

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène
Faculté de mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT d'ÉTAT
en Mathématiques
Spécialité: Recherche Opérationnelle

Par: SAOULA Youcef

Thème

Étude des propriétés structurales, algorithmiques et polyédrales
de quelques problèmes d'optimisation combinatoire

Soutenue le: 17 Décembre 2008, devant le jury composée de:

KHELLADI Abdelkader	Professeur	USTHB	Président
ABBAS Moncef	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
AÏDER Meziane	Professeur	USTHB	Examineur
BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur	USTHB	Examineur
BLIDIA Mostefa	Professeur	USDB	Examineur
CHELLALI Mostepha	M. de Conf.	USDB	Examineur
AL-KHNNAIFES Khaled	Professeur	Univ. de Damas	Invité

Remerciements

Je voudrais exprimer à Monsieur Moncef ABBAS, Professeur à l'Université de Technologie Houari Boumediene (USTHB), mes vifs remerciements et ma reconnaissance de sa disponibilité et d'avoir dirigé ce travail.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Abdelkader KHELLADI, Professeur à l'USTHB, en présidant le jury de cette thèse.

Je voudrais tout particulièrement remercier mon ami, Monsieur Meziane AÏDER, Professeur à l'USTHB, dont la sollicitude et les encouragements m'ont grandement aidé dans l'accomplissement de ce travail, et dont la participation à ce jury m'honore.

Je tiens également à remercier vivement Monsieur Abdelhafid BERRACHEDI, Professeur à l'USTHB, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Je voudrais aussi présenter à Messieurs, Mostefa BLIDIA Professeur à USDB (Blida) et Mustapha CHELLALI Maître de Conférences à USDB, mes remerciements d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je désire remercier Monsieur Khaled ALKHNAIFES, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Damas, d'avoir accepté de venir de loin et de faire partie du jury de cette thèse.

Je saisis aussi cette opportunité pour exprimer mes remerciements et toute ma gratitude à tous ceux dont le soutien m'a été précieux durant la préparation de cette thèse, notamment:

À tous les collègues de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba.

À tous les membres du laboratoire LAID3 de l'USTHB.

À Monsieur Abdallah ZEMIRLINE, Maître de Conférences à l'institut d'Informatique de l'Université de Brest (France), avec qui j'ai fait mes premiers pas dans la recherche.

À Frédéric MAFFRAY, Directeur de Recherche, C.N.R.S (France), de m'avoir accueilli plusieurs fois au sein de son laboratoire.



À mes parents

À mes enfants: Belkiss, Soumia, Djamel-Eddine et Salah-Eddine

À mon épouse

À mes frères et soeurs

À Fateh et Souhila

Table des matières

0	Introduction générale	4
0.1	Optimisation Combinatoire	4
0.2	Problèmes d'optimisation combinatoire	5
0.3	Complexité des algorithmes	6
0.4	Travail effectué	9
I	Algorithmes pour la détection de noyaux dans les graphes	12
1	Classes de graphes admettant un noyau	13
1.1	Introduction et notation	14
1.1.1	Terminologie et définitions de base	14
1.2	Les graphes parfaits	17
1.3	Problème du noyau dans les graphes	18
1.4	Graphes admettant un noyau	20
1.5	Sous-classes de graphes de comparabilité	23
2	Algorithme NGC	28
2.1	Introduction et notation	29
2.2	Description des étapes de l'Algorithme NGC	31
2.2.1	Justification	31

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
2.2.2 Exactitude de l'algorithme	32
2.2.3 Finitude de l'algorithme	33
2.2.4 Complexité de l'algorithme	33
3 Algorithmes NGP et NGSP4	36
3.1 Clique et ensemble stable spéciaux	37
3.2 Description des étapes de l'Algorithme NGP	39
3.2.1 Justification et complexité de l'Algorithme NGP	39
3.3 Description des étapes de l'Algorithme NGSP4	41
3.3.1 Justification et complexité	42
3.4 Conclusion	43
II Étude des graphes sans griffes et 3-colorables	44
4 Graphes sans griffes et coloration par liste	45
4.1 Les graphes sans griffes	46
4.2 Coloration par liste	47
4.3 Problème de Dinitz et Conjecture de Vizing	49
4.3.1 Classes de graphes vérifiant la conjecture de Vizing	51
5 Graphes sans griffes et 3-colorables	53
5.1 Voisinage dans les graphes de la classe $\mathcal{G}$	54
5.1.1 Propriétés générales	54
5.1.2 Les stripes	56
5.2 Structure du voisinage d'un trou	59
5.2.1 Voisinage d'une chaîne sur un trou	59

5.2.2	Longueur des chaînes dans le voisinage des trous	62
5.2.3	Les graphes extrémaux	62
5.2.4	Résultat principal	65
5.2.5	Cas particuliers	66
5.3	Étude d'une sous-classe de $\mathcal{G}$	69
5.3.1	Extension d'un graphe	69
5.3.2	Blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$	70
5.4	Coloration par liste des blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$	92
5.5	Conclusion	94
 Annexes		 95
 Bibliographie		 120

Chapitre 0

Introduction générale

Dans cette thèse deux problèmes combinatoires seront étudiés : Un problème d'optimisation combinatoire et l'autre a trait à l'aspect structurelle des graphes.

Pour le premier, il s'agit d'élaborer des algorithmes polynomiaux de recherche de noyau dans des classes de graphes.

Dans le deuxième, l'étude porte sur la caractérisation d'une classe de graphes par des blocs puis le traitement de la coloration par liste de ces blocs.

0.1 Optimisation Combinatoire

Sous l'expression "optimisation combinatoire" s'identifient un grand nombre de problèmes qui se ressemblent dans la finalité et diffèrent des données. Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini, mais souvent élevé, de candidats. La difficulté de résolution d'un tel problème réside dans le fait que la solution doit être cherchée dans un ensemble de cardinal très grand. En effet, la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire expriment la situation suivante :

Étant donné un ensemble fini E muni d'une application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque élément e de E associe un nombre réel $f(e)$, et une collection $\mathcal{C}$ contenue dans $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ; il s'agit de trouver un élément $C \in \mathcal{C}$ tel que $f(C) = \sum \{f(e) : e \in C\}$ soit maximum ou minimum (optimum). Même lorsque E est de taille relativement modeste,

le nombre d'éléments de $\mathcal{C}$ à explorer peut atteindre un seuil qui rendra impossible (en terme de temps) l'énumération de tous les éléments de $\mathcal{C}$ et en extraire un élément C tel que $f(C)$ soit optimum. Si on veut apporter une solution au problème posé dans un temps raisonnable, la procédure qui se base sur l'énumération de tous les éléments de $\mathcal{C}$ est donc à éviter.

0.2 Problèmes d'optimisation combinatoire

1. Problème de l'arbre de poids minimum :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ muni d'une application poids $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$, le problème de l'arbre de poids minimum consiste à trouver $A \subseteq E$ tel que le graphe (V, A) soit un arbre (un graphe connexe sans cycle) et tel que $p(A) = \sum \{p(e) : e \in A\}$ soit minimum.

2. Problème du stable de poids maximum :

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ muni d'une application poids $w : V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque sommet v de V associe son poids. Trouver un ensemble stable de poids maximum dans G revient à trouver $S \subseteq V$, tel que les sommets de S soient deux à deux non adjacents (un stable), et tel que $w(S) = \sum \{w(v) : v \in S\}$ soit maximum.

3. Problème de noyau :

Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$. Il s'agit de trouver un ensemble stable $S \subseteq V$, tel que tout $v \in V \setminus S$ possède un successeur dans S .

4. Problème de coloration par liste :

Soit $G = (V, E)$ un graphe et deux fonctions f et $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs. Etant donné pour chaque sommet $v \in V$ un ensemble quelconque, de couleurs, A_v avec $|A_v| = f(v)$, il s'agit de trouver un sous-ensemble $B_v \subseteq A_v$ avec $|B_v| = g(v)$ tel que, pour toute arête $uv \in E$, on ait $B_u \cap B_v = \emptyset$.

Ainsi, l'optimisation combinatoire conduit à poser le problème de l'efficacité pratique des méthodes mis en œuvre pour résoudre un problème donné.

0.3 Complexité des algorithmes

Puisqu'en optimisation combinatoire il faut pouvoir distinguer les algorithmes selon leurs performances, il est donc nécessaire de savoir mesurer la performance de toute méthode élaborée en vue de résoudre un problème d'optimisation combinatoire. La notion d'algorithme efficace ou polynomial a été introduite pour la première fois par Jack Edmonds [26], en 1965, dans l'étude des couplages, il a permis de définir la classe P des problèmes dits "facile" ou polynomiaux. Après une première étude initiée par J. Edmonds [24, 25] sur la classe des problèmes dits "NP", c'est Cook [17], puis Karp [40] qui ont défini la classe des problèmes dits NP-Complets ou "difficiles".

Un "algorithme" de résolution d'un problème Π donné est une procédure, décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème Π en une chaîne de caractères représentant les résultats. Une manière de mesurer la performance d'un algorithme est d'établir une relation entre la taille de l'exemple traité, exprimé en termes du nombre n de caractères nécessaires pour coder les données de l'exemple, et le temps d'exécution, exprimé en terme du nombre $f(n)$ d'opérations élémentaires. Les opérations élémentaires à comptabiliser sont principalement les quatre opérations arithmétiques, l'affectation et la comparaison. Le nombre $f(n)$ est la complexité. Quand au codage des données, il est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre entier positif n est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(n + 1)$.

Un algorithme est dit "polynomial" si le nombre $f(n)$ d'opérations élémentaires, nécessaire pour résoudre un exemple dans le pire des cas, est borné par un polynôme en n ; c'est à dire si $f(n) \leq c n^k$, où c et k sont des constantes. On dira alors que l'algorithme est de complexité $O(n^k)$. La complexité algorithmique classe les problèmes combinatoires en sous-classes (voir Garey et Johnson [31]).

En vue de présenter brièvement les sous-classes de problèmes, adoptons comme définitions retenues par Sakarovitch dans [48] (voir aussi Blidia [15]).

La classe P : Un problème est dit appartenir à "la classe P" s'il existe un algorithme polynomial qui le résout.

À titre d'exemple, le problème de l'arbre de poids minimum appartient à la classe P.

Un algorithme *non déterministe* est un algorithme qui comporte des instructions de choix, si le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynomial ; par contre, si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

La classe NP : Un problème est dit appartenir à la "classe NP" (Non deterministic Polynomial) s'il peut être résolu en un temps polynomial par un algorithme non déterministe (c'est à dire, on peut vérifier en un temps polynomial, qu'une solution proposée ou devinée permet de d'affirmer la réponse "oui").

À titre d'exemple, le problème du stable de poids maximum est dans la classe NP, pour lequel on ne connaît pas d'algorithme polynomial. Nous avons $P \subseteq NP$. Cependant, $P \neq NP$ reste encore une conjecture.

Transformation polynomiale : Soient P_1 et P_2 deux problèmes de décision ; $D(P_1)$ (resp. $D(P_2)$) désignant l'ensemble des données du problème P_1 (resp. de P_2). On dit que P_2 se transforme polynomialement à P_1 s'il existe une application $f : D(P_2) \rightarrow D(P_1)$ telle que :

- (a) Pour tout $d \in D(P_2)$, le temps de calcul de $f(d)$ est borné par un polynôme exprimé en fonction de la taille de d .
- (b) d est une donnée à réponse positive pour P_2 si et seulement si $f(d)$ est une donnée à réponse positive pour P_1 .

On notera alors $P_2 \propto P_1$, on dit aussi que P_2 est réductible à P_1 , autrement dit P_1 est plus général que P_2 et si on savait résoudre polynomialement P_1 de façon exacte ou approchée, on saura résoudre polynomialement P_2 , on dit que P_2 n'est pas plus difficile que P_1 .

La classe **NP-Difficile** : Un problème P est dit NP-Difficile si pour tout $Q \in \text{NP}$:
 $Q \propto P$.

La classe **NP-Complet** : Un problème P est dit NP-Complet s'il appartient à la classe NP-Difficile et à la classe NP.

Les problèmes NP-Complets sont les problèmes les plus difficiles de NP et si l'un est facile, tout problème dans NP serait facile et en particulier les autres problèmes NP-Complets.

En montrant que le problème dit de "satisfaisabilité" est NP-complet, Cook [17] a donné un premier représentant de la classe NP-complet. Une longue liste de problèmes NP-complet est maintenant connue (voir Garey and Johnson [31]). Le problème du stable de poids maximum et même des restrictions des problèmes du noyau et de la coloration par liste sont NP-complet.

0.4 Travail effectué

Dans cette thèse, nous avons traité deux problèmes connus pour être difficile dans la théorie des graphes, l'un est un problème d'optimisation combinatoire, l'autre est un problème de caractérisation de classes de graphes.

1. Un problème connu pour être difficile (NP-complet) est celui de la recherche d'un noyau dans un graphe ; à cette difficulté s'ajoute celle de l'existence même d'un noyau. Il est donc intéressant d'élaborer des algorithmes polynomiaux permettant de détecter un noyau dans certaines classes de graphes pour lesquels le problème d'existence est résolu.

Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, une orientation de G consiste à orienter les arêtes de G pour obtenir ainsi un graphe orienté $D = (V, A)$.

Une orientation D de G est dite normale (resp. M-orientation) si toute clique (resp. triangle) dans D admet un puits (resp. admet au moins deux arcs symétriques).

L'objet de la première partie est de résoudre le problème de la recherche d'un noyau dans un graphe orienté. Le chapitre 1 sera consacré aux classes des graphes admettant un noyau ; la description des étapes d'un algorithme polynomial, déterminant un noyau dans les graphes : De comparabilité munis d'une M-orientation, au chapitre 2 ; aux graphes de permutation ou graphes sans P_4 , au chapitre 3.

2. L'objet de la deuxième partie abordé dans cette thèse est la caractérisation par des blocs d'une partie de la classe des graphes sans griffes. Parmi les motivations du traitement des graphes sans griffes est le problème de la coloration par liste des sommets d'un graphe, c'est un problème combinatoire plus compliqué que le problème de coloration classique. Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$. Une coloration par liste de G consiste à trouver une coloration des sommets de G telle que chaque sommet est astreint à prendre l'une des couleurs permises figurant sur sa liste. Nous nous intéressons à la classe $\mathcal{G}$ des graphes sans griffes et 3-colorables non parfaits et ensuite aux graphes G de $\mathcal{G}_m$ ($\mathcal{G}_m$ est une sous classe de $\mathcal{G}$) tels que la longueur de ses trous est au plus m .

Au chapitre 4, nous donnerons un rappel sur les graphes sans griffes, et citerons quelques classes de graphes sans griffes connus 3-liste-colorables.

Au chapitre 5, nous donnerons une caractérisation du voisinage d'un trou dans tout graphe de $\mathcal{G}$, puis nous traiterons les blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$ de $\mathcal{G}$; pour illustrer le nombre très élevé des blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$, des blocs des graphes de $\mathcal{G}_7$ seront déterminés ; comme conséquence, une description complète par les blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$ sera donnée ; et enfin nous prouverons que tous les blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$ sont 3-liste-colorables.

Guide de lecture

À chaque partie, est proposée une introduction élargie dans son premier chapitre. Au début de chaque chapitre, une brève introduction est insérée décrivant son contenu. Les résultats sont numérotés suivant leur section. Les figures sont numérotées suivant leur chapitre. Chaque référence est indiquée par un numéro entre crochets. La bibliographie, se trouvant à la fin de la thèse, comprend une liste des références classées par ordre alphabétique des auteurs. La fin de chaque démonstration est indiquée par le symbole ■.

Mots clés

Bloc, chaîne, coloration, comparabilité, cycle, graphe, griffe, liste, noyau, orientation, stripe, trou, voisinage.

Première partie

Algorithmes pour la détection de noyaux dans les graphes

Chapitre 1

Classes de graphes admettant un noyau

Ce chapitre est une introduction à la terminologie et aux définitions de base relative à la théorie des graphes ; la majeure partie de ces définitions est commune avec les chapitres suivants. En générale, les termes employés sont conformes à la terminologie utilisés dans le livre de Berge [7]. Ce chapitre est aussi une introduction au concept de noyau dans les graphes orientés.

1.1 Introduction et notation

1.1.1 Terminologie et définitions de base

Un *graphe* G orienté (resp. non orienté) est noté $G = (V, E)$ où V est son ensemble de sommets et E est son ensemble d'arcs (resp. d'arêtes).

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Un arc de G du type (v, v) est appelé une *boucle*.

Pour un arc $e = (u, v)$, le sommet u est appelé son *extrémité initiale* et le sommet v est son *extrémité terminale*.

S'il existe au moins deux arcs ayant la même extrémité initiale u et la même extrémité terminale v , l'arc (u, v) est dit *multiple*.

Un graphe est dit *simple* s'il n'a pas de boucle et n'a pas d'arc multiple.

Un sommet v est dit *successeur* (resp. *prédécesseur*) du sommet u s'il existe un arc (u, v) (resp. (v, u)). Le nombre des successeurs et des prédécesseurs d'un sommet u est le *degré* de u , dans le graphe G , est noté $d_G(u)$; s'il n'y a pas de confusion avec d'autres graphes, il sera noté $d(u)$.

Un arc (u, v) est dit *symétrique* si : $(u, v) \in E$ si et seulement si $(v, u) \in E$. Si tous les arcs du graphe G sont symétriques on dira que G est *non orienté*; dans ce cas, un arc (u, v) sera confondu avec l'arc (v, u) et on utilisera le terme arête au lieu de "arc" dans ce cas (u, v) sera noté uv .

Tous les graphes qui nous intéressent sont simples et finis. Une grande partie des questions qui seront traitées ne concerne que des graphes non orientés, pour cette raison, on utilisera le terme graphe pour désigner un graphe non orienté, lorsque l'orientation est exigée par la nature du problème, la mention "orienté" sera attribuée au graphe.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et fini; les définitions et notations suivantes seront adoptées.

Deux sommets u et v sont *adjacents* si uv est une arête de G .

On dit qu'un sommet u (resp. v) est *voisin*, dans G , de v (resp. u) si l'arête uv existe dans G . Le *voisinage* d'un sommet u , noté $N_G(u)$, est l'ensemble des voisins de u . Le degré d'un sommet u dans le graphe G , est donc la cardinalité de $N_G(u)$.

Le *degré maximum* du graphe G est noté $\Delta(G)$ et est $\max \{d_G(v) : v \in V\}$.

Un *graphe complet* est un graphe dans lequel pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets, uv est une arête. Un graphe complet ayant n sommets est noté K_n .

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Le *complémentaire* de G , noté $\overline{G}$, est le graphe (V', E') tel que :

$$V' = V \text{ et } uv \in E' \text{ si et seulement si } uv \notin E.$$

Un graphe $H = (V', E')$ est un *sous-graphe* de G si :

$$V' \subseteq V, \text{ et } uv \in E' \text{ si et seulement si } uv \in E \text{ et } u, v \in V'.$$

On dira aussi que l'ensemble des sommets V' *engendre* (ou *induit*) H . Le sous-graphe de G engendré par $V \setminus V'$ est aussi désigné par $G \setminus H$ (le sous-graphe de G obtenu par la suppression de tous les sommets de H).

Un graphe $H = (V', E')$ est un *sous-graphe partiel* de G si $V' \subseteq V$ et E' ne contient pas toutes les arêtes du sous graphe engendré par V' .

Une *clique* K du graphe G est un sous-graphe complet de G . Une clique de trois sommets est appelée un *triangle*. La taille d'une clique contenue dans G ayant le nombre maximum de sommets est notée $\omega(G)$.

Un *ensemble stable* du graphe G est un sous-ensemble de sommets de G engendrant un sous-graphe sans arêtes.

Une *chaîne* ou *chaîne élémentaire* P de G , de longueur k , est le graphe décrit par une suite $v_0 v_1 \dots v_{k-1}$ de sommets de G où, pour tout $i = 0, 1, \dots, k-2$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G et $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$. Les sommets v_0 et v_{k-1} sont appelés les *extrémités* de P et les autres sommets sont appelés les *sommets intérieurs* de P . Et on notera alors $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1}$.

Un *cycle* C de G , est le graphe décrit par une séquence $v_0v_1 \dots v_k$ où, pour tout $i = 0, 1, \dots, k-1$, v_iv_{i+1} est une arête de G , $v_0 = v_k$ et $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$ ($i, j \neq 0, k$). Le cycle C sera noté $C = v_0v_1 \dots v_{k-1}v_0$.

La longueur d'une chaîne ou d'un cycle est le nombre de ses sommets.

Une *corde* dans une chaîne (élémentaire) $v_0v_1 \dots v_{k-1}$ ou dans un cycle $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_0$ est une arête v_iv_j avec $j \neq i \pm 1$, (les indices sont comptés modulo k).

Une chaîne sans corde, de longueur $k \geq 1$, sera notée par P_k . Ainsi, un sommet est P_1 et une arête est P_2 . La chaîne sans corde P_4 est le graphe de la figure 1.1 ci-dessous.



Figure 1.1 : La chaîne sans corde P_4

Le graphe G est *biparti* si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux ensembles stables, $V = A \cup B$. Si ab est une arête de G pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on dira que G est *biparti complet*; ainsi, si $|A| = n$ et $|B| = m$ le graphe G sera noté $K_{m,n}$.

Le graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets distincts, u et v , de G il existe une chaîne reliant u et v dans G . Une *composante connexe* d'un graphe non connexe est un sous-graphe connexe maximal (relativement à l'inclusion de sous-ensembles de sommets).

Un ensemble d'*articulation* A du graphe G est un sous-ensemble de V tel que le sous-graphe engendré par $V \setminus A$ est non connexe.

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ seront dit isomorphes s'il existe une bijection $f : V \rightarrow V'$ telle que pour tout u et v de V , $uv \in E$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E'$.

Si G ne contient pas de sous-graphe qui soit isomorphe à un graphe donné H , nous dirons que G est sans H .

Étant donné un entier positif k , une *k-coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que, pour toute arête uv , on a $c(u) \neq c(v)$. On dira que

G est k -colorable s'il admet une k -coloration. Le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration est appelé le *nombre chromatique* de G , noté $\chi(G)$.

La coloration des arêtes d'un graphe se définit de la même manière que celle relative aux sommets. Le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer toutes les arêtes d'un graphe G telle que deux arêtes incidentes reçoivent deux couleurs différentes, est l'*indice chromatique* de G , noté $\chi'(G)$.

1.2 Les graphes parfaits

La classe des graphes parfaits est une importante classe de graphes, par le fait que les problèmes d'optimisation dans les graphes qui sont en général difficiles (NP-Complets) à résoudre, deviennent souvent faciles (polynomiaux) (Grötschel, Lovász and Schrijver [35]). Comme les sommets d'une clique doivent avoir des couleurs différentes, toute coloration d'un graphe G doit utiliser au moins $\omega(G)$ couleurs, on a alors $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Il faut remarquer aussi que cette inégalité peut être stricte, le cycle C_{2k+1} (impair) en est un exemple.

Un graphe G est dit parfait si pour tout sous-graphe H de G , le nombre chromatique de H est égal à la taille maximale d'une clique de H (i.e. $\chi(H) = \omega(H)$).

Inspiré par une conjecture de Shannon [53] sur les codages optimaux et la capacité d'un canal de communication, Berge formula la conjecture suivante :

Conjecture forte des graphes parfaits (Berge [6]) :

Un graphe G est parfait si et seulement si G ne contient ni trou impair ni le complémentaire d'un trou impair ayant au moins cinq sommets (un trou est un cycle sans corde).

Depuis 1961, d'énormes travaux ont été menés pour résoudre cette conjecture. Il fallait attendre le début des années 2000 pour avoir la réponse ; en exploitant les résultats antérieurs, Seymour, Chudnovsky, Robertson et Thomas [18] arrivèrent enfin à l'affirmer

(résultat obtenu en 2002, publié en 2006) ; elle est devenue "le Théorème fort des graphes parfaits".

Les graphes auxquels nous nous intéressons, dans la première partie sont parfaits, ceux de la deuxième partie ne sont pas nécessairement parfaits.

1.3 Problème du noyau dans les graphes

L'étude du problème de noyaux dans les graphes orientés est d'une grande importance ; le problème lui même est à caractère combinatoire comme beaucoup d'autres dans la théorie des graphes et en plus son étude fournit dans certains cas des réponses (solutions) à beaucoup de problèmes relevant de la décision multicritère, dans la logique (voir Berge [9]) ou de la théorie des jeux (jeux de Nim, voir Berge [8] et Blidia [15]).

Un jeu de Nim se formule de la façon suivante : Étant donné un graphe orienté fini G dont les sommets sont les positions du jeu et étant donné un sommet x_0 appelé position initiale, les deux joueurs A et B jouent à tour de rôle en choisissant un sommet, le premier joueur A choisit un sommet x_1 parmi les successeurs du sommet x_0 , puis B choisit un sommet x_2 parmi les successeurs de x_1 , et ainsi de suite. Si un joueur choisit un sommet sans successeur, il a gagné et son adversaire qui ne peut plus jouer a perdu. On peut supposer que le graphe est sans circuit, ou bien on peut supposer, pour que le jeu finisse, qu'un sommet ne peut être utilisé qu'à la limite k fois sinon on déclare la nullité.

Définition(du noyau) :

Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$. Un *noyau* de G est un ensemble stable $S \subseteq V$ tel que tout sommet $v \in V \setminus S$ possède un successeur dans S .

Il est connu qu'il existe des graphes orientés qui n'ont pas de noyau, par exemple le circuit de longueur $2k + 1$ (impair) et ayant $2k + 1$ arcs.

Il est clair que, dans le jeu de Nim, si le graphe G admet un noyau, le joueur qui choisit un sommet dans le noyau est assuré de ne pas perdre, car en vertu de l'absorption tous

les sommets sans successeurs sont dans le noyau et en vertu de la stabilité toutes les possibilités de l'adversaire sont hors du noyau, donc le noyau fournit l'ensemble des positions gagnantes.

Étant donné un graphe orienté G , il n'est pas facile de vérifier que G possède un noyau ou non ; même lorsque G admet un noyau, il est difficile d'élaborer un algorithme polynomial pour le trouver. Chvátal [19] (voir aussi Garey and Johnson [31], page 204) a démontré que le problème qui consiste à décider qu'un graphe orienté admet un noyau est NP-complet. En fait, le problème de 3-satisfaisabilité se transforme d'une manière polynomiale en problème de recherche de noyau dans un graphe. Il est donc intéressant d'essayer d'élaborer des algorithmes polynomiaux permettant de trouver un noyau dans les graphes pour lesquels le problème d'existence du noyau est résolu.

Un graphe non orienté est sans P_4 s'il ne contient pas de sous-graphe isomorphe à P_4 (le graphe de Figure 1.1). La propriété "sans P_4 " est héréditaire c'est à dire si un graphe est sans P_4 , tous ses sous-graphes sont sans P_4 .

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une *orientation* de G consiste à orienter les arêtes de G pour obtenir ainsi un graphe orienté D . L'orientation et le graphe D seront confondus. À une arête uv de G peut correspondre deux arcs (u, v) et (v, u) dans le graphe orienté D . Un *circuit* dans le graphe orienté $D = (V, A)$ est une séquence $v_1v_2, \dots, v_kv_1$ de sommets de G tel que $v_i \neq v_j$, pour $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, $(v_i, v_{i+1}) \in A$ pour tout i , $1 \leq i \leq k-1$ et $(v_k, v_1) \in A$; l'entier k est appelé la longueur du circuit. Un triangle est un circuit de longueur trois.

Soient G un graphe non orienté et D une orientation de G .

Une clique K dans D est un sous-graphe de D tel pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de K , (u, v) ou (v, u) est un arc de D .

Un sommet v de D est un *puits* (resp. une *source*) de D si pour toute arête uv de G , l'arc (u, v) (resp. (v, u)) existe dans D .

Un ensemble de sommets $U \subseteq V$ est dit *absorbant* dans D si pour tout $v \in V \setminus U$, il existe $u \in U$ tel que (v, u) est un arc de D ; si $(u, v) \in D$, nous dirons que u est absorbé par v .

Ainsi, un sous-graphe de D est un *noyau* de D s'il est à la fois stable et absorbant ; un noyau (s'il existe) d'une clique K est un puits.

L'orientation D de G est dite *normale* si toute clique (pas forcément maximale) dans D admet un puits.

L'orientation D de G est dite de Meyniel ou *M-orientation* si tout triangle dans D admet au moins deux arcs symétriques.

Il n'est pas difficile de vérifier qu'une M-orientation est une orientation normale mais la réciproque n'est pas vraie.

Le graphe G est dit *solvable* si pour toute orientation normale de G , D admet un noyau.

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit de *comparabilité* s'il existe un ordre $\leq$ sur V tel que deux sommets u et v de G sont adjacents si et seulement si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

1.4 Graphes admettant un noyau

Un graphe orienté est dit *noyau-parfait* si et seulement si tous ses sous-graphes admettent un noyau.

Il existe des graphes admettant un noyau mais qui ne sont pas noyau-parfaits, le graphe de la Figure 1.2 est un exemple.

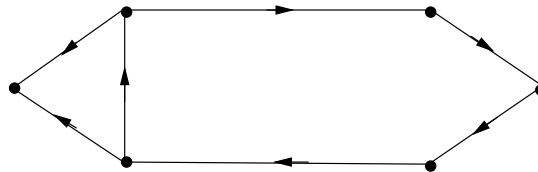


Figure 1.2 : Un graphe possédant un noyau mais non noyau-parfait

Un graphe *symétrique* est un graphe orienté dont tous ses arcs sont doublement orientés.

Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit transitif si :

$$(u, v) \in E \text{ et } (v, w) \in E \text{ implique } (u, w) \in E.$$

Ainsi, un graphe de comparabilité est un graphe non orienté muni d'une orientation transitive.

La propriété "noyau-parfait" dans un graphe G offre la possibilité de construire un noyau dans un sous-graphe de G puis l'étendre progressivement à un noyau de G .

Nous décrivons ci-après des sous-classes de graphes classiques possédant un noyau, et des propriétés structurelles du graphe garantissant l'existence d'un noyau, donc ce sont des conditions suffisantes pour qu'un noyau existe. Pour plus de détails sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à Berge [12] et à Blidia [15].

1. Graphe symétrique

Tout graphe symétrique est noyau-parfait.

Puisque tout graphe non orienté admet un ensemble stable ; comme tout stable maximal dans un graphe symétrique est un absorbant, la recherche d'un noyau dans un graphe symétrique revient donc à chercher un ensemble stable maximal.

2. Graphe transitif

Tout graphe transitif est noyau-parfait ; et tous les noyaux sont de même cardinalité (König, voir Berge et Duchet [12]).

3. Graphe sans circuits

Tout graphe sans circuits est noyau-parfait, et son noyau est unique (Von Neumann et Morgenstern [43]).

4. Graphe sans circuits impairs

Tout graphe sans circuits impairs est noyau-parfait (Richardson [47]).

5. Graphes ayant des arcs orientés d'une manière particulière

Soit G un graphe orienté.

5.1 *Si, dans G , tous les arcs de tout circuit impair sont symétriques, alors G est noyau-parfait* (Berge et Duchet [12]).

(C'est l'une des extensions de la propriété 4 ci-dessus).

La propriété suivante généralise 5.1.

5.2 *Si, dans G , tout circuit impair a au moins deux arcs symétriques, alors G est noyau-parfait* (C'est un résultat de P. Duchet, voir Blidia [13] pour une preuve très courte).

5.3 *Si, dans G , tout circuit impair $v_1v_2 \dots v_{2k+1}v_1$ a deux cordes de type (v_i, v_{i+2}) , (v_{i+1}, v_{i+3}) , alors G est noyau-parfait* (Duchet et Meyniel [23]).

5.4 *Si, dans G , tout circuit impair a deux cordes telles que leurs extrémités terminales sont consécutives, alors G est noyau-parfait* (Galeana et Neuman-Lara [29]).

6. Graphes fortement parfaits

Soit G un graphe simple non orienté, $\mathcal{C}$ la collection de toutes les cliques maximales de G . Un ensemble S de sommets de G est dit *stable transversal* si :

$$|S \cap K| = 1 \quad (K \in \mathcal{C})$$

Si tout sous-graphe de G admet un stable transversal, G est dit *fortement parfait*.

Il est clair que la propriété "fortement parfait" est héréditaire.

Un graphe G fortement parfait, entraîne plusieurs caractéristiques de G ; le graphe lui-même est parfait, une garantie de l'existence d'un noyau dans G et le stable transversal permet d'élaborer un algorithme pour trouver un tel noyau.

La classe des graphes fortement parfaits a été introduite par Berge et Duchet [11], c'est une classe qui contient plusieurs classes de graphes parfaits (voir Blidia [15]).

Théorème 4.1 (Berge et Duchet [11]) :

Soit G un graphe non orienté et sans P_4 . Dans tout sous-graphe H de G , toute clique maximale intersecte tous les ensembles stables maximaux de H . Par conséquent, G est fortement parfait.

En fait Berge et Duchet [11] utilisent un résultat dû à Seinsche [52].

Théorème 4.2 (Seinsche [52]) :

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $G = (V, E)$ est sans P_4 ;
- (ii) *Pour tout $U \subseteq V$, le sous-graphe de G engendré par U ou son complémentaire est non connexe.*

La classe des graphes fortement parfaits est beaucoup plus large que celle des graphes de comparabilité :

Théorème 4.3 (Berge et Duchet [11]) :

Tout graphe de comparabilité est fortement parfait.

Signalons que le complémentaire d'un graphe de comparabilité n'est pas nécessairement fortement parfait ; le trou C_6 est de comparabilité et $\overline{C_6}$ ne l'est pas.

1.5 Sous-classes de graphes de comparabilité

Puisque les graphes qui nous intéressent sont des graphes de comparabilité, il est utile de citer quelques sous-classes classiques des graphes de comparabilité.

Soit $G = (V, E)$ un graphe (non orienté) avec $|V| = n$.

5.a Graphe de permutation

Définition : Le graphe G est de *permutation* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Il existe une numérotation en $v_1, v_2, \dots, v_n$ de ses sommets,
- (ii) Il existe une permutation P des entiers $1, 2, \dots, n$ sous laquelle v_i et v_j sont adjacents, dans G , si et seulement si $(P(i) - P(j)) / (i - j) < 0$.

L'une des caractérisations connues des graphes de permutation est dû à Dushnik et Miller [22] (voir aussi Rotem et Urrutia dans [10], pages 70-71) :

Théorème 5.1 (Dushnik et Miller [22]) :

Soit G un graphe non orienté. G est de permutation si et seulement si G et $\overline{G}$ sont de comparabilité.

Ce qui signifie aussi que la classe des graphes de permutation est une sous-classes des graphes de comparabilité

5.b Graphe de permutation circulaire

Soit P une permutation sur les entiers $1, 2, \dots, n$. Un diagramme D_P d'une permutation circulaire consiste en :

- (i) Deux cercles différents $C1$ et $C2$ dans le même plan et de même centre,
- (ii) n points $1', \dots, n'$ sur $C1$, placés dans la sens des aiguilles de la montre,
- (iii) n points $P(1), \dots, P(n)$ sur $C2$, placés dans la sens des aiguilles de la montre,
- (iv) n chaînes $\overline{1}, \dots, \overline{n}$ respectivement de i' sur $C1$ à $P(i)$ sur $C2$ telles que deux chaînes distinctes se coupent, au plus, en un point.

Le graphe G est dit de *permutation circulaire* s'il existe une numérotation $1, 2, \dots, n$ des sommets de G et un diagramme de permutation tel que i et j sont adjacents si et seulement si les deux chaînes $\overline{i}$ et $\overline{j}$ se coupent.

Rotem et Urrutia dans ([10], pages 71-72) caractérisent les graphes de permutation circulaire et prouvent qu'ils sont des graphes de comparabilité. Signalons que les graphes de permutation sont des graphes de permutation circulaire.

5.c Graphe Arborescence-comparabilité

Le graphe G est d'*Arborescence-comparabilité* si il existe un ordre $<$ sur l'ensemble des sommets V tel que, pour tout $u \in V$, le sous-ensemble $\{v : v < u\}$ est totalement ordonné.

Théorème 5.2 (Wolk [57]) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit un graphe d'arborescence-comparabilité est que G ne contienne pas de sous-graphe isomorphe à C_4 ou à P_4 .

5.d Graphe à seuil

La définition de cette classe est dû à Chvátal et Hammer [20].

Un graphe $G = (V, E)$ est dit graphe à *seuil* si et seulement si il existe un nombre réel t (seuil) et des poids $w(v)$ associés aux différents sommets v de V tel que l'on a :

$$S \subseteq V \text{ est un ensemble stable de } G \text{ si et seulement si } \sum_{v \in S} w(v) \leq t.$$

Les mêmes auteurs caractérisent les graphes de cette classe par des sous-graphes interdits :

Théorème 5.3 (Chvátal et Hammer [20]) :

Le graphe G est un graphe à seuil si et seulement si G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à C_4 , $\overline{C_4}$ ou à P_4 .

Un graphe G ayant n sommets est un graphe à seuil si et seulement si il existe un hyperplan qui divise le n -espace de manière que l'un des demi-espaces contienne tous les vecteurs caractéristiques des ensembles stables de G et uniquement ceux-là. Donc le complémentaire d'un graphe à seuil est un graphe à seuil (car $\overline{P_4}$ est isomorphe à P_4). Aussi, un graphe à seuil est un graphe d'arborescence-comparabilité donc est un graphe de permutation.

5.e Graphe Scindé

Le graphe G est un graphe *scindé* si et seulement si il existe une partition $V = S \cup K$ de l'ensemble des sommets de G en un ensemble stable S et une clique K .

Théorème 5.4 (Foldes et Hammer [28]) :

Le graphe G est un graphe scindé si et seulement si G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à C_4 , $\overline{C_4}$ ou à C_5 .

5.f Graphe Scindé-comparabilité

Le graphe G est un graphe *scindé-comparabilité* s'il est scindé et de comparabilité.

Le graphe complémentaire d'un graphe de comparabilité est dit *Co-comparabilité*.

Il convient de signaler que les sous-classes de graphes décrites ci-dessus sont caractérisées par d'autres propriétés.

Le lecteur intéressé par les inclusions des graphes parfaits, trouvera un schéma détaillé établi par Abbas [1] (voir aussi Berge et Chvátal [10]) duquel nous avons tiré le schéma la Figure 1.3.

L'inclusion des classes, X dans Y , est indiquée par une flèche, $X \rightarrow Y$.

Le schéma de la Figure 1.3 résume les différentes inclusions de ces sous-classes de graphes, parmi lesquelles la classe des graphes de comparabilité est la plus large.

Vu que la classe des graphes fortement parfaits est très importante et ses graphes possèdent un ensemble stable particulier, il serait intéressant d'exploiter cette propriété pour élaborer des algorithmes polynomiaux qui permettent de déterminer un noyau dans ces graphes.

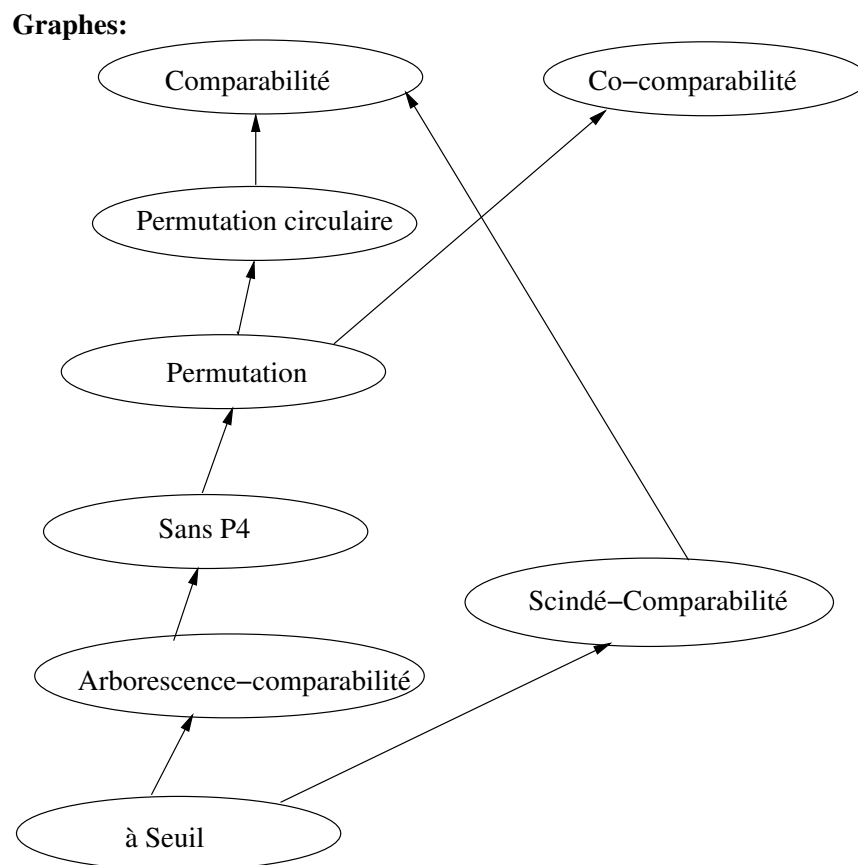


Figure 1.3 : Schema des inclusions des sous-classes de graphes de comparabilité.

Chapitre 2

Algorithme NGC

Algorithme pour la recherche de Noyaux dans les Graphes de Comparabilité

L'existence d'un noyau dans les graphes de comparabilité, muni d'une orientation (dite M-orientation), étant prouvée par Champetier [16], le but de ce chapitre est de décrire et justifier les étapes d'un algorithme polynomial déterminant un tel noyau.

2.1 Introduction et notation

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Une orientation $D = (V, A)$ de G est dite *transitive* si le graphe orienté D est transitif.

Un graphe de comparabilité est considéré comme un graphe non orienté muni d'une orientation transitive.

En s'appuyant sur un travail de Sands et al. [49] sur les chaînes mono-chromatiques, Champetier [16] montre l'existence d'un noyau dans le cas des graphes de comparabilité munis d'une M-orientation résumé par le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Champetier [16]) :

Soit G un graphe de comparabilité. Toute M-orientation de G admet un noyau.

Dans la démonstration du Théorème 1.1 est décrit, implicitement, un algorithme donnant un noyau. Dans ce qui suit nous précisons ses étapes et montrons que l'algorithme est polynomial. Pour se faire, on a besoin d'introduire quelques notations, dûes essentiellement à Sands et al. [49].

Soient $G = (V, E)$ un graphe non orienté, T une orientation transitive de G et D une M-orientation de G .

Affectons deux couleurs, r et b , aux arcs de la manière suivante :

r aux arcs de $D \cap T$, les arcs orientés dans le même sens dans D et dans T .

b aux arcs de $D \cap T^{-1}$, l'orientation T^{-1} est l'orientation inverse de T .

Étant donnés deux sommets u et v du graphe G , les notations suivantes seront adoptées :

$u \longrightarrow v$ (resp. $u \nrightarrow v$) si l'arc (u, v) existe dans D (resp. s'il n'existe pas),

$u \longrightarrow^c v$ (resp. $u \nrightarrow^c v$) signifie que la couleur de l'arc (u, v) est c (resp. il n'existe pas d'arc de couleur c de u vers v).

Si U est un ensemble de sommets de G , $U \longrightarrow v$ (resp. $v \longrightarrow U$) signifie qu'il existe $u \in U$ tel que $u \longrightarrow v$ (resp. $v \longrightarrow u$).

Soit $\mathbb{S}$ la collection de tous les sous-ensembles non vides S de $\mathbb{S}$ vérifiant :

- (c1) S est un ensemble stable,
- (c2) Pour tout sommet v de G , $S \xrightarrow{r} v \Rightarrow v \rightarrow S$.

Définissons, dans $\mathbb{S}$, une relation binaire $\leq$ comme suit :

Soient S et S' de $\mathbb{S}$,

$$S \leq S' \iff \forall s \in S \exists s' \in S' \text{ tels que } s = s' \text{ ou } s \xrightarrow{b} s' \text{ ou } s' \xrightarrow{r} s.$$

Il est facile de vérifier que la relation $\leq$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{S}$.

Il est clair que si $S \subseteq S'$ on a $S \leq S'$; Champetier a démontré dans [16] que pour toute M-orientation D du graphe de comparabilité G ayant T comme orientation transitive, tout élément maximal de $\mathbb{S}$ relativement à $\leq$ est un noyau de D . Le but de l'algorithme que nous présentons ci-dessous consiste à construire, progressivement, un élément maximal dans $(\mathbb{S}, \leq)$.

L'algorithme et les principaux résultats de ce chapitre ont été communiqué (voir Saoula [50]) puis publié (voir Abbas et Saoula [2]).

2.2 Description des étapes de l'Algorithme NGC

Algorithme NGC "Noyau dans les Graphes de Comparabilité "

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté simple et fini,
 T une orientation transitive de G et D une M-orientation de G ;

Sortie : Un noyau N de D ;

Étape (0) : Coloration des arcs de D :

Pour tout arc (u, v) de D ,
 si $(u, v) \in T$, alors $u \rightarrow^r v$,
 sinon $u \rightarrow^b v$,
 déterminer $S = \{x : x \text{ est un puits de } T\}$,

Étape (1) : Déterminer $A = \{x : x \nrightarrow S\}$,

Étape (2) : Si $A = \emptyset$, alors poser $N = S$, stop.

Étape (3) : Si $A \neq \emptyset$, choisir p un puits de la restriction de T à A , déterminer

$S' := \{s \in S : s \nrightarrow^b p\}$, poser $S := S' \cup \{p\}$ et aller en (1).

2.2.1 Justification

Pour que l'algorithme soit acceptable, il doit répondre à certains critères à savoir l'exactitude c'est à dire terminer par un noyau, le nombre d'opérations nécessaire à chaque exécution doit être polynomial. Examinons ces critères.

À l'Étape (1), l'Algorithme NGC calcule l'ensemble A après avoir déterminé l'ensemble S à la fin de l'Étape (0) ou de l'Étape (3). Lorsque l'ensemble A n'est pas vide, A représente les sommets de D non absorbés par S . À la fin de l'itération i l'algorithme aura calculé l'ensemble S_i et $A_i = \{x : x \nrightarrow S_i\}$; A_i est l'ensemble de sommets de D non absorbés par S_i ; l'ensemble S_0 est calculé à l'Étape (0); tant que $A_i \neq \emptyset$ on peut construire $S_{i+1} = S'_i \cup \{p_i\}$ où p_i est un puits de la restriction de T à A_i et $S'_i = \{s \in S_i : s \nrightarrow^b p_i\}$. Notons que $S_{i+1} \setminus S_i = \{p_i\}$ et pour $s \in S_i \setminus S'_i$ on a $s \rightarrow^b p_i$, (s, p_i) est un arc de D avec $p_i \nrightarrow s$.

2.2.2 Exactitude de l'algorithme

Lemme 2.1 : *Soient S_i et S_{i+1} les ensembles de sommets calculés par l'Algorithme NGC, aux Étapes (0) ou (3), à la fin de l'itération i et $i + 1$ respectivement.*
Si $S_i \in \mathbb{S}$ et S_i n'est pas absorbant de D , alors $S_{i+1} \in \mathbb{S}$ et $S_i < S_{i+1}$.
(Autrement dit, si l'ensemble courant S_i n'est pas absorbant de D , alors S_i n'est pas maximal dans $(\mathbb{S}, \leq)$).

Preuve : Pour $i = 0$, $S_i \in \mathbb{S}$. En effet, l'orientation T étant transitive, donc T est sans circuits ; par conséquent S_0 est un ensemble stable de G , d'où la condition (c1) de la définition de $\mathbb{S}$ est satisfaite ; par définition de S_0 , pour tout arc (u, v) de D ayant $u \in S_0$ est tel que $u \rightarrow^b v$, donc la condition (c2) de $\mathbb{S}$ est vérifiée d'où $S_0 \in \mathbb{S}$. L'ensemble S_i étant non absorbant de D , A_i est non vide ; soit p un puits de la restriction de T à A_i et montrons que $S_{i+1} \in \mathbb{S}$. Puisque S'_i est une partie du stable S_i et $p \nrightarrow S_i$ on a $p \nrightarrow S'_i$; comme $S_i \rightarrow^r p$ et $S'_i \nrightarrow^b p$, $S'_i \nrightarrow p$; donc S_{i+1} est un stable de G . Maintenant supposons qu'il existe un sommet y de G tel que $S_{i+1} \rightarrow^r y$ et $y \nrightarrow S_{i+1}$.

Le cas où $p \rightarrow^r y$ est impossible. En effet, si c'est le cas on a $y \notin A_i$; donc y est absorbé par S_i , donc il existe $s \in S_i$ tel que $y \rightarrow s$ ($(y, s) \in D$) ; puisque l'orientation T est transitive et $p \nrightarrow^r S_i$, $y \rightarrow^b s$; comme $y \nrightarrow^r S_{i+1}$, $s \notin S'_i$; puisque $y \nrightarrow p$, on a un triangle dans D engendré par $\{s, p, y\}$ avec deux arcs non symétriques (s, p) et (p, y) ce qui contredit l'hypothèse sur l'orientation D ; par conséquent $S'_i \rightarrow^r y$.

Soit maintenant $s' \in S'_i$ tel que $s' \rightarrow^r y$; puisque $s' \in S_i$ et $S_i \in \mathbb{S}$, $y \rightarrow S_i$; comme T est transitive et S_i est un ensemble stable, $y \rightarrow^b S_i$; soit $s \in S_i$ tel que $y \rightarrow^b s$; puisque $y \nrightarrow S_{i+1}$, $s \notin S'_i$ par suite $s \rightarrow^b p$ avec $p \nrightarrow s$; puisque T^{-1} est transitive on a $(y, p) \in T^{-1}$ (yp est une arête de G) ; puisque $y \nrightarrow S_{i+1}$ ($(y, p) \notin D$) on a $p \rightarrow^r y$ et donc on a un triangle dans D engendré par $\{s, p, y\}$ avec deux arcs non symétriques (s, p) et (p, y) ce qui contredit l'hypothèse sur l'orientation D .

En conclusion, $S_{i+1} \in \mathbb{S}$. D'autre part, par construction de S_{i+1} et la définition de p on évidemment $S_i \leq S_{i+1}$ avec $S_i \neq S_{i+1}$. Donc $S_i < S_{i+1}$. ■

La conclusion de ce lemme, signifie aussi, qu'à la fin de chaque itération l'algorithme fourni un ensemble stable de G .

2.2.3 Finitude de l'algorithme

Lemme 2.2 : *Le nombre d'itérations effectuées par l'Algorithme est fini ; l'Algorithme termine à l'Étape (2) par un noyau de D .*

Preuve : À chaque itération i l'algorithme construit un ensemble stable S_i de G (il commence par le stable $S_0 \in \mathbb{S}$) ; les ensembles construits, aux Étapes (0) ou (2), sont tels que pour toute itération i , $S_i \in \mathbb{S}$ et $S_i \leq S_{i+1}$ avec $S_i \neq S_{i+1}$ (Lemme 2.1). Puisque G est fini et l'ensemble $\mathbb{S}$ est ordonné par la relation $\leq$, au bout d'un nombre fini d'itérations l'algorithme aboutit à la construction d'un élément S_q de $\mathbb{S}$ et ne peut plus construire un autre élément S_{q+1} de $\mathbb{S}$; c'est à dire l'ensemble $A_q = \{x : x \not\rightarrow S_q\}$ permettant de construire l'ensemble S_{q+1} est vide, donc l'algorithme s'arrête à l'Étape (2) et l'ensemble courant S_q est tel que l'ensemble des sommets de D non absorbés par S_q est un noyau de D ; donc après un nombre fini d'itérations l'Algorithme NGC termine à l'Étape (2) avec un noyau de D . ■

De ce qui précède, on peut dire que l'algorithme termine avec un noyau D de G en un nombre fini d'itérations.

2.2.4 Complexité de l'algorithme

Nous allons montrer que l'Algorithme est polynomial. A cet effet, soient $S_0, S_1, \dots, S_m$ la séquence de tous les ensembles stables du graphe $G = (V, E)$ générés par l'algorithme, aux Étapes (0) ou (3), au cours des itérations $0, 1, \dots, m$.

Lemme 2.3 : *Pour tout sommet x de G et tout $i \in \{0, 1, \dots, m\}$,*

si $x \in S_i$ et il existe $j \geq i + 1$ tel que $x \notin S_j$, alors $x \notin S_k$ pour tout $k > j$.

Par conséquent, le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme NGC est au plus $|V|$.

Ceci signifie que si un sommet de G appartenant au stable S_i (construit au cours de l'itération i) est écarté, au cours d'une itération j ultérieure à i , ce sommet ne pourra être

dans aucun ensemble stable construit au cours des itérations suivantes. En d'autre terme, un sommet choisi puis écarté ne peut être choisi une deuxième fois.

Preuve : Supposons le contraire, c'est à dire il existe un sommet $x \in G$ vérifiant :

$$(*) \quad \text{Il existe } i, j \text{ et } k \text{ tels que } i < j < k \text{ avec } x \in S_i, x \notin S_j \text{ et } x \in S_k.$$

Montrons que cette supposition entraîne une contradiction.

Sans perte de généralité, choisissons parmi tous les sommets de G vérifiant la condition $(*)$ un sommet x tel que $k - i$ est minimum. En d'autre terme, il n'existe pas de sommet x' de G tel que :

$$x' \in S_{i'}, x' \notin S_{j'} \text{ et } x' \in S_{k'} \text{ avec } i \leq i' < j' < k' < k.$$

Ce qui signifie qu'au cours des itérations de i à k il n'y a qu'un seul sommet de G satisfaisant $(*)$; ceci est possible puisque les sommets concernés sont ceux sélectionnés à l'Étape (3); plusieurs sommets peuvent être écartés d'un stable S_t en même temps mais un seul sommet peut être choisi pour faire partie du nouveau stable S_{t+1} . Si le sommet x existe on pourra choisir x' au lieu de x . Cependant, si $k - i$ est minimum et x vérifiant $(*)$ n'existe pas, il n'existerait aucun sommet de G vérifiant $(*)$. Soient $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+q}$ les stables générés par l'algorithme et x un sommet vérifiant $(*)$ avec q minimum. Du critère du choix de x à l'Étape (3) et la condition $(*)$ on a nécessairement $q \geq 3$. Puisque $x \in S_i, x \notin S_{i+1}$ et $x \in S_{i+q}$, il existe $i_1, i < i_1 < i + q$, tel que $x_{i_1} \in S_{i_1}$ ($i_1 = i + 1$) vérifiant $x \rightarrow^b x_{i_1}$ et $x_{i_1} \nrightarrow x$; puisque $x \in S_{i+q}$ et $x \rightarrow x_{i_1}$ (xx_{i_1} est une arête de G), $x_{i_1} \notin S_{i+q}$; (donc x_{i_1} doit être écarté en une itération ultérieure à i_1 et antérieure à $i + q$), il existe $i_2, i_1 < i_2 < i + q$, tel que $x_{i_2} \in S_{i_2}$ et $x_{i_2} \notin S_{i_2+1}$ avec $x_{i_1} \rightarrow^b x_{i_2}$ et $x_{i_2} \nrightarrow x_{i_1}$; par transitivité de l'orientation T^{-1} on obtient $x \rightarrow^b x_{i_2}$, par conséquent $x_{i_2} \notin S_{i+q}$. En continuant par ce procédé, on construit une liste de sommets de G , $x = x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}$ avec $l \leq q$ et $S_{i_{l-1}} = S_{i+q-1}$, par minimalité de q , ces sommets sont deux à deux différents et tels que ($i_0 = i$), $x_{i_h} \in S_{i_h}, i_h < i_{h+1}, x_{i_h} \rightarrow^b x_{i_{h+1}}$ et $x_{i_{h+1}} \nrightarrow x_{i_h}$, et $x_{i_h} \rightarrow^b x_{i_{h'}}$ pour $0 \leq h < h' \leq l - 1$. Donc par transitivité de T^{-1} , $x \rightarrow^b x_{i_{l-1}}$; comme $x \in S_{i+q}$ et $x_{i_{l-1}} \notin S_{i+q}$ on a $x_{i_{l-1}} \rightarrow^b x = x_{i_l}$ avec $x_{i_l} \nrightarrow x_{i_{l-1}}$ ($i_{l-1} < i_l$). Donc on obtient un circuit $xx_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_l}x$ dans T^{-1} ce qui contredit l'hypothèse sur l'orientation T . ■

Comme corollaire à ce qui précède, nous obtenons :

Théorème 2.4 : *Soit $G = (V, E)$ un graphe de comparabilité et D une M -orientation de G . L'Algorithme NGC détermine un noyau de D en au plus $O(|V|^2 \cdot |E|)$ opérations.*

Preuve : La coloration des arcs de D décrite dans l'introduction, nécessite au plus $O(|E|)$ opérations. Vérifier si un sommet donné est un puits dans un sous-graphe $H = (U, F)$ de T nécessite au plus $|U|$ opérations; donc déterminer un puits de H peut se faire en au plus $|F|$ opérations et l'ensemble des puits de H en au plus $|U| \cdot |F|$ opérations. L'Étape (0) est exécutée une seule fois, le nombre d'opérations nécessaire pour cette Étape est au plus $O(|U| \cdot |F|)$. L'ensemble S étant calculé, déterminer l'ensemble A à l'Étape (1) nécessite au plus $|E|$ opérations. Le résultat du test si l'ensemble A est vide ou non peut être connu en même temps que sa détermination à l'Étape (1), donc si $A \neq \phi$, l'Étape (3) est exécutée; déterminer un puits de la restriction de T à A peut se faire en au plus $|V|$ opérations et le calcul de S' en au plus $|S|$ opérations. Donc le nombre d'opérations nécessaire à l'exécution de l'Étape (3) est au plus $O(|V|^2)$. Les Étapes (1), (2) et (3) sont exécutées consécutivement au plus $|V|$ fois (Lemme 2.3), donc l'Algorithme NGC est de complexité $O(|V|^2 \cdot |E|)$. ■

Chapitre 3

Algorithmes NGP et NGSP4

Algorithmes pour la recherche de Noyaux dans les Graphes de Permutation et de Noyaux dans les Graphes Sans P_4

Bien que les graphes de permutation sont des graphes de comparabilité, l'Algorithme NGC ne peut être utilisé pour déterminer un noyau dans les graphes de permutation munis d'une orientation normale (plus générale) car l'Algorithme NGC ne tient compte que des cliques de taille trois (une M-orientation est particulière). Dans ce chapitre, nous décrivons les étapes de deux algorithmes polynomiaux déterminant un noyau, l'un dans les graphes de permutation et l'autre dans les graphes sans P_4 .

Les deux algorithmes et les principaux résultats de ce chapitre ont été communiqué (voir Saoula [51]) puis publié (voir Abbas et Saoula [2]).

3.1 Clique et ensemble stable spéciaux

Soit $G = (V, E)$ un graphe de permutation.

Il est clair que relativement aux mêmes, numérotation $v_1, v_2, \dots, v_n$ et permutation P définissant G , le graphe complémentaire $\overline{G}$ de G est défini comme ceci :

Deux sommets distincts v_i et v_j sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement si

$$(P(i) - P(j)) / (i - j) > 0.$$

Au graphe $\overline{G}$, définissons une orientation T ; à toute arête $v_i v_j$ de $\overline{G}$:

$$(v_i, v_j) \text{ est un arc de } T \text{ si et seulement si } i < j.$$

Pour l'orientation T ainsi définie on a :

Lemme 1.1 : *L'orientation T est transitive.*

Preuve : Soient (v_i, v_j) et (v_j, v_k) deux arcs de T . Par définition de T , $i < j < k$; par définition de $\overline{G}$ on a $v_i v_j$ et $v_j v_k$ sont deux arêtes de $\overline{G}$, donc $P(i) < P(j) < P(k)$; donc $v_i v_k$ est une arête de $\overline{G}$; puisque $i < k$, (v_i, v_k) est un arc de T , par conséquent on a la transitivité de T . ■

En conclusion ; pour un graphe de permutation $G = (V, E)$, l'orientation $T = (V, E')$ est transitive de $\overline{G}$ avec $E' = \{(v_i, v_j) : v_i v_j \notin E \text{ et } i < j\}$.

Lemme 1.2 : *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et une orientation T de G .*

Si T est transitive, alors l'ensemble S des puits de T est un ensemble stable de G .

De plus, S intersecte toute clique maximale de G .

Preuve : La transitivité de T implique que T est sans circuit. L'ensemble S est non vide car sinon tout sommet de T est une extrémité initiale d'un arc et comme G est fini, T contiendrait un circuit ce qui contredit la transitivité de T . Par définition, S est ensemble stable de G . Soit K une clique maximale de G et montrons que S intersecte K .

En effet, l'ensemble des sommets de K engendre une clique de T ($u, v \in K$, $(u, v) \in T$ ou $(v, u) \in T$) donc K est un sous-graphe de T sans circuit, par conséquent K admet un puits p . Pour tout $u \in V \setminus K$, $(p, u) \notin T$ car sinon il existe $u \in V \setminus K$ tel que $(p, u) \in T$; par transitivité de T on a $(c, u) \in T$ pour tout $c \in K$; par suite $K \cup \{u\}$ est une clique de G qui contient strictement K ce qui contredit la maximalité de K dans G ; donc p est un puits de T , d'où $p \in S$. ■

Ainsi, nous obtenons :

Corollaire 1.3 : *Soit G un graphe de permutation. Tout sous-graphe H de G admet une clique qui intersecte tout stable maximal de H .*

Preuve : Puisque tous les sous-graphes de G sont des graphes de permutation, il suffit de démontrer la propriété pour G seulement. Par application du Lemme 1.1, $\overline{G}$ admet une orientation transitive T ; du Lemme 1.2, l'ensemble S des puits de T est un ensemble stable de $\overline{G}$ qui intersecte toute clique maximale de $\overline{G}$; le sous-graphe de G engendré par S est l'une des cliques recherchées. ■

Ce corollaire suggère une méthode pour déterminer une clique K qui intersecte tous les ensembles stables maximaux dans un graphe de permutation.

La méthode se résume en quelques Étapes : déterminer $\overline{G}$ et l'orientation transitive T comme définie au Lemme 1.1, l'ensemble des puits de T est l'ensemble des sommets de la clique K .

Pour justifier les étapes d'un algorithme permettant de détecter un noyau dans les graphes de permutation on a besoin de citer le résultat suivant :

Lemme 1.4 (Blidia et al. [14]) :

Si D est une orientation normale d'un graphe G , alors toute clique de D admet une source. Par conséquent, D^{-1} est aussi une orientation normale de G .

3.2 Description des étapes de l'Algorithme NGP

Algorithme NGP "Noyau dans les Graphes de Permutation "

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe de permutation non orienté,
 $v_1, v_2, \dots, v_n$ une numérotation des sommets de G ,
 P la permutation correspondante de G ,
 D une orientation normale de G .

Sortie : Un noyau N de D ;

Étape (1) : Construction de l'orientation transitive $T = (V, E')$ de $\overline{G}$ où

$$E' = \{(v_i, v_j) : v_i v_j \notin E \text{ et } i < j\}$$

Étape (2) : Pour $m = 1$ à n faire

Poser $K'_m := \{p \in V : p \text{ est un puits de } T\}$,

soit s_m la source de K'_m dans D ,

poser $T := T \setminus \{s_m\}$ et $D := D \setminus \{s_m\}$

fin-pour,

poser $N_n = \{s_n\}$;

Étape (3) : Pour $m = n$ à 2 faire

si $N_m \cap K'_{m-1} = \emptyset$, alors $N_{m-1} = N_m \cup \{s_{m-1}\}$ sinon $N_{m-1} = N_m$

fin-pour,

poser $N = N_1$ et stop.

Signalons qu'à travers la démonstration du principal résultat de Blidia et al. [14] est décrite une technique qui consiste à déterminer un noyau de D (une orientation normale) à partir d'un noyau de $D \setminus \{x\}$ où x est une source d'une clique qui intersecte tous les stables maximaux de D .

3.2.1 Justification et complexité de l'Algorithme NGP

Le Lemme 1.1 montre que l'orientation T construite à l'Étape (1) est transitive dans le graphe $\overline{G}$. Le Corollaire 1.3 montre que pour tout m le sous-graphe H_m de G engendré par

les sommets de K'_m est une clique de G ; comme l'orientation D est normale ; du Lemme 1.4, H_m admet une source s_m .

Cependant, $T \setminus \{s_m\}$ (resp. $D \setminus \{s_m\}$) est une orientation transitive (resp. normale) de $G \setminus \{s_m\}$.

À la fin de l'Étape (2), l'Algorithme aura calculé une suite $(D_m, K'_m, s_m)_{1 \leq m \leq n}$ où D_1 est une orientation normale de G , D_m est une orientation de G et K'_m est une clique de G qui intersecte tout stable maximal de D_m (Lemme 1.2) et ayant s_m comme source.

À l'Étape (3) : Au début, le graphe orienté D_n est réduit à un seul sommet $\{s_n\}$; donc $N_n = \{s_n\}$ est un noyau de D_n . Pour justifier le reste de cette étape on démontre le résultat suivant :

Lemme 2.1 : À l'Étape (3) de l'Algorithme NGP, pour tout $m = n, n-1, \dots, 2$ l'ensemble N_m est un noyau de D_m . Par conséquent, N_1 est un noyau de D .

Preuve : Soit m un entier, $2 \leq m \leq n$; les graphes orientés D_{m-1} et D_m construits à l'Étape (2) sont tels que D_m est un sous-graphe de D_{m-1} et $D_{m-1} \setminus D_m = \{s_{m-1}\}$ où s_{m-1} est une source de la clique K'_{m-1} de D_{m-1} (s_{m-1} existe, Lemme 1.4). Au départ, N_n est un noyau de D_n ; pour m on dispose d'un noyau N_m de D_m et on cherche à construire un noyau N_{m-1} de D_{m-1} . Si $K'_{m-1} \cap N_m \neq \emptyset$, soit s l'élément commun, (s_{m-1}, s) est un arc de D_{m-1} et donc N_m est ensemble absorbant de D_{m-1} ; puisque N_m est un ensemble stable de D_{m-1} , $N_{m-1} = N_m$ est un noyau de D_{m-1} . Si $K'_{m-1} \cap N_m = \emptyset$, puisque K'_{m-1} intersecte tout stable maximal de G_{m-1} , N_m est un stable de G_{m-1} ; du Lemme 1.2, le stable N_m n'est pas maximal dans G_{m-1} , donc N_{m-1} est contenu strictement dans un stable de G_{m-1} ; comme N_m est absorbant dans D_m , le seul stable de G_{m-1} pouvant contenir N_m est $N_m \cup \{s_{m-1}\}$, d'où $N_{m-1} = N_m \cup \{s_{m-1}\}$ est un noyau de D_{m-1} . De ce qui précède, à chaque boucle de l'Étape (3), N_m est un noyau de D_m . En particulier, N_1 est un noyau de $D_1 = D$. ■

Comme conséquence, nous obtenons :

Théorème 2.2 : *Soit $G = (V, E)$ un graphe de permutation et D une orientation normale de G . L'Algorithme NGP détermine un noyau de D en au plus $O(|V|^2 \cdot |E|)$ opérations.*

Preuve : Soit $G = (V, E)$ un graphe de permutation. La construction de l'orientation transitive T de $\overline{G}$ à l'Étape (1) nécessite au plus $|E|$ opérations.

À l'Étape (2), la recherche d'un puits relativement à T ou une source relativement à D peut se faire en au plus $|E|$ opérations ; déterminer l'ensemble K_m nécessite au plus $|V| \cdot |E|$ opérations. Donc l'Étape (2) se termine après au plus $|V|^2 \cdot |E|$ opérations.

À l'Étape (3), puisque $|N_m \cap K'_{m-1}| \leq 1$, pour déterminer si $N_m \cap K'_{m-1} = \emptyset$ ou non on effectue au plus $|E|$ opérations. Puisque chaque étape est exécutée une seule fois et les trois sont exécutées consécutivement, l'Algorithme NGP détecte un noyau de D en $O(|V|^2 \cdot |E|)$ opérations. ■

3.3 Description des étapes de l'Algorithme NGSP4

Il est connu que les graphes sans P_4 sont des graphes de permutation. Pnueli et al. [46] ont donné un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes de permutation.

La particularité des graphes sans P_4 offre la possibilité de modifier l'Algorithme NGP pour le rendre plus performant.

Algorithme NGSP4 "Noyau dans les Graphes sans P_4 "

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté et sans P_4 , $|V| = n$,
 D une orientation normale de G ,

Sortie : Un noyau N de D .

Étape (1) : Choisir une clique maximale K de G ,
déterminer une source s de K dans
 D ; poser $G_1 = G$, $D_1 = D$, $s_1 = s$, $K'_1 = K$;
Pour $m = 2$ à n faire
 $G_m = G_{m-1} \setminus \{s_{m-1}\}$, $D_m = D_{m-1} \setminus \{s_{m-1}\}$, choisir K'_m une clique
maximale de G_m , déterminer s_m la source de K'_m dans D_m ,
fin-pour ;
poser $N_n = \{s_n\}$,
Étape (2) : For $m = n$ à 2 faire
si $K'_{m-1} \cap N_m = \emptyset$ alors poser $N_{m-1} = N_m \cup \{s_{m-1}\}$
sinon poser $N_{m-1} = N_m$,
fin-pour ;
poser $N = N_1$, stop.

3.3.1 Justification et complexité

Puisque le rôle des Étapes (1) et (2) dans l'Algorithme NGP est de trouver une clique particulière dans le graphe G ; si G est sans P_4 , ces deux étapes peuvent être évitées par le choix d'une clique maximale quelconque de G (Théorème 4.1 du Chap. 1), l'algorithme est donc justifié.

Quant à sa complexité, examinons l'Étape (1) car c'est elle qui nécessite le plus d'opérations. Déterminer une clique maximale dans le graphe G revient à déterminer les voisins de chaque sommet dans G , donc examiner au plus toutes les arêtes de G , ce qui coûte au plus $|E|$ opérations. Comme le processus de recherche d'une clique maximale se répète au plus n fois, trouver une clique maximale dans G peut se faire en au plus $|V| \cdot |E|$. La complexité de l'Algorithme NGSP4 est donc $O(|V| \cdot |E|)$.

Ainsi, la performance de l'Algorithme NGSP4 est nettement meilleure que celle de l'Algorithme NGP.

3.4 Conclusion

D'une façon générale, trouver un noyau dans un graphe orienté est un problème NP-complet, il est intéressant de résoudre ce problème dans les graphes où leurs propriétés le permettraient comme ce fut le cas dans le travail réalisé, dans cette thèse, sur les graphes de comparabilité, de permutation et les graphes sans P_4 . Comme la classe des graphes de comparabilité est très large et une orientation normale n'est pas nécessairement une M-orientation, il serait intéressant d'élaborer un algorithme polynomial pour déterminer un noyau dans ses graphes munis d'une orientation normale (plus générale).

Deuxième partie

Étude des graphes sans griffes et 3-colorables

Chapitre 4

Graphes sans griffes et coloration par liste

Ce chapitre a pour but de faire apparaître l'importance des graphes sans griffes dans le traitement du problème de la coloration par liste à travers la recherche d'une réponse à la conjecture de Vising. Quelques récents résultats seront également cités.

4.1 Les graphes sans griffes

Tout graphe considéré dans la suite est supposé fini, non orienté et sans boucles.

Une *griffe* est le graphe biparti complet $K_{1,3}$ de la Figure 4.1.

Soit G un graphe. G est dit 2-connexe si tout ensemble d'articulation de G contient au moins deux sommets.

Un *bloc* de G est un sous-graphe de G qui est 2-connexe et maximal pour cette propriété.

Le graphe d'incidence des blocs et des points d'articulation de G est le graphe $G' = (V', E')$ avec V' est l'ensemble $\{b_1, \dots, b_m\}$ des blocs de G , et $b_i b_j \in E'$ ($i \neq j$) si et seulement si le sous-graphe de G engendré par les sommets de b_i et de b_j admet un point d'articulation.

Il est connu (voir Maffray [34]) que le graphe d'incidence des blocs et des points d'articulations d'un graphe est un arbre.

Une clique d'articulation de G est à la fois une clique et un ensemble d'articulation de G .

Un *trou* de longueur k , noté C_k , est un cycle sans corde avec $k \geq 5$.

Un graphe est dit de Berge s'il ne contient ni trou impair ni son complémentaire.

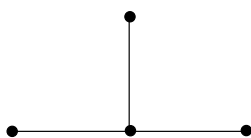


Figure 4.1 : La griffe, $K_{1,3}$

Il est facile de vérifier que tout line-graphe ne contient pas de griffe ; une autre classe de graphes ne contenant pas griffe est celle des graphes complémentaires des graphes sans triangles c'est à dire l'ensemble $\{\overline{H} : H \text{ est un graphe sans triangles}\}$. C'est ainsi que la classe des graphes sans griffes est très riche motivant par là son étude sous différents aspects, il convient de rappeler les principaux résultats :

1.1 Perfection :

Théorème 1.1 (Parthasarathy et Ravindra [44]) :

Tout graphe de Berge sans griffe est parfait.

1.2 Algorithmique :

Hsu et Nemhauser [38] (dans [10], pages 357-369) donnaient un algorithme polynomial pour déterminer une clique de poids maximum (les poids sur les sommets) et une $\chi(G)$ -coloration des sommets de tout graphe parfait sans griffe G .

1.3 Caractérisation :

1.3.1 Au moyen des cliques d'articulation, Chvátal et Sbihi [21] découvraient une décomposition des graphes de Berge sans griffes en deux catégories de graphes de base indécomposables, et donnaient ainsi un algorithme polynomial pour leur reconnaissance.

1.3.2 En exploitant la décomposition de [21] des graphes de Berge sans griffes, Maffray et Reed [42], obtenaient une complète description de la structure de ces graphes et apportaient, comme conséquence, une nouvelle démonstration à leur perfection prouvée initialement par Parthasarathy [44].

4.2 Coloration par liste

La coloration par liste est un autre aspect étudié, sur les graphes sans griffes.

On donne ici une variante de la définition générale du problème de coloration par liste des sommets d'un graphe introduite par Erdős, Rubin et Taylor [27]. Il y'a plusieurs versions de la définition de la coloration par liste, la plus générale est celle introduite au quatrième problème du Chapitre 0; nous donnons ici la définition la plus utilisée :

Étant donné une liste de couleurs "permises" $L(v)$ pour chaque sommet v . On dit que G est L -colorable s'il existe une coloration c des sommets de G telle que $c(v) \in L(v)$ pour tout $v \in V$.

Définition (de la coloration par liste) :

Étant donné un entier k , le graphe G est dit *k -liste-colorable* si G est L -colorable pour toute liste L ($L(v)$ est un ensemble d'entiers non nuls) telle que $|L(v)| = k$ pour tout $v \in V$.

La notion de coloration par liste permet de définir un paramètre analogue au nombre chromatique.

Le *nombre chromatique de liste*, noté $\chi_L(G)$, est le plus petit entier k tel que G est k -liste-colorable.

Certains auteurs utilisent, pour la liste coloration, le terme "choosability", c'est pourquoi est utilisé parfois le terme de "Choice number" de G noté $Ch(G)$ pour le nombre chromatique de liste.

Les notions relatives à la coloration par liste des arêtes d'un graphe G sont identiques à celles sur les sommets, et on dit alors que G est *L -arête-colorable*, et *k -liste-arête-colorable*.

Le paramètre associé est l'indice chromatique de liste, $\chi'_L(G)$.

Le *line-graphe* de $G = (V, E)$, noté $L(G)$, est le graphe (V', E') avec $V' = E$ et $ee' \in E'$ si et seulement si les arêtes e et e' ont une extrémité commune dans G .

Le problème de coloration par liste des arêtes d'un graphe G est équivalent au problème de coloration par liste des sommets du Line-graphe $L(G)$ et on a en particulier $\chi'_L(G) = \chi_L(L(G))$.

Il est clair que tout graphe $G = (V, E)$, k -liste-colorable est k -colorable ; il suffit de prendre la liste L suivante : $L(v) = \{1, 2, \dots, k\}$ pour tout $v \in V$.

Donc on a $\chi_L(G) \geq \chi(G)$. Il existe des graphes pour lesquels cette inégalité est stricte, par exemple le graphe biparti-complet $K_{3,3}$, de la Figure 4.2 :

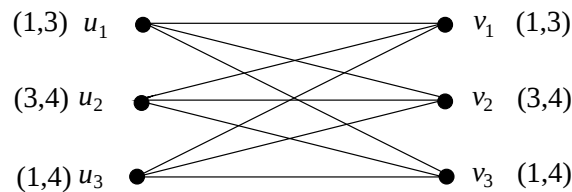


Figure 4.2 : Le graphe $K_{3,3}$ et les listes de couleurs de ses sommets.

A coté de chaque sommet v est indiquée sa liste $L(v)$.

Choisir la couleur 1 pour u_1 , les couleurs de v_1 et v_2 doivent être 3 et 4 respectivement, ce qui ne laisse à u_2 aucune couleur pour le colorer ; puisque toutes les couleurs jouent le même rôle, on a $\chi_L(K_{3,3}) \geq 3 > 2 = \chi(G)$.

4.3 Problème de Dinitz et Conjecture de Vizing

Le problème de Dinitz (voir [27]) se généralise en une conjecture dite "List Chromatic Conjecture" posée par Vizing [56] (voir aussi Chetwynd [36]).

Pour introduire le problème de Dinitz, nous sommes obligés d'introduire la notion de carré latin, le lecteur intéressé pourra trouver dans le livre de Van Lint et Wilson [55] un chapitre entier consacré aux carrés latin.

Définition (d'un carré latin) :

Un *carré latin d'ordre n* est un quadruplet $(R, C, S; L)$ où $R = C = \{1, 2, \dots, n\}$, $|S| = n$ et L est une application de $R \times C$ dans S telle que, pour tout $i \in R$ et $x \in S$, l'équation $L(i, j) = x$ admet une unique solution $j \in C$. Et pour tout $j \in C$, la même équation admet une unique solution $i \in R$. Les éléments de R sont appelés les lignes, les éléments de C , les colonnes, et ceux de S les symboles du carré latin.

Le problème de Dinitz est une généralisation du problème d'existence d'un carré latin d'ordre n .

Définition (d'un carré latin généralisé) :

Un *carré latin généralisé d'ordre n* est un quadruplet $(R, C, S; L)$ où S est un ensemble de listes de n symboles $S_{i,j}$ associée à chaque case $(i, j) \in R \times C$; L est une application qui, à un élément (i, j) de $R \times C$, associe un symbole appartenant à $S_{i,j}$ de telle sorte qu'un même symbole n'apparaît pas deux fois sur une ligne ou une colonne.

Ce problème d'existence peut se formuler en terme de coloration par liste des arêtes du graphe biparti-complet $K_{n,n}$. En effet, soit $(R, C, S_{(i,j)})$ un tableau $n \times n$; on construit le graphe $G = K_{n,n}$ en prenant R comme premier stable et C comme second; il existe une bijection entre les arêtes de G et les cases du tableau. On considère la liste sur les arêtes de G définie par $L((i, j)) = S_{(i,j)}$ pour $i \in R$ et $j \in C$.

Le problème de Dinitz se traduit alors par : $K_{n,n}$ est-il n -liste-arête-colorable?

En 1976, Vizing [56] avait posait une conjecture généralisant le problème de Dinitz :

Conjecture de Vizing [56] ("List Chromatic Conjecture") :

$$\text{Tout graphe } G \text{ satisfait } \chi'_L(G) = \chi'(G).$$

Puisque pour tout graphe on a $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ et $\chi_L(L(G)) = \chi'_L(G)$, la conjecture peut être reformuler de la façon suivante :

$$\text{Tout Line-graphe } G \text{ satisfait } \chi_L(G) = \chi(G).$$

Étant donné un graphe G , un entier k et une liste L qui vérifie $|L(v)| \leq k$ pour tout sommet v . Le problème de décision qui consiste à savoir si G est L -colorable est NP-complet pour $k \geq 3$ (voir Gravier [32], page 31). Même pour la coloration classique, décider si un graphe sans griffe est 3-colorable, est encore NP-complet (puisqu'il est aussi NP-complet pour les line-graphes, voir Holyer [37]).

Une manière pour résoudre la conjecture de Vizing consiste à évaluer le nombre chromatique par liste (χ' ou χ des arêtes ou des sommets) du graphe, ou à vérifier la conjecture pour des classes de graphes. Nous citerons quelques résultats connus :

Théorème 3.1 (Erdős et al. [27]) :

Soient $p \geq q$ deux entiers et $K_{p,q}$ le biparti complet, alors on a :

1. $\chi_L(K_{p,q}) \leq q + 1$.
2. $\chi_L(K_{p,q}) \leq \chi_L(K_{p-1,q-1}) + 1$.

Théorème 3.2 (Juan et al. [39]) :

Tout graphe de degré maximum $\Delta \leq 3$ est 4-arête-liste-colorable.

Le théorème suivant montre que la notion de noyau est voisine de celle de la coloration par liste.

Théorème 3.3 (Gravier [32]) :

Si $G = (V, E)$ est muni d'une orientation noyau-parfait, alors G est $(d^+ + 1)$ -liste-colorable (où $d^+(v)$ est le nombre d'arcs sortant de v).

Comme corollaire à ce théorème :

Théorème 3.4 (Gravier [32]) :

Soit $K_{p,q}$ le biparti complet avec $p \geq q$, alors on a : $\chi_L(K_{p,q}) \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$ (où $\lceil a \rceil$ est la partie entière supérieure de a).

Puisque les line-graphes ne contiennent pas de $K_{1,3}$, il est intéressant d'étudier la structure des classes de graphes sans $K_{1,3}$ vérifiant la conjecture de Vizing.

4.3.1 Classes de graphes vérifiant la conjecture de Vizing

Il existe des classes de graphes (aussi bien parfaits que non parfaits) qui vérifient la conjecture. On cite quelques unes.

Théorème 3.5 (Gravier et Maffray [33]) :

Si un graphe G est le complémentaire d'un graphe sans triangle, alors $\chi_L(G) = \chi(G)$.

Théorème 3.6 (Gravier et Maffray [34]) :

Tout graphe G parfait sans $K_{1,3}$ avec $\chi(G) \leq 3$ satisfait $\chi_L(G) = \chi(G)$.

Galvin [30] a montré la conjecture de Dinitz, en utilisant le fait qu'un line-graphe d'un multigraphe biparti est parfait (un multigraphe est un graphe où il est permis la présence d'arêtes multiples), et un résultat de Maffray [41].

Théorème 3.7 (Galvin [30]) :

Si G est un multigraphe biparti, alors $\chi'_L(G) = \chi'(G)$.

(En d'autre terme $\chi_L(L(G)) = \chi(L(G))$).

La maille d'un graphe est la taille du plus petit cycle sans corde du graphe. Un graphe est planaire s'il admet une représentation dans le plan telle que les arêtes ne se croisent qu'aux sommets et si elles ont une extrémité commune.

Théorème 3.8 (Thomassen [54]) :

Tout graphe planaire de maille au moins cinq est 3-liste-colorable.

Théorème 3.9 (Alon et Tarsi [5]) :

Tout graphe biparti planaire est 3-liste-colorable.

Peterson a généralisé ce résultat de Galvin dans le cas des graphes simples.

Théorème 3.10 (Peterson [45]) :

Si G est un line-graphe parfait d'un graphe simple, alors $\chi_L(G) = \chi(G)$.

Chapitre 5

Graphes sans griffes et 3-colorables

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à $\mathcal{G}$, une classe de graphes sans griffes et 3-colorables mais non nécessairement parfaits. Nous donnerons une caractérisation du voisinage d'un trou dans les graphes de $\mathcal{G}$. Le nombre très élevé des blocs des graphes sans griffes sera illustré par une sous-classe de $\mathcal{G}$. Une description complète par les blocs et la 3-liste-colorabilité de ces blocs d'une sous-classe de $\mathcal{G}$ seront données.

La première partie du travail effectué, au chapitre suivant, concernant le côté structurel des graphes de cette classe a été soumise à publication (voir Abbas et Saoula [4]), la dernière partie a été publiée (voir Abbas et Saoula [3]).

5.1 Voisinage dans les graphes de la classe $\mathcal{G}$

Définition (de la classe $\mathcal{G}$) : Considérons $\mathcal{G}$ la classe des graphes défini par :

$G \in \mathcal{G}$ si et seulement si G sans $K_{1,3}$ (sans griffe) avec $\chi(G) \leq 3$.

5.1.1 Propriétés générales

Dans la suite nous donnerons quelques propriétés générales du voisinage dans les graphes de $\mathcal{G}$.

Deux sommets a et b d'une chaîne sans corde $v_0v_1 \dots v_{k-1}$ (resp. d'un trou $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_0$) sont *consécutifs* si $a = v_i$ et $b = v_{i\pm 1}$, pour un certain i , et ab est une arête de la chaîne (resp. du trou). (Les indices sont comptés modulo k).

(V1) Soit $G = (V, E) \in \mathcal{G}$. Pour tout sommet v de G , on a $d(v) \leq 4$. Par conséquent, $\Delta(G) \leq 4$ (degré maximum dans G).

Preuve : Supposons qu'il existe un sommet v de G tel que $d(v) \geq 5$. Il existe donc un sous-graphe H de G contenu dans le sous-graphe de G engendré par $N(v)$, l'ensemble des voisins de v , ayant cinq sommets. H ne contient pas de cycle impair car sinon G ne serait pas 3-colorable. Donc H est biparti. H contient au plus deux composantes connexes, car sinon G contiendrait un $K_{1,3}$. Tout sommet u de H est de degré au plus deux ($d_H(u) \leq 2$) car sinon H contiendrait un $K_{1,3}$. Donc H est réunion disjointe de cycles pairs sans cordes et de chaînes sans cordes. Donc H est réunion disjointe de P_1 et P_4 , P_2 et P_3 , P_5 ou P_1 et C_4 (un cycle sans corde sur quatre sommets); chacun de ces cas induit un $K_{1,3}$ dans G , contradiction. D'où $d(v) \leq 4$, par suite $\Delta(G) \leq 4$. ■

Signalons qu'une propriété similaire à (V1) est donnée par Gravier et Maffray [34] dans le cas des graphes parfaits sans griffes et 3-colorables.

(V2) Soient $G \in \mathcal{G}$ et C un trou (resp. une chaîne sans corde) de G . Tout sommet v de $G \setminus C$ adjacent à un sommet du trou ou à un sommet intérieur de la chaîne C est adjacent à au moins deux sommets consécutifs de C .

Preuve : La propriété est vraie car sinon G contiendrait un $K_{1,3}$. ■

Définition (du voisinage) : Soit H_1 un sous-graphe d'un graphe G ; le voisinage de H_1 est un sous-graphe H_2 de G non vide et disjoint de H_1 (en terme de sommets) tel que tout sommet de H_2 a au moins un voisin dans H_1 ; le sous-graphe de G engendré par les sommets de H_1 et de H_2 est noté $H_2 \blacktriangleright H_1$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe de $\mathcal{G}$, un trou $C = C_k = v_1 v_2 v_3 \dots v_{k-1} v_k v_1$ ($k \geq 5$) et H un voisinage de C tels que $G = H \blacktriangleright C$.

Sous ces considérations on démontre les deux propriétés suivantes :

(V3) Si H contient un sommet u de degré au plus trois (dans G), alors tous les voisins de u , appartenant à C , sont consécutifs.

Preuve : Soit u un sommet de H . De (V2) et l'hypothèse on a $2 \leq d_G(u) \leq 3$. Si $d_G(u) = 2$, la proposition est vraie (de (V2)) ; sinon $d_G(u) = 3$; de (V2), deux sommets parmi ses voisins dans C sont consécutifs, disons v_1 et v_2 ; soit v le troisième voisin de u ; lorsque $v \notin C$, la propriété est vraie ; lorsque $v \in C$, si on suppose que $v = v_i$ avec $3 < i < k$ (ie. v n'est consécutif ni à v_1 ni à v_2) on obtient $K_{1,3}$ dans G , engendré par u, v_{i-1}, v_i, v_{i+1} ce qui est impossible. ■

(V4) On a :

(1) $|H| \leq |C|$, par conséquent $|G| \leq 2|C|$.

(2) $d_H(v) \leq 2$, pour tout sommet v de H . Par conséquent, toute composante connexe de H est une chaîne ou un cycle sans cordes (de longueur au moins trois).

Preuve : (1) Posons $l = |\{uv \in E : u \in H \text{ et } v \in C\}|$, l'entier l est le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans H et l'autre dans C . Puisque le degré de chaque sommet du sous-graphe engendré par les sommets de C est deux, $l \leq 2|C|$; de (V2), $l \geq 2|H|$; d'où $|H| \leq |C|$. Par suite, G admet au plus $2|C|$ sommets.

(2) De (V1) et (V2), pour tout sommet v de H on a $2 \leq d(v) \leq 4$.

De (V2), $d_H(v) \leq 2$ (le degré de v dans H). De ce fait, une composante connexe quelconque de H est une chaîne sans corde ou un cycle sans corde de longueur au moins trois. ■

Observons que si le voisinage H du trou C est un cycle C' , on a $3 \leq |C'| \leq |C|$, et la propriété (V4) ne donne pas d'informations supplémentaires sur C' ; plus loin, nous préciserons ce point et donnerons les cas où des cycles pouvant être voisinage d'un trou.

5.1.2 Les stripes

Le terme "stripe" est un mot anglais synonyme des mots français galon et rail. Pour nous, une stripe désigne un graphe particulier qui apparaît dans le voisinage d'un trou.

Définition (d'une stripe) : Pour tout entier $n \geq 4$, une *stripe* d'ordre $2n - 1$, est un graphe dont l'ensemble des sommets est une réunion de deux ensembles disjoints $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ et dont les arêtes sont $v_i v_{i+1}$, $w_i w_{i+1}$, $v_i w_i$, $w_i v_{i+1}$, pour $i = 1, 2, \dots, n - 2$ et $v_{n-1} v_n$, $v_{n-1} w_{n-1}$, $w_{n-1} v_n$. Une telle stripe T sera notée $T = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots v_{n-1} w_{n-1} v_n$ (une chaîne élémentaire de longueur $2n - 1$ avec $2n - 3$ cordes).

La plus petite stripe a sept sommets.

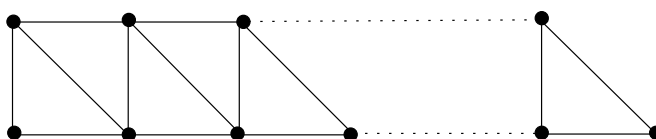


Figure 5.1 : Une stripe

Remarques 2.1 :

1. Le nombre de sommets d'une stripe est impair et est au moins sept.
2. Toute stripe est sans $K_{1,3}$ et son nombre chromatique est 3 quel que soit son ordre.
Donc toute stripe fait partie de $\mathcal{G}$.
3. La partition de l'ensemble des sommets de toute stripe en trois stables est unique.
Donc la coloration des sommets de toute stripe en trois couleurs est unique.
4. Toute stripe possède deux sommets de degré deux, deux sommets de degré trois et tous les autres sommets sont de degré quatre.

Si un graphe de $\mathcal{G}$ contient une stripe, la propriété suivante donne un moyen permettant la vérification de la condition de la 3-colorabilité du graphe.

(V5) Soit $T_{2n-1} = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots w_{n-1} v_n$ une stripe ($n \geq 4$). Pour toute coloration c , de trois couleurs, des sommets de T_{2n-1} on a :

$$(1) \quad c(v_i) = c(w_{i+1}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-2$$

$$(2) \quad c(w_{n-1}) = \begin{cases} c(v_1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ c(v_2) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ c(w_1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad c(v_n) = \begin{cases} c(w_1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ c(v_1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ c(v_2) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Preuve : Par récurrence sur n .

Pour $n = 4$, la proposition est vraie, elle est facile à vérifier.

Soit $n \geq 5$ et supposons que la proposition est vraie pour toute stripe d'ordre $2l - 1$ avec $l \leq n - 1$. Soit T_{2n-1} une stripe d'ordre $2n - 1$ et c une coloration des sommets de cette stripe. Puisque $v_1 v_2 w_1$ est un triangle on peut supposer que $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$ et $c(w_1) = 3$. La restriction c' de c à la stripe $T_{2n-3} = T_{2(n-1)-1} = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots w_{n-2} v_{n-1}$ est une coloration de T_{2n-3} en trois couleurs.

L'hypothèse de récurrence appliquée à T_{2n-3} donne :

$$c'(v_i) = c'(w_{i+1}) \text{ pour } i = 1, \dots, n-3$$

$$c'(w_{n-2}) = \begin{cases} c'(v_1), & \text{si } n-1 \equiv 0 \pmod{3} \\ c'(v_2), & \text{si } n-1 \equiv 1 \pmod{3} \\ c'(w_1), & \text{si } n-1 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c'(v_{n-1}) = \begin{cases} c'(w_1), & \text{si } n-1 \equiv 0 \pmod{3} \\ c'(v_1), & \text{si } n-1 \equiv 1 \pmod{3} \\ c'(v_2), & \text{si } n-1 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Puisque $w_{n-2}v_{n-1}w_{n-1}$ est un triangle de T_{2n-1} , on a :

$$c(w_{n-1}) = c'(v_{n-2}) = c(v_{n-2})$$

d'où (1) est vérifiée.

Pour (2), appliquons l'hypothèse de récurrence et utilisons (1) aux cas possibles suivants :

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$: On a $n-1 \equiv 2 \pmod{3}$, donc

$$c(w_{n-2}) = c'(w_{n-2}) = c'(w_1) = c(w_1) = 3$$

$$\text{et} \quad c(v_{n-1}) = c'(v_{n-1}) = c'(v_2) = c(v_2) = 2$$

ce qui implique que $c(w_{n-1}) = 1 = c(v_1)$ par conséquent $c(v_n) = 3 = c(w_1)$.

Si $n \equiv 1 \pmod{3}$: On a $n-1 \equiv 0 \pmod{3}$, donc $c(w_{n-2}) = c'(w_{n-2}) = c(v_1) = 1$ et $c(v_{n-1}) = c'(v_{n-1}) = c(w_1) = 3$ ce qui implique que $c(w_{n-1}) = 2 = c(v_2)$ par conséquent $c(v_n) = 1 = c(v_1)$.

Si $n \equiv 2 \pmod{3}$: On a $n-1 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $c(w_{n-2}) = c'(w_{n-2}) = c(v_2) = 2$ et $c(v_{n-1}) = c'(v_{n-1}) = c(v_1) = 1$ ce qui implique que $c(w_{n-1}) = 3 = c(w_1)$ par conséquent $c(v_n) = 2 = c(v_2)$. Ce qui prouve que la proposition est vraie. ■

5.2 Structure du voisinage d'un trou

À travers tous les paragraphes de cette section, on considère $G = (V, E)$ un graphe de $\mathcal{G}$ tel que $G = H \blacktriangleright C_k$ avec $C_k = v_1v_2v_3 \dots v_{k-1}v_kv_1$, $k \geq 5$, et H est engendré par $w_1, w_2, \dots, w_l$ ($l \leq k$).

Nous allons donner une description complète du graphe H .

5.2.1 Voisinage d'une chaîne sur un trou

Lemme 2.1 : *Si $G = P \blacktriangleright C_k$ ($P = P_3$), alors C_k contient une chaîne sans corde P' de longueur quatre telle que le sous-graphe de G engendré par les sommets de $P \cup P'$ est une stripe.*

Preuve : Posons $C = C_k$ et $P = w_1w_2w_3$. Puisque P est un voisinage de C , le sommet w_1 est adjacent à deux sommets consécutifs de C , disons v_1 et v_2 (quitte à renuméroter les v_j).

Puisque le sommet w_2 n'est pas une extrémité de P , w_2 doit être adjacent à exactement deux sommets consécutifs de C (V2). Comme G est sans K_4 , le sommet w_2 est adjacent à au plus un sommet parmi v_1 et v_2 . Examinons les deux cas possibles suivants :

Cas 1 : w_2 n'est adjacent ni à v_1 ni à v_2 .

Soit i , $3 \leq i \leq k$, le plus petit indice tel que w_2v_i est une arête de G . De (V2), l'arête w_2v_{i+1} existe ; par conséquent w_2 est adjacent à w_1, w_3, v_i et à v_{i+1} et il n'a aucun autre voisin. Puisque $v_{k+1} = v_1$, on a $i < k$.

Ainsi : w_3v_i ou w_1v_i est une arête de G (mais pas les deux)

et w_3v_{i+1} ou w_1v_{i+1} est une arête de G

car sinon $P \cup \{v_i\}$ ou $P \cup \{v_{i+1}\}$ induirait un $K_{1,3}$ dans G , ce qui est impossible.

Sous cas 1.1 : $i = 3$:

Supposons que w_3v_i est une arête de G . w_3v_{i+1} n'est pas une arête de G , car sinon $\{v_i, v_{i+1}, w_2, w_3\}$ engendrerait un K_4 , donc l'arête w_1v_{i+1} existe. Comme C est sans

corde et $d(w_1) \leq 4$ (dans G), $v_i v_{i+2}$ et $w_1 v_{i+2}$ ne sont pas des arêtes de G ; par suite, $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, w_1\}$ engendre un $K_{1,3}$ dans G , contradiction. Donc $w_3 v_i$ n'est pas une arête de G , par conséquent l'arête $w_1 v_i$ existe et donc $w_3 v_{i+1}$ existe, car $d_G(v_i) \leq 4$; puisque w_3 doit vérifier (2) de la propriété (V4), l'arête $w_3 v_{i+2}$ existe et w_3 est non adjacent à v_2 . On obtient ainsi la chaîne sans corde $P' = v_2 v_i v_{i+1} v_{i+2}$ contenue dans C avec $P \cup P'$ engendre la stripe $v_2 w_1 v_i w_2 v_{i+1} w_3 v_{i+2}$.

Sous cas 1.2 : $i > 3$:

Si on suppose que $w_3 v_i$ n'est pas une arête de G , l'arête $w_1 v_i$ existe. Puisque w_1 est adjacent à quatre sommets v_1, v_2, v_i et à w_2 , il n'est donc pas adjacent à v_{i-1} ; comme $i+1 \leq k$, $w_1 v_{i+1}$ n'est pas une arête de G ; l'ensemble $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, w_1\}$ engendre un $K_{1,3}$ dans G , ce qui est impossible. Donc l'arête $w_3 v_i$ existe. Puisque w_3 doit vérifier (V2), le sommet w_3 n'est pas adjacent à v_{i+1} car sinon $\{v_i, v_{i+1}, w_2, w_3\}$ induirait un K_4 dans G ; le sommet w_3 est donc adjacent à v_{i-1} ; l'arête $w_1 v_{i+1}$ existe car sinon $\{w_1, w_2, w_3, v_{i+1}\}$ engendrerait un $K_{1,3}$. Ainsi :

Si $k = 5$, on a $i = 4$ et $P' = v_1 v_5 v_4 v_3$ et $v_1 w_1 v_5 w_2 v_4 w_3 v_3$ est une stripe.

Si $k > 5$ et $i + 1 = k$, on a $P' = v_1 v_{i+1} v_i v_{i-1}$ et $v_1 w_1 v_{i+1} w_2 v_i w_3 v_{i-1}$ est une stripe.

Le cas où $k > 5$ et $i + 1 < k$, est impossible, car sinon w_1 aura trois voisins non consécutifs v_1, v_2, v_{i+1} sur C , ce qui contredit la propriété (V3).

Cas 2 : w_2 est adjacent à v_1 ou à v_2 .

Par symétrie, on peut supposer que w_2 est adjacent à v_2 et non adjacent à v_1 . Donc w_2 est adjacent à v_3 le consécutif de v_2 sur C . Donc $w_1 v_3$ n'est pas une arête de G car sinon $\{w_1, w_2, v_2, v_3\}$ engendre un K_4 . L'arête $w_3 v_3$ existe car sinon $\{w_1, w_2, w_3, v_3\}$ engendre un $K_{1,3}$. De même, puisque $w_3 v_2$ n'est pas une arête de G , l'arête $w_3 v_4$ existe. $w_1 v_4$ et $w_3 v_1$ ne sont pas des arêtes de G car sinon G contiendrait un $K_{1,3}$ engendré par $\{w_1, w_2, v_1, v_4\}$ ou $\{w_2, w_3, v_1, v_4\}$, ce qui est impossible. On obtient ainsi $P' = v_1 v_2 v_3 v_4$ et $v_1 w_1 v_2 w_2 v_3 w_3 v_4$ est une stripe ce qui achève la démonstration. ■

Généralisons le résultat précédent.

Lemme 2.2 : *Si $G = P_l \blacktriangleright C_k$ avec $3 \leq l \leq k - 2$, alors C_k contient une chaîne sans corde P' de longueur $l + 1$ telle que le sous-graphe de G engendré par les sommets de $P_l \cup P'$ est une stripe.*

Preuve : Posons $P = P_l = w_1 w_2 \dots w_l$ (la chaîne sans corde de longueur l) et $C = C_k$ ($3 \leq l \leq k - 2$). Nous allons établir cette preuve par récurrence sur l .

Pour $l = 3$, la proposition est démontrée au Lemme 2.1.

Pour $l > 3$: Supposons maintenant que le résultat est vrai pour toute chaîne sans corde, de longueur l' avec $3 \leq l' \leq l - 1$, et qui est voisinage de C et montrons que le résultat reste vrai pour l . Soit G' le sous-graphe de G , engendré par $G \setminus \{w_l\}$. Puisque G' est un sous-graphe de G et contient C , $G' \in \mathcal{G}$; la chaîne $\tilde{P} = P \setminus \{w_l\}$ est sans corde et est encore un voisinage de C , donc $G' = \tilde{P} \blacktriangleright C$.

Comme $3 \leq |\tilde{P}| = l - 1 < k - 2$, l'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une chaîne P'' , de longueur l , contenue dans C telle que $\tilde{P} \cup P''$ est une stripe T dans G' . On peut supposer que $P'' = v_1 v_2 \dots v_{l-1} v_l$ et $T = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots w_{l-2} v_{l-1} w_{l-1} v_l$. Chaque sommet de l'ensemble $\{v_i, w_i : i = 2, 3, \dots, l - 2\} \cup \{v_{l-1}\}$ est adjacent à quatre sommets dans T , donc n'a aucun autre voisin dans G . Puisque l'arête $w_{l-1} w_l$ existe dans G , l'arête $w_l v_l$ existe aussi car sinon $\{w_{l-2}, w_{l-1}, w_l, v_l\}$ induirait un $K_{1,3}$ dans G . Puisque w_l doit être adjacent à deux sommets consécutifs de C et v_{l-1} est adjacent à quatre sommets de T , le sommet w_l est donc adjacent à v_{l+1} ($l + 1 < k$ et $v_{l+1} \neq v_1$). On obtient ainsi $P' = v_1 v_2 \dots v_l v_{l+1}$ et T' le sous-graphe de G engendré par les sommets de $T \cup \{w_l, v_{l+1}\}$ est une stripe de G (T' est engendrée par $P \cup P'$). ■

Le Lemme 2.2 précise les voisins des sommets d'une chaîne autour d'un trou C dans les graphes de $\mathcal{G}$. Il montre aussi qu'une chaîne de longueur $|C| - 2$ peut exister indépendamment de la longueur du trou C pourvue que C soit de longueur au moins cinq, ce qui n'est toujours pas vrai pour des chaînes de longueur $|C| - 1$ ou $|C|$, comme on le verra ci-dessous.

5.2.2 Longueur des chaînes dans le voisinage des trous

Pour le graphe $G = H \blacktriangleright C_k$ ($G \in \mathcal{G}$), on pose :

$$\lambda(H) = \max \{l : \text{il existe une chaîne sans corde de longueur } l \text{ dans } H\}$$

Lemme 2.3 : *On a :*

- (1) *Si $k \equiv 0 \pmod{3}$, alors $\lambda(H) \leq k$.*
- (2) *Si $k \equiv 1 \pmod{3}$, alors $\lambda(H) \leq k - 2$.*
- (3) *Si $k \equiv 2 \pmod{3}$, alors $\lambda(H) \leq k - 1$.*

Preuve : Soit $P = w_1 w_2 \dots w_{l-1} w_l$, ($l \geq 3$), une chaîne sans corde contenue dans H .

De la propriété (V4), on a : $l \leq k$, d'où (1).

(2) Pour $k \equiv 1 \pmod{3}$, il suffit de montrer que le cas où $l = k - 1$ est impossible. En effet, supposons que $l = k - 1$. Du Lemme 2.2, $T = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots v_{l-1} w_{l-1} v_l$ est une stripe ; donc $T' = \{w_{k-1}, v_k\} \cup T \setminus \{w_1\} = v_2 w_2 \dots v_{k-1} w_{k-1} v_k$ est une stripe ; par suite, les arêtes $w_{k-1} v_{k-1}$ et $w_{k-1} v_k$ existent. De la propriété (V5) avec une coloration c de trois couleurs appliquée à T , on obtient $c(w_{k-2}) = c(w_2) = c(v_1)$ et $c(v_{k-1}) = c(w_1)$, ce qui implique que $c(w_{k-1}) = c(v_2)$, par conséquent $c(v_k) = c(w_{k-2}) = c(v_1)$, contradiction (car l'arête $v_k v_1$ existe). Donc $l \leq k - 2$ et par suite $\lambda(H) \leq k - 2$.

(3) Lorsque $k \equiv 2 \pmod{3}$, si on suppose que $l = k$ et on utilise les mêmes arguments, que (2), avec une coloration c de trois couleurs appliquée à $T = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots v_{l-2} w_{l-2} v_{l-1}$, on aboutit à : $c(v_k) = c(v_1)$, ce qui est impossible ; donc $\lambda(H) \leq k - 1$. ■

5.2.3 Les graphes extrémaux

Regardons maintenant s'il existe un graphe G , de $\mathcal{G}$, contenant un trou C_k de voisinage H tel que $\lambda(H) = k - 2$, $k - 1$ ou k ; en d'autres termes, peut-t-on avoir une chaîne sans corde P_{k-2} , P_{k-1} ou P_k comme voisinage d'un C_k dans un graphe de $\mathcal{G}$ ($k \geq 5$).

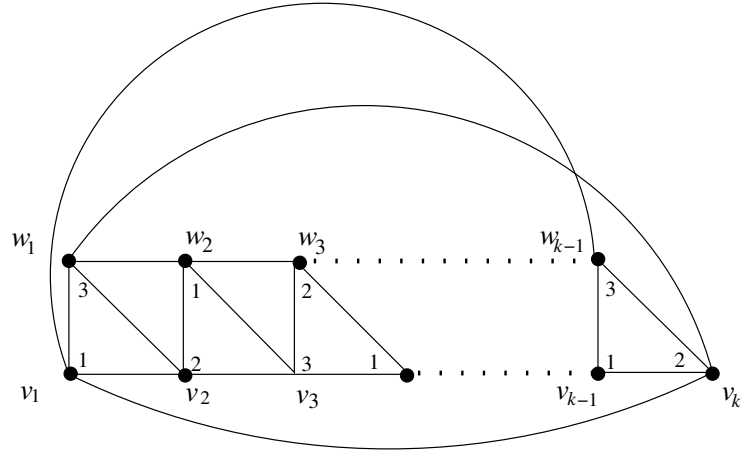
En effet, utilisons le Lemme 2.2 et la propriété (V5) avec un ensemble de trois couleurs c , et construisons un graphe $G' \in \mathcal{G}$ avec $G' = P_l \blacktriangleright C_k$ et $l = k - 2, k - 1$ ou k .

1. Lorsque $k \equiv 1 \pmod 3$ ($l = k - 2$), le graphe $G' = P_{k-2} \blacktriangleright C_k$ existe toujours (Lemme 2.2). Ainsi, $\lambda(H) = k - 2$ (les deux arêtes $w_{k-2}v_k$ et w_1v_k peuvent exister).

2. Lorsque $k \equiv 2 \pmod 3$ ($l = k - 1$) : Soit $T = v_1w_1 \dots v_{k-1}w_{k-1}v_k$ une stripe. Puisque c est une coloration de T , $c(v_k) = c(v_2)$; comme v_2 est adjacent à v_1 , on a $c(v_2) \neq c(v_1)$, par conséquent $c(v_k) \neq c(v_1)$. On peut ajouter à T l'arête v_1v_k sans créer de $K_{1,3}$ ou augmenter le nombre de couleurs, on obtient ainsi $G' = P_{k-1} \blacktriangleright C_k$ ($\lambda(H) = k - 1$). Les arêtes $w_{k-1}v_1$, w_1v_k peuvent exister; si ces deux arêtes existent H devient voisinage maximal dans G' relativement à C_k et G' devient maximal dans $\mathcal{G}$ (maximal relativement à l'inclusion des sous-ensembles des arêtes). Appelons G_1 ce graphe maximal, voir au Figure 5.2 le graphe G_1 pour $k \geq 5$; à coté de chaque sommet est indiqué un entier représentant sa couleur d'une 3-coloration.

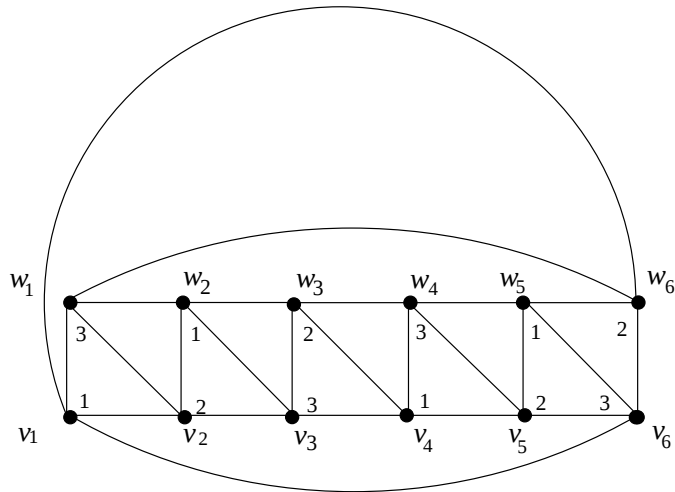
3. Lorsque $k \equiv 0 \pmod 3$ ($l = k$) : Soit $T = v_1w_1 \dots v_{k-1}w_{k-1}v_k$ une stripe. Puisque c est une coloration de T , $c(v_k) = c(w_1)$, $c(w_{k-1}) = c(v_1)$ et $c(v_{k-1}) = c(v_2)$. On peut ajouter à T l'arête v_1v_k et le sommet w_k est adjacent à w_{k-1} , v_k et à v_1 , et ayant la couleur $c(v_2)$; puisque le sommet et les arêtes ajoutés à T ne créent pas de $K_{1,3}$, on obtient ainsi $G' = P_k \blacktriangleright C_k$ ($H = P_l$, $l = k$, $\lambda(H) = k$).

Le graphe $G_{1,1} = G_1 \setminus \{v_1w_{k-1}\}$ (resp. $G_{1,2}$) (de la Figure 5.2, la page suivante) est le graphe partiel obtenu de G_1 par la suppression de l'arête v_1w_{k-1} (resp. des arêtes v_1w_{k-1} et w_1v_k). Il est clair que les graphes G_1 , $G_{1,1}$ et $G_{1,2}$ sont 2-connexe.



G_1 pour $k \equiv 2 \pmod 3$ et $k \geq 5$

$$G_{1,1} = G_1 \setminus \{v_1 w_{k-1}\}, \quad G_{1,2} = G_1 \setminus \{v_1 w_{k-1}, w_1 v_k\}$$



G_2 pour $k = 6$

Figure 5.2 : Des graphes extrémaux, G_1 , $G_{1,1}$, $G_{1,2}$ et G_2

Remarques 2.2 :

1. Si $l = k$ on a $k \equiv 0 \pmod{3}$. Mais si $l < k$ on a pas forcément $k \equiv 1 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$.
2. Lorsque $k \equiv 0 \pmod{3}$, considérons le graphe extrémal G' obtenu en 3. Puisque $c(w_k) \neq c(w_1)$, l'ajout de l'arête w_1w_k à G' ne crée pas $K_{1,3}$ et n'augmente pas le nombre de couleurs, on obtient ainsi $G_2 = H' \blacktriangleright C_k$ avec H' est un cycle sans corde de longueur k ; le graphe G_2 pour $k = 6$ (de la Figure 5.2). Puisque tous les sommets de G_2 sont de degrés quatre, G_2 est maximal dans $\mathcal{G}$.
3. Le seul cas où le voisinage d'un trou C_k ($k \geq 5$) contient un cycle sans corde et de longueur $l \neq 3$, dans un graphe de $\mathcal{G}$, est que lorsque $k \equiv 0 \pmod{3}$ et $l = k$.

5.2.4 Résultat principal

Le résultat suivant résume la structure du voisinage d'un trou dans les graphes de $\mathcal{G}$.

Théorème 2.4 : *Soit $G = H \blacktriangleright C_k$ ($k \geq 5$) un graphe de $\mathcal{G}$ tel que H est un voisinage du trou C_k . Soit B une composante connexe de H . On a :*

- (1) *Si $k \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$, alors B est un triangle ou une chaîne sans corde de longueur au plus $k - 1$.*
- (2) *Si $k \equiv 0 \pmod{3}$, alors B est un triangle, un trou de longueur k ou une chaîne sans corde de longueur au plus k .*

Preuve : Soit B une composante connexe de H . B est donc une chaîne ou un cycle sans corde et $|B| \leq k$ (propriété V4). Supposons que B est un cycle sans corde de longueur l , $4 \leq l \leq k - 1$ avec $B = w_1w_2 \dots w_lw_1$. Puisque $3 \leq l - 1 \leq k - 2$, du Lemme 2.2, le sous-graphe de G engendré par $B \setminus \{w_l\}$ (resp. $B \setminus \{w_1\}$) et l sommets de C est une stripe T (resp. T'); sans perte de généralité on peut considérer $T = v_1w_1 \dots v_{l-1}w_{l-1}v_l$, par conséquent $T' = v_2w_2 \dots v_lw_lv_{l+1}$; le sommet w_2 étant de degré quatre dans T et non adjacent à v_1 , donc w_2 est non adjacent à w_l ; comme w_l est de degré trois dans T' et adjacent à w_1 (dans G), l'ensemble $\{v_1, w_1, w_2, w_l\}$ engendre un $K_{1,3}$ dans G , contradiction.

Pour (1) : Si B est un cycle, il serait de longueur trois donc un triangle, sinon, la propriété (V4) garantit que B est une chaîne ; le Lemme 2.3 assure que la longueur de B est au plus $k - 2$ ou $k - 1$.

Pour (2) : Si B est un cycle, il serait sans corde de longueur k ((V4), Lemme 2.3 et Remarque 2.2) ou un triangle, sinon, B est une chaîne de longueur au plus k (Lemme 2.3). ■

5.2.5 Cas particuliers

Il est clair que le Théorème 2.4 ne précise pas les voisins, sur le trou, des sommets de la composante connexe B , lorsque celle-ci a un ou deux sommets (une chaîne de longueur un ou deux).

Pour $G = H \blacktriangleright C_k$ ($G \in \mathcal{G}$), soit B une composante connexe non vide de H avec $|B| \leq 2$ et N l'ensemble des voisins des sommets de B sur C ($C = C_k$, $k \geq 5$). Deux arêtes w_1w_2 et $w'_1w'_2$ de G seront dites indépendantes si $w_i \neq w'_j$ et w_i est non adjacent à w'_j pour tout $i, j = 1, 2$.

En utilisant les propriétés (V1), ..., (V4) et que G est sans K_4 , les faits suivants peuvent être facilement vérifiés :

1. Si B contient un seul sommet w , alors N induit une chaîne sans corde P_l avec $2 \leq l \leq 4$ ou deux arêtes indépendantes.

2. Si B contient une seule arête ww' , alors l'une des deux situations suivantes se produit :

2.1 Si w et w' n'ont aucun voisin commun sur C , alors chacun des sommets w et w' a exactement deux voisins consécutifs sur C et N induit soit un P_4 soit deux arêtes indépendantes.

2.2 Si w et w' ont un voisin commun sur C , alors N induit une chaîne sans corde P_l avec $3 \leq l \leq 5$ (chacun des deux sommets w et w' a m voisins consécutifs sur C avec $2 \leq m \leq 3$).

Le graphe correspondant de chaque cas est donné en Figure 5.3.

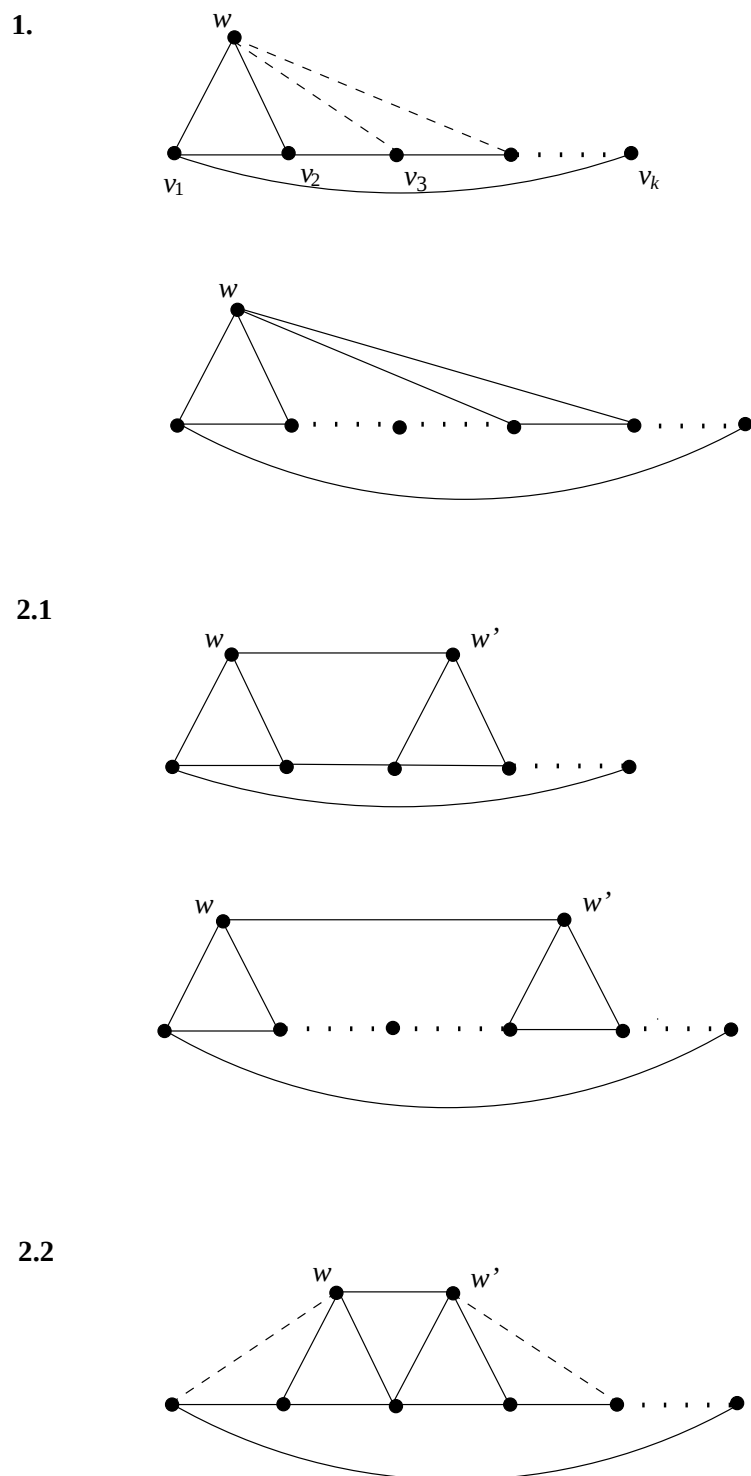


Figure 5.3 : Voisinage d'un sommet ou d'une arête sur un trou

Les arêtes en discontinu peuvent exister. La longueur du trou C doit être au moins six pour la dernière possibilité de chaque cas.

Corollaire 2.5 : *Soit $G = H \blacktriangleright C_k$ ($k \geq 5$) un graphe de $\mathcal{G}$ et maximal (maximalité relative aux ensembles des sommets et des arêtes).*

Si $G \neq G_2$, alors toute composante connexe de H est un triangle ou une chaîne de longueur au plus $k - 1$. (Voir Figure 5.2 pour le graphe G_2).

Ce corollaire indique que pour tout $k \geq 5$, dans le voisinage d'un trou C_k ne peut y avoir un cycle sans corde de longueur l avec $4 \leq l \leq k - 1$ ou une chaîne sans corde de longueur k , que si le trou et son voisinage est le graphe G_2 .

Comme conséquence directe au Théorème 2.4 et les propriétés précédentes, lorsque $k = 5$ et H contient cinq sommets, H a au plus quatre arêtes ; donc, H est l'un des graphes suivants :

1. Une chaîne P_4 et un sommet isolé.
2. Une chaîne P_3 avec une arête ou deux sommets isolés.
3. Deux arêtes indépendantes et un sommet isolé.
4. Un triangle avec une arête ou deux sommets isolés.
5. Une arête et trois sommets isolés,
6. Cinq sommets isolés.

Cette description de H nous permet de déterminer tous les blocs des graphes d'une sous-classe de $\mathcal{G}$.

Lorsque $|H| \leq 5$, H est un sous-graphe de l'un des types $1, \dots, 6$ cités ci-dessus. Plus loin, chaque type sera traité avec plus de détail.

5.3 Étude d'une sous-classe de $\mathcal{G}$

Définition (de $\mathcal{G}_m$) : Pour tout entier $m \geq 5$, $\mathcal{G}_m$ désigne l'ensemble des graphes, de $\mathcal{G}$, ne contenant pas de trou de longueur strictement supérieure à m .

Soit $G = H \blacktriangleright C_k$ un graphe connexe de $\mathcal{G}_m$ ($5 \leq k \leq m$). De ce qui précède, la structure de H dépend de la valeur de la longueur k (qu'elle est $\equiv 0, 1$ ou $2 \pmod{3}$).

Rappelons qu'un bloc d'un graphe (d'une classe) est 2-connexe et maximal pour cette propriété. Il est clair que si un bloc B (d'un graphe) contient le trou C_k , contient aussi son voisinage ; donc le voisinage de C_k dans B est maximal (maximalité pour l'inclusion des sous-ensembles de sommets). Pour déterminer les blocs d'un graphe G' contenant le graphe G , il faut les chercher parmi les sous-graphes, de G' , contenant C_k ayant un voisinage maximal. Pour se faire, on a besoin d'introduire une opération sur les graphes.

La présence d'une chaîne de longueur au moins trois dans le voisinage du trou C_k entraîne l'existence d'autres trous de longueurs supérieures à k (dans G), pour cette raison on considère m suffisamment grand.

5.3.1 Extension d'un graphe

Définition (d'une extension) : Soit G' un graphe. L'opération de création d'un sommet simplicial (l'ensemble de ses voisins est une clique) dans G' consiste à ajouter un nouveau sommet u ($u \notin G'$) adjacent à deux sommets v et v' de G' tels que v et v' sont adjacents dans G' et v (resp. v') est simplicial dans $G' \setminus \{v'\}$ (resp. $G' \setminus \{v\}$). On dira que le graphe G'' ainsi construit est une extension de G' (par u). Le graphe G'' est une extension de G' par un ensemble de sommets $U = \{u_1, \dots, u_l\}$ si G'' est le dernier graphe obtenu de la suite des graphes $G'_0, G'_1, \dots, G'_l$ où $G'_0 = G'$ et pour tout i , $0 < i \leq l$, le graphe G'_i est une extension de G'_{i-1} par u_i avec la convention que G' est l'extension de lui même par l'ensemble vide.

Remarque 3.1 : Un graphe G' est sans $K_{1,3}$ et 3-colorable si et seulement si toutes ses extensions G'' sont sans $K_{1,3}$ et 3-colorables. Du fait que la création de sommets simpliciaux ne créent pas de trous, $G' \in \mathcal{G}_m$ si et seulement si toute extension G'' de G' est dans $\mathcal{G}_m$ pour tout $m \geq 5$.

- **Hypothèse :** Dans tous ce qui suit on considère $G = H \blacktriangleright C_k$ un graphe de $\mathcal{G}_m$, $5 \leq k \leq m$, avec la restriction $k \equiv 2 \pmod 3$.

On pose $C = C_k = v_1 v_2 \dots v_k v_1$, H est engendré par l'ensemble de sommets $w_1, w_2, \dots, w_l$ ($l \leq k$).

Nous allons examiner des cas de graphe G selon des valeurs k et de m . Pour avoir une idée sur le nombre (qui est élevé) des blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$, nous traiterons des cas où $k = 5$ et $m = 7$. Comme conséquence, nous obtiendrons tous les blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$ ie. $k = m = 5$

5.3.2 Blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$

Rappelons que $\lambda(H)$ est la longueur d'une plus longue chaîne sans corde dans H . Sous l'hypothèse précédente, nous allons traiter des cas pour $\lambda(H) \leq k - 1$.

Cas où $\lambda(H) = k - 1$

Lemme 3.1 : On suppose que $\lambda(H) = k - 1$. On a :

Si $m \geq k + 1$ et le voisinage H de C est maximal, alors

- (1) *G est isomorphe à G_1 , à $G_{1,1}$ ou à une extension de $G_{1,2}$.*
- (2) *Si G est un sous-graphe de $G' \in \mathcal{G}_m$, alors G est un bloc de G' .*

Si $m = k \equiv 2 \pmod 3$, alors $G \notin \mathcal{G}_m$; en particulier $G_1, G_{1,1}, G_{1,2} \notin \mathcal{G}_5$.

Preuve : Soit $P = w_1 w_2 \dots w_{k-1}$ la chaîne de H de longueur $k - 1$. Puisque les $k - 2$ premiers sommets consécutifs de P et $k - 1$ sommets de C , font une stripe T de G ,

disons $T = v_1 w_1 v_2 w_2 \dots w_{k-2} v_{k-1}$; puisque $T' = v_2 w_2 v_3 w_3 \dots w_{k-1} v_k$ est aussi une stripe de G , le sommet w_{k-1} est adjacent à v_{k-1} et à v_k . Remarquons que les seuls sommets de $C \cup T \cup \{w_{k-1}\}$ pouvant avoir des voisins parmi les sommets de $H \setminus P$ sont v_1, v_k, w_1 et w_{k-1} . On sait que les deux arêtes $v_1 w_{k-1}$ et $w_1 v_k$ peuvent exister (dans G).

Examinons donc les cas possibles suivants :

1. Les deux arêtes $v_1 w_{k-1}$ et $w_1 v_k$ existent dans G .

Tout sommet du sous-graphe de G engendré par $C \cup P$ est de degré quatre, donc c'est G lui même ; G est donc isomorphe à G_1 .

2. Une seule arête, $v_1 w_{k-1}$ ou $w_1 v_k$, existe.

Les deux graphes partiels $G_1 \setminus \{v_1 w_{k-1}\}$ et $G_1 \setminus \{w_1 v_k\}$ étant isomorphes, on suppose que l'arête $v_1 w_{k-1}$ existe et $w_1 v_k$ n'est pas une arête de G . Supposons qu'il existe un sommet w de $H \setminus P$; puisque $\lambda(H) = k - 1$, le sommet w n'est pas adjacent à w_1 ; G étant connexe, w est donc adjacent à v_k et n'a aucun autre voisin sur C ce qui est impossible ; donc un tel sommet n'existe pas, d'où G est isomorphe à $G_{1,1}$.

3. $v_1 w_{k-1}$ et $w_1 v_k$ ne sont pas des arêtes de G .

H étant voisinage maximal de C , soit w un sommet de $H \setminus P$. Puisque $\lambda(H) = k - 1$, w n'est adjacent ni à w_1 ni à w_{k-1} , il donc adjacent à v_1 et à v_k , il n'est adjacent à aucun autre sommet de $P \cup C$; par conséquent G est une extension de $G_{1,2}$ (par w) ; w est simplicial ou un point d'articulation de G' . Donc (1) est vraie.

Pour (2) ; par application de (1) et du fait que $G_1, G_{1,1}$ et l'extension de $G_{1,2}$ (par un seul sommet) sont 2-connexes maximaux, G est un bloc de G' .

Lorsque $m = k \equiv 2 \pmod{3}$; puisque $G_1, G_{1,1}$ et $G_{1,2}$ sont des sous-graphes de G et contiennent le trou $C_{k+1} = v_1 v_2 w_2 w_3 v_4 \dots v_{k-1} v_k v_1$, on a $G \notin \mathcal{G}_m$ en particulier $G_1, G_{1,1}, G_{1,2} \notin \mathcal{G}_5$. ■

Cas où $\lambda(H) = k - 2$

Lemme 3.2 : *Soit $m \geq k \geq 5$ et on suppose que H est un voisinage maximal du trou $C = C_k$.*

Si $\lambda(H) = k - 2$ avec P_{k-2} est la chaîne de H de longueur $k - 2$, alors $H \setminus P_{k-2}$ est un ensemble stable d'ordre au plus deux.

(En d'autres termes, H ne peut être union disjointe de deux chaînes P_{k-2} et P_2).

Preuve : Posons $P_{k-2} = w_1 w_2 \dots w_{k-2}$. On sait que $|H \setminus P_{k-2}| \leq 2$. Du Lemme 2.2, on peut supposer que $T = v_1 w_1 v_2 \dots w_{k-2} v_{k-1}$ est une stripe de G . Soit c une coloration de G de trois couleurs. Puisque $k \equiv 2 \pmod 3$, de la propriété (V5) on a $c(v_{k-1}) = c(v_1)$. Supposons que la conclusion est fausse ; H est donc réunion disjointe de deux chaînes P_{k-2} et $P_2 = w' w''$. Chacun des sommets w' et w'' doit être adjacent à au moins deux sommets consécutifs de C parmi v_1, v_{k-1} et v_k ; disons w' est adjacent à v_{k-1} et à v_k , w'' est adjacent à v_1 et à v_k . Donc $|\{c(v_1), c(w'), c(v_k)\}| = 3$; puisque w'' est adjacent aux trois sommets v_1, w' et v_k , le sommet w'' ne peut être coloré par c ; contradiction. Donc $H \setminus P_{k-2}$ est un ensemble stable ayant au plus deux sommets. ■

– **Discussion :** Soit G' un graphe de $\mathcal{G}_m$ contenant G .

Si $|H \setminus P_{k-2}| = 2$ avec $H \setminus P_{k-2} = \{w_{k-1}, w_k\}$ (un ensemble stable) :

Puisque $\lambda(H) = k - 2$, nécessairement $w_{k-2} v_k$ et $w_1 v_k$ ne sont pas des arêtes dans G car sinon w_{k-1} ou w_k serait adjacent à au plus un sommet de C ce qui n'est pas possible ; donc chacun des sommets w_{k-1} et w_k est de degré deux dans G . Si on suppose que w_{k-1} et w_k sont reliés (dans G') par une chaîne P telle que $|P \setminus \{w_{k-1}, w_k\}| \geq 1$ et ses sommets intérieurs sont dans $G' \setminus G$, l'ensemble $\{v_1, w_1, w_2, v_3, \dots, v_{k-1}\} \cup P$ engendrerait un trou de longueur au moins $k + 3$. Donc si $m \leq k + 2$, le graphe G est un bloc de G' et chacun des sommets w_{k-1} et w_k est de degré deux et simplicial dans G' .

Si $|H \setminus P_{k-2}| = 1$ avec $H \setminus P_{k-2} = \{w_{k-1}\}$: Comme H est un voisinage maximal de C , le sommet w_{k-1} admet donc au moins deux voisins consécutifs sur C parmi lesquels v_k . Au plus une parmi $w_1 v_k$ ou $w_{k-2} v_k$ est une arête de G car sinon G ne serait pas 3-colorable ; on suppose que $w_1 v_k$ n'est pas une arête de G .

Lorsque l'arête $w_{k-2}v_k$ existe, w_{k-1} est adjacent à v_{k-1} , ou à v_1 , ou à v_{k-1} et à v_1 . Dans ces trois possibilités, G est 2-connexe maximal, donc G est un bloc de G' ou il est G' lui-même.

Lorsque $w_{k-2}v_k$ n'est pas une arête de G ; des hypothèses, w_{k-1} est adjacent à v_{k-1} et à v_1 ; dans ce cas, $G' = G$.

Remarquons que dans les deux cas, G contient le trou $C_{k+1} = v_1w_1w_2v_3 \dots v_{k-1}v_kv_1$, par suite $G \notin \mathcal{G}_k$ ($m = k$).

Comme conséquence :

Corollaire 3.3 : *Soit $G' \in \mathcal{G}_m$ contenant le graphe G ($G = H \blacktriangleright C_k$). On suppose que H est un voisinage maximal de C_k . On a :*

- (1) *Si $k \leq m \leq k+1$ et $\lambda(H) = k-2$, alors G est un bloc de G' .*
- (2) *Si $m = k = 5$, le voisinage de C_k ne contient pas de chaîne sans corde de longueur trois.*

Cas où $\lambda(H) = 2$

On distingue deux possibilités, suivant que H contient un triangle ou non.

– **a. H sans triangle et contient au moins deux arêtes**

Dans ce qui suit, chaque composante connexe de H (le voisinage du trou C) est une arête ou un sommet isolé.

Considérons les deux graphes F_1 et F_2 , de la figure 5.4.

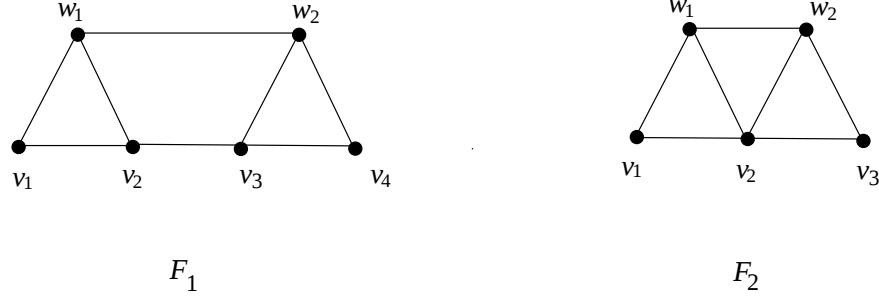


Figure 5.4 : Les graphes F_1 et F_2 .

Pour distinguer l'arête supérieure des autres arêtes d'un F_i , on note par :

$$F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4 \text{ et } F_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3.$$

Rappelons que si l'un des w_i est voisin à exactement trois sommets de C , ces voisins sont consécutifs (propriété (V3)). Les sommets v_i , pour $i = 1, \dots, 4$, (resp. w_j , pour $j = 1, 2$) sont souvent considérés comme sommets de C (resp. de H). L'arête w_1w_2 sera dite arête *supérieure* de F_i , $i = 1, 2$. Nous dirons aussi que F_i , $i = 1, 2$, est placé autour de C .

Définition : Pour le graphe $G = H \blacktriangleright C_k$, nous dirons que G vérifie la propriété $C_k(F_i - F_j)$, $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$, si son voisinage H contient deux arêtes supérieures w_1w_2 et $w'_1w'_2$ respectivement de F_i et F_j avec $F_i \setminus \{w_1, w_2\} \subset C_k$ et $F_j \setminus \{w'_1, w'_2\} \subset C_k$ (F_i peut être isomorphe à F_j).

Remarque 3.2 : Dans le graphe G , une arête dans le voisinage de C_5 ($k = 5$) est une arête supérieure d'un F_1 ou d'un F_2 .

Posons $C = C_k = v_1v_2 \dots v_k, v_1$ et soit $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$.

Lemme 3.4 : Si G contient F_1 autour de C , alors chaque extrémité de l'arête supérieure de F_1 est adjacente à exactement deux sommets consécutifs de C (ie. $|N_G(w_i) \cap C| = 2$, $i = 1, 2$).

Preuve : w_1w_2 étant l'arête supérieure de F_1 ; supposons que $|N_G(w_i) \cap C| \neq 2$. Prenons $i = 1$ (même raisonnement pour $i = 2$) ; puisque $d_{F_1}(w_1) = 3$ et $d_G(w_1) \leq 4$ on a $|N_G(w_1) \cap C| = 3$; de la propriété (V3), w_1 est adjacent à v_k ; comme v_2w_2 et v_2v_k ne sont pas des arêtes de G , l'arête w_2v_k existe (car sinon G contiendrait le $K_{1,3}$ engendré par les sommets w_1, w_2, v_2, v_k) ; donc w_2 est adjacent à quatre sommets ; comme v_1 n'est pas adjacent à w_2 on a $k = 5$ car sinon G contiendrait un $K_{1,3}$ engendré par les sommets w_2, v_{k-1}, v_k, v_1 ; le sous-graphe G' , de G , ainsi obtenu, comme on peut le vérifier, n'est pas 3-colorable ($\chi(G') = 4$), contradiction. ■

a.1 Cas de deux F_1

Lemme 3.5 : Pour $G \in \mathcal{G}_m$ avec $m \geq k + 2$; si G vérifie la propriété $C_k(F_1 - F_1)$ d'arêtes supérieures w_1w_2 et $w'_1w'_2$, alors w_i et w'_j ($i = 1, 2$, et $j = 1, 2$) ont au plus un voisin commun sur C ($C = C_k$).

Preuve : Les arêtes w_1w_2 et $w'_1w'_2$ étant indépendantes ; si on suppose que la conclusion est fausse ; du Lemme 3.4 on a $|N_G(w_i) \cap N_G(w'_j) \cap C| = 2$. Pour $i = 2$ et $j = 1$, de la propriété (V3) on a un $K_{1,3}$ engendré par $\{w_2, w'_1, v_2, v_3\}$ ce qui est impossible ; la même conclusion pour les autres valeurs de i et de j . ■

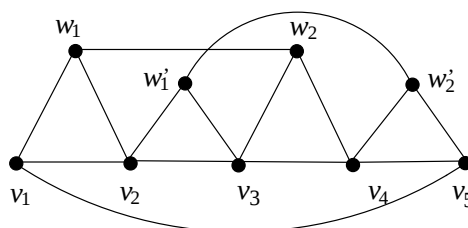


Figure 5.5 : Le graphe G_3

Lemme 3.6 : Soient G' et $G = H \blacktriangleright C_5$ deux graphes de $\mathcal{G}_m$ avec G vérifiant la propriété $C_5(F_1 - F_1)$. ($C = C_5$).

- (1) Si $m \geq 7$ et le voisinage H , de C , est maximal, alors G est une extension du graphe G_3 de la Figure 5.5.
- (2) Si B est un bloc de G' , B contient G et $m = 7$, alors B est une extension de G_3 .

Preuve : Il est facile de vérifier que le graphe G_3 est dans $\mathcal{G}_m$ pour $m \geq 7$.

Soient $F'_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$ et F''_1 les deux sous-graphes de G isomorphes à F_1 d'arêtes supérieures (indépendantes) respectives w_1w_2 et $w'_1w'_2$.

(1) Puisque $k = 5$ et w'_1 a exactement deux voisins sur C , du Lemme 3.5, les voisins de w'_1 sont v_2 et v_3 , v_4 et v_5 ou bien v_1 et v_5 ; traitons le cas $N_G(w'_1) \cap C = \{v_2, v_3\}$ (les autres cas sont similaires à celui-ci); donc $N_G(w'_2) \cap C$ est $\{v_4, v_5\}$ ou bien $\{v_1, v_5\}$, considérons le cas $N_G(w'_2) \cap C = \{v_4, v_5\}$ (l'autre cas est similaire à celui-ci, il suffit de remplacer w'_1 par w'_2); ainsi $F''_1 = w'_1w'_2 - v_2v_3v_4v_5$. Soit $v \in H \setminus \{w_1, w_2, w'_1, w'_2\}$. Le sommet v , est forcément adjacent à v_1 et à v_5 car ce sont les seuls sommets consécutifs de C pouvant avoir d'autres voisins de H ; v est non adjacent à aucun des sommets w_1, w_2, w'_1 et à w'_2 car sinon il serait adjacent aux deux extrémités de l'arête supérieure de F'_1 ou de F''_1 (pour éviter la création de $K_{1,3}$) ce qui entraîne l'existence d'un triangle dans H ce qui n'est pas le cas; le graphe G' ainsi obtenu est une extension de G_3 par le sommet v .

(2) Puisque B est un bloc de G' , on peut supposer que H est un voisinage maximal de C et $B \setminus G \neq \emptyset$. De (1), G est l'extension de G_3 par un sommet v adjacent à v_1 et à v_5 et il existe un sommet de $B \setminus G$ ayant au moins un voisin dans H . Soit A l'ensemble des sommets de $B \setminus G$ tels que chaque sommet de A a au moins un voisin dans H . Ainsi, $|A| \geq 2$ car sinon il existe un seul sommet A adjacent à w_1, w_2, w'_1 et à w'_2 (car B est 2-connexe maximal et ne contient pas de $K_{1,3}$) ce qui entraîne que B n'est pas 3-colorable (facile à vérifier). Ainsi, H est engendré par $\{v, w_1, w_2, w'_1, w'_2\}$ où w_1w_2 et $w'_1w'_2$ sont deux arêtes supérieures des deux copies de F_1 et A contient v' et v'' . Supposons qu'il existe P une chaîne sans corde d'extrémités v' et v'' telle que $P \subset B \setminus G$. Sans perte de généralité, on peut supposer que v' (resp. v'') est adjacent à w_1 donc à w_2 (resp. w'_1 et à

w'_2); l'ensemble de sommets $P \cup \{w_1, v_1, v_5, v_4, v_3, w'_1\}$ engendre un trou de longueur au moins huit dans B , contradiction. Donc v' et v'' ne sont pas adjacents et ne sont pas reliés par une chaîne contenue dans $B \setminus G$. De même, v' (ou v'') n'est pas relié à v par une chaîne minimale P telle que $P \setminus \{v\} \subset B \setminus G$ car sinon, $P \cup \{v_1, v_2, w'_1, w'_2, v_4, w_2\}$ engendre un trou de longueur au moins huit dans B , ce qui est impossible. Donc B est l'extension de G_3 de trois sommets chacun est de degré deux. ■

Puisque G_3 contient le trou $v_1 w_1 w_2 v_3 w'_1 w'_2 v_5 v_1$ de longueur sept, on a comme conséquence :

Corollaire 3.7 : *Si G vérifie la propriété $C_5(F_1 - F_1)$, alors $G \notin \mathcal{G}_5$.*

a.2. Cas d'un F_1 et F_2

Posons $F_1 = w_1 w_2 - v_1 v_2 v_3 v_4$ et $F_2 = w'_1 w'_2 - v'_1 v'_2 v'_3$ d'arêtes supérieures (indépendantes) respectives $w_1 w_2$ et $w'_1 w'_2$.

Lemme 3.8 : *Pour $G = H \blacktriangleright C_k \in G_m$ ($m \geq 5$) on suppose que G vérifie la propriété $C_k(F_i - F_j)$ d'arêtes supérieures $w_1 w_2$ et $w'_1 w'_2$. Soit l le nombre de sommets de C_k communs entre F_1 et F_2 . On a :*

1. Pour $i = 1$ et $j = 2$:
$$\begin{cases} l \leq 1, & \text{si } k > 5 \\ l = 2, & \text{si } k = 5 \end{cases}$$
2. Pour $i = j = 2$:
$$\begin{cases} l \leq 1, & \text{si } k > 5 \\ l = 1, & \text{si } k = 5 \end{cases}$$

Preuve : Les sommets de F_1 et de F_2 différents de w_i et w_j étant situés sur $C_k = v_1 \dots v_k v_1$.

1. Puisque $k \geq 5$ et $v'_1 v'_2 v'_3$ est une chaîne sans corde, le sommet v'_2 ne peut être parmi les sommets v_1, v_2, v_3, v_4 car sinon v'_2 serait de degré au moins cinq ce qui est impossible, donc v'_2 est un v_r pour $4 < r \leq k$.

Si $k > 5$: Puisque $k \equiv 2 \pmod{3}$ (par hypothèse), au plus un sommet, v'_1 ou v'_3 , est parmi les sommets v_1 et v_4 . Donc $l \leq 1$.

Si $k = 5$: Comme $v'_2 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, la seule possibilité est que $\{v'_1, v'_3\} = \{v_1, v_4\}$, le graphe correspondant est isomorphe à G_4 , de la Figure 5.6. Donc $l = 2$.

2. Des arguments similaires utilisés en 1. permettent de confirmer la conclusion.

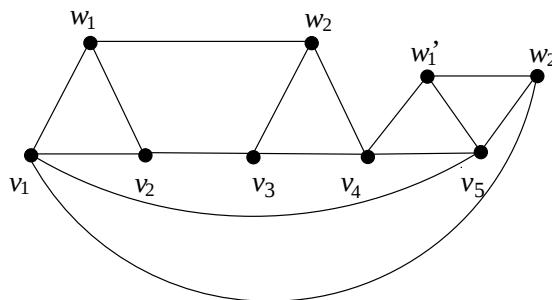


Figure 5.6 : Le graphe G_4

Lemme 3.9 : Soit G' et $G = H \blacktriangleright C_5$ deux graphes de $\mathcal{G}_7$, et G vérifie la propriété $C_5(F_1 - F_2)$ et B un bloc de G' .

Si B contient G , alors B est une extension de G_4 .

Preuve : Puisque H est un sous-graphe d'un bloc, H est voisinage maximal de C_5 . G est donc une extension de G_4 par un sommet v adjacent à v_2 et à v_3 . L'ensemble des sommets de G pouvant avoir des voisins de $B \setminus G$ est $A = \{w_1, w_2, w'_1, w'_2, v\}$. Puisque B est 2-connexe, tout sommet de $B \setminus G$ est un sommet d'une chaîne reliant deux sommets de A .

Puisque B est sans $K_{1,3}$, tout sommet x de $B \setminus G$ est tel que : x est adjacent à w_1 si et seulement si x est adjacent à w_2 , et x est adjacent à w'_1 si et seulement si x est adjacent à w'_2 . Un sommet x de $B \setminus G$ ne peut être adjacent à w_1 et à w'_1 car sinon le sous-graphe de B qui en résulte ne serait pas 3-colorable (il suffit de commencer par la coloration des sommets du triangle $v_4 w'_1 v_5 v_4$). Soit $B' = G_4 \cup \{v', v''\}$ l'extension de G_4 par deux sommets $\{v', v''\}$ où v' est adjacent à w_1 et à w_2 , et v'' est adjacent à w'_1 et à w'_2 . Puisque B est 2-connexe maximal et contient G , B contient $B' \setminus \{v'\}$ et $B' \setminus \{v''\}$. Il suffit de montrer que $B = B'$. Les deux sommets de chacune des paires $\{v, v'\}$, $\{v, v''\}$ et $\{v', v''\}$ ne sont pas adjacents dans B car sinon B contiendrait l'un des trous qui sont de longueurs huit :

$C' = vv_2v_1w'_2w'_1v_4w_2v'v$, $C'' = vv_2w_1w_2v_4v_5w'_2v''v$ ou $C''' = v'w_2v_3v_2v_1v_5w'_1v''v'$ ce qui n'est pas possible. Donc $B' \subseteq B$. Supposons qu'il existe $x \in B \setminus B'$. Il existe deux chaînes sans cordes P et P' reliant x : à v (resp. à v') ou à v (resp. à v'') ou à v' (resp. à v'') avec $P \cup P' \setminus \{v, v', v''\} \subset B \setminus B'$. Comme w_i et w'_i sont de degré quatre dans B' , le sous-graphe de B engendré par $P \cup P' \cup \{v_2, v_1, w'_2, w'_1, v_4, w_2\}$, $P \cup P' \cup \{v_2, w_1, w_2, v_4, v_5, w'_2\}$ ou $P \cup P' \cup \{w_2, v_3, v_2, v_1, v_5, w'_1\}$ contient un trou de longueur au moins neuf (x peut ne pas appartenir au trou construit), ce qui produit une contradiction. Donc $B = B'$ et B est l'extension de G par deux sommets et de G_4 par trois sommets. ■

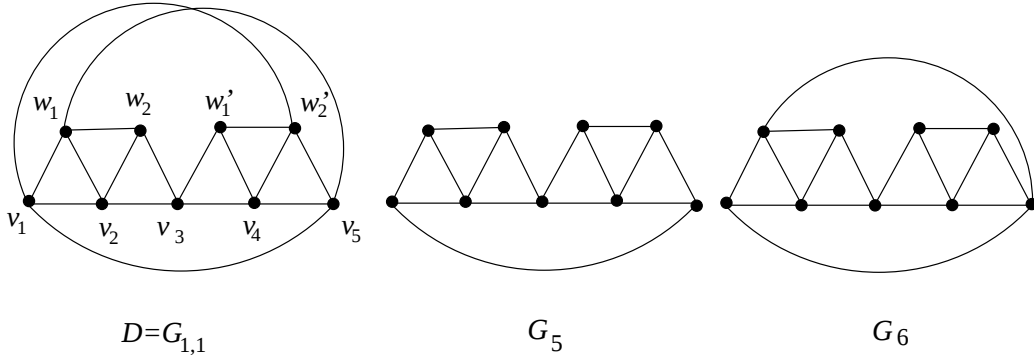
Il est clair que $G_4 \in \mathcal{G}_m$ pour $m > 5$; le graphe G_4 contient le cycle $C' = v_1v_2v_3v_4w'_1w'_2v_1$ de longueur six. Puisque C' n'admet aucune corde, $G_4 \notin \mathcal{G}_5$. De ce fait on a :

Corollaire 3.10 : *Si un graphe G vérifie la propriété $C_5(F_1 - F_2)$, alors $G \notin \mathcal{G}_5$.*

a.3 Cas de deux F_2

On considère $G = H \blacktriangleright C_5$ comme un graphe de $\mathcal{G}_7$ et vérifiant la propriété $C_5(F_2 - F_2)$, et soient $F'_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3$ et $F''_2 = w'_1w'_2 - v'_1v'_2v'_3$ les deux copies de F_2 et $C = C_5$.

Le seul sommet de C commun entre F'_2 et F''_2 est le sommet commun entre les deux chaînes $P_3 = v_1v_2v_3$ et $P'_3 = v'_1v'_2v'_3$ situées sur C , donc une seule des deux extrémités de P_3 est une extrémité de P'_3 , disons $v_3 = v'_1$ (l'autre cas produit le même graphe); soit G_5 le graphe correspondant (voir Figure 5.7); les deux arêtes $v_1w'_2$ et w_1v_5 peuvent exister (elles sont les seules, car les autres produisent un $K_{1,3}$); si ces deux arêtes existent, le graphe correspondant est D de la Figure 5.7 de la page suivante.

**Figure 5.7** : Les graphes G_5 et G_6

Remarquons que D est isomorphe au graphe $G_{1,1}$ (de la Figure 5.2) relativement au trou $C'_5 = w'_1 w'_2 v_1 v_2 v_3 w'_1$ et la chaîne de longueur quatre de son voisinage $P'_4 = v_4 v_5 w_1 w_2$. Ainsi, le sous-graphe de G engendré par $C'_5 \cup \{w_1, w_2, w'_1, w'_2\}$ est $G_{1,1}$, ou l'un des deux graphes partiels $G_5 = G_{1,1} \setminus \{v_1 w'_2, w_1 v_5\}$ et $G_6 = G_{1,1} \setminus \{v_1 w'_2\}$ (qui est le même que $G_{1,1} \setminus \{w_1 v_5\}$) (voir Figure 5.7 pour ces graphes).

Il est clair que $G_{1,1}$, G_5 et G_6 sont des graphes de $\mathcal{G}_7$ et 2-connexe. Etant donné un graphe, examinons la structure de ses blocs contenant l'un des trois graphes.

Lemme 3.11 : *Soit G' et $G = H \blacktriangleright C_5$ deux graphes de $\mathcal{G}_7$, et G vérifie la propriété $C_5(F_1 - F_2)$ et H est un voisinage maximal de C_5 et B un bloc de G' . Si B contient G , alors B est $G_{1,1}$ ou une extension de G_5 ou de G_6 .*

Preuve : Puisque G vérifie la propriété $C_5(F_2 - F_2)$, G contient $G_{1,1}$, G_5 ou G_6 comme sous-graphe. Lorsque G contient les deux arêtes $v_1 w'_2$ et $w_1 v_5$, B est $G_{1,1}$ car ce dernier est 2-connexe maximal et $G_{1,1} \in \mathcal{G}_7$. On suppose maintenant que l'arête $w_1 v_5$ existe et $v_1 w'_2$ n'est pas une arête de G ; donc B contient G_6 . Soit $v \in B \setminus G_6$; v doit être un sommet d'une chaîne P contenue de sommets intérieurs dans $B \setminus G_6$ et d'extrémités dans $\{w_2, w'_1, w'_2\}$; Puisque les voisins de w_2 sont de degré quatre dans G_6 , aucune extrémité de P ne peut être w_2 (car sinon, B contiendrait un $K_{1,3}$); puisque tout sommet de $B \setminus G_6$ adjacent à w'_1 est adjacent à w'_2 , le sommet v est adjacent à w'_1 et à w'_2 ; le graphe ainsi obtenu est 2-connexe maximal, par conséquent B est une extension de G_6 par le sommet v . Considérons

le cas où w_1v_5 et $v_1w'_2$ ne sont pas des arêtes de G ; donc B contient G_5 ; puisque H est un voisinage maximal de C_5 et B est 2-connexe maximal, il existe un sommet v de H adjacent à v_1 et à v_5 et v', v'' de $B \setminus G$ adjacents respectivement à w_1 et w_2 et à w'_1 et w'_2 . Puisque $G_5 \cup \{v\}$ est 2-connexe et dans lequel le degré des sommets de C_5 est quatre, toute chaîne reliant v' et v'' a tous ses sommets intérieurs dans $B \setminus G$. On a $v' \neq v''$ car sinon, le sous-graphe de B engendré par $G \cup \{v'\}$ ne serait pas 3-colorable (facile à vérifier). D'une part, v' et v'' ne sont ni adjacents ni reliés par une chaîne P contenue dans $B \setminus G$ car sinon, B contiendrait un trou engendré, respectivement, par $U = \{v', w_2, v_2, v_1, v_5, v_4, w'_1, v''\}$ ou $P \cup U$ de longueur au moins huit ce qui n'est pas possible ; d'autre part, v' (et par symétrie v'') et v ne sont ni adjacents ni reliés par une chaîne P contenue dans $B \setminus G$ car sinon, B contiendrait un trou engendré, respectivement, par $W = \{v, v', w_1, v_2, v_3, w'_1, w'_2, v_5\}$ ou par $P \cup W$ de longueur au moins huit. Par conséquent, B est une extension de G_5 par $\{v, v', v''\}$. ■

Comme $\mathcal{G}_5 \subset \mathcal{G}_7$ et tout bloc d'un graphe de $\mathcal{G}_7$, contenant un sous-graphe vérifiant la propriété $C_5(F_2 - F_2)$, contient $G_{1,1}$, G_5 ou G_6 et puisque chacun de ces trois graphes contient un trou de longueur six, on peut dire qu'aucun graphe de $\mathcal{G}_5$ ne vérifie la propriété $C_5(F_2 - F_2)$. C'est ainsi que dans les graphes de $\mathcal{G}_5$, autour de C_5 il y a au plus un F_2 .

Comme conséquence des trois paragraphes précédents :

Théorème 3.12 : *Le voisinage d'un trou C_5 , dans un graphe $G \in \mathcal{G}_5$ ($m = k = 5$), ne peut contenir deux arêtes indépendantes.*

– **b. Cas où $\lambda(H) = 2$ et H contient un triangle**

Rappelons que si le voisinage H , du trou C , contient un triangle T , T est une composante connexe de H et chacun de ses sommets a exactement deux voisins sur C .

Lemme 3.13 : *Soit $G = H \blacktriangleright C_5$ un graphe de $\mathcal{G}_7$ ($m = 7, k = 5$).*

Si H contient un triangle T alors $H \setminus T$ est un ensemble stable d'ordre au plus deux.

Preuve : Posons $T = w_1w_2w_3w_1$ et $C = C_5 = v_1 \dots v_5v_1$. Soit W une composante connexe de $H \setminus T$. On sait que $|H| \leq 5$. Supposons que w_4w_5 est une arête de W . De la Remarque 3.2, les sommets de chacune des deux arêtes w_1w_2 et w_4w_5 avec des sommets de C est F_1 ou F_2 (de Figure 5.4).

Cas 1. w_1w_2 est une arête supérieure de F_1

Posons $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$. Le sommet w_3 doit avoir deux voisins consécutifs sur C ; puisque G est sans K_4 , $N_G(w_3) \cap C$ est $\{v_1, v_5\}$ ou $\{v_4, v_5\}$ ou $\{v_2, v_3\}$ (les deux premières possibilités produisent les mêmes sous-graphes de G), soient (a1) et (b1) les graphes correspondants (voir de Figure 5.8 ci-dessous).

Sous cas 1.1 Le cas du graphe (a1) : Puisque chaque sommet de $F_1 \cap C$ est de degré trois ou quatre dans le sous-graphe engendré par $T \cup C$, w_4w_5 ne peut être une arête supérieure d'un F_2 ; donc w_4w_5 est une arête de F'_1 , un sous-graphe de G isomorphe à F_1 . Puisque $k = 5$, les voisins (consécutifs) de w_4 , sur C , sont seulement $\{v_2, v_3\}$ ou $\{v_4, v_5\}$ (puisque v_1 est devenu de degré quatre). Disons w_4 est adjacent à v_2 et à v_3 par conséquent w_5 est adjacent à v_4 et à v_5 . Dans G' , le graphe ainsi obtenu, tous les sommets de C sont de degré quatre, donc $G = G'$. Comme on peut le vérifier, $\chi(G') = 4$ (il suffit de commencer par colorer les sommets du triangle $v_1v_2w_1v_1$). Contradiction.

Sous cas 1.2. Le cas du graphe (b1) : w_4w_5 ne peut être l'arête supérieure d'un F'_1 , un sous-graphe de G isomorphe à F_1 , car il n'y a que trois sommets de C pouvant être voisins de w_4 et w_5 . Donc w_4w_5 est une arête supérieure d'un F_2 . Le sommet v_5 est forcément adjacent à w_4 et à w_5 ; par symétrie, v_4 (resp. v_1) est adjacent à w_4 (resp. à w_5). Le graphe ainsi obtenu est un sous-graphe de G mais non 3-colorable, contradiction.

Cas 2. L'arête w_1w_2 est une arête supérieure de F_2 .

Posons $F_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3$.

Utilisons les mêmes arguments du cas précédent, le sommet w_3 doit avoir deux voisins consécutifs sur C ; $N_G(w_3) \cap C$ est $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$ ou $\{v_1, v_5\}$ (le premier et le dernier cas sont identiques), voir en Figure 5.8. (c1) et (d1) les graphes correspondants.

Sous cas 2.1 Le cas du graphe (c1).

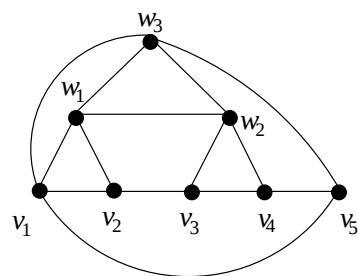
L'arête w_4w_5 ne peut être une arête supérieure d'un F_1 , donc w_4w_5 est une arête de F_2 , où w_4 est adjacent à v_4 et à v_5 et w_5 est adjacent à v_5 et à v_1 . Le graphe ainsi obtenu n'est pas 3-colorable, contradiction.

Sous cas 2.2. Le cas du graphe (d1), w_4w_5 ne peut être une arête supérieure d'un F_2 , donc w_4w_5 est une arête de F_1 ; il n'y a qu'une seule possibilité, l'un des deux sommets w_4 et w_5 est adjacent à v_3 et à v_4 l'autre à v_5 et à v_1 ; le graphe ainsi construit n'est pas 3-colorable, contradiction.

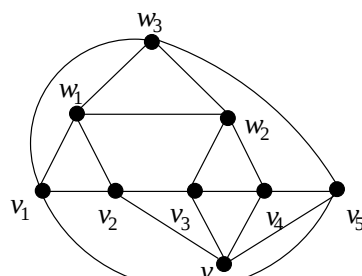
En conclusion w_4w_5 n'est pas une arête de W . Par conséquent, W est un ensemble stable d'ordre au plus deux. ■

Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des graphes de la Figure 5.8 (de la page suivante). Il est facile de vérifier que $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}_7$. Posons $\mathcal{T}_1 = \{ (a1), (b1), (c1), (d1) \}$ et $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1$.

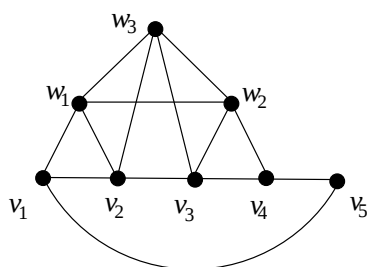
Remarque 3.3 : Le sous-graphe $T \blacktriangleright C$, de G , est isomorphe à l'un des graphes de $\mathcal{T}_1$ (T étant un triangle).



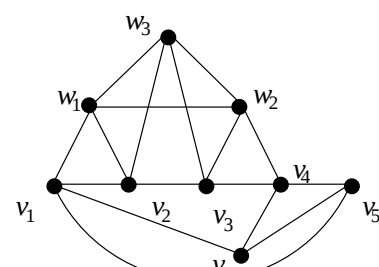
(a1)



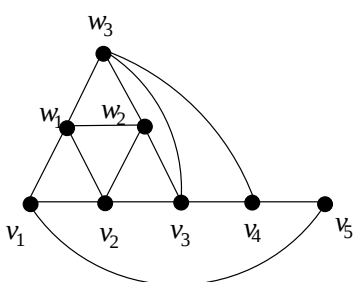
(a2)



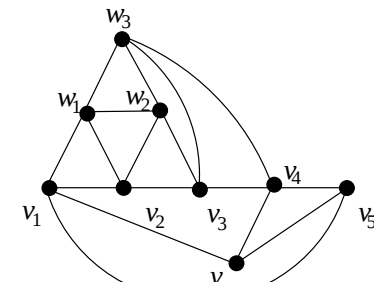
(b1)



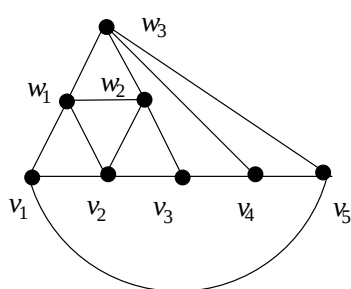
(b2)



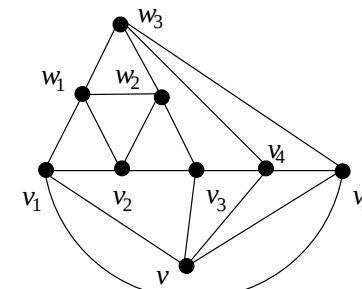
(c1)



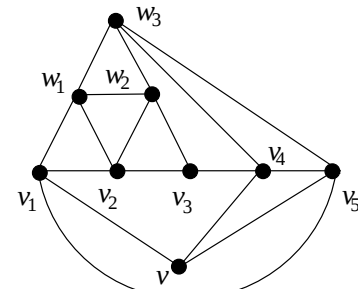
(c2)



(d1)



(d2)



(d3)

 Figure 5.8 : Les graphes de l'ensemble $\mathcal{T}$

Corollaire 3.14 : *Soit $G = H \blacktriangleright C_5$ un graphe de $\mathcal{G}_7$ tel que H contient un triangle T . Si le degré de chaque sommet de H (degré dans G) est au moins trois et H maximal pour cette propriété, alors G est l'un des graphes de $\mathcal{T}_2$.*

Preuve : Utilisons les notations du Lemme 3.13. D'après la Remarque 3.3, G contient l'un des graphes $\mathcal{T}_1$; ces graphes ne sont pas maximaux relativement à la propriété du degré d (dans G) des sommets de $H \setminus T$. Construisons tous les graphes possibles à partir de ceux de $\mathcal{T}_1$ suivant d . Soit A l'ensemble des sommets de $H \setminus T$; du Lemme 3.13, $H \setminus T$ est un ensemble stable d'ordre au plus deux. Soit $v \in A$; v n'est adjacent à aucun sommet de H .

Cas de (a1):

$d(v) = 4$: Puisque $d(v_1) = 4$, il n'y a qu'une seule possibilité, G est (a2).

$d(v) = 3$: Puisque les voisins de v doivent être consécutifs, G doit être le graphe partiel (a2) $\setminus \{vv_2\}$ ou (a2) $\setminus \{vv_5\}$, ces deux graphes contiennent un $K_{1,3}$. Ce cas est donc impossible.

Cas de (b1):

Puisque v_2 et v_3 sont de degrés quatre dans G , il y a un seul cas : $d(v) = 3$ et $N(v) = \{v_1, v_4, v_5\}$, donc G est (b2).

Cas de (c1):

Cette situation est similaire au cas précédent, G est donc (c2).

Cas de (d1) :

$d(v) = 4$: Il n'y a qu'une seule possibilité, G est (d2).

$d(v) = 3$: Les voisins de v doivent être consécutifs parmi $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$. v est adjacent à v_1 car sinon v serait adjacent à v_3 et G contiendrait un $K_{1,3}$ engendré par $\{v, v_1, v_3, v_5\}$. Donc G est isomorphe à (d3). ■

Théorème 3.15 : *Soit $G' \in \mathcal{G}_7$ contenant $G = H \blacktriangleright C_5$ tel que H contient un triangle.*

Soit B un bloc de G' .

Si B contient G , alors B est l'un des graphes de $\mathcal{T}_2$ ou est une extension de l'un des graphes de $\mathcal{T}_1$. Par conséquent, le voisinage d'un trou C_5 , dans tout graphe de $\mathcal{G}_5$, ne contient pas de triangle.

Preuve : Soit B un bloc de G' vérifiant les hypothèses. Donc H est un voisinage maximal de C_5 dans B . Si H ne contient aucun sommet de degré deux, on a $G \in \mathcal{T}_2$ (Corollaire 3.14) ; comme les graphes de $\mathcal{T}_2$ sont 2-connexe maximaux, $B = G$; sinon, soit S l'ensemble (stable) des sommets de H de degrés deux (dans G) ; on a $1 \leq |S| \leq 2$ (Lemme 3.13) ; lorsque $|S| = 2$ et $S = \{w_4, w_5\}$; en tenant compte du degré de chaque sommet qui ne doit pas dépasser quatre, G s'obtient des graphes de $\mathcal{T}_1$ d'une seule façon : w_4 et w_5 sont respectivement adjacents à v_2, v_3 et v_3, v_4 dans (a1), à v_4, v_5 et v_1, v_5 dans (b1) et dans (c1), à v_3, v_4 et v_1, v_5 dans (d1) ; lorsque $|S| = 1$ et $S = \{w_4\}$, G s'obtient seulement de (d1) : w_4 est adjacent à v_4, v_5 . Dans les quatre premières possibilités, w_4 et w_5 ne sont pas reliés par une chaîne sans corde (ayant au moins un sommet intérieur) qui soit contenue strictement dans $B \setminus G$ car sinon B contiendrait un trou de longueur au moins huit ce qui n'est pas possible (facile à détecter). Donc dans les cinq cas énumérés, G est une extension de l'un des graphes de $\mathcal{T}_1$; comme le graphe G (obtenu) est 2-connexe maximal on a $B = G$; par conséquent B est une extension de l'un des graphes de $\mathcal{T}_1$ (par au plus deux sommets).

Quant à la conséquence ; puisque $\mathcal{G}_5 \subset \mathcal{G}_7$, si on suppose qu'il existe un bloc $B = T \blacktriangleright C_5$ d'un graphe G' de $\mathcal{G}_5$ avec T est un triangle, B serait l'un des graphes de $\mathcal{T}_1$; donc B contiendrait un trou de longueur six ce qui n'est pas possible. ■

Posons $\mathcal{F}_1 = \{G_1, G_{1,1}, G_{1,2}, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{T}$. Chaque graphe de $\mathcal{F}$ est, soit un bloc soit son extension est un bloc d'un graphe de $\mathcal{G}_7$. Il est bien clair que pour les deux valeurs relativement petits, $k = 5$ et $m = 7$, le nombre de blocs contenant un C_5 , dans un graphe de $\mathcal{G}_7$, augmente en fonction du nombre des composantes connexes du voisinage de C_5 ; pour cette raison, nous allons limiter l'étude des cas suivants au seul cas où $k = m = 5$.

Cas où $\lambda(H) \leq 2$ et H contient au plus une arête

Soient B_i , pour $i = 1, \dots, 5$, les graphes de la Figure 5.9. Il est facile de vérifier qu'ils sont dans $\mathcal{G}_5$.

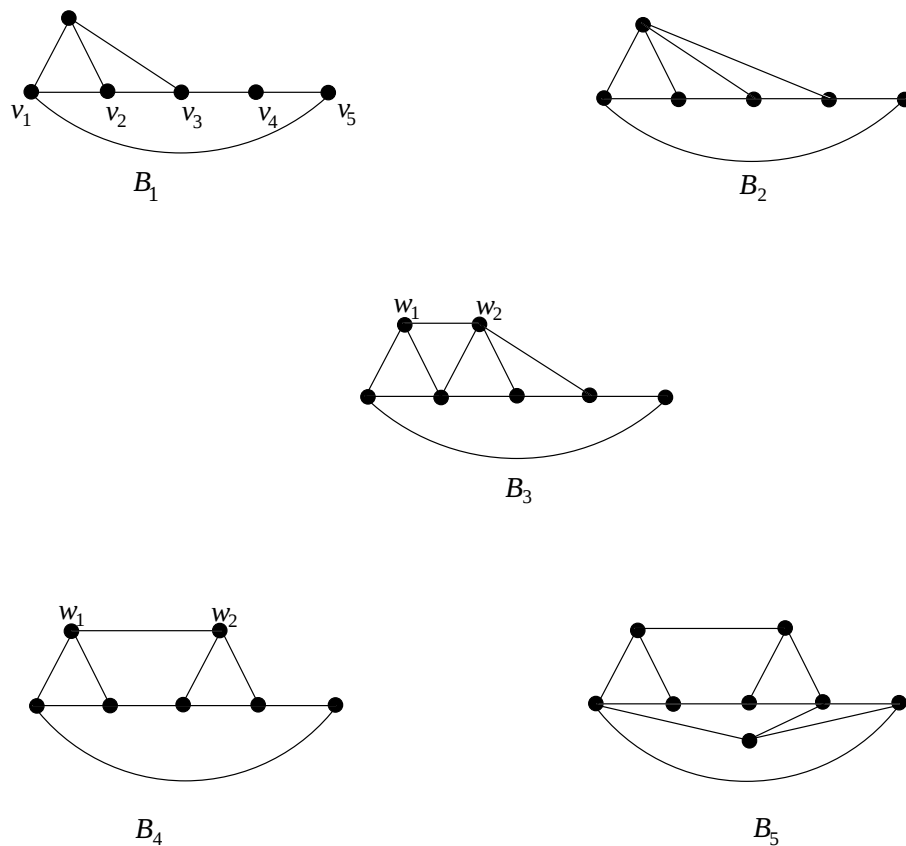


Figure 5.9 : Les graphes de base des blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$

Considérons $G = H \blacktriangleright C_5$ un graphe de $\mathcal{G}_5$ avec $C = C_5 = v_1 \dots v_5 v_1$ et H contient au plus une arête. Rappelons que si H contient une arête $w_1 w_2$, on a $H \setminus \{w_1, w_2\}$ est un ensemble stable d'ordre au plus trois et $w_1 w_2$ est une arête supérieure d'un F_1 ou d'un F_2 .

Pour le graphe G on démontre les deux lemmes suivants :

Lemme 3.16 : *On suppose que H contient une arête.*

Si le degré, dans G , de tout sommet de H est au moins trois, alors G est isomorphe à B_3 , B_4 ou à B_5 .

Preuve : Soit $e = w_1w_2$ l'unique arête de H ; e est une arête supérieure de F_1 ou de F_2 . Examinons les deux cas.

Cas 1. $e \in F_1$ avec $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$.

Lorsque $H \setminus \{w_1, w_2\}$ ne contient pas de sommet de degré trois ou quatre, G est isomorphe à B_4 . Soit v un sommet de $H \setminus \{w_1, w_2\}$. Puisque $3 \leq d = d(v) \leq 4$ (degré dans G), il y a deux possibilités.

Sous cas 1.1, $d = 4$.

Puisque $|C| = 5$, l'ensemble des voisins de v , $N(v)$, est $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ou $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ car sinon, l'une des ensembles $\{v_1, w_1, v, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v, w_2\}$ et $\{v_2, v_3, v, w_1\}$ induirait un $K_{1,3}$ dans G ; les deux possibilités produisent la même situation, la première implique l'existence de $v_1w_1w_2v_3vv_5v_1$ un trou de longueur six dans G . Donc ce cas est impossible.

Sous cas 1.2, $d = 3$.

L'ensemble $N(v) \cap C$ est $\{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\}$ pour un certain j , $1 \leq j \leq 5$ (les indices sont comptés modulo 5). On a $j = 4$ car sinon $\{v_1, w_1, v, v_5\}$, $\{v_4, w_2, v, v_5\}$, $\{v_3, w_2, v_2, v\}$ ou $\{v_2, w_1, v, v_3\}$ induirait un $K_{1,3}$ dans G ce qui est impossible. Donc $N(v) \cap C = \{v_4, v_5, v_1\}$. Le sous-graphe $H \setminus \{w_1, w_2, v\}$, de G , ne contient pas d'autres sommets de degré trois car sinon les voisins d'un tel sommet sur C seront non consécutifs. Par conséquent G est isomorphe à B_5 .

Cas 2, $e \in F_2$, $F_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3$.

Un seul sommet, parmi w_1 et w_2 , doit avoir trois voisins sur C car sinon G serait non 3-colorable ou contiendrait un trou de longueur six ; on peut supposer que l'arête w_2v_4 existe. Lorsque $H \setminus \{w_1, w_2\}$ ne contient pas de sommet de degré trois ou quatre, G est isomorphe à B_3 . Maintenant, supposons qu'il existe un sommet v dans $H \setminus \{w_1, w_2\}$. v doit être adjacent à au moins trois sommets consécutifs parmi $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$. v est non adjacent à v_1 car sinon, $C \cup \{v, w_1, w_2\}$ induirait un sous-graphe de G qui n'est pas 3-colorable ; donc v est adjacent à v_3, v_4 et à v_5 ; par conséquent $v_1w_1w_2v_3vv_5v_1$ est un cycle sans corde de longueur six dans G , contradiction. ■

Lemme 3.17 : *On suppose que H ne contient aucune arête.*

Si le degré, dans G , de tout sommet de H est au moins trois, alors G est isomorphe à l'un des graphes B_i , $i = 0, 1, 2, 3$. (B_0 est un graphe isomorphe à C_5).

Preuve : Si H ne contient aucun sommet de degré trois ou quatre, on a $H = \phi$ et donc $G = C = B_0$. On suppose maintenant que $H \neq \phi$. Soit w un sommet de H avec $d = d(w)$ (degré dans G); puisque les voisins de w sur C sont consécutifs, on pose $N(w) = \{v_i : 1 \leq i \leq d\}$ ($3 \leq d \leq 4$). Lorsque $H \setminus \{w\} = \phi$ et $d = 3$ ou 4 , le graphe G est isomorphe à B_1 ou à B_2 .

Cas 1, $d = 4$.

Supposons qu'il existe un sommet $u \in H \setminus \{w\}$; comme G est sans $K_{1,3}$, $N(u) \neq N(w)$. Si $d(u) = 4$, on a $N(u) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}, v_{j+3}\}$ pour un certain j , $2 \leq j \leq 5$ (les indices sont comptés modulo 5); pour toute 3-coloration des sommets de $C \cup \{u, w\}$, en commençant par colorer les sommets du triangle $v_1 v_2 w v_1$, les sommets u et v_5 reçoivent la même couleur, contradiction. Si $d(u) = 3$; en utilisant les mêmes arguments précédents, une contradiction se produit aussi. Par conséquent, $|H| = 1$; d'où G est isomorphe à B_2 .

Cas 2, $d = 3$.

Soit $u \in H \setminus \{w\}$. On a $d(u) \neq 4$ car sinon, on revient au cas précédent et on aura $u = w$ ce qui est impossible. Donc $d(u) = 3$, par suite $N(u) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\}$ pour un certain j , $2 \leq j \leq 5$. le cas où $j = 2$ (resp. $j = 3$) est le même que le cas où $j = 5$ (resp. $j = 4$). Lorsque $j = 3$, pour toute 3-coloration des sommets de $C \cup \{u, w\}$, l'ensemble des couleurs de $\{w, v_2\}$ et celui de $\{u, v_4\}$ est le même; donc v_1 ou v_5 ne peut être coloré. Ce cas est donc écarté. Pour $j = 2$, l'ensemble $C \cup \{u, w\}$ engendre un sous-graphe isomorphe à B_3 (observons que H n'a pas plus de deux sommets de degrés trois car sinon, G ne serait pas 3-colorable). ■

Comme conséquence aux deux derniers lemmes on a :

Théorème 3.18 : *Soit $G = H \blacktriangleright C$ un graphe de $\mathcal{G}_5$.*

Si le voisinage H de C est maximal, alors G est une extension de l'un des graphes B_i , $i = 0, 1, \dots, 5$.

Preuve : Soit A l'ensemble des sommets de H de degrés deux (degré dans G). Lorsque $H \setminus A = \phi$; puisque les voisins de tout sommet de A appartenant à C sont consécutifs, G est une extension de B_0 (un graphe isomorphe à C_5). Lorsque $H \setminus A \neq \phi$; du Lemme 3.16 et Lemme 3.17, $G \setminus A$ est isomorphe à l'un des graphes B_i , $i = 1, \dots, 5$. Soit i un indice tel que G contient B_i et un sommet $w \in A$ ayant ses voisins v_j et v_{j+1} sur C ; le sommet v_j (resp. v_{j+1}) est simplicial dans $G \setminus \{v_{j+1}\}$ (resp. $G \setminus \{v_j\}$) car sinon, w serait un sommet d'un $K_{1,3}$ contenu dans G ce qui est impossible; donc G est une extension de B_i . ■

Remarque 3.4 : Soit G' un graphe de $\mathcal{G}_5$. On suppose que G est un sous-graphe de G' avec $G = H \blacktriangleright C$, et H contient deux sommets distincts et non adjacents, w et w' , de degrés deux dans G . Les sommets w et w' ne sont pas reliés par une chaîne sans corde P telle que $P \setminus \{w, w'\}$ est contenue dans $G' \setminus G$ car sinon, le sous-graphe de G' engendré par $P \cup C$ contiendrait un trou de longueur au moins six.

Maintenant, on peut formuler le résultat résumant la structure de tout graphe de $\mathcal{G}_5$.

Théorème 3.19 : Soit G' un graphe de $\mathcal{G}_5$ et B un bloc de G' .

Si B contient un trou de longueur cinq, alors B est une extension de l'un des graphes B_i , $i = 0, 1, \dots, 5$.

Preuve : Soit B un bloc de G' contenant le trou $C = C_5$. Soit G le sous-graphe de B engendré par les sommets de C et tous leurs voisins (dans G'), ainsi $G = H \blacktriangleright C$ (G est 2-connexe). Puisque B est 2-connexe maximal, H est de voisinage maximal de C . Du Théorème 3.18, G est l'un des graphes $G_i = H_i \blacktriangleright C$, $i = 0, 1, \dots, 5$ où G_i est une extension du graphe B_i .

Pour $i = 1, 2$ ou 3 : Puisque tout sommet de H_i de degré au moins trois n'est adjacent à aucun sommet de $B \setminus G_i$, on a $B \setminus G_i = \phi$; donc, d'après la Remarque 3.4, B est isomorphe à l'un des G_i qui est une extension de B_j pour $j = 0, 1, 2, 3$.

Pour $i = 4$ ou 5 : Soit w_1 et w_2 les deux extrémités de l'unique arête de H_i , d'ensemble de voisins sur C est respectivement $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_3, v_4\}$ (voisinage dans G_i). Puisque B est 2-connexe maximal et sans $K_{1,3}$, il existe un sommet u de $B \setminus G_i$ adjacent aux sommets simpliciaux w_1 et w_2 ; ainsi $G'_i = G_i \cup \{u\}$ est une extension de G_i par le sommet u .

Il reste à montrer que dans B , pour tout sommet w de $H_i \setminus \{w_1, w_2\}$ on a les deux faits suivants :

- (1) u et w ne sont pas adjacents
- (2) u et w ne sont pas reliés par une chaîne sans corde P telle que:

$$\phi \neq P \setminus \{u, w\} \subset B \setminus G'_i.$$

Soit v le sommet de B_5 qui a trois voisins sur C ($v \in G'_5$). Supposons que (1) n'est pas vérifié. Puisque l'ensemble des voisins de w sur C est $\{v_1, v_5\}$, $\{v_4, v_5\}$ ou $\{v_2, v_3\}$, on a $G'_i \setminus \{v_1, w_2\}$, $G'_i \setminus \{v_1, v_5, w_2\}$ ou $G'_i \setminus \{v_2, w_2, v\}$ est un trou de longueur au moins six, contradiction.

Au lieu de l'arête uw , considérons une chaîne sans corde P d'extrémités u et w telle que $P \setminus \{u, w\} \subset B \setminus G'_i$; de la Remarque 3.4 et avec les mêmes arguments qu'en (1), le fait (2) peut être établi. On a $B \setminus G'_i = \phi$ car sinon, il existerait une chaîne sans corde P' contenant un sommet u de $B \setminus G'_i$ et reliant deux sommets de $H_i \cup \{u\}$ ce qui contredit le fait (2). Donc $B = G'_i$, par conséquent, B est une extension de B_i , $i = 4$ ou 5 . ■

Comme conséquence :

Corollaire 3.20 : *Soit G' un graphe de $\mathcal{G}_5$ et B un bloc de G' .*

Si B contient l'un des graphes B_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, alors B est une extension de l'un des graphes B_i par au plus cinq sommets et tout sommet de degré deux dans B est un sommet simplicial de degré deux dans G' ou un point d'articulation dans G' .

5.4 Coloration par liste des blocs des graphes de $\mathcal{G}_5$

Un graphe est dit *k-dégénéré* si tous ses sous-graphes contiennent un sommet de degré inférieur ou égal à k .

Pour permettre la coloration par liste des blocs de $\mathcal{G}_5$ on introduit une variante de la dégénérescence d'un graphe.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une arête $e = xy$ de G et un entier $k \geq 3$. Soit $G' = G \setminus \{e\}$, le graphe partiel obtenu de G par la suppression de l'arête e .

On dit que G est *e-k-dégénéré* si : il existe une numérotation des sommets de G en $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n = |V|$) telle que $x_1 = x$, $x_n = y$ et pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $d_{G'_i}(x_i) \leq k - 1$ où G'_i est le sous-graphe de G' engendré par $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$.

Remarquons que G'_i est un sous-graphe de G'_{i-1} et $G'_1 = G'$.

Remarque 4.1 : Un graphe *k-dégénéré* n'est pas forcément *k-liste-colorable*, il suffit de prendre une clique d'ordre au moins deux ; par contre, il n'est pas difficile pour montrer qu'il est $(k + 1)$ -liste-colorable

Gardons ces mêmes notations et montrons :

Lemme 4.1 : Soit $G = (V, E)$ un graphe *k-colorable* et $\phi \neq E' \subseteq E$ tel que G est *e-k-dégénéré* pour tout $e \in E'$. Soit $e = xy \in E'$ et $L(v)$ une liste de couleurs pour chaque sommet v de G avec $|L(v)| = k$. On a :

1. Si $L(x) \neq L(y)$, alors G est *L-colorable*.
2. Si le graphe partiel $H = (V, E')$ de G est connexe, alors G est *k-liste-colorable*.

Preuve :

1. Construisons une coloration c des sommets de G telle que $c(v) \in L(v)$ pour tout $v \in V$. Puisque $L(x) \neq L(y)$, il existe "une couleur" $\alpha \in L(x_n) \setminus L(x)$, ($x_n = y$) ; posons $c(x_n) = \alpha$. Supposons que les sommets $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i+1}$ sont déjà colorés, on veut colorer le sommet x_{n-i} . Donc tous les sommets de G'_{n-i+1} sont colorés ; puisque

$G'_{n-i+1} \cup \{x_{n-i}\}$ est le graphe G'_{n-i} et $d_{G'_{n-i}}(x_{n-i}) \leq k-1$, il existe $\beta \in L(x_{n-i}) \setminus \{c(v) : v \text{ est un voisin de } x_{n-i} \text{ dans } G'_{n-i}\}$; donnons à x_{n-i} la couleur β ($c(x_{n-i}) = \beta$); on obtient ainsi une coloration c de G'_{n-i} où chacun de ses sommets a reçu une couleur de sa liste. Donc G'_1 est L -colorable; Comme $\alpha \notin L(x_1)$ ($x_1 = x$), la coloration c est aussi une coloration de G . Par conséquent G est L -colorable.

2. Soit L une liste quelconque associant à chaque sommet v , une liste de couleurs $L(v)$ et H vérifiant l'hypothèse. S'il existe $e = xy \in H$ telle que $L(x) \neq L(y)$, on se retrouve en 1. par conséquent G est L -colorable; sinon, comme H est connexe, par transitivité de l'égalité entre les listes des sommets, il y a une seule liste pour tous les sommets de G ; puisque G est k -colorable, G est L -colorable. Donc G est k -liste-colorable. ■

Comme conséquence aux Lemme 4.1 et Corollaire 3.20 :

Corollaire 4.2 : *Tout bloc de tout graphe de $\mathcal{G}_5$ est 3-liste-colorable.*

Preuve : Soit B un bloc d'un graphe de $\mathcal{G}_5$. B est donc une extension de l'un de graphes B_i , $i = 1, \dots, 5$ ou $B_0 = C_5$ (Corollaire 3.20); puisque l'extension de B_i , $i = 0, 1, \dots, 4$, sont 2-dégénérés, B est donc 3-liste-colorable (Remarque 4.1). Il reste à vérifier l'extension de B_5 . En effet, puisque tout sommet de degré deux de B peut être coloré par la couleur disponible de sa liste après avoir coloré les sommets de B_5 . On peut vérifier facilement que B_5 est xy -3-dégénéré pour toute arête $xy \in \{w_1w_2, w_1v_1, v_2v_1, vv_1, v_5v_1, w_2v_4, v_3v_4\}$. Du 2. du Lemme 4.1, on déduit que B est 3-liste-colorable. ■

5.5 Conclusion

Nous avons décrit la structure complète du voisinage d'un trou dans les graphes sans griffes, ce qui nous a permis de décrire la structure complète, par une petite classe de graphes de base, des graphes sans griffes de $\mathcal{G}_5$ et prouvé que ses blocs sont 3-liste-colorables ; l'exemple étudié, pour les trous de longueur $m = 7$, montre clairement que le nombre des blocs des graphes de la classe $\mathcal{G}_7$ est très élevé ; l'idée qui consiste à déterminer les blocs des graphes de $\mathcal{G}_m$ pour m quelconque d'une manière directe (leur énumération) est à proscrire, il serait donc intéressant d'envisager des opérations sur les graphes, comme l'extension d'un graphe par un ou plusieurs sommets, qui peuvent permettre de diminuer le nombre de graphes de base nécessaire à la description des graphes de $\mathcal{G}_m$. Une telle description contribue à la coloration par liste des différents blocs d'un graphe puis l'étendre au graphe tout entier ce qui peut aboutir à la résolution du problème de coloration par liste connu pour être difficile.

Annexes

Bibliographie

- [1] M. Abbas, Thèse de doctorat es science, contribution au rapprochement de la théorie des graphes et de l'aide à la décision : graphes parfaits et modèles de préférence, Université libre de Bruxelles, 1994.
- [2] M. Abbas and Y. Saoula, Polynomial algorithms for kernel in comparability, permutation, and P_4 -free graphs, 4OR, Quarterly Journal of Operations Research, 3 : 217-225 (2005).
- [3] M. Abbas and Y. Saoula, Blocks in Graphs of a Class of Claw-Free and 3-Colorable Graphs, International Mathematics Forum, 3, 2008, no. 37, pp. 1813-1822.
- [4] M. Abbas and Y. Saoula, Characterization of neighborhood structure of every hole in claw-free and 3-colorable graphs (Submitted).
- [5] N. Alon, M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, Combinatorica 12 (1992), pp. 125-134.
- [6] C. Berge, sur une conjecture relative au problème des codes optimaux, Comm. 13^{eme} Assemblée Gén. URSI, Tokyo 1962.
- [7] C. Berge, Graphes et Hypergraphes. Dunod Ed. Paris, 1973.
- [8] C. Berge, Graphs, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6 (North-Holland, Amsterdam, 1985) Chapter 14.
- [9] C. Berge, Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux, Publ. Econométriques 6 (1977).
- [10] P. Duchet, Classical Perfect Graphs, An introduction with emphasis on triangulated and interval graphs , in : Topics on perfect graphs, Annals of Discrete Mathematics (C. Berge and V. Chvátal, Eds., North-Holland, Amsterdam),(21) 1984, pp. 67-96.

- [11] C. Berge and P. Duchet, Strongly Perfect Graphs, in : Topics on perfect graphs, Annals of Discrete Mathematics, (C. Berge and V. Chvátal, Eds., North-Holland, Amsterdam), (21) 1984, pp. 57-61.
- [12] C. Berge and P. Duchet, Recent problems and results about kernels in directed graphs, Discrete Mathematics 86 (1990), pp. 27-31.
- [13] M. Blidia, Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes, Thèse, (Doctorat 3^{ème} cycle), University of Paris 6 (1984).
- [14] M. Blidia, P. Duchet and F. Maffray : Note on kernels in perfect graphs, Combinatorica, 13 (2) (1993), pp. 231-233.
- [15] M. Blidia, Graphes parfaits et Noyaux dans les graphes orientés, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. USTHB, Alger, 1998.
- [16] C. Champetier : Kernels in some orientations of comparability graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B 47 (1989), pp. 111-113.
- [17] S.A. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, in : Proceeding of third Annual ACM Symposium on theory of Computing (Shaker Heights, Ohio, 1971), ACM, New York, 1971, pp. 151-158.
- [18] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, The strong perfect graph theorem, Annals of Math., 164 (2006), pp. 51-229.
- [19] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM300, Centre de Recherche Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [20] V. Chvátal and P. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming, Ann. Discrete Math. 1 (1973), pp. 145-162.
- [21] V. Chvátal and N. Sbihi, Recognizing claw-free Berge graphs, Journal of Combinatorial Theory B 44 (1988), pp. 154-176.
- [22] B. Dushnik and E. W. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 600-610.
- [23] P. Duchet and H. Meyniel, Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientés, Discrete Math. 43 (1983), pp. 21-27.

- [24] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965), pp. 449-467.
- [25] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *Journal of Research of the National Bureau Standards (B)* 69 (1965), pp. 67-72.
- [26] J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices, *Journal of Research of the National Bureau Standards (B)* 69 (1965), pp. 125-130.
- [27] P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, *Congr. Numer.* 26 (1980), pp. 122-157.
- [28] S. Foldes and P. L. Hammer, Split graphs, *Proc. 8th South-Eastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1977), pp. 311-315.
- [29] H. Galeana-Sanchez and V. Neuman-Lara, On kernels and semikernels of diagraphs, *Discrete Math.* 48 (1984), pp. 67-76.
- [30] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, *Journal of Combinatorial Theory Theory B* 63 (1995), pp. 153-158.
- [31] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco 1979.
- [32] S. Gravier, *Coloration et Produit de Graphes*, Thèse, Laboratoire Leibniz, IMAG (Grenoble, France), 1996.
- [33] S. Gravier and F. Maffray, Graphs whose choice number is equal to their chromatic number, *Journal of Graph Theory* 27 (1998) 87-97.
- [34] S. Gravier and F. Maffray, On the choice number of claw-free perfect graphs, *Discrete Mathematics* 276 (2004), pp. 211-218
- [35] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, Polynomial algorithms for perfect graphs, *Annals of Discrete Math.*, in : *Topics on perfect graphs* (C. Berge and V. Chvátal, Eds.), (21) 1984, pp. 325-356.
- [36] R. Häggkvist and A. Chetwynd, Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs, *Journal of Graph Theory*, 16, 1992, pp. 503-516.
- [37] I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Computing* 10 718-720 (1981).

- [38] W. L. Hsu and G. L. Nemhauser, Algorithms for maximum weighted cliques, minimum weighted clique covers, and minimum colourings of claw-free perfect graphs, in : Topics on perfect graphs, Annals of Discrete Mathematics (C. Berge and V. Chvátal, Eds., North-Holland, Amsterdam), (21) 1984, pp. 357-369.
- [39] M. Juan, B. Mohar, R. Škrekovski, On list edge-colorings of subcubic graphs, 5^{eme} Colloque International de Théorie des Graphes et Combinatoire, Marseille-Luminy, (Septembre 1995).
- [40] R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in : Complexity of computer computation (R.E. Miller and J. W. Thatcher, eds.), Plenum Press, New York, 1972, pp. 85-103.
- [41] F. Maffray, Kernel in perfect line-graphs, Journal of Combinatorial Theory B 55 (1992), pp. 1-8.
- [42] F. Maffray and B. A. Reed, A Description of Claw-Free Perfect Graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B 75, pp. 134-156. (1999).
- [43] J. V. Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behaviour, Princeton University Press, Princeton 1944.
- [44] K. R. Parthasarathy and G. Ravindra, The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs, Journal of Combinatorial Theory Series B 21 (1976), pp. 212-223.
- [45] D. Peterson, Choosability of line graphs, Rutcor Research Report, Rutgers Univ. NJ, USA (Juillet 1995), pp. 1-10.
- [46] A. Pnueli, A. Lempel and S. Even : Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs, Canad. Math. J. 23 (1971), pp. 160-175.
- [47] M. Richardson, Solutions of reflexive relations, Ann. Math. 58, (1953), pp. 573-580.
- [48] M. Sakarovitch, Optimisation Combinatoire, tome 2, Hermann, 1984.
- [49] B. Sands, N. Sauer, and R. Woodrow : On monochromatic paths in edge-coloured digraphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, (1982), pp. 271-275 .
- [50] Y. Saoula, Colloque International MOAD 2004, Méthodes et Outils d'Aides à la Décision, Saida-Algérie, 28-29 Novembre 2004.

- [51] Y. Saoula, Algorithms for Kernel in graphs , CIRO'05, IVème Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle, Marrakech 22-26 Mai 2005.
- [52] D. Seinsche : On a property of the class of n -colorable, Journal of Combinatorial Theory, Series B 16 (1974), pp. 191-193.
- [53] C. Shannon, The zero error capacity of noisy channel, IRE Trans. Inform. Theory, IT-2 : 8-19, 1956.
- [54] C. Thomassen, 3-List-Coloring Planar Graphs of Girth 5, Journal of Combinatorial Theory Series B (1995), pp. 101-107.
- [55] J. H. Van Lint, R. M. Wilson, A course in Combinatorics, Combridge University Press, (1993).
- [56] V. G. Vizing, Vertex colourings with given colours (en russe), Methody Discret Analiz, 29 (1976), pp. 3-10.
- [57] E. S. Wolk, A note on the comparability graph of a tree, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), pp. 17-20.

Polynomial algorithms for kernels in comparability, permutation and P_4 -free graphs

Moncef Abbas¹ and Youcef Saoula²

¹ USTHB, Faculté de Mathématiques, LAID3, El-Alia, BP 32, Bab-Ezzouar, 16111 Alger, Algérie

² Ecole Normale Supérieure, Département de Mathématiques, BP 92 Kouba, 16050 Alger, Algérie
(e-mail: saoula_y@yahoo.fr)

Received: August 2004 / Revised version: April 2005

Abstract. In this paper, we give three polynomial algorithms which detect a kernel in comparability graphs relatively to an M-orientation, in permutation graphs and in P_4 -free graphs with a normal orientation.

Key words: Orientation, kernel, comparability graph, permutation graph, P_4 -free graph

MSC classification: 05C69, 05C85

1 Introduction

The graphs considered here do not have multiple edges or loops. Let $G = (V, E)$ be a graph, where V is the vertex-set and E is the edge-set. An induced subgraph of G is a graph $H = (V', E')$ such that $V' \subseteq V$ and $uv \in E'$ if and only if $u, v \in V'$ and $uv \in E$. The complement of a graph H is the graph $\overline{H} = (V', \overline{E}')$ which has the same vertex-set as H and $uv \in \overline{E}'$ if and only if $uv \notin E'$. A graph is P_4 -free if it has no subgraph with four vertices a, b, c, d and edges ab, bc and cd . Notice that the property P_4 -free is hereditary. For every undirected graph $G = (V, E)$, we call *orientation* of G any directed graph D with the same vertex-set as G and such that two vertices are adjacent in G if and only if there exists at least one arc between them in D (notice that an edge in G may correspond to a pair of symmetric arcs in D). The orientation and the directed graph D will not be distinguished. A circuit of a directed graph $D = (V, A)$ is a sequence $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ of vertices of G such that $v_i \neq v_j$, for $1 \leq i, j \leq k$, $(v_i, v_{i+1}) \in A$ for every i , $1 \leq i \leq k-1$

All correspondence to: Saoula Youcef

and $(v_k, v_1) \in A$; the integer k is called the length of the circuit. So; a triangle is a circuit of length three.

Let G be a graph and D an orientation of G . A *clique* C in G (resp. in D) is a subgraph of G (resp. of D) such that for every pair $\{u, v\}$ of vertices of C , the edge uv exists in G (resp. arc (u, v) or (v, u) is in D). A subset of vertices in G (resp. in D) is called *independent set* if any two of its vertices are non-adjacent. A subset N of vertices of D is called *absorbing (or absorbent)* if every vertex outside N has a successor in N . A *kernel* of D is a subset of vertices that is both absorbing and independent set. In particular, a kernel of a clique C of D is simply a *sink*, i.e a vertex s of C that is a successor of every vertex of $C - \{s\}$. Likewise, a vertex s of C will be called a *source* of C if every vertex of $C - \{s\}$ is a successor of s . An orientation D of G is said to be normal if every clique (not necessarily maximal) in D has a sink. A Meyniel orientation (M-orientation for short) D of G is an orientation for which every triangle in D has at least two symmetric arcs.

Not every directed graph admits a kernel; in fact it was shown by Chvátal (1973) that deciding if a graph possesses a kernel is an NP-complete problem; it would be interesting to elaborate polynomial algorithms which permit to find a kernel of graphs for which the existence problem is solved.

In Sect. 2, we give a polynomial algorithm which detects a kernel in comparability graphs relatively to an M-orientation. Section 3 describes an algorithm which detects a kernel in the case of permutation graphs. A fast algorithm to determine a kernel in the case of P_4 - free graphs is given in Sect. 4.

2 Case of comparability graphs

An undirected graph $G = (V, E)$ is a comparability graph if there is a transitive orientation of its edges. Champetier (1989) shows that every M-orientation of a comparability graph admits a kernel and, implicitly, describes an algorithm which gives such kernel. In the following we make precise its steps and prove that it is polynomial. The following notation, due to Sands et al. (1982) and Champetier (1989), will be used: let $G = (V, E)$ an undirected graph, T a transitive orientation and D an M-orientation of G . We color in r (red) the arcs of $D \cap T$ (arcs of D and T which are oriented in the same way), b (blue) those of $D \cap T^{-1}$. The orientation T^{-1} is the reverse orientation of T . Given two distinct vertices u and v of G ; $u \rightarrow v$ (resp. $u \dashrightarrow v$) indicates that there is an arc from u to v in D (resp. if there is no); $u \rightarrow^c v$ (resp. $u \dashrightarrow^c v$) will mean that the arc (u, v) is colored in c (resp. there is no arc from u to v colored in c). If U is a subset of vertices of G and v is a vertex of G , $U \rightarrow v$ (resp. $v \rightarrow U$) will mean that $u \rightarrow v$ (resp. $v \rightarrow u$) for some $u \in U$. Let $\mathbb{S}$ be the collection of nonempty subsets S of vertices of G such that:

- (a1) S is an independent set,
- (a2) For every vertex v of G , $S \rightarrow^r v \implies v \rightarrow S$.

Let $\leq$ be the binary relation defined on $\mathbb{S}$ as follows:

$$S \leq S' \Leftrightarrow \forall s \in S, \exists s' \in S' \text{ such that } s = s' \text{ or } s \xrightarrow{b} s' \text{ or } s' \xrightarrow{r} s.$$

It is easy to see that $\leq$ is a partial order on $\mathbb{S}$. It is clear that $S \subseteq S'$ implies $S \leq S'$; it is proved in Champetier (1989) that for every M-orientation D of a comparability graph G which has a transitive orientation T , any maximal element of $\mathbb{S}$ relatively to $\leq$ is a kernel of D . The goal of the following algorithm is to build a maximal element of $(\mathbb{S}, \leq)$.

Algorithm NGC

Input: $G = (V, E)$ a finite simple undirected graph, T a transitive orientation of G , D an M-orientation;

Output: A kernel N of D ;

Step 0. Coloring arcs of D : For every arc (u, v) of D , if $(u, v) \in T$, then $u \xrightarrow{r} v$, else $u \xrightarrow{b} v$, determine $S = \{x : x \text{ is a sink of } T\}$;

Step 1. Determine $A = \{x : x \dashrightarrow S\}$;

Step 2. If $A = \emptyset$, then $N = S$, stop;

Step 3. If $A \neq \emptyset$, select p a sink of T restricted to A , determine $S' := \{s \in S : s \dashrightarrow^b p\}$, put $S := S' \cup \{p\}$ and go to *Step 1*.

At Step 1, the Algorithm NGC calculates the set A after the set S has been determined at the end of Step 0 or Step 3. When A is nonempty, A represents the vertices of D not absorbed by S . At the end of the iteration i , NGC has determined S_i and $A_i = \{x : x \dashrightarrow S_i\}$; A_i is the set of vertices of D not absorbed by S_i ; the set S_0 is determined at Step 0; while $A_i \neq \emptyset$ we can build $S_{i+1} = S'_i \cup \{p_i\}$, where p_i is a sink of T restricted to A_i and $S'_i = \{s \in S_i : s \dashrightarrow^b p_i\}$. Note that $S_{i+1} - S_i = \{p_i\}$ and for $s \in S_i - S'_i$, $s \xrightarrow{b} p_i$, (s, p_i) is an arc of D with $p_i \dashrightarrow s$.

Lemma 1. *Let S_i and S_{i+1} be the sets given by NGC at Step 0 or Step 3, at the end of iterations i and $i + 1$ respectively. If $S_i \in \mathbb{S}$ and S_i is not an absorbent of D , then $S_{i+1} \in \mathbb{S}$ and $S_i < S_{i+1}$. (in other words, if the current set S_i is not an absorbent, then S_i is not maximal).*

Proof. For $i = 0$, $S_0 \in \mathbb{S}$. We examine Step 1 and Step 2. Indeed, since T is transitive, T contains no circuit; consequently S_0 is an independent set of G , thus (a1); by definition of S_0 , for every arc (u, v) of D where $u \in S_0$ we have $u \xrightarrow{b} v$, hence (a2). We have finally $S_0 \in \mathbb{S}$ as claimed. Because S_i is not an absorbent, A_i is nonempty; let p be a sink of T over A_i and let us show that $S_{i+1} \in \mathbb{S}$. Since S'_i is a subset of the independent set S_i and $p \dashrightarrow S_i$ we have $p \dashrightarrow S'_i$; since $S_i \dashrightarrow^r p$ and $S'_i \dashrightarrow^b p$, $S'_i \dashrightarrow p$; thus S_{i+1} is an independent set of G . Now let us assume that there is a vertex y of G such that $S_{i+1} \xrightarrow{r} y$ and $y \dashrightarrow S_{i+1}$. The case where $p \xrightarrow{r} y$ is not possible. Indeed, if the case is true we have $y \notin A_i$; then y is absorbed by S_i , i.e. there is $s \in S_i$ such that $y \rightarrow s$ ($(y, s) \in D$); since T is transitive and $p \dashrightarrow^r S_i$, $y \xrightarrow{b} s$; as $y \dashrightarrow S_{i+1}$, $s \notin S'_i$; since $y \dashrightarrow p$,

we have a triangle p, y, s , p in D with two nonsymmetric arcs (s, p) and (p, y) , a contradiction with the hypothesis on the orientation D . Consequently $S'_i \rightarrow^r y$. Let $s' \in S'_i$ such that $s' \rightarrow^r y$; since $s' \in S_i$ and $S_i \in \mathbb{S}$, $y \rightarrow S_i$; as T is transitive and S_i is an independent set, $y \rightarrow^b S_i$; let $s \in S_i$ such that $y \rightarrow^b s$; since $y \dashrightarrow S_{i+1}$, $s \notin S'_i$, from which result $s \rightarrow^b p$ with $p \dashrightarrow s$; because T^{-1} is transitive we have $(y, p) \in T^{-1}$ (yp is an edge in G); since $y \dashrightarrow S_{i+1}$, we have $p \rightarrow^r y$ ($(y, p) \notin D$) and thus we have p, y, s, p a triangle in D with two nonsymmetric arcs (p, y) and (s, p) which contradict the hypothesis on the orientation D . We conclude that $S_{i+1} \in \mathbb{S}$. Moreover, by construction of S_{i+1} and the definition of p we have $S_i \leq S_{i+1}$ with $S_i \neq S_{i+1}$, thus $S_i < S_{i+1}$. $\square$

Let us now examine the complexity of NGC.

Lemma 2. *The Algorithm NGC determines in Step 2 a kernel of D in a finite number of iterations.*

Proof. At every iteration i the algorithm builds an independent set S_i (it begins by the independent set $S_0 \in \mathbb{S}$); sets constructed at Steps 0 or 3, are such that $S_i \in \mathbb{S}$ and $S_i \leq S_{i+1}$ with $S_i \neq S_{i+1}$ (Lemma 1). Since G is finite and $\mathbb{S}$ is ordered by the relation $\leq$, after a finite number of iterations, we can construct an element S_q of $\mathbb{S}$ and can not construct another element S_{q+1} of $\mathbb{S}$. In other words the set which permits to construct S_{q+1} is empty, thus the algorithm ends in Step 2 and the current set S_q is such that the vertex-set of D not absorbed by S_q is empty thus S_q is a kernel of D ; hence after a finite number of iterations the algorithm ends in Step 2 with a kernel of D . $\square$

In the following appears that the algorithm is polynomial. Let $S_0, S_1, \dots, S_m$ be the sequence of all independent sets of $G = (V, E)$ generated by the algorithm, in Step 0 or Step 3, in the course of the iterations $0, 1, \dots, m$.

Lemma 3. *For every vertex x of G and every $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, if $x \in S_i$ and there exists $j \geq i + 1$ such that $x \notin S_j$, then $x \notin S_k$ for all $k > j$. Consequently, the number of iterations done by the Algorithm NGC is at most $|V|$.*

This means that if a vertex of G belonging to the independent set S_i (builds at the iteration i) is removed, in the course of an iteration j with $j > i$, this vertex will not be in any independent set constructed in the course of the following iterations. In other words, if a vertex is chosen and removed then this vertex could not be chosen a second time.

Proof. Suppose the opposite. There are a vertex x of G and integers i, j and k such that

$$i < j < k \text{ with } x \in S_i, x \notin S_j \text{ and } x \in S_k. \quad (1)$$

Let us show that this supposition gives a contradiction. Without loss of generality, take among all the vertices of G verifying (1) a vertex x such that $k - i$ is minimum.

That is, there is no vertex x' of G such that : $x' \in S_{i'}$, $x' \notin S_{j'}$ and $x' \in S_{k'}$ with $i \leq i' < j' < k' < k$; i.e. in the course of the iterations from i to k there is only one vertex in G which verifies (1); this is possible since the vertices concerned are those selected in Step 3; several vertices could be removed from an independent set S_i at the same time but only one vertex could be chosen in order to belong to a new independent set S_{i+1} . If the vertex x' exists one will choose x' instead of x . However, if $k - i$ is minimum and x verifying (1) does not exist, it would not exist any vertex of G verifying (1). Let $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+q}$ the independent sets generated by the algorithm and x a vertex verifying (1) with q minimum. By virtue of criteria of the choice of x at Step 3 and condition (1) we have necessarily $q \geq 3$. Since $x \in S_i$ and $x \notin S_{i+1}$ and $x \in S_{i+q}$, there is $i_1, i < i_1 < i + q$, such that $x_{i_1} \in S_{i_1}$ ($i_1 = i + 1$) verifying $x \rightarrow^b x_{i_1}$ and $x_{i_1} \dashrightarrow x$; since $x \in S_{i+q}$ and $x \rightarrow x_{i_1}$ (xx_{i_1} is an edge of G), $x_{i_1} \notin S_{i+q}$; (hence x_{i_1} must be removed in iteration between iterations i_1 and $i + q$), there is $i_2, i_1 < i_2 < i + q$, such that $x_{i_2} \in S_{i_2}$ and $x_{i_2} \notin S_{i_2+1}$ with $x_{i_1} \rightarrow^b x_{i_2}$ and $x_{i_2} \dashrightarrow x_{i_1}$; since T^{-1} is a transitive orientation we obtain $x \rightarrow^b x_{i_2}$ and consequently $x_{i_2} \notin S_{i+q}$. By this process, we construct a list of vertices of G , $x = x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}$ with $l \leq q$ and $S_{i_{l-1}} = S_{i+q-1}$, by minimality of q , these vertices are all distinct and such that ($i_0 = i$), $x_{i_h} \in S_{i_h}$, $i_h < i_{h+1}$, $x_{i_h} \rightarrow^b x_{i_{h+1}}$ and $x_{i_{h+1}} \dashrightarrow x_{i_h}$, and $x_{i_h} \rightarrow^b x_{i_{h'}}$ for $0 \leq h < h' \leq l - 1$. Thus, by transitivity of T^{-1} , $x \rightarrow^b x_{i_{l-1}}$; as $x \in S_{i+q}$ and $x_{i_{l-1}} \notin S_{i+q}$ we have $x_{i_{l-1}} \rightarrow^b x = x_{i_l}$ with $x_{i_l} \dashrightarrow x_{i_{l-1}}$ ($i_{l-1} < i_l$). We get then a circuit $x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}, x$ in T^{-1} which contradict the hypothesis on the orientation T . $\square$

As a consequence of the last two lemmas we have:

Theorem 1. *Let $G = (V, E)$ be a comparability graph and D an M -orientation of G . The Algorithm NGC determines a kernel of D in at most $O(|V|^2 \cdot |E|)$ operations.*

Proof. The coloration of the arcs of D described in the introduction, requires at most $O(|E|)$ operations. Verifying if a given vertex is a sink in a subgraph $H = (U, F)$ of T requires at most $|U|$ operations. Determining a sink of H can be made in at most $|F|$ operations and the set of the sinks of H in at most $|U| \cdot |F|$ operations. Step 0 is executed once, the number of necessary operations for this step is at most $O(|U| \cdot |F|)$ operations. The set S being calculated, to determine the set A in Step 1 requires at most $|E|$ operations. The result of the test whether or not the set A is empty could be known at the same time as its determination in Step 1, therefore if $A \neq \emptyset$, Step 3 is executed; determining a sink of T restricted to A could be made in at most $|V|$ operations and the computation of S' in at most $|S|$ operations. Then, the necessary number of operations in the execution of Step 3 is $O(|V|^2)$. Steps 1, 2 and 3 are consecutively executed at most $|V|$ times (Lemma 3), thus the complexity of the algorithm is $O(|V|^2 \cdot |E|)$. $\square$

3 Case of permutation graphs

Let G be an undirected graph on n vertices. G is called a *permutation graph* if there exist: (i) A labeling $v_1, v_2, \dots, v_n$ of its vertices and (ii) A permutation P of the integers $1, 2, \dots, n$ under which v_i and v_j are adjacent in G if and only if $(P(i) - P(j)) / (i - j) < 0$. Let $G = (V, E)$ be a permutation graph verifying (i) and (ii). It is clear that two distinct vertices v_i and v_j are adjacent in $\overline{G}$ the complement graph of G if and only if $(P(i) - P(j)) / (i - j) > 0$. Let us define an orientation T of $\overline{G}$: For every edge $v_i v_j$ of $\overline{G}$, (v_i, v_j) is an arc of T if and only if $i < j$. It is not difficult to prove the following lemma:

Lemma 4. *The orientation T is transitive.*

Let us examine the existence of a special clique in G .

Lemma 5. *Let G be a permutation graph. Every subgraph H of G admits a clique which meets all maximal independent sets of H .*

Proof. Since all the subgraphs of G are also permutation graphs, it is sufficient to show the property only for G . Let T be the transitive orientation of $\overline{G}$ defined as in Lemma 4. Since T is transitive and G is finite, the set S of sinks of T is not empty. By definition, S is an independent set of $\overline{G}$. Let C be a maximal clique of $\overline{G}$ and let us show that S meets C . Indeed, the set of vertices of C generates a clique of T ($u, v \in C$, $(u, v) \in T$ or $(v, u) \in T$) hence C is a subgraph of T without circuit. Consequently C admits a sink p . For every $u \in V - C$ we have $(p, u) \notin T$ because otherwise there exists $u \in V - C$ such that $(p, u) \in T$; by transitivity of T , $(c, u) \in T$ for all $c \in C$; then $C \cup \{u\}$ is a clique of $\overline{G}$ containing strictly C which contradicts the maximality of C in $\overline{G}$; hence p is a sink of T , thus $p \in S$. the subgraph of G generated by S is one of the desired cliques. $\square$

In order to describe the steps of an algorithm we will use the following result due to Blidia et al. (1993):

Lemma 6 (Blidia et al. 1993). *If D is a normal orientation of a graph G , then every clique of D admits a source. Consequently, D^{-1} is also a normal orientation of G .*

Algorithm NGP

Input: $G = (V, E)$ an undirected permutation graph,
 $v_1, v_2, \dots, v_n$ a labeling of vertices of G , P the corresponding permutation of G , D a normal orientation of G ;
Output: A kernel N of D ;
Step 1. Construct the transitive orientation $T = (V, E')$ of $\overline{G}$ where
 $E' = \{(v_i, v_j) : v_j v_i \notin E \text{ and } i < j\}$;

Step 2. For $k = 1$ to n do
 put $C_k := \{p \in V : p \text{ is a sink of } T\}$, let s_k be the source of C_k in D ,
 put $T := T - \{s_k\}$ and $D := D - \{s_k\}$
 end-for,
 put $N_n = \{s_n\}$;
Step 3. For $k = n$ to 2 do
 if $N_k \cap C_{k-1} = \emptyset$, then $N_{k-1} = N_k \cup \{s_{k-1}\}$ else $N_{k-1} = N_k$
 end-for,
 put $N = N_1$ and end.

Lemma 4 shows that the orientation T constructed in Step 1 is transitive in $\overline{G}$. Lemma 5 shows that for every k , the subgraph H_k of G induced by C_k is a clique of G ; since D is a normal orientation, H_k admits a source s_k (Lemma 6). At Step 3: At the beginning, the oriented graph D_n is reduced to one vertex s_n ; therefore $N_n = \{s_n\}$ is a kernel of D_n . In order to justify the remainder of this step we prove the following result:

Lemma 7. *At Step 3 of the Algorithm NGP for every $k = n, n-1, \dots, 1$ the set N_k is a kernel of D_k . Consequently N_1 is a kernel of D .*

Proof. Let k , be an integer, $2 \leq k \leq n$; the oriented graphs D_{k-1} and D_k constructed at Step 2 are such that D_k is a subgraph of D_{k-1} and $D_{k-1} - D_k = \{s_{k-1}\}$ where s_{k-1} is a source of the clique C_{k-1} of D_{k-1} (s_{k-1} exists from Lemma 6). At beginning, N_n is a kernel of D_n ; for k we have a kernel N_k of D_k and we seek to construct a kernel N_{k-1} of D_{k-1} . If $C_{k-1} \cap N_k \neq \emptyset$; let s be the common element, (s_{k-1}, s) is an arc of D_{k-1} and thus N_k is an absorbing of D_{k-1} ; since N_k is an independent set of D_{k-1} , $N_{k-1} = N_k$ is a kernel of D_{k-1} . If $C_{k-1} \cap N_k = \emptyset$, since C_{k-1} meets every maximal independent set of G_{k-1} , N_k is an independent set of G_{k-1} ; from Lemma 5, N_k is not maximal in G_{k-1} , hence N_{k-1} is strictly contained in an independent set of G_{k-1} ; since N_k is absorbing in D_k , the only independent set of G_{k-1} which can contain N_k is $N_k \cup \{s_{k-1}\}$, thus $N_{k-1} = N_k \cup \{s_{k-1}\}$ is a kernel of D_{k-1} . Hence, at every execution of Step 3 the resulted N_k is a kernel of D_k . In particular, N_1 is a kernel of $D_1 = D$. $\square$

Theorem 2. *Let $G = (V, E)$ be a permutation graph and D a normal orientation of G . The Algorithm NGP finds a kernel of D in $O(|V|^2 \cdot |E|)$ times.*

Proof. Let $G = (V, E)$ be a permutation graph. We construct the transitive orientation T of $\overline{G}$ at Step 1 in at most $|E|$ times. At Step 2, finding a sink relatively to T or a source relatively to D can be made in $|E|$ times; determining C_k is done in at most $|V| \cdot |E|$ times. Hence Step 2 terminates after at most $|V|^2 \cdot |E|$ times. At Step 3, since $|N_k \cap C_{k-1}| \leq 1$, to determine if $N_k \cap C_{k-1} = \emptyset$ or not can be made in at most $|E|$ times. Because each step is performed only once and the three steps are consecutively executed, the Algorithm NGP finds a kernel of D in $O(|V|^2 \cdot |E|)$ times. $\square$

4 Case of P_4 – Free graphs

It is known that the P_4 – free graphs are permutation graphs. The particularity of this class of graphs offers the possibility of modifying the Algorithm NGP to give a more performant one. In Berge and Duchet (1984) it is shown that if a graph G is P_4 – free, then every maximal independent set meets all the maximal cliques. Since the role of the Steps 1 and 2 of the Algorithm NGP is to find a particular clique; if G is P_4 – free, these two steps could then be avoided by the choice of any maximal clique.

Algorithm NGSP4

Input: $G = (V, E)$ an undirected P_4 – free graph, $|V| = n$, D a normal orientation of G ;
Output: A kernel N of D ;
Step 1. Select a maximal clique C of G , find s a source of C in D ,
 put $G_1 = G$, $D_1 = D$, $s_1 = s$, $C_1 = C$,
 for $k = 2$ to n do
 $G_k = G_{k-1} - \{s_{k-1}\}$, $D_k = D_{k-1} - \{s_{k-1}\}$, choose C_k a maximal clique
 of G_k , find s_k a source of C_k in D_k
 end-for,
 put $N_n = \{s_n\}$;
Step 2. For $k = n$ to 2 do
 if $C_{k-1} \cap N_k = \emptyset$ then put $N_{k-1} = N_k \cup \{s_{k-1}\}$ else put $N_{k-1} = N_k$
 end-for,
 put $N = N_1$ and end.

The complexity of the Algorithm NGSP4 is $O(|V| \cdot |E|)$.

5 Conclusion

It is known that to decide whether a graph possesses a kernel or not is an NP-complete problem. So it would be interesting to elaborate polynomial algorithms for particular graphs classes. In this paper, we have proposed three polynomial algorithms which permit to determine a kernel in comparability graphs, permutation graphs and P_4 -free graphs classes. The notion of kernel can be used in a theoretical problem as well as in a practical problem for example in *ELECTRE* (which is a method in multi-criteria decision aid area), where we need to detect a kernel in the outranking graph.

Acknowledgements. The authors are grateful to the anonymous referees for helpful comments that improved the final presentation of the results.

References

- Berge C, Duchet P (1984) Strongly perfect graphs. *Annals of Discrete Mathematics* 21: 57–61
- Blidia M, Duchet P, Maffray F (1993) Note on kernels in perfect graphs. *Combinatorica* 13(2): 231–233
- Champetier C (1989) Kernels in some orientations of comparability graphs. *Journal of combinatorial theory B* 47: 111–113
- Chvátal V (1973) On the computational complexity of finding a kernel Report CRM300, Centre de Recherche Mathématiques, Université de Montréal
- Sands B, Sauer N, Woodrow R (1982) On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *Journal of Combinatorial Theory B* 33: 271–275

Acknowledgement to referees

We are indebted to the following referees who reviewed papers considered or published during 2005 (list finalized in November 2005). Without their efforts it would be impossible to maintain the journal's quality standards.

Denis Bouyssou

A. Agnetis, Università di Siena
 S. Akturk, Bilkent University, Ankara
 M.A. Aloulou, Université Paris Dauphine
 I. Averbakh, University of Toronto
 R. Baldacci, Università di Modena e Reggio Emilia
 N. Belacel, CNRC, Canada
 A. Belloni, MIT, Boston
 R. Borndorfer, ZIB, Berlin
 M.A. Boschetti, Università di Bologna
 J-L. Bouquard, Université de Tours
 D. Bouyssou, CNRS, LAMSADE
 H. Broersma, University of Twente
 M.E. Captivo, Universidade de Lisboa
 E. Carrizosa, Universidad de Seville
 T.Y. Chow, MIT Labs., Lexington
 A. Colomi, Politecnico di Milano
 D.V. Conesa, Universitat de Valencia
 R. Cordone, Università di Milano
 Y. Crama, Université de Liège
 R.B. Cruz, UFMG, Brazil
 S. Dash, T.J. Watson Research Center
 C. De Simone, IASI-CNR, Roma
 M. Dell'Amico, Università di Modena e Reggio Emilia
 G. Di Caro, IDSIA, Lugano
 P. Dileepan, UTC College, Chattanooga
 M. Dorigo, ULB, Bruxelles
 M. Doumpos, Technical University of Crete
 M. Ehrgott, University of Auckland
 M-L. Espinousse, LOSI, Université de Technologie de Troyes
 L.A. Evans, University of Minnesota
 N. Fard, Chung-Ang University, Seoul

Silvano Martello

U. Feige, The Weizmann Institute, Rehovot
 S.P. Fekete, Technische Universität Braunschweig
 M. Fischetti, Università di Padova
 A. Frangioni, Università di Pisa
 H. Galeana-Sanchez, Universidad Nacional Autónoma de Mexico
 L.M. Gambardella, IDSIA, Lugano
 J-P. Gauthier, Institut Universitaire de France
 J-P. Gayon, INPG, Grenoble
 V. Giard, Université Paris Dauphine
 M. Gilli, Université de Genève
 B.C. Giri, Hiroshima University
 C. Glass, Kings College London
 A. Grosso, Politecnico di Torino
 E. Guerriero, Università di Lecce
 M. Halldorsson, University of Iceland
 A. Hardy, FUNDP, Namur
 C. Hoang, Wilfrid Laurier University, Waterloo
 S-P. Hong, Chung-Ang University, Seoul
 M. Iori, Università di Bologna
 K. Iwama, Kyoto University
 T.R. Jensen, Universität Klagenfurt
 E. Koehler, Technische Universität, Berlin
 N. Labadi, LOSI, Université de Technologie de Troyes
 M. Langberg, California Institute of Technology, Pasadena
 C. Lemaréchal, INRIA
 A. Loebel, ZIB, Berlin
 P. Lopez, LAAS, Toulouse
 A. Lucena, Universidad Federal do Rio de Janeiro
 J. Lysgaard, Aarhus School of Business
 F. Maffray, Laboratoire LEIBNIZ, Grenoble
 F. Malucelli, Università di Milano

Frank Plastria

- V. Maniezzo, CRS, Università di Bologna
 R. Mansini, Università di Brescia
 V. Marianov, Universidad Católica de Chile, Santiago
 A. Marin, Universidad de Murcia
 S. Martello, Università di Bologna
 A. Mingozzi, Università di Bologna
 J.E. Mitchell, Rensselaer Polytechnic Institute
 S. Mitrovic-Minic, Simon Fraser University, Burnaby
 M. Monaci, Università di Bologna
 V. Mousseau, LAMSADE, Université Paris Dauphine
 H. Mueller, University of Leeds
 A. Munier, INRIA France
 P. Nobili, Università di Lecce
 G. Oriolo, Università Tor Vergata, Roma
 L. Ormeci, Koç University, Istanbul
 D. Peleg, The Weizmann Institute, Rehovot
 D. Pisinger, University of Copenhagen
 F. Plastria, MOSI-VUB, Bruxelles
 Y. Pochet, Université Catholique de Louvain
 P.C. Pop, North University of Baia Mare
 M. Pranzo, Università di Siena
 C. Prins, LOSI, Université de Troyes
 J. Puerto, Universidad de Sevilla
 B. Randerath, Universität Koln
 F. Rendl, Universität Klagenfurt
 G. Righini, Politecnico di Milano
 R. Rizzi, Università di Trento
 M. Roma, Università di Roma "La Sapienza"
 Y. Rosseel, Ghent University
 P. Scaparra, Kent University
 I. Schiermeyer, TU Bergakademie, Freiberg
 M. Sebag, LRI, Université d'Orsay
 F. Semet, Université de Valenciennes
 M. Seveaux, Université de Valenciennes
 J. Shen, Southwest Texas State University
 B. Shepherd, T.J. Watson Research Center
 K. Sörensen, University of Antwerp
 O. Spanjaard, LIP6, Université Paris VI
 M.G. Speranza, Università degli Studi di Brescia
 G. Steiner, DeGroote School of Business, Ontario
 B. Toft, Odense, Denmark
 T. Tokuyama, Tohoku University
 E. Trauwaert, consultant, Belgium
 M. Trubian, Politecnico di Milano
 E. Uchoa, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro
 P. Vallin, Université Paris Dauphine
 I. VanNieuwenhuysse, University of Antwerp
 L.N. Vicente, Universidad de Coimbra
 D. Vigo, Università di Bologna
 T. Volgenant, University of Amsterdam
 R. Weiskircher, CSIRO, TU Wien
 D. de Werra, EPFL, Lausanne
 H. Yaman, Bilkent University, Ankara
 J. Yang, NJIT, New Jersey
 C. Zopounidis, Technical University of Crete

Blocks in Graphs of a Class of Claw-Free and 3-Colorable Graphs

Moncef Abbas

USTHB, Faculté de Mathématiques, LAID3, BP 32, Bab-Ezzouar,
16111 Alger, Algérie
moncef_abbas@yahoo.com

Youcef Saoula¹

Ecole Normale Supérieure, Département de Mathématiques,
BP 92, Kouba, 16050, Alger, Algérie
saoula_y@yahoo.fr

Abstract

We consider the class $\mathcal{G}_m$ of 3-colorable graphs containing neither claw nor hole of length more than m , where m is an integer ≥ 5 . We give a complete description by a few basic graphs of the blocks containing a 5-hole in graphs of $\mathcal{G}_5$.

Mathematics Subject Classification: 05C75

Keywords: Claw-free, coloration, graph, hole, path, stripe

1 Introduction

The graphs considered in this paper are undirected, finite and simple. Let $G = (V, E)$ be a graph, where V is the vertex-set and E is the edge-set. For $X \subseteq V$, the subgraph of G *induced by* X is the subgraph with vertex-set X and edge-set all edges of G with both ends in X . The graph obtained from G by deleting X is denoted by $G \setminus X$. In the graph G , for every subset X of vertices, the *neighbourhood* $N(X)$ of X is the subset of vertices of $G \setminus X$ that have at least one neighbour in X . An edge x_1x_2 is called *independent* from an other edge $x'_1x'_2$ if $x_i \neq x'_j$ and x_i is no adjacent to x'_j for every $i = 1, 2$ and every $j = 1, 2$. A *path* is a subgraph of G described by a sequence $x_1x_2 \dots x_k$ of

¹The corresponding author.

distinct vertices of G and $x_i x_{i+1} \in E$ for every i , $1 \leq i \leq k-1$, vertices x_1 and x_k will be called the *endpoints* of the path. A *cycle* of G is a path $x_1 x_2 \dots x_k$ with $x_k = x_1$; the *length* of a path or a cycle is the number of its vertices. A cycle with length three is a *triangle*. A *chord* of a path or a cycle $x_1 x_2 \dots x_k$ is an edge $x_i x_j$ with $j \neq i \pm 1$. A *hole* in G is a chordless cycle with at least five vertices. We will frequently say k -hole instead of "hole of length k ". Two vertices x and y in a chordless path (resp. hole) are *consecutive* if xy is an edge in the path (resp. the hole). A *clique* X in G is a subgraph of G such that every two vertices of X are adjacent; a clique with n vertices is denoted by K_n . A *claw* is a graph with four vertices a, b, c and d and three edges ab, ac and ad . A vertex is called *simplicial* if its neighbourhood is a clique.

A graph is said to be F -free if it does not contain an induced subgraph isomorphic to a given graph F .

The *line-graph* of G is the graph whose vertices are the edges of G and whose edges are the pairs of incident edges of G . A *block* in G is a subgraph of G that is 2-connected and is maximal with that property. It is well-known that the incidence graph of blocks and cut-vertices of a graph is a tree.

A k -coloring of the vertices of G is a mapping $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ for which every edge xy of G has $c(x) \neq c(y)$. The graph G is called k -colorable if it admits a k -coloring.

The treatment of the coloration problem by list which is a generalization of the classic coloration (see Häggkvist and Chetwynd [4]), of vertices or edges of a graph, would be less difficult if its structure is known. The class of claw-free graphs is natural to study in particular because it contains all line-graphs, studied by several authors (see Maffray and Reed [5]). Chvátal and Sbihi [3] discovered a decomposition of claw-free and 3-colorable graphs which are perfect; Gravier and Maffray [2] show that they are 3-list-colorable. We are interested in claw-free and 3-colorable graphs which are not necessarily perfect. It is always interesting to characterize this class of graphs; a complete description of graphs contributes in particular to the treatment of one of problems known to be difficult as the vertices list coloring. The structure of blocks of a graph can be useful to determine the structure of the associated incidence graph which will allow its coloration by list.

Let $m \geq 5$ be an integer and consider the class of graphs $\mathcal{G}_m$: $G \in \mathcal{G}_m$ if and only if G is claw-free, 3-colorable and contains no hole of length more than m .

In section 2, we give some general properties of claw-free graphs which are 3-colorable; section 3 describes the blocks of a given graph of $\mathcal{G}_5$ by a few basic graphs.

2 General properties

Let H_1 be a subgraph of a graph G ; the *neighbourhood* of H_1 is a nonempty subgraph H_2 of G and disjoint from H_1 such that every vertex of H_2 has at least one neighbour in H_1 ; the graph $G' = H_2 \blacktriangleright H_1$ means that G' is the subgraph of G generated by the union of vertex-set of H_1 and of its neighbourhood H_2 .

For a graph $G = (V, E)$ of $\mathcal{G}_m$ we will give some properties; the proofs being immediate, will be omitted. For every vertex u of G , $d(u)$ is the degree of u in G .

(p1) *For every vertex v of G , we have $d(v) \leq 4$. Consequently, $\Delta(G) \leq 4$ (the maximum degree in G).*

(p2) *Let C be a hole in G .*

- (i)** *Every vertex v of $G \setminus C$ which is adjacent to a vertex of C is adjacent to at least two consecutive vertices of C ; in particular, when $|C| = 5$, the set of vertices $N(v) \cap C$ induces a path.*
- (ii)** *There is no distinct vertices of $G \setminus C$ with common neighbours on C .*
- (iii)** *For every distinct vertices v and v' of $G \setminus C$, such that $N(v) \cap C \subset N(v') \cap C$, the two respective paths induced by $N(v)$ and $N(v')$, on C , have no common endpoints.*

(p3) *If $G = H \blacktriangleright C$ and C is a hole, then $|H| \leq |C|$, and consequently $|G| \leq 2|C|$.*

For any integer $n \geq 4$, a *stripe* T is a graph in which the vertex-set is a disjoint-union of two sets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ and $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ and whose edges are $x_i x_{i+1}$, $y_i y_{i+1}$, $x_i y_i$, $y_i x_{i+1}$, for $i = 1, 2, \dots, n-2$ and $x_{n-1} x_n$, $x_{n-1} y_{n-1}$, $y_{n-1} x_n$; such a stripe will be denoted by $T = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{n-1} y_{n-1} x_n$. Because a stripe T contains neither a claw nor a hole and its chromatic number is three, $T \in \mathcal{G}_m$.

The two following results due to Abbas and Saoula [1] summarize the neighbourhood structure of holes in graphs of $\mathcal{G}_m$.

Lemma 2.1 [1] *Let G be a graph of $\mathcal{G}_m$. Assume that P is a chordless path of length l and C is a k -hole. If $G = P \blacktriangleright C$ with $3 \leq l \leq k-2$, then C contains a chordless path P' with $l+1$ vertices such that the subgraph of G induced by $P \cup P'$ is a stripe.*

Theorem 2.2 [1] *Let G be a graph of $\mathcal{G}_m$ and C be a k -hole with $G = H \blacktriangleright C$. Let B be a connected component of H . We have:*

- (1) *If $k \equiv 1$ or $2 \pmod{3}$, then B is a triangle or a chordless path with length at most $k - 1$.*
- (2) *If $k \equiv 0 \pmod{3}$, then B is either a triangle, or a k -hole, or a chordless path with length at most k .*

3 The class $\mathcal{G}_5$

Throughout this section G is a graph of $\mathcal{G}_5$ with $G = H \blacktriangleright C$, where $C = v_1v_2 \dots v_5v_1$ is a 5-hole and the vertex-set of H is $\{w_1, \dots, w_l\}$. From property (p3) and Theorem 2.2, $l \leq 5$ and $\lambda(H) \leq 4$, where $\lambda(H)$ means the length of a largest chordless path in H .

3.1 Preliminary properties

The particular graphs F_1 and F_2 shown in Figure 1 will be denoted by $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$ and $F_2 = w'_1w'_2 - v'_1v'_2v'_3$. The edge w_1w_2 in F_1 (resp. $w'_1w'_2$ in F_2) will be called *superedge* of F_1 (resp. F_2).

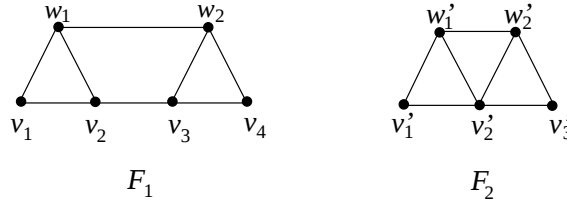


Figure 1: Particular graphs

Remark 3.1 *Let ww' be an edge of H .*

1. ww' is a superedge of F_1 or F_2 (because $|C| = 5$).
2. If ww' is a superedge of F_1 , each of the two vertices w and w' has exactly two consecutive neighbours on C (because otherwise, G would not be 3-colorable).
3. If ww' is a superedge of F_2 , only one vertex w or w' has three consecutive neighbours on C (because otherwise, G would not be 3-colorable or would contain a 6-hole).

Lemma 3.2 For $G = H \blacktriangleright C$ ($G \in \mathcal{G}_5$), we have:

- (1) $\lambda(H) \leq 2$.
- (2) H contains at most one edge.

Proof. (1) We only need to show that H contains no chordless path with length three. Suppose that the conclusion is false and let $P = w_1w_2w_3$ be such a path. By Lemma 2.1, there is a path P' , contained in C , with four vertices such that $P \cup P'$ induces a stripe T in G ; without loss of generality, we can consider $T = v_1w_1v_2w_2v_3w_3v_4$. Since G is 3-colorable, w_1v_5 or w_3v_5 is not an edge of G ; thus $v_1w_1w_2v_3v_4v_5v_1$ or $v_1v_2w_2w_3v_4v_5v_1$ is a 6-hole in G , a contradiction. Hence $\lambda(H) \leq 2$.

(2) Suppose that H contains two edges $e_1 = w_1w_2$ and $e_2 = w_3w_4$. By (1), e_1 and e_2 are either independent or belong to a triangle. By 1. of Remark 3.1, each of the edges e_1 and e_2 is a superedge of F_i , $i = 1$ or 2 , ($e_j \in F_i$, $j = 1$ or 2).

Case (a): e_1 and e_2 are independent:

Subcase a.1: $e_1 \in F_1$ and $e_2 \in F'_1$ (where F'_1 is an other copy of F_1): assume that $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$ and $F'_1 = w_3w_4 - v'_1v'_2v'_3v'_4$ ($\{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\} \subset C$). Since w_3 and w_4 play the same role in F'_1 , we only consider w_3 . The vertex w_3 may not have the same neighbours, on C , as w_1 or w_2 (2. of Remark 3.1 and (ii) of (p2)); so $N(w_3) \cap C$ is either $\{v_2, v_3\}$, or $\{v_4, v_5\}$, or $\{v_1, v_5\}$; since the length of C is five, v_2 and v_3 are neighbours of either w_3 or w_4 , say $N(w_3) \cap C = \{v_2, v_3\}$; consequently $N(w_4) \cap C$ is $\{v_4, v_5\}$ or $\{v_1, v_5\}$, hence $v_1w_1w_2v_3w_3w_4v_5v_1$ or $v_2w_1w_2v_4v_5w_4w_3v_2$ is a 7-hole in G , a contradiction.

Subcase a.2: $e_1 \in F_1$ and $e_2 \in F_2$: Let F_1 as in a.1 and $F_2 = w_3w_4 - v'_1v'_2v'_3$ ($\{v'_1, v'_2, v'_3\} \subset C$). Since the path $v'_1v'_2v'_3$ is without chord and $\Delta(G) \leq 4$, we have $v'_2 = v_5$; by symmetry we can suppose that w_3 (resp. w_4) is adjacent to v_4 (resp. v_1); as w_1v_3 and w_2v_2 are not edges of G and $\Delta(G) \leq 4$, neither w_3 nor w_4 is adjacent to v_2 or v_3 , so the cycle $v_1v_2v_3v_4w_3w_4v_1$ is a 6-hole in G , a contradiction.

Subcase a.3: $e_1 \in F_2$ and $e_2 \in F'_2$: We consider $F_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3$ and $F'_2 = w_3w_4 - v'_1v'_2v'_3$ ($\{v'_1, v'_2, v'_3\} \subset C$), where F'_2 is an other copy of F_2 . Since v_2 (resp. v'_2) is of degree four in F_2 (resp. F'_2) and $|C| = 5$, we have $v'_2 \in \{v_4, v_5\}$; by 3. of Remark 3.1, we can suppose that w_2v_4 is an edge of G and w_1v_5 is not an edge of G ; in this case, $v'_2 = v_5$; consequently, v'_1 and v'_3 are in $\{v_1, v_4\}$, say $v'_1 = v_4$ and $v'_3 = v_1$; so $v_1w_1w_2v_4w_3w_4v_1$ is a 6-hole in G , a contradiction.

Case (b): e_1 and e_2 are edges of a triangle $T' = w_1w_2w_3w_1$.

As every vertex w of T' is of degree two in T' , w has precisely two consecutive neighbours on C . By 1. of Remark 3.1, there are two subcases:

Subcase b.1. $e_1 \in F_1$ with $F_1 = w_1w_2 - v_1v_2v_3v_4$. Since G is K_4 -free, $N(w_3) \cap C$ is either $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_5\}$ or $\{v_4, v_5\}$ (the last two possibilities produce the same situation); each of the first two possibilities gives a 6-hole in G : induced by the vertices of $C \cup T' \setminus \{v_2, w_2\}$ or $C \cup T' \setminus \{v_1, w_2\}$, a contradiction.

Subcase b.2. $e_1 \in F_2$ with $F_2 = w_1w_2 - v_1v_2v_3$. As G is K_4 -free, $N(w_3) \cap C$ is either $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$ or $\{v_1, v_5\}$ (the first and the last cases are identical), the first two possibilities produce a 6-hole in G : induced by $C \cup T' \setminus \{v_3, w_1\}$ or $C \cup T' \setminus \{v_2, w_3\}$, a contradiction. ■

3.2 Basic graphs of $\mathcal{G}_5$

Let B_i , for $i = 1, \dots, 5$, be the basic graphs depicted in Figure 2; it is easy to verify that these graphs are in $\mathcal{G}_5$.

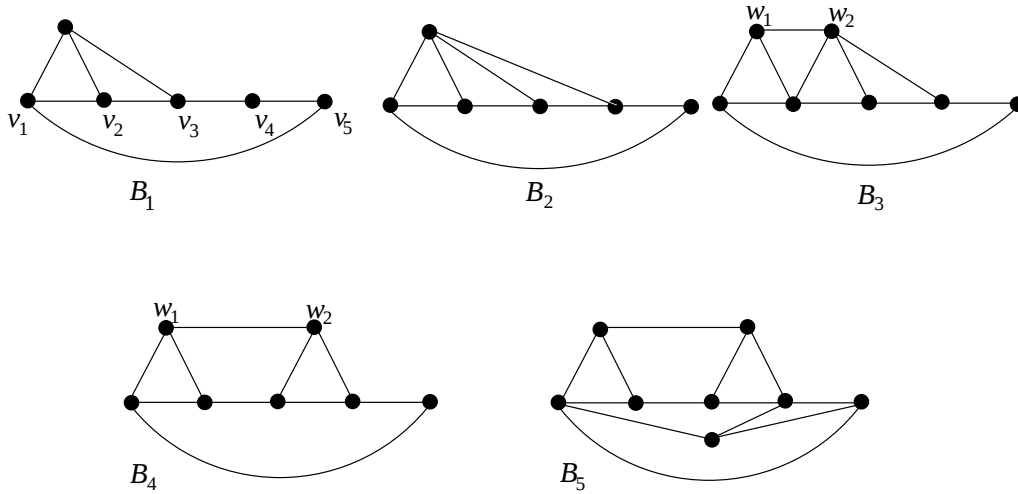


Figure 2: The basic graphs

Lemma 3.3 *Let $G = H \blacktriangleright C$ ($G \in \mathcal{G}_5$). Assume that H contains no edge. If the degree (in G) of every vertex of H is at least three, then G is isomorphic to one of the basic graphs B_i , $i = 0, 1, 2$ or 3 . (B_0 is a graph isomorphic to a 5-hole).*

Proof. If H contains no vertices of degree three or four, then we have $H = \phi$ and $G = C = B_0$. Assume now that $H \neq \phi$. Let w be a vertex of H with $d = d(w)$ (degree in G); since the neighbours of w on C are consecutive, we put $N(w) = \{v_i : 1 \leq i \leq d\}$ ($3 \leq d \leq 4$). When $H \setminus \{w\} = \phi$ and $d = 3$ or 4 , the graph G is isomorphic to B_1 or to B_2 .

Case 1, $d = 4$: Suppose that there is a vertex $u \in H \setminus \{w\}$; as G is claw-free, $N(u) \neq N(w)$. If $d(u) = 4$, we have $N(u) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}, v_{j+3}\}$ for some

j , $2 \leq j \leq 5$ (the subscripts are counted modulo 5); for every 3-coloration of vertices of $C \cup \{u, w\}$, starting by coloring the vertices of the triangle $v_1 v_2 w v_1$, vertices u and v_5 receive the same color, a contradiction. If $d(u) = 3$, using the same arguments, a contradiction also arises. Consequently, $|H| = 1$; thus G is isomorphic to B_2 .

Case 2, $d = 3$: Let $u \in H \setminus \{w\}$. It is clear that $d(u) \neq 4$, since otherwise, we return to the previous case and we would have $u = w$, which is not possible. So $d(u) = 3$ and thus $N(u) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\}$ for some j , $2 \leq j \leq 5$. The case where $j = 2$ (resp. $j = 3$) is the same as the case when $j = 5$ (resp. $j = 4$). When $j = 3$, for any 3-coloration of vertices of $C \cup \{u, w\}$, the color-set of $\{w, v_2\}$ and $\{u, v_4\}$ is the same; hence v_1 or v_5 can not be colored; So this case is excluded; for $j = 2$, the set $C \cup \{u, w\}$ induces a subgraph isomorphic to B_3 (observe that H has no more than two vertices of degree three because otherwise, G would not be 3-colorable). ■

Lemma 3.4 *Let $G = H \blacktriangleright C$ ($G \in \mathcal{G}_5$). Suppose that H contains an edge. If the degree, in G , of every vertex of H is at least three, then G is isomorphic to B_3 , B_4 or to B_5 .*

Proof. Let $e = w_1 w_2$ be the unique edge of H (2. of Lemma 3.2); e is a superedge of F_1 or of F_2 .

Case 1. $e \in F_1$ with $F_1 = w_1 w_2 - v_1 v_2 v_3 v_4$. When $H \setminus \{w_1, w_2\}$ contains no vertex of degree three or four, G is isomorphic to B_4 . Let v be a vertex of $H \setminus \{w_1, w_2\}$. Since $3 \leq d = d(v) \leq 4$ (degree in G), we distinguish between two subcases.

Subcase 1.1, $d = 4$: As $|C| = 5$, the set $N(v)$ is either $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ or $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ because otherwise, at least one of the set $\{v_1, w_1, v, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v, w_2\}$ and $\{v_2, v_3, v, w_1\}$ induces a claw in G ; the two possibilities produce the same situation, the first means that $v_1 w_1 w_2 v_3 v v_5 v_1$ is a 6-hole in G . So this case is impossible.

Subcase 1.2, $d = 3$: The set $N(v) \cap C$ is $\{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\}$ for some j , $1 \leq j \leq 5$ (the subscripts are counted modulo 5). $j = 4$ because otherwise either $\{v_1, w_1, v, v_5\}$, or $\{v_4, w_2, v, v_5\}$, or $\{v_3, w_2, v_2, v\}$, or $\{v_2, w_1, v, v_3\}$ induces a claw in G which is not possible. So $N(v) \cap C = \{v_4, v_5, v_1\}$. The subgraph $H \setminus \{w_1, w_2, v\}$ of G does not contain other vertices of degree three because otherwise the neighbours of such vertices on C will be non-consecutive. Hence G is isomorphic to B_5 .

Case 2, $e \in F_2$, $F_2 = w_1 w_2 - v_1 v_2 v_3$: Only one vertex, among w_1 and w_2 , must have three neighbours on C because otherwise either G would be not 3-colorable or it would contain a 6-hole; we can assume that the edge $w_2 v_4$ exists. When $H \setminus \{w_1, w_2\}$ contains no vertex of degree three or four, G is

isomorphic to B_3 . Suppose that there is a vertex v in $H \setminus \{w_1, w_2\}$. v must be adjacent to at least three consecutive vertices among $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$. v is not adjacent to v_1 because otherwise $C \cup \{v, w_1, w_2\}$ induces a subgraph of G which is not 3-colorable; thus v is adjacent to v_3, v_4 and v_5 ; consequently $v_1 w_1 w_2 v_3 v_4 v_5 v_1$ is a 6-hole in G , a contradiction. ■

3.3 Extension of a graph

Let G' be a graph. Let v and v' be any two adjacent vertices such that v (resp. v') is simplicial in $G' \setminus \{v'\}$ (resp. $G' \setminus \{v\}$). The graph, obtained from G' by adding a new vertex u adjacent exactly to v and v' , is an extension of G' (by u). A graph G'' is an extension of G' by a set $U = \{u_1, \dots, u_l\}$ if G'' is the last graph of the sequence $G'_0, G'_1, \dots, G'_l$ where $G'_0 = G'$ and for every i , $1 \leq i \leq l$, the graph G'_i is an extension of G'_{i-1} by u_i .

Let G'' be an extension of the graph G' . It is clear that G' is a claw-free and 3-colorable graph if and only if G'' is claw-free and 3-colorable graph; since adding a vertex to G' to obtain G'' does not create a hole, $G' \in \mathcal{G}_m$ if and only if $G'' \in \mathcal{G}_m$ for every $m \geq 5$.

Let $G' \in \mathcal{G}_m$ such that $G' = H' \blacktriangleright C'$ where C' is a k -hole. A neighbourhood H' of C' is maximal if for every vertex $u \notin G'$ we have $(H' \cup \{u\}) \blacktriangleright C' \notin \mathcal{G}_m$, ($5 \leq k \leq m$).

Notice that if B is a block of a graph G' and B contains a hole C' , then the neighbourhood of C' is maximal (because B is 2-connected maximal).

As a consequence of the two previous lemmas, we have following result.

Theorem 3.5 *Let $G = H \blacktriangleright C \in \mathcal{G}_5$. If the neighbourhood H of C is maximal, then G is an extension of one of the graphs B_i , $i = 0, 1, \dots, 5$.*

Proof. Let D be the set of vertices of H of degree two (in G). When $H \setminus D = \phi$; since neighbours of every vertex of D on C are consecutive, G is an extension of B_0 . When $H \setminus D \neq \phi$; from Lemma 3.3 and Lemma 3.4, $G \setminus D$ is isomorphic to one of the graphs B_i , $i = 1, \dots, 5$. Let us consider an index i such that G contains B_i and a vertex $w \in D$ which has neighbours v_j and v_{j+1} on C ; the vertex v_j (resp. v_{j+1}) is simplicial in $G \setminus \{v_{j+1}\}$ (resp. $G \setminus \{v_j\}$) because otherwise, w would be a vertex of a claw contained in G which is impossible; hence G is an extension of B_i . ■

Remark 3.6

Let G' be a graph of $\mathcal{G}_5$. Suppose that G is a subgraph of G' with $G = H \blacktriangleright C$, and H contains two distinct non adjacent vertices, w and w' , of degree two in G . The vertices w and w' are not connected by a chordless path P such that $P \setminus \{w, w'\}$ is contained in $G' \setminus G$ because otherwise, the subgraph of G' induced by $P \cup C$ will contain a hole of length at least six.

3.4 The main result

Now we can formulate our main result.

Theorem 3.7 *Let G' be a graph of $\mathcal{G}_5$ and B be a block of G' . If B contains a 5-hole, then B is an extension of one of the graphs B_i , $i = 0, 1, \dots, 5$.*

Proof. Let B be a block of G' containing the 5-hole C . Let G be the subgraph of B induced by the vertices of C and all their neighbours (in G'), so $G = H \blacktriangleright C$ (G is 2-connected). Since B is 2-connected and maximal, H is a maximal neighbourhood of C . Using Theorem 3.5, G is one of the graphs $G_i = H_i \blacktriangleright C$, $i = 0, 1, \dots, 5$ where G_i is an extension of a graph B_i . For $i = 1, 2$ or 3 , since every vertex of H_i of degree at least three is not adjacent to any vertex of $B \setminus G_i$, we have $B \setminus G_i = \emptyset$; thus by Remark 3.6, B is isomorphic to one of G_i , which is an extension of B_i for $i = 0, 1, 2, 3$.

For $i = 4$ or 5 : Let w_1 and w_2 be the two endpoints of the unique edge of H_i , for which the neighbours on C are $\{v_1, v_2\}$ and $\{v_3, v_4\}$ respectively (neighbours in G_i). Since B is 2-connected maximal and claw-free, there is a vertex u of $B \setminus G_i$ adjacent to the simplicial vertices w_1 and w_2 ; so $G'_i = G_i \cup \{u\}$ is an extension of G_i by the vertex u . We claim that, in B , for every vertex w of $H_i \setminus \{w_1, w_2\}$ we have:

- (1) u and w are not adjacent and
- (2) u and w are not connected by a chordless path P such that $P \setminus \{u, w\}$ is nonempty and is contained in $B \setminus G'_i$.

Let v be the vertex of B_4 which has three neighbours on C . Suppose (1) does not hold. Since the set of neighbours of w on C is either $\{v_1, v_5\}$, or $\{v_4, v_5\}$, or $\{v_2, v_3\}$, we have either $G'_i \setminus \{v_1, w_2\}$, or $G'_i \setminus \{v_1, v_5, w_2\}$, or $G'_i \setminus \{v_2, w_2, v\}$ is a hole of length at least six, a contradiction.

Instead of the edge uw let us consider a chordless path P of endpoints u and w such that $P \setminus \{u, w\} \subset B \setminus G'_i$; using Remark 3.6 and with the same arguments as in (1), the fact (2) can be established. We have $B \setminus G'_i = \emptyset$ because otherwise, there is a chordless P' containing a vertex u of $B \setminus G'_i$ and

connecting two vertices of $H_i \cup \{u\}$ which contradicts (2). Hence $B = G'_i$, therefore, B is an extension of B_i , $i = 4$ or 5 . ■

As a consequence:

Corollary 3.8 *Let G' be a graph of $\mathcal{G}_5$ and B be a block of G' . If B contains one of the graphs B_i , $i = 0, 1, \dots, 4$ or 5 , then B is an extension of B_i by at most five vertices and every vertex of degree two in B is either a simplicial vertex of degree two in G' or a cut-vertex of G' .*

4 Conclusion

In terms of blocks, we have described the complete structure of graphs in a small class of claw-free graphs; such a description can contribute to the treatment of the list-colouring problem known to be difficult. In the case studied here, it becomes clear that the number of basic graphs allowing description of blocks depend on the length of the hole which they contain, it would be interesting to extend the class and determine properties which allow the description of basic graphs in an acceptable number.

References

- [1] M. Abbas and Y. Saoula, Caractérisation du voisinage des trous des graphes sans griffes et 3-colorables, submitted.
- [2] S. Gravier and F. Maffray, On the choice number of claw-free perfect graphs. *Discrete Mathematics*, **276** (2004) 211-218.
- [3] V. Chvátal and N. Sbihi, Recognizing claw-free perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **44**, (1988) 154-176.
- [4] R. Häggkvist and A. Chetwynd, Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs, *Journal of Graph Theory* **16**, (1992), 503-516.
- [5] F. Maffray, B. A. Reed, A description of claw-free perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **75**, (1999), 134-156.

Received: April 3, 2008

INTERNATIONAL MATHEMATICAL FORUM
Editorial Board

M. Amamiya (Japan)
J.M. Ash (USA)
K. S. Berenhaut (USA)
A. Biswas (USA)
R. Campoamor-Stursberg (Spain)
T. Colding (USA)
A. S. Fokas (UK)
M. Fliess (France)
K. Fuller (USA)
J. Glimm (USA)
W. Goldman (USA)
F.C. Graham (USA)
T. Aaron Gulliver (Canada)
T. Hall (Australia)
S. Kichenassamy (France)
F.-H. Lin (USA)
J. Lyness (USA)
G. Marino (Italy)
K. Ono (USA)
Ju H. Park (Korea)
L. Reichel (USA)
P. C. Sabatier (France)
M. Sanguineti (Italy)
M. Tang (USA)
R. Temam (France)
R. Underwood (USA)
W. Veech (USA)
X. Zhou (USA)
Managing Editor: E. Minchev