . Par conséquent,

$$\gamma(T) \leq \gamma(T') + 2 \text{ et } \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2.$$

D'où on a, $\gamma(T') = \gamma_{pr}(T')$. Par induction sur T' , T' admet un DCMU.

Il faut noter que $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Supposons que T possède un autre $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble $D \neq S$. Alors $u \in D$ et $|D \cap V(T_w)| \geq 2$. Par ailleurs, si $w \notin D$ ou bien si $D \cap V(T') \neq S \cap V(T')$, alors

$$|D \cap V(T - T_w)| > \gamma_{pr}(T') = \gamma_{pr}(T) - 2,$$

d'où la contradiction. Par suite, S est l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble et T admet un DCMU. ■

L'implication inverse du Théorème 4.8 est fausse et peut être constatée en considérant la chaîne P_8 qui possède un dominant couplé minimum unique, mais $\gamma_{pr}(P_8) = 4 > \gamma(P_8) = 3$. D'un autre côté, il faut remarquer que pour un arbre T , si $\gamma(T) = \gamma_t(T) = \gamma_{pr}(T)$ suffit pour que T admet un DCMU, ce n'est pas le cas si $\gamma_t(T) = \gamma_{pr}(T)$. Pour voir, considérer l'arbre T de la Figure 12.

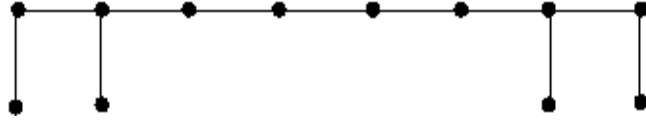


Figure 12. Un arbre T avec $\gamma_{pr}(T) = \gamma_t(T) = 6$

Pour caractériser les arbres T ayant un dominant couplé minimum unique, nous introduisons la famille notée $\mathcal{T}$ des arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$), où T_1 est une chaîne P_4 ayant x et y comme sommets supports, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations ci-dessous. Soient $A(T_1) = \{x, y\}$ et $B(T_1) = \emptyset$. Soit H la chaîne P_4 avec comme sommets supports u et w .

- **Opération Type-1:** Attacher un sommet pendant à un sommet quelconque de $A(T_i)$. Soient $A(T_{i+1}) = A(T_i)$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i)$.
- **Opération Type-2:** Attacher une copie de H en ajoutant l'arête uv , où $v \in A(T_i) \cup B(T_i)$. Soient $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{u, w\}$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i)$.
- **Opération Type-3:** Attacher une copie de H en ajoutant une arête entre un sommet pendant de H à un sommet de $V(T_i) - A(T_i)$. Soient $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{u, w\}$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i)$.
- **Opération Type-4:** Attacher une copie de H en ajoutant un nouveau sommet z et les arêtes uz et zv , où $v \in V(T_i)$. Soient $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{u, w\}$ et $B(T_{i+1}) = B(T_i) \cup \{z\}$.

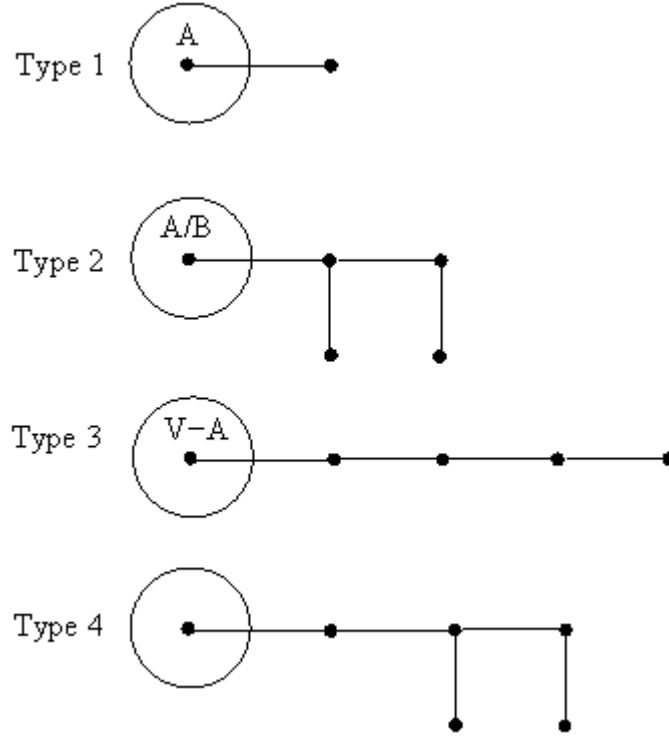


Figure 13. Les 4 opérations Type-1, 2, 3, 4

Remarque 4.9 Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$ admettant un dominant couplé minimum unique alors aucun sommet support n'est couplé avec son sommet pendant.

Preuve. Soient T un arbre d'ordre $n \geq 4$ avec un unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble S et v un sommet support de T . D'après la Remarque 4.6, $v \in S$. Supposons que v est couplé avec son sommet pendant u dans un couplage M associé à S . Dans ce cas, il est clair que u est l'unique sommet pendant adjacent à v . Soit x un sommet adjacent à v . Alors $x \in S$, sinon $(S - \{u\}) \cup \{x\}$ avec le couplage $(M - \{uv\}) \cup \{vx\}$ est un second $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, ce qui contredit l'unicité de S . Par conséquent, supposons que x est couplé dans S avec y . Dans ce cas, y possède un voisin privé, disons z , sinon $S - \{u, y\}$ avec le couplage $(M - \{uv, xy\}) \cup \{vx\}$ est un dominant couplé de T de cardinal inférieur à $|S| = \gamma_{pr}(T)$, contradiction. Mais alors $(S - \{u\}) \cup \{z\}$ avec le couplage $(M - \{uv, xy\}) \cup \{vx, yz\}$ est un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, ce qui contredit aussi l'unicité de S . ■

Lemme 4.10 Si $T \in \mathcal{T}$ alors:

- (a) $A(T) \cap B(T) = \emptyset$,
- (b) $A(T)$ est l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, et

(c) si $v \in B(T)$, alors v n'est pas le seul sommet privé d'un sommet de $A(T)$.

Preuve. La preuve de (a) et (c) découle directement de la construction de l'arbre $T \in \mathcal{T}$. Pour montrer (b), soit $T \in \mathcal{T}$. Alors T peut être obtenu à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$), où T_1 est une chaîne P_4 , $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir T_i par l'une des quatre opérations définies plus haut. Nous utiliserons la terminologie de la construction des ensembles $A(T)$, $B(T)$, et le graphe H avec u et w comme sommets supports. Si $k = 1$ alors $T = P_4$ et donc $A(T)$ est l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble.

Supposons que le résultat est valide pour tous les arbres $T \in \mathcal{T}$ qui peuvent être construits à partir d'une séquence de longueur au plus $k - 1$, et soit $T' = T_{k-1}$. Par induction sur $T' \in \mathcal{T}$, $A(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Il est simple de voir que si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-1 alors $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T')$ et $A(T) = A(T')$ l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble.

Il faut noter que si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-2, 3, ou 4 alors $(T') \cup \{u, w\}$ est un ensemble dominant couplé de T . D'où, $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2$.

Supposons maintenant que T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-2 ou 4. Puisque u et w sont des sommets supports de T alors d'après la Remarque 4.6, u et w sont dans tout $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble. Soit v un sommet de T' adjacent à u . Si $\gamma_{pr}(T) < \gamma_{pr}(T') + 2$, alors $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{pr}(T')$ impliquant qu'il existe un $\gamma_{pr}(T' - v)$ -ensemble S' de cardinal $\gamma_{pr}(T') - 2$. Aucun voisin de v n'est dans S' sinon S' sera un dominant couplé de T' , contradiction. D'où, $S' \cup \{v, x\}$ où $x \in N(v)$ est un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble, et puisque $A(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble alors $A(T') = S' \cup \{v, x\}$. Mais d'après la construction, chaque sommet de $A(T')$ possède un voisin privé relatif à $A(T')$ dans $V(T') - A(T')$, ce qui contredit le fait que S' est un dominant couplé de $T' - v$. Par conséquent, $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{pr}(T) - 2$ et donc $A(T)$ est l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble.

Enfin, si T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-3 alors w est un sommet support dans T et d'après la Remarque 4.6 il est dans tout $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble S . Puisque $v \notin A(T')$, il s'ensuit que le voisin commun de u et v n'est pas dominé par un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble et donc w doit être couplé avec u dans tout $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble. Avec un argument similaire à celui utilisé plus haut, on voit que $A(T)$ est l'unique $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble. ■

On est maintenant en position de donner la caractérisation des arbres T admettant un dominant couplé minimum unique.

Théorème 4.11 ([18]) *Un arbre T admet un dominant couplé minimum unique si et seulement si $T = P_2$ ou bien $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Si $T = P_2$ alors T admet un DCMU. D'autre part, le Lemme 4.10 montre que si $T \in \mathcal{T}$ alors T admet un DCMU.

Pour montrer la nécessité, on procède par induction sur l'ordre n d'un arbre T admettant un DCMU. Si $n = 2$ alors $T = P_2$. Puisque il n'existe pas d'arbre T d'ordre 3 ayant un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble unique, alors soit $n = 4$. D'après la Remarque 4.9 on a $T = P_4$ et d'où $T \in \mathcal{T}$. Si $n = 5$ alors aussi d'après la Remarque 4.9, T est une étoile double. D'où, T peut être obtenu à partir de P_4 en utilisant l'opération de Type-1. Donc $T \in \mathcal{T}$.

Soit $n \geq 6$ et supposons que tout arbre T' d'ordre $n' < n$ admettant un DCMU est dans $\mathcal{T}$. Soient T un arbre d'ordre n ayant un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble unique S où M est le couplage associé à S .

S'il existe un sommet support dans T disons v adjacent à au moins deux sommets pendants alors soit T' l'arbre obtenu de T en supprimant l'un des sommets pendants de v . Alors v reste un sommet pendant dans T' , et d'après la Remarque 4.6, $v \in S$ et v est dans tout $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. D'où, $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble et donc T' admet un DCMU d'ordre au moins cinq. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-1 alors $T \in \mathcal{T}$. Par conséquent, on peut supposer que chaque sommet support de T est adjacent à exactement un seul sommet pendant.

Enracinons T en un sommet r et soient u un sommet support à distance maximum de r et u' le sommet pendant adjacent à u . Il est clair que $\deg(u) = 2$. Les Remarques 4.6 et 4.9 impliquent que $u \in S$ et u est couplé dans S avec son sommet père disons w , et que $\deg(w) \geq 2$. Par ailleurs, la Remarque 4.9 implique que chaque sommet fils de w autre que u est un sommet pendant. D'où, $2 \leq \deg(w) \leq 3$. Puisque $n \geq 6$ et que nous avons supposé que chaque support est adjacent à un seul sommet pendant alors $w \neq r$. Donc, soit v le sommet père de w dans l'arbre enraciné T . Alors v n'est pas pendant puisque tout sommet support est adjacent à un seul sommet pendant. On considère deux cas.

Cas 1. $v \in S$. Alors v est couplé dans S avec un sommet disons y . Maintenant, w doit être un sommet support sinon $(S - \{w\}) \cup \{u'\}$ avec le couplage $(M - \{uw\}) \cup \{uu'\}$ est un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, ce qui contredit l'unicité de S .

Soit $T' = T - T_w$. D'après la Remarque 4.9, y est de degré au moins deux dans T , et donc T' est d'ordre au moins 3. Aussi, il est simple de voir que $S - \{u, w\}$ avec le couplage $M - \{uw\}$ est un dominant couplé de T' , d'où $\gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{pr}(T) - 2$. Si T' possède un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble $S' \neq S \cap V(T')$ avec le couplage associé M' , alors $S' \cup \{w, u\}$ avec le couplage $M' \cup \{wu\}$ est ou bien un dominant couplé de T de cardinal inférieur à $\gamma_{pr}(T)$ ou bien un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble différent de S . Dans les deux cas, on a une contradiction. Par conséquent, $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Par

induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$ et d'après le Lemme 4.10, $v \in A(T')$. D'où, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-2 et par suite on a $T \in \mathcal{T}$.

Cas 2. $v \notin S$. D'après la Remarque 4.6, v n'est pas un sommet support et d'après le choix de u et la Remarque 4.9, chaque sommet fils de v est dans S .

D'abord, supposons que $v \in pn(w, S)$, c'est à dire que w est le seul voisin de v dans S . Alors w est l'unique sommet fils de v , i.e., $deg(v) = 2$. Soit y le sommet père de v dans T . Puisque $y \notin S$, alors il existe un sommet disons a , dans $N(y) \cap S$ pour dominer y . Soit b le sommet couplé avec a dans S . Maintenant, b doit avoir un voisin privé dans $V - S$, sinon $(S - \{b\}) \cup \{y\}$ avec le couplage $(M - \{ab\}) \cup \{ay\}$ est un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble différent de S , contradiction. Soit $T' = T - T_v$. L'arbre T' est d'ordre au moins 4 et il est simple de voir que $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$.

Si $deg(w) = 2$ alors T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-3.

Si $deg(w) = 3$ alors w est un sommet support et T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-4. Dans tous les cas, $T \in \mathcal{T}$.

Maintenant supposons que $v \notin pn(w, S)$ et soit a un autre sommet voisin de v dans S , où b est le sommet de S couplé avec a . D'après la Remarque 4.9, $deg(b) \geq 2$. Dans ce cas, w doit être un sommet support, sinon $(S - \{w\}) \cup \{u'\}$ avec le couplage $(M - \{wu\}) \cup \{uu'\}$ est un deuxième $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble, une contradiction. Avec un argument similaire, on peut voir que chacun de a et b doit avoir un voisin privé dans $(V - S) - \{v\}$. Il faut noter que chaque fils y de v , $y \in S$ et donc T_y est isomorphe à T_w .

Si $deg(v) = 2$ alors soit $T' = T - T_v$. Dans ce cas, T' est d'ordre au moins 4. Si $S' \neq S - \{u, w\}$ est un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble alors $S' \cup \{u, w\}$ est ou bien un second $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble ou bien un dominant couplé de T de cardinal inférieur à $\gamma_{pr}(T)$, dans chaque cas, on a une contradiction. D'où T' admet un DCMU. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-4 alors $T \in \mathcal{T}$.

Si $deg(v) \geq 3$ alors soit $T' = T - T_w$. On peut voir facilement que T' est d'ordre au moins 4 et comme précédemment $S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. D'après la construction de T' on a $v \in B(T')$. D'où, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-2, ce qui implique que $T \in \mathcal{T}$. ■

4.4 Relation entre les nombres de domination couplée et double

En théorie des graphes, il est souvent question d'étudier les relations entre deux invariants (Exemple: les résultats de Gallai [39]) et parfois entre plusieurs invariants (exemple, la chaîne d'inégalité entre les paramètres de domination dû à Cockayne, Hedetniemi et Miller [25]) dans un graphe en général ou dans des classes de graphes.

Dans ce contexte, nous nous intéresserons dans cette partie à étudier la relation entre le nombre de domination double et le nombre de domination couplée dans certaines classes de graphes puisque les deux paramètres sont incomparables dans le cas général. Par exemple, si $G = mK_2$ ou bien G est une subdivision d'une étoile avec $n \geq 5$ alors on a $\gamma_{pr}(G) = \gamma_{\times 2}(G)$. Mais la différence $\gamma_{\times 2}(G) - \gamma_{pr}(G)$ peut être aussi large que l'on veut et peut être vue en considérant la couronne K_{2k}^* du graphe complet K_{2k} où $\gamma_{\times 2}(G) = 4k$ et $\gamma_{pr}(G) = 2k$.

Par ailleurs, la différence $\gamma_{pr}(G) - \gamma_{\times 2}(G)$ peut être aussi large, pour voir ceci, on construit le graphe G_k à partir d'un sommet x et k copies disjointes du cycle C_6 (où les sommets de la i^{eme} copie de C_6 sont désignés par $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,6}$) en ajoutant les arêtes $\{xv_{i,1}, xv_{i,3}, xv_{i,5} \mid 1 \leq i \leq k\}$. Il est simple de vérifier que $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,4}, v_{i,5} \mid 1 \leq i \leq k\}$ avec le couplage $\{v_{i,1}v_{i,2}, v_{i,4}v_{i,5} \mid 1 \leq i \leq k\}$ est un $\gamma_{pr}(G_k)$ -ensemble et que $\{x, v_{i,1}, v_{i,3}, v_{i,5} \mid 1 \leq i \leq k\}$ est un $\gamma_{\times 2}(G_k)$ -ensemble. Donc, $\gamma_{pr}(G_k) = 4k$ tandis que $\gamma_{\times 2}(G_k) = 3k + 1$.

Nous allons voir que pour les graphes sans $K_{1,3}$ et les arbres, le nombre de domination couplée est majoré par le nombre de domination double. Nous donnons par la suite une caractérisation descriptive et constructive des arbres T tels que $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{pr}(T)$.

Théorème 4.12 ([17]) *Si G est un graphe sans $K_{1,3}$ et sans sommets isolés alors $\gamma_{pr}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)$.*

Preuve. Soit S un $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble avec la propriété que $\langle S \rangle$ contient le couplage maximum parmi tous les $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensembles. Il est clair que S domine $V - S$. Désignons par $M = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_tv_t\}$ le couplage maximum dans $\langle S \rangle$, et soit B l'ensemble des sommets saturés par le couplage M . Si M est un couplage parfait $\langle S \rangle$, alors S est un dominant couplé et donc le théorème est vrai. Par conséquent, soit $A = S - B$, c'est à dire que A est l'ensemble des sommets de S non saturés par M . Désignons les sommets de A par $a_1, a_2, \dots, a_r$.

Puisque S est un ensemble dominant double alors chaque $a_i \in A$ doit avoir un voisin, disons x_i , dans S . Si $x_i \in A$, alors $M \cup \{a_ix_i\}$ est un couplage plus grand que M dans $\langle S \rangle$, ce qui contredit l'hypothèse que M est maximum. D'où, A est un ensemble stable et chaque $a_i \in A$ est adjacent à un sommet de B . Sans perte de généralité, supposons que a_1 est adjacent à u_1 . Si a_j pour un certain indice $j \neq 1$ est adjacent à

v_1 , alors $(M - \{u_1v_1\}) \cup \{a_1u_1, a_jv_1\}$ est un couplage plus grand que M dans $\langle S \rangle$, ce qui donne encore une contradiction sur M . Donc si a_i est adjacent à u_i , alors a_j n'est pas adjacent à v_i pour tout $j \neq i$. Par ailleurs, si a_i et a_j sont adjacents à la fois à u_i , alors $\{a_i, a_j, u_i, v_i\}$ induit une étoile $K_{1,3}$. Par conséquent, on peut supposer sans perte de généralité que a_i est adjacent à u_i pour $1 \leq i \leq r \leq t$.

Maintenant l'ensemble B est un dominant couplé pour $\langle S \rangle$. Si B domine $V - S$, alors le théorème est vrai. Donc, soit A' l'ensemble des sommets de $V - S$ non dominés par B . Puisque S est un dominant double et chaque $v \in A'$ ne possède pas de voisin dans B , il s'ensuit que $|N(v) \cap A| \geq 2$. Mais puisque A est un stable et G est sans $K_{1,3}$, alors chaque $v \in A'$ possède au plus deux voisins dans A , ce qui implique que $|N(v) \cap A| = 2$ pour tout $v \in A'$.

Considérons un sommet $v \in A'$ et sans perte de généralité soit $N(v) \cap S = \{a_1, a_2\}$. Si $S' = (S - \{a_1\}) \cup \{v\}$ est un ensemble dominant double de G , alors S' possède un couplage $M \cup \{a_2v\}$ plus grand que M , contradiction avec le choix de S . D'où il existe un sommet $x \in V - S$ tel que $|N(x) \cap S| = 2$ et $a_1 \in N(x)$. Si x n'est pas adjacent à u_1 ou v alors $\{a_1, u_1, x, v\}$ induit un $K_{1,3}$, contradiction. Donc x est adjacent à v ou bien à u_1 . Il faut noter que chaque voisin de a_1 dans $A' - \{v\}$ doit être adjacent à v ou u_1 puisque G est sans $K_{1,3}$. Le même argument est valable pour tous les voisins de a_2 , c'est à dire, pour tous les sommets x dans $N(a_2) \cap (A' - \{v\})$, x est adjacent à v ou à u_2 . D'où chaque sommet dans $(N(a_1) \cup N(a_2)) \cap (A' - \{v\})$ est dominé par $B \cup \{v\}$.

On construit maintenant un ensemble dominant couplé de G comme suit. Soit A^* l'ensemble des sous-ensembles de A de cardinal 2 tel que:

1. chaque ensemble $\{a_i, a_j\}$ satisfait à la Condition 3 du Théorème 3.3 (voir chapitre 3) pour un sommet dans A' , c'est à dire qu'il existe un sommet $v \in A'$ tel que $N(v) \cap S = \{a_i, a_j\}$, et
2. $|A^*|$ est maximisé sous la condition que qu'aucun sommet de A n'appartient à plus d'un sous-ensemble de A^* .

Alors $|A^*| \leq |A|/2$. Puisque les sommets a_1 et a_2 sont des sommets arbitraires de A satisfaisant la Condition 3 du Théorème 3.3 pour un sommet de A' . On conclut que chaque sous-ensemble de cardinal 2 tel que pour chaque $\{a_i, a_j\} \in A^*$, il existe un sommet $x_i \in A'$ où $(N(a_i) \cup N(a_j)) \cap A'$ est dominé par $B \cup \{x_i, x_j\}$.

Soit $M' = M \cup \{x_i a_i \mid 1 \leq i \leq |A^*|\}$ et $D = B \cup \{x_i, a_i \mid 1 \leq i \leq |A^*|\}$. Alors D avec le couplage M' est un dominant couplé de G . D'où, $\gamma_{pr}(G) \leq |D| = |B| + 2 \frac{|A^*|}{2} \leq |B| + |A| \leq |S| = \gamma_{\times 2}(G)$. ■

Avant de montrer le prochain théorème, on fait la remarque suivante.

Remarque 4.13 *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

- 1) *un sommet support appartient à tout $\gamma_{pr}(G)$ -ensemble et à tout $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble;*
- 2) *un sommet pendant appartient à tout $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble.*

Théorème 4.14 *Pour tout arbre T d'ordre au moins deux, $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$.*

Preuve. Soient T un arbre d'ordre au moins deux et S un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, où M est un couplage maximum dans $\langle S \rangle$ et B l'ensemble des sommets saturés par M . Si M est parfait alors B est un dominant couplé et le résultat est vrai. Donc supposons que $B \neq S$, et soit A l'ensemble des sommets de S non saturés par M . Il est clair que A est un ensemble stable et donc chaque sommet de A possède au moins un voisin dans B . D'où, B est un dominant couplé de $\langle S \rangle$. Si B domine V , alors B est un dominant couplé de T et donc $\gamma_{pr}(T) \leq |B| \leq |S| = \gamma_{\times 2}(T)$. Par conséquent, supposons que A' est l'ensemble des sommets de $V - S$ non dominés par B . Puisque S est un dominant double de T , il s'ensuit que chaque sommet v de A' est adjacent à au moins deux sommets de A .

Considérons le graphe biparti $D(A, A')$ induit par les sommets de A et A' , où les seules arêtes autorisées sont celles de T qui relient les sommets de A aux sommets de A' . Sans perte de généralité, on suppose que $D(A, A')$ est connexe, sinon on peut repeter la procédure decrite ci-dessous pour chaque composante connexe.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ les sommets de A' et $A_1, A_2, \dots, A_p$ les sous-ensembles de A ordonnés comme suit:

$A_1 = N(x_1) \cap A$ et pour $2 \leq k \leq p$, x_k est un sommet de A' adjacent à un sommet de $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ avec $A_k = N(x_k) \cap (A - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$.

Puisque chaque sommet de A' est adjacent à au moins deux sommets de A , alors on a, $|A_1| \geq 2$. Aussi, puisque T est un arbre et $D(A, A')$ est un graphe connexe alors chaque sommet x_k pour $k \geq 2$ possède exactement un voisin dans $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. D'où, $|A_k| \geq 1$ pour $2 \leq k \leq p$.

Soit M' un ensemble d'arêtes de $D(A, A')$ sélectionnées de la manière suivante en commençant à varier k à partir de p en descendant vers 2: une arête $x_k a_r$ pour $a_r \in A_r$ avec $r < k$ est dans M' si et seulement si x_k n'est pas dominé par un sommet incident à une arête de M' . Soit B' l'ensemble des sommets incidents aux arêtes de M' .

Il est à noter que M' est un couplage et B' domine $A' - \{x_1\}$. D'après notre choix de M' , deux sommets quelconques de $A' \cap B'$ n'ont pas de voisins commun dans $A \cap B'$. D'où, $|B'| = 2|M'| \leq |A|$. Maintenant si $B' \cap A_1 \neq \emptyset$ alors x_1 est dominé par B' et donc $B \cup B'$ est un dominant couplé de T . Ceci implique que:

$$\gamma_{pr}(T) \leq |B \cup B'| \leq |B| + |A| = \gamma_{\times 2}(T).$$

Si $B' \cap A_1 = \emptyset$ alors $|B'| = 2|M'| \leq |A - A_1|$. Soit a_1 un sommet de A_1 adjacent à x_1 , $M'' = M' \cup \{x_1 a_1\}$, et $B'' = B' \cup \{x_1, a_1\}$. Puisque $|A_1| \geq 2$, alors on a $|B''| = |B' \cup \{x_1, a_1\}| \leq |A|$. Par conséquent, $B \cup B''$ est un ensemble dominant couplé de T , d'où:

$$\gamma_{pr}(T) \leq |B \cup B''| \leq |B| + |A| = \gamma_{\times 2}(T).$$

■

D'après le Théorème 4.14, on sait que $\gamma(T) \leq \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ pour tout arbre T d'ordre au moins deux. Cette chaîne d'inégalité peut être totalement stricte et la différence entre deux paramètres quelconques est assez large. Pour voir ceci, considérons l'arbre T_k obtenu à partir de la chaîne P_k où pour chaque sommet $v_i \in V(P_k)$, $1 \leq i \leq k$, deux copies disjointes de P_3 sont attachées par des arêtes de leurs sommets centres à v_i . Alors T_k est un arbre d'ordre $7k$ avec $\gamma(T_k) = 2k$, $\gamma_{pr}(T_k) = 4k$, et $\gamma_{\times 2}(T_k) = 6k$.

Nous donnons par la suite deux caractérisations, l'une descriptive et l'autre constructive des arbres T pour lesquels $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$. Pour cela, nous introduisons l'ensemble des arbres suivant et montrons quelques lemmes.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$) d'arbres tels que T_1 est la chaîne P_2 , $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations décrites ci-dessous: Considérons l'un des sommets de T_1 comme support et l'autre comme pendant et soit $C(T_1) = \emptyset$.

- **Opération Type-1 :** Attacher une chaîne P_3 en ajoutant l'arête wy où w est un sommet pendant de P_3 et y est un sommet support de T_i . Soit $C(T_{i+1}) = C(T_i) \cup \{w\}$.
- **Opération Type-2 :** Attacher une chaîne P_2 en ajoutant une arête entre un sommet pendant de P_2 et un sommet de $C(T_i)$.
- **Opération Type-3:** Attacher une chaîne P_5 de centre w en ajoutant une arête reliant w et un sommet de $C(T_i)$. Soit $C(T_{i+1}) = C(T_i) \cup \{w\}$.

Rappelons que $S(T)$ et $L(T)$ représentent respectivement l'ensemble des sommets supports et pendants de T . Il est à noter d'après la construction de T qu'aucun sommet de $C(T)$ n'est ni un sommet de $S(T)$, ni de $L(T)$ et que $V(T) - C(T) = S(T) \cup L(T)$.

Lemme 4.15 *Si T est un arbre tel que $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$ alors chaque sommet support de T est adjacent à exactement un seul sommet pendant.*

Preuve. Supposons qu'il existe un sommet support x adjacent à deux sommets pendants u et v . D'après la Remarque 4.13, x appartient à tout $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble et à tout $\gamma_{pr}(T - u)$ -ensemble. Aussi, tout $\gamma_{pr}(T - u)$ -ensemble est un ensemble dominant couplé de T . Par ailleurs, $\{x, u, v\}$ est un sous-ensemble de chaque $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, tandis que x et v sont dans tout $\gamma_{\times 2}(T - u)$ -ensemble. D'où, tout $\gamma_{\times 2}(T - u)$ -ensemble ne peut être un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, c'est à dire que, $\gamma_{\times 2}(T) > \gamma_{\times 2}(T - u)$. Par conséquent, $\gamma_{pr}(T - u) \geq \gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T) > \gamma_{\times 2}(T - u)$, ce qui contredit le Théorème 4.14. ■

Lemme 4.16 *Soit T_w une étoile subdivisée d'ordre au moins 5 ayant w pour sommet centre. Soit y un sommet d'un arbre T_y d'ordre au moins 2 et soit T l'arbre obtenu à partir de $T_w \cup T_y$ en ajoutant l'arête wy . Si $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$ alors $\gamma_{pr}(T_w) = \gamma_{\times 2}(T_w)$, $\gamma_{pr}(T_y) = \gamma_{\times 2}(T_y)$, et $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T_w) + \gamma_{\times 2}(T_y) = \gamma_{pr}(T_w) + \gamma_{pr}(T_y)$.*

Preuve. Puisque T_w est une étoile subdivisée d'ordre au moins 5 alors il est facile de voir que:

$$\gamma_{pr}(T_w) = \gamma_{\times 2}(T_w) = |L(T_w)| + |S(T_w)| = 2|S(T_w)|.$$

Aussi, puisque tout $\gamma_{pr}(T_y)$ -ensemble peut être élargi à un ensemble dominant couplé de T en lui ajoutant l'ensemble des sommets $S(T_w) \cup L(T_w)$, alors on aura,

$$\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T_y) + 2|S(T_w)|.$$

D'après le Théorème 4.14, $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{pr}(T_y) + 2|S(T_w)| \leq \gamma_{\times 2}(T_y) + 2|S(T_w)|$.

Par conséquent, il est maintenant suffisant de voir que:

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma_{\times 2}(T_y) + 2|S(T_w)|.$$

Supposons le contraire, que $\gamma_{\times 2}(T) < \gamma_{\times 2}(T_y) + 2|S(T_w)|$. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, et soient $D_y = D \cap V(T_y)$ et $D_w = D \cap V(T_w)$. D'après la Remarque 4.13, on a $S(T_w) \cup L(T_w) \subseteq D_w$, ce qui implique que $|D_w| \geq 2|S(T_w)|$. D'où, $|D_y| < \gamma_{\times 2}(T_y)$. Puisque D_y n'est pas un dominant double de T_y mais $D_y \cup D_w$ domine doublement T , il s'ensuit que D_w domine y . En particulier, $w \in D$ et w est nécessaire dans D pour dominer doublement y . Donc, un seul sommet de $N[y]$ est dans D_y . Mais puisque T_y

est d'ordre au moins 2, $N[y] - D_y \neq \emptyset$ et d'où, $D_y \cup \{z\}$ où $z \in (V(T_y) \cap N[y]) - D_y$ est un dominant double de T_y . Par conséquent,

$$\gamma_{\times 2}(T_y) \leq |D_y| + 1 = |D| - |D_w| + 1 = |D| - 2|S(T_w)| - 1 + 1 = \gamma_{\times 2}(T) - 2|S(T_w)|$$

d'où la contradiction. ■

Nous sommes maintenant en position de montrer le théorème suivant:

Théorème 4.17 *Pour tout arbre T d'ordre au moins deux, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (a) $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$.
- (b) ou bien $T = P_2$ ou bien chaque sommet support de T est adjacent à exactement un seul sommet pendant, deux sommets supports quelconques de T sont non adjacents et T possède un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble unique qui est $S(T) \cup L(T)$.
- (c) $T \in \mathcal{T}$.

Preuve. (a) équivalent à (b).

Trivialement, $\gamma_{pr}(P_2) = \gamma_{\times 2}(P_2)$, donc supposons que $n \geq 3$.

Soit $D = S(T) \cup L(T)$ l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble où $|D| = 2k$, c'est à dire, $|S(T)| = |L(T)| = k$. D'après le Théorème 4.14, $\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T) = 2k$. Soit S un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble. Alors d'après la Remarque 4.13, on sait que $S(T) \subseteq S$.

Par ailleurs, tout sommet support doit être couplé avec un autre sommet. Puisque $S(T)$ est un ensemble stable alors deux supports quelconques ne peuvent être couplés ensemble. D'où, $|S| \geq 2k$, et donc $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$.

Inversement, supposons que $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$. D'après le Lemme 4.15, on a chaque sommet de $S(T)$ est adjacent à un seul sommet pendant.

Pour montrer le reste, on procède par induction sur l'ordre n de T . Trivialement, si $T = P_2$ alors le théorème est vérifié. Maintenant, puisque il n'existe pas d'arbre d'ordre 3 ou 4 ayant l'égalité entre les nombres de domination couplé et double, on peut supposer que $n = 5$. Le Lemme 4.15 implique que $T = P_5$, et encore une fois on a le résultat.

Soit $n \geq 6$, et supposons que tout arbre T' d'ordre $n' < n$ tel que $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$ satisfait les propriétés du théorème. Soit T un arbre d'ordre n avec $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$.

Supposons d'abord que T possède deux sommets supports qui soient adjacents, disons u et v . Soient u' et v' deux sommets pendants adjacents à u et v , respectivement.

Enracinons T en v , et soit $T' = T - T_u$. Il faut noter que T' reste enraciné en v . Il est simple de voir que:

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T_u) + \gamma_{\times 2}(T') \text{ et } \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T_u) + \gamma_{pr}(T').$$

D'après la Remarque 4.13, ceci implique que $\{u, u', v, v'\} \subseteq D$ pour tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble D .

D'où,

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma_{\times 2}(T_u) + \gamma_{\times 2}(T'),$$

et donc,

$$\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_u) + \gamma_{\times 2}(T').$$

Maintenant, le Théorème 4.14 implique que:

$$\gamma_{pr}(T) \leq \gamma_{pr}(T_u) + \gamma_{pr}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T_u) + \gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{pr}(T).$$

Il s'ensuit alors que $\gamma_{pr}(T_u) = \gamma_{\times 2}(T_u)$ et $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$.

Par conséquent, on peut appliquer notre hypothèse d'induction sur T_u et sur T' . D'où, T_u possède un $\gamma_{\times 2}(T_u)$ -ensemble unique S_1 qui est aussi un $\gamma_{pr}(T_u)$ -ensemble avec le couplage M_1 , où $\{u, u'\} \subseteq S_1$ et $uu' \in M_1$. Similairement, T' possède un unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble S_2 qui est aussi un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble avec le couplage M_2 , où $\{v, v'\} \subseteq S_2$ et $vv' \in M_2$. Mais dans ce cas, $(S_1 \cup S_2) - \{u', v'\}$ avec le couplage $((M_1 \cup M_2) - \{uu', vv'\}) \cup \{uv\}$ est un ensemble dominant couplé de T de cardinal inférieur strictement à $\gamma_{pr}(T)$, contradiction

En conséquence, on peut supposer que l'ensemble des supports $S(T)$ est un stable. Maintenant enracinons T en un sommet r , et soit v le plus loin sommet de r . Nécessairement v est un sommet pendant. Soient u le sommet père de v et w le sommet père de u dans T .

Puisque T ne possède pas de sommets supports adjacent alors w ne peut être un sommet support. Alors d'après le Lemme 4.15, u est adjacent à exactement un seul sommet pendant. D'un autre côté, notre choix de v implique que $\deg(u) = 2$ (sinon il existera un sommet plus loin de r que v l'est). Notre choix de v entraîne aussi que chaque sommet fils de w est un support adjacent à exactement un seul sommet pendant, c'est à dire que T_w est une étoile subdivisée.

Si $w = r$ alors T est une étoile subdivisée d'ordre au moins 5 et dans ce cas le théorème est vrai. Donc, supposons que $w \neq r$, et soit y le sommet parent de w .

Soit $T' = T - T_w$. Puisque w n'est pas un sommet support alors y n'est pas un sommet pendant dans T et donc T' est d'ordre au moins deux.

Si $\deg_T(w) = 2$ alors $T_w = P_3$. Puisque tout $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble peut être élargi à un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble en lui ajoutant les sommets u et v , il s'ensuit que

$$\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{pr}(T') + 2 \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2$$

(d'après le Théorème 4.14).

Supposons maintenant que $\gamma_{\times 2}(T) < \gamma_{\times 2}(T') + 2$, et soient D un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et $D' = D \cap V(T')$. Alors, $|D'| < \gamma_{\times 2}(T')$, c'est à dire que, D' n'est pas un dominant double de T' . Ceci implique que $w \in D$ (pour dominer doublement y). Maintenant, exactement un sommet de $N[y]$ est dans D . D'où, $D' \cup \{z\}$ où $z \in N[y] \cap V(T_y) - D'$ est un ensemble dominant double de T' . En conséquence:

$$\gamma_{\times 2}(T') \leq |D'| + 1 = |D| - 3 + 1 = \gamma_{\times 2}(T) - 2, \text{ contradiction.}$$

Donc on peut supposer que $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$.

Si $\deg_T(w) \geq 3$ alors T_w est une étoile subdivisée d'ordre au moins 5. D'après le Lemme 4.16, $\gamma_{pr}(T_w) = \gamma_{\times 2}(T_w)$ et $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$. Par ailleurs, $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_w) + \gamma_{\times 2}(T')$. Maintenant dans les deux cas on peut appliquer notre hypothèse d'induction sur T' . Soit $D_2 = S(T') \cup L(T')$ l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Si $T_w = P_3$ alors soit $D_1 = \{u, v\}$, sinon soit $D_1 = S(T_w) \cup L(T_w)$. On note que $D_1 = V(T_w) - \{w\}$ dans les deux cas.

Si $y \in D_2$ alors y est ou bien un sommet support ou bien un sommet pendant dans T' . Si y est un sommet support de T' alors y est un support dans T . Ce qui entraîne que $D_1 \cup D_2$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui est $S(T) \cup L(T)$. Donc supposons que y est un sommet pendant dans T' . Maintenant y et son voisin disons z sont les deux dans D_2 . D'un autre côté, D_2 est un $\gamma_{pr}(T')$ -ensemble d'après l'hypothèse d'induction. Si $T' = P_2$ alors T est une étoile subdivisée et le théorème est vrai, donc supposons que z possède au moins un autre voisin autre que y , disons x . Le Lemme 4.15 implique que y est le seul sommet pendant adjacent à z dans T' . Par ailleurs, puisque z est un sommet support dans T' , alors z n'est pas adjacent à un autre sommet support. D'où, $N(z) \cap D_2 = \{y\}$. Maintenant x doit avoir un voisin dans D_2 pour être dominé doublement. Puisque x n'est pas un sommet support alors x a un voisin dans $S(T') \cap D_2$, disons d . Il faut noter que chaque sommet de $N(z) - \{y\}$ est dominé par $D_2 - \{z\}$ (relatif à la domination couplée). Soit d' un sommet pendant adjacent à d , et soient M_1 et M_2 les couplages associés aux ensembles dominants couplés D_1 et D_2 , respectivement. Nécessairement on a, $uv \in M_1$ et $\{yz, dd'\} \subseteq M_2$. Dans ce cas, l'ensemble $((D_1 \cup D_2) - \{v, y, z, d'\}) \cup \{w, x\}$ avec le couplage $(M_1 \cup M_2 - \{uv, yz, dd'\}) \cup \{uw, dx\}$ est un dominant couplé de T de cardinal inférieur strictement à $\gamma_{pr}(T)$, contradiction.

Par conséquence, y n'est pas un sommet pendant dans T' .

Si $y \notin D_2$ alors $y \notin S(T') \cup L(T')$, d'où $y \notin S(T) \cup L(T)$, impliquant que $S(T) \cup L(T) = D_1 \cup D_2$. Maintenant $D_1 \cup D_2 \subseteq D$ pour tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble D ,

ce qui entraîne que $\gamma_{\times 2}(T) \geq |D_1 \cup D_2|$. Si $T_w = P_3$ alors $D_1 \cup D_2$ est un ensemble dominant couplé de T . D'où, $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T) \leq |D_1 \cup D_2|$, et $\gamma_{\times 2}(T) = |D_1 \cup D_2|$. Mais dans ce cas w n'est pas dominé d'une façon double par $D_1 \cup D_2$, et puisque $D_1 \cup D_2 \subseteq D$ pour tout $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble D , alors on a une contradiction. En conséquence, $T_w \neq P_3$ et $D_1 \cup D_2$ est un dominant double de T . Il s'ensuit que $D_1 \cup D_2 = S(T) \cup L(T)$ est l'unique $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

(a) équivalent à (c).

Supposons que $T \in \mathcal{T}$. Alors il existe une séquence d'arbres $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$) tels que $P_2 = T_1$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations de Type-1, Type-2, ou Type-3. D'après la façon de construction de T , l'ensemble des sommets supports et pendants, c'est à dire $V(T) - C(T)$, est un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et un $\gamma_{pr}(T)$ -ensemble.

Pour monter l'implication inverse, on procède par induction sur l'ordre n de T pour lequel $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$. Trivialement, si $T = P_2$ alors on a $T \in \mathcal{T}$. Puisque il n'y a pas d'arbres d'ordre 3 ou 4 ayant $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$, alors on peut supposer que $n = 5$. Le Lemme 4.15 implique que $T = P_5$. Mais dans ce cas, T peut être obtenu à partir de P_2 par l'opération de Type-1, et donc $T \in \mathcal{T}$.

Soit $n \geq 6$ et supposons que tout arbre T' d'ordre $n' < n$ satisfaisant $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$ appartient à $\mathcal{T}$. Soit T un arbre d'ordre n avec $\gamma_{pr}(T) = \gamma_{\times 2}(T)$.

Enracinons T en un sommet r , et soit v un sommet à distance maximum de r . Forcément, v est un sommet pendant. Soit u le sommet père de v dans l'arbre enraciné T . d'après le choix de v , tous les sommets fils de u sont des sommets pendants. Mais d'après le Lemme 4.15, u est adjacent à un seul sommet pendant impliquant que $\deg(u) = 2$. Soit w le sommet père de u . D'après la première équivalence montrée, w n'est pas un sommet support. D'où le choix de v implique que tout sommet fils de w doit être un sommet support. Si $w = r$ alors T est une étoile subdivisée et peut être obtenue à partir de P_2 en utilisant les opérations de Type-1 et Type-2. D'où, $T \in \mathcal{T}$.

Donc, supposons que $w \neq r$, et soit y le sommet père de w dans l'arbre enraciné T . Soit $T' = T - T_w$. Puisque w n'est pas un sommet support alors y n'est pas un sommet pendant dans T , d'où, T' est un arbre d'ordre au moins deux. D'un autre côté, si T' est d'ordre 2 alors T est une étoile subdivisée et donc on a le résultat, donc supposons que T' est d'ordre au moins 3. Si $\deg_T(w) \geq 3$ alors d'après le Lemme 4.16, $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$. Si $\deg_T(w) = 2$ alors on utilise la preuve de la première équivalence pour voir que $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$. Dans tous les cas, T' est un arbre d'ordre $2 \leq n' < n$ satisfaisant $\gamma_{pr}(T') = \gamma_{\times 2}(T')$. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$.

D'après la première équivalence montrée, T possède un $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble unique $D = S(T) \cup L(T)$. Soit $D' = D \cap V(T')$.

Si $y \in D$ alors y doit être un sommet support dans T et T' . D'où, D' est l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Dans ce cas, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-1 suivie par aucune ou plusieurs opérations de Type-2.

Si $y \notin D$ alors y n'est pas un sommet support ou pendant dans T . (Noter que $\deg_T(w) \geq 3$ puisque D domine doublement w et ni w ni y sont dans D .) Si y est un sommet pendant dans T' , alors y appartient à l'unique $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, disons S' . Mais $D' \neq S'$, puisque $y \notin D'$. Donc, D' n'est pas un dominant double de T' . Mais puisque $w \notin D$, il s'ensuit que D' doit être un dominant double de T' , d'où la contradiction. D'où, y n'est pas un sommet pendant dans T' , impliquant que $y \in C(T')$. Par conséquent, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération de Type-3 suivie par aucune ou plusieurs opérations de Type-2. ■

4.5 Le nombre de domination couplée d'un graphe et de son complémentaire

Nous allons nous intéresser dans cette partie au problème suivant: caractérisation des graphes G pour lesquels le nombre de domination couplée est égal au nombre de domination couplée de leurs graphes complémentaires. Ce problème a été déjà étudié par Brigham, Dutton, Harary and Haynes [12] pour le nombre de domination.

Etant donnée que la domination couplée est définie pour les graphes sans sommets isolés, alors il est clair que si $\gamma_{pr}(G) = \gamma_{pr}(\overline{G})$ alors $1 \leq \delta \leq \Delta \leq n - 2$.

Puisque on s'intéresse aux graphes sans sommets isolés tels que $\Delta \leq n - 2$ alors on a la remarque suivante.

Remarque 4.18 Si G est un graphe pour lequel $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G})$ alors $\gamma_p(G) \geq \gamma(G) \geq 2$ et $\gamma_p(\overline{G}) \geq \gamma(\overline{G}) \geq 2$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des graphes bipartis G tels que $\gamma_{pr}(G) = \gamma_{pr}(\overline{G})$.

Théorème 4.19 Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti sans sommets isolés. Alors $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G})$ si et seulement si $\gamma(G) = 2$ et $G \neq K_{|X|, |Y|}$.

Preuve. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti sans sommets isolés tel que $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G})$. Si G est biparti complet alors $|X| \geq 2$ et $|Y| \geq 2$, d'où $\gamma_p(G) = 2$ et $\gamma_p(\overline{G}) = 4$, contradiction. Donc $G \neq K_{|X|, |Y|}$. Maintenant, soient $x \in X$ et $y \in Y$ tel que $xy \notin E$. Alors $\{x, y\}$ est un ensemble dominant couplé de $\overline{G}$, ce qui implique que

$\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 2$. Dans ce cas, d'après la Remarque 4.18 $\gamma(G) = 2$, d'où il existe deux sommets u et v dans X et Y respectivement tels que $N(u) = Y$ et $N(v) = X$.

La condition suffisante est simple à établir. ■

Les deux corollaires suivants sont une conséquence directe du Théorème précédent.

Corollaire 4.20 *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_p(T) = \gamma_p(\overline{T})$ si et seulement si T est une étoile double.*

Corollaire 4.21 *Une chaîne P_n est tel que $\gamma_p(P_n) = \gamma_p(\overline{P}_n)$ si et seulement si $n = 4$.*

La remarque et le théorème suivants sont donnés dans [53].

Remarque 4.22 *Si G est un graphe de diamètre au moins 3 alors $\gamma_p(\overline{G}) = 2$.*

Théorème 4.23 *Pour tout graphe G , $\gamma_p(\overline{G}) \geq 4$ si et seulement si $\text{diam}(G) = 2$.*

Pour les cycles C_n on a la proposition suivante.

Proposition 4.24 *Un cycle C_n est tel que $\gamma_p(C_n) = \gamma_p(\overline{C}_n)$ si et seulement si $n = 5$.*

Preuve. Soit C_n un cycle tel que $\gamma_p(C_n) = \gamma_p(\overline{C}_n)$. D'après le Théorème 4.19 les cycles pairs sont exclus. D'où, $n = 2k + 1 \geq 5$. Donc $\gamma_p(C_n) \geq 4$ et par suite $\gamma_p(\overline{C}_n) \geq 4$. D'après Théorème 4.23, $\text{diam}(C_n) = 2$. Par conséquent, $n = 5$. ■

Pour caractériser les graphes G tels que $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 2$, nous utiliserons le résultat suivant dû à Hedetniemi et Laskar (Voir [46]).

Théorème 4.25 *Pour tout graphe connexe G , $\gamma(G) \geq \frac{1+\text{diam}(G)}{3}$.*

Théorème 4.26 *Soient G et $\overline{G}$ deux graphes connexes. Alors, $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 2$ si et seulement si G et $\overline{G}$ sont de diamètre compris entre 3 et 5.*

Preuve. Soient G et $\overline{G}$ deux graphes connexes avec $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 2$. D'après la remarque 4.18, $\gamma(G) = 2$ et $\gamma(\overline{G}) = 2$, et d'après le Théorème 4.25, $2 \leq \text{diam}(G) \leq 5$. Similairement on a, $2 \leq \text{diam}(\overline{G}) \leq 5$. Maintenant d'après le Théorème 4.23, $\text{diam}(G) \neq 2$ et $\text{diam}(\overline{G}) \neq 2$.

En utilisant la Remarque 4.22, on établit la condition suffisante. ■

Il faut noter d'après le Théorème 4.26 et la Remarque 4.18, si G est un graphe tel que $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 2$ alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$. D'abord, l'implication inverse est fausse et peut être vue en considérant le graphe $G = C_4$. Dans ce cas, $\overline{G} = \overline{C_4}$ où $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$ mais $\gamma_p(G) = 2$ et $\gamma_p(\overline{G}) = 4$.

Aussi, par l'exemple suivant, on va voir que si G est un graphe tel que $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = k \geq 4$, ceci n'entraîne pas forcément que $\gamma(G) = \gamma(\overline{G})$. Pour le graphe G de la Figure 14 on a $\gamma_p(G) = \gamma_p(\overline{G}) = 4$ mais $\gamma(G) = 3$ et $\gamma(\overline{G}) = 2$.

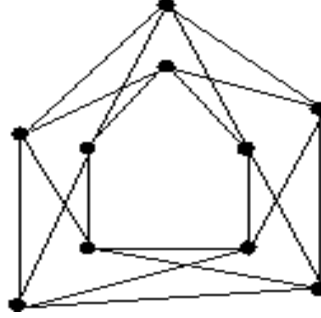


Figure 14. Graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = \gamma_{pr}(\overline{G}) = 4$ et $\gamma(G) = 3$, $\gamma(\overline{G}) = 2$.

CONCLUSION

Au cours de cette thèse, divers problèmes d'aspect théoriques liés à la domination ont été traités. Les paramètres de domination comme d'ailleurs beaucoup d'autres invariants de graphes sont extrêmement difficile à déterminer d'une façon exacte, que ce soit par des algorithmes polynomiaux ou bien par des formules directes en fonction des données du graphe. Face à ce problème "qui ne connaît pas de fin encore", on a abordé les axes de recherches suivants relatifs à la théorie de la domination:

- Trouver des bornes en fonction de la taille du graphe ou d'autres d'invariants simple à obtenir.
- Chercher si certains de ces paramètres sont comparables.
- Trouver des relations ou bien des inégalités liant deux ou plusieurs paramètres de domination.
- Etudier les différentes propriétés des ensembles liés à la domination (minimalité, existence, unicité). Sont ils disjoints ?.

Un problème supplémentaire commun pour les trois premières questions posés ci-dessus, est de caractériser les graphes ou bien établir des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'avoir l'égalité.

Les résultats du premier chapitre sont inscrits dans le cadre de la première et de la troisième question. En effet, on a établi une borne simple offrant une amélioration très nette de celle déjà connue pour les paramètres de domination inférieurs. Par la suite, on a caractérisé les arbres vérifiant l'égalité dans cette borne pour les deux nombres de domination et domination stable, aussi une caractérisation descriptive des graphes réguliers vérifiant l'égalité pour le nombre de domination a été donné. Le problème reste ouvert pour un graphe quelconque. Concernant la troisième question, on a établi des bornes supérieures pour la somme et le produit des paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique d'un graphe avec des caractérisations

dans certains cas. Ces bornes qui sont conséquence de la nouvelle borne qu'on a établi améliorent celles déjà existants. Enfin le dernier résultat du premier chapitre est une nouvelle borne supérieure de type Nordhaus-Gaddum pour le produit des nombres de domination stable d'un graphe et de son complémentaire.

L'introduction récente de la domination double et couplée dans les graphes par Haynes et Harary, Haynes et Slater respectivement et l'absence de résultats majeurs sur ces deux types m'ont motivé à les étudier. Elles ont constitué de ce fait les deux tiers de cette thèse. Nous avons initié l'étude de la domination double dans les arbres et la domination double exacte dans les graphes. Les résultats variés obtenus sur ces deux types de domination s'étalent sur les quatre questions posées plus haut. Parmi les résultats obtenus on cite :

- Etablissement des bornes sur les nombres de domination double et couplé.
- Etablissement des conditions nécessaires et suffisantes pour la minimalité (au sens de l'inclusion) des ensembles dominants doubles et couplés.
- Inégalités sur les nombres de domination double et couplé avec d'autres invariants.
- Dans le cas des arbres, des bornes supérieures et inférieures sur le nombre de domination double sont établies où des caractérisations des arbres permettant l'égalité sont données.
- Une comparaison entre les nombres de domination double et couplé dans le cas des arbres et les graphes sans griffes. Dans ces deux classes de graphes il est montré que le nombre de domination couplé est égal à au plus le nombre de domination double.
- Caractérisations par description et construction des arbres pour lesquels l'égalité entre ces deux nombres est atteinte.
- Caractérisation par construction des arbres possédant un dominant couplé minimum unique.
- L'existence des ensembles dominants doubles exacts est un problème NP-complet, et s'ils existent ils ont tous la même taille.
- Caractérisation par construction des arbres possédant un ensemble dominant double exact, qui est d'ailleurs unique.
- Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des ensembles dominants doubles exacts dans les graphes 3-réguliers connexes.

Cette contribution a ouvert encore plus la voie pour moi et pour d'autres chercheurs vu l'intéressement qui s'affiche maintenant pour ces deux types de domination. Voici une liste de problèmes qui se situent dans le prolongement de cette thèse :

- Investir le côté algorithmique pour la détermination des nombres de domination double et couplé pour certaines classes de graphes.
- Caractériser les graphes ou bien des classes de graphes pour lesquels la nouvelle borne établie au chapitre 2 est atteinte pour les trois paramètres de domination inférieurs.
- Caractériser les graphes (les arbres au moins) ayant un dominant double minimum unique.
- Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sommet d'un graphe soit dans un dominant (double, couplé) minimum.
- Caractériser les graphes (les arbres au moins) pour lesquels tout sommet appartient à au moins un dominant double (couplé) minimum.
- Etudier la domination double et couplé dans les produits (cartésien, croisé) de graphes.
- Etudier la domination double et couplé dans la classe des graphes sans griffes.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. R. B. Allan, R. C. Laskar, and S. T. Hedetniemi, A note on total domination. *Discrete Math.* 49 (1984) 7-13.
2. D. Banerjee and D. Ferrero, On paired domination in planar graphs. *Combinatorica* 2003.
3. D. W. Bange, A. E. Barkauskas, and P. J. Slater, A constructive characterization of trees with two disjoint minimum dominating sets. *Congr. Numer.* 21(1978) 101–112.
4. D. W. Bange, A. E. Barkauskas, and P. J. Slater, Efficient dominating sets in graphs, In R. D. Ringeisen and F.S. Roberts, editors, *Applications of Discrete Math.* SIAM, Philadelphia, PA (1988) 189-199.
5. C. Berge, Theory of graphs and its applications. Methuen, London, (1985,1962)
6. C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam, 1973*).
7. M. Blidia, M. Chellali, Nouvelle borne supérieure pour les paramètres de domination. Rencontre des Mathématiciens Algériens RMA2000, Alger.
8. M. Blidia, M. Chellali et T. Haynes, Characterizations of trees with equal paired and double domination numbers. Soumis à *Discrete mathematics*. (2003)
9. M. Blidia, M. Chellali et F. Maffray, Extremal graphs for a new upper bound on domination parameters in graphs. Soumis à *Discrete Mathematics*. (2003)
10. M. Blidia, M. Chellali, T. Haynes et M. Henning, Independent and double domination in trees. Accepté à *Utilitas Math.*. (2003)
11. K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. *SIAM J. Comput.* 11(1982) 191-199.
12. R.C. Brigham, R.D. Dutton, F. Harary and T.W. Haynes, On graphs having equal domination and codomination numbers. *Utilitas Math.* 50 (1996) 53-64.
13. R.L. Brooks, On coloring the nodes of a network. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 37 (1941), 194-197.
14. Y. Caro and Y. Roditty, Improved bounds for the product of the domination and chromatic numbers of a graph, *Ars Combin.* 56 (2000), 189-191.
15. G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*: Third Edition, Chapman & Hall, London, 1996.

16. M. Chellali, Relations entre les paramètres de domination inférieurs et le nombre chromatique d'un graphe. Journées des Mathématiques Appliquées JMA 2000, Blida.
17. M. Chellali et T.W. Haynes, On paired and double domination in graphs. Accepté à *Utilitas Math.*
18. M. Chellali et T.W. Haynes, Trees with unique minimum paired dominating sets. *Ars Combinatoria*, 73 (2004), 3-12.
19. M. Chellali, A. Khelladi et F. Maffray, Exact double domination in graphs. Accepté à *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.
20. M. Chellali et L. Volkmann, Relations between the lower domination parameters and the chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics* 274 (2004) 1-8.
21. E.J. Cockayne, O. Favaron, H. Li and G. MacGillivray, The product of the independent domination numbers of a graph and its complement. *Discrete Math.* 90 (1991), 313-317.
22. E.J. Cockayne, O. Favaron, C. Mynhardt and J. Puech, A characterization of (γ, i) -trees. *Journal of Graph Theory* 34 (4) (2000) 277-292.
23. E.J. Cockayne R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks* 10 (1980) 211-219.
24. E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. *Networks*, 7 (1977) 247-261.
25. E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi and D.J. Miller. Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull.* 21(1978), 461-468.
26. G.S. Domke, J.E. Dunbar and L.R. Markus, Gallai-type theorems and domination parameters. *Discrete Math* 167/168 (1997), 237-248.
27. C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs. Petrograde (1862)
28. J. Edmonds, Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.* 17 (1965), 449-467.
29. S. Erfanga, D. Chuangyinb and K. Liying, A note on NordhausGaddum inequalities for domination. A paraître dans *Disc. App. Math.*
30. M. Farber, Domination, independent domination and duality in strongly chordal graphs. *Discrete Appl. Math.* 7 (1984) 115-130.
31. O. Favaron, A bound on the independent domination number of a tree. *Internat. J. Graph Theory*, 1 (1992) 19– 27.
32. O. Favaron and C.M. Mynhardt, On equality in an upper bound for domination parameters of graphs. *J. Graph Theory* 24(1997), 221-231.
33. M. Fischermann, Block graphs with unique minimum dominating sets. *Disc. Math.* 240 (2001) 247-251.
34. M. Fischermann et L. Volkmann, Unique minimum domination in trees. *Australian J. of Combinatorics* 25 (2002) 117-124.
35. J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. kinch and J. Roberts, On graphs having domina-

- tion number half their order. *Period. Math. Hungar* 16(1985),287-293.
36. S. Fitzpatrick, Well paired dominated graphs. *19 th British Combinatorial Conference, Bangor 2003*.
 37. S. Fitzpatrick and B.L. Hartnell, Paired domination. *Disc. Math. Graph Theory*, 18 (1998), 63 - 72.
 38. G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards: A brief survey, dans *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 1995, pp. 507-528.
 39. T. Gallai, Über extreme Punkt- und Kantenmengen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 2 (1959), 133-138.
 40. M.R. Garey, and D.S. Johnson, *Computer and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, 1979.
 41. D. Gernert, Inequalities between the domination number and the chromatic number of a graph. *Discrete Math.* 76 (1989), 151-153.
 42. G. Gunther, B. Hartnell, L.R. Markus and D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets. *Congr. Numer.* 101 (1994) 55-63.
 43. F. Harary and T. W. Haynes, Double domination in graphs. *Ars Combin.* 55 (2000) 201-213.
 44. F. Harary and T. W. Haynes, Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs. *Discrete Math.* 155 (1996) 99-105.
 45. F. Harary and T. W. Haynes, The k-tuple domatic number of a graph. *Math. Slovaca* 48 (1998), No. 2, 161-166.
 46. T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Decker, Inc. New York, 1998.
 47. T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in graphs: Advanced topics*. Marcel Decker, Inc. New York, 1998.
 48. T. W. Haynes and M. Henning, Trees with two disjoint minimum independent dominating sets. Manuscrit.
 49. T. W. Haynes and M. Henning, Trees with equal domination and tree-free domination numbers. *Discrete Mathematics* 242 (2002) 93-102.
 50. T. W. Haynes and M.A. Henning, trees with unique minimum total dominating sets. A paraître dans *Discuss. Math.-Graph Theory*.
 51. T. W. Haynes, M. Henning and P. J. Slater, Strong equality of domination parameters in trees. *Discrete Mathematics* 260 (2003) 77-87.
 52. T. W. Haynes, M. Henning and P. J. Slater, Strong equality of upper domination and independence in trees. *Utilitas Math.* 59 (2001) 111-124.
 53. T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired domination in graphs. *Networks* 32 (1998) 199-206.

54. T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired domination and the paired domatic number. *Congressus Numerantium* 109 (1995) 65-72.
55. S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics* 86 (1990) 3-9.
56. S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters. *Discrete Mathematics* 86 (1990) 257-277.
57. M. Henning, Graphs with large total domination number. *J. Graph Theory* 35(1) (2000) 21-45.
58. G. Hopkins and W. Staton, Graphs with unique maximum independent sets. *Disc. Math.* 57 (1985) 245-251.
59. F. Jaeger and C. Payan, Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple. *C. R. Acad. Sci. Paris, A*, 274 (1974) 728-730.
60. L. Kang and M. Sohn, Paired domination in inflated graphs. Manuscrit 2003.
61. R. Laskar and K. Peters, Domination and irredundance in graphs. *Technical Report* 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
62. R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* Vol. 5, N°3, september 1984.
63. C-S Liao and G.J. Chang, Algorithmic aspect of k -tuple domination in graphs. *Taiwanese J. Math.* Vol 6, N°3(2002) 415-420.
64. C-S Liao and G.J. Chang, k -tuple domination in graphs. *Information Processing Letters* 87 (2003) 45-50.
65. E.A. Nordhauss et J.W. Gaddum, On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly*, 63 (1956) 175-177.
66. O. Ore, Theory of graphs. *Amer. Soc. Colloq. Pub* 38, Providence, R.I.(1962).
67. C. Payan and N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, *J. Graph Theory* 6(1982), 23-32.
68. M. Plummer, Some covering concepts in graphs. *J. Combin. Theory* 8 (1970), 91-98.
69. K.E. Proffitt, T.W. Haynes and P. Slater, Paired domination in grid graphs. *Congressus Numerantium* 150 (2001), pp. 161-172.
70. H. Qiao, L. Kang, M. Cardei et D-Z. Du, Paired domination of trees. Soumis.
71. G. Ravindra, Well covered graphs. *J. Combin. Inform. System. Sci* 2(1977), 20-21.
72. D.S. Studer, T.W. Haynes and L.M. Lawson, Induced-paired domination in graphs. *Ars Combinatoria* 57 (2000), 111-128.
73. J. Topp and L. Volkmann, Some upper bounds for the product of the domination number and the chromatic number of a graph. *Discrete Math.* 118 (1993), 289-292.

74. S. Xu, Relations between parameters of a graph. *Discrete Math* 89(1991), 65-88.