

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
Faculté des Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat  
En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Équations aux dérivées partielles

Par : Fatima ARAB

Sujet

Stabilisation non linéaire frontière de l'équation des ondes en présence de singularités.

Soutenue publiquement le 13/10/2019 à 12h devant le jury composé de :

Mr. D.TENIOU	Professeur	à l'USTHB	Président
Mme. F.ALABAU	Professeur	à l'Université de Lorraine	Directrice de thèse
Mme. O.ZAIR	Professeur	à l'USTHB	Directrice de thèse
Mr. M.S.MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Examineur
Mr. H.RAMOUL	Maître de conférence A	à l'Université de Khenchela	Examineur
Mr. T.ALIZIANE	Professeur	à l'USTHB	Invité
Mr. M.MOUSSAOUI	Professeur	à l'ENS Lyon	Invité

---

## *Remerciements*

**J**e voudrais exprimer ici toute ma gratitude aux gens qui m'ont permis d'effectuer ma thèse dans les conditions idéales dont j'ai bénéficié. Sur le plan humain, j'ai trouvé que ces années étaient passionnantes parce que j'ai cotoyé et rencontré des personnes qui forçaient le respect et l'admiration.

Mes remerciements vont en premier à Fatiha Alabau-Boussouira, Tarek Aliziane et Ouahiba Zair. Ce fut un vrai plaisir de les connaître et un honneur d'être leur élève. J'ai beaucoup appris à leur contact. Je les remercie sincèrement pour leur patience, leur disponibilité, leur sens de l'humour et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je les remercie de m'avoir consacré tant d'énergie et d'efforts. Enfin je les remercie pour leurs encouragements, notamment dans les moments difficiles où je croyais être au point mort.

Je remercie Djamel Teniou , Said Moulay, Hichem. Ramoul et Mohand Moussaoui d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je les remercie du temps et de l'intérêt qu'ils ont consacré à mon travail. Je les remercie de leur disponibilité. Je mesure la témérité, la patience et l'énergie qu'il leur a fallu pour se plonger dans mon manuscrit. Merci vraiment. Je les remercie également pour leurs remarques pertinentes sur le manuscrit. Merci enfin d'avoir accepté de venir de loin pour ma soutenance.

Je remercie toutes les personnes du laboratoire AMNEDP. L'ambiance a été vraiment agréable pendant ces années. Il y a tant de moments vraiment drôles que j'ai passé avec eux.

Avec Asma Louardani, Hadjer Ouzzane, Chabha Bekri, Rokia Kechkar, Asma Boutaleb et Asma Boumesbah nous avons partagé les bons et mauvais moments des années d'université.

---

Je vous remercie infiniment pour votre présence et pour l'amitié que vous m'avez témoignée. Je pense aussi à mes collègues merci pour vos encouragements et pour votre soutien.

J'exprime également ma reconnaissance à ma famille pour leurs encouragements et leur aide. Ceci s'applique surtout à mes chers parents pour leurs soutien, amour et surtout motivation. J'ai reçu grâce à eux la meilleur formation scientifique qui soit. Je remercie particulièrement mon cher mari d'être toujours à mes côtés, et son soutien durant la préparation de ma thèse.

Merci à mes chers frères Samir, Sofiane, et mes soeurs Souad, Hanane et Naima. Je termine par remercier mes beaux-frères Ait Abbas Halim et Bouchama Nadir pour leurs conseils.

---

$(E, F)$  Espace des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$

$\mathcal{D}(A)$  domaine de l'opérateur  $A$

$p.p.$  presque partout

$u(t, x) \in (0, T; \Omega)$   $u$  dépend de  $t$  et de  $x$ ,  $t \in [0, T]$  et  $x \in \Omega$

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{gradu}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$  dérivé de  $u$  par rapport à  $t$

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$  dérivée normal extérieure

$\langle u, v \rangle$  crochet de dualité

### Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,

$\partial\Omega = \Gamma$  = frontière de  $\Omega$ ,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

$C^k(\Omega)$  fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$  ( $k$  entier  $\geq 0$ )

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 La stabilisation linéaire et non linéaire</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Stabilisation linéaire . . . . .	12
1.2.1 Introduction . . . . .	12
1.2.2 Aspects géométriques . . . . .	13
1.2.3 Décroissance exponentielle pour des feedbacks linéaires . . . . .	21
1.3 Stabilisation non linéaire en dimensions finies . . . . .	23
1.3.1 Inégalités non linéaires de Gronwall . . . . .	24
1.4 Feedback polynomial en dimensions infinies . . . . .	33
1.5 La méthode de convexité optimale . . . . .	36
1.5.1 Introduction . . . . .	36
1.5.2 Estimations de l'énergie cinétique dominante . . . . .	39
1.5.3 Fonction de poids comme inconnu optimal . . . . .	43
1.5.4 Simplification des taux de décroissance de l'énergie . . . . .	47
<b>2 Résultat d'existence et d'unicité</b>	<b>49</b>
2.1 Position du problème . . . . .	49
2.2 Préliminaires . . . . .	52
2.2.1 Analyse convexe . . . . .	52
2.2.2 Théorie des opérateurs . . . . .	54
2.3 Démonstration du théorème d'existence et unicité de la solution . . . . .	55

2.3.1	Preuve du lemme . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Stabilisation frontière non linéaire de l'équation des ondes en présence de singularités</b>	<b>63</b>
3.1	Résultat principal . . . . .	64
3.1.1	Lemme principal . . . . .	65
3.1.2	Preuve du lemme 3.1.1 . . . . .	65
3.2	Preuve du résultat principal . . . . .	77
3.3	Quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie . . . . .	82
3.4	Cas de multiplicateur retourné $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$ . . . . .	86
3.4.1	Résultat de stabilisation . . . . .	86
	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
	<b>Index</b>	<b>98</b>

---

# Introduction générale

**L**e sujet de cette thèse porte sur l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes en présence de singularités. Nous vivons dans un monde physique où les singularités sont très présentes...En effet, nombreux sont les objets du quotidien qui présentent des singularités telles que des coins, des points ou des arêtes qui se traduisent en mathématiques par une perte de régularité de leurs frontières. Il en est de même pour les ondes électromagnétiques qu'elles se propagent dans un four à micro-ondes ou guidées par des circuits électroniques ou d'optique intégrée, qu'elles soient diffractées par une aile d'avion ou une antenne, nombreuses sont encore les situations où l'on est confronté aux singularités

Notre travail est une contribution à l'étude de la stabilisation frontière de l'équation des ondes par un feedback non linéaire de type Neumann sur une partie de la frontière, l'autre partie vérifiant des conditions de Dirichlet homogènes. Les deux parties de la frontière s'intersectent, ce type de conditions aux limites s'appelle conditions aux limites mixtes. En raison de ces conditions aux limites mixtes, la solution est singulière au voisinage des points d'intersection. Sous une condition géométrique simple sur l'orientation de la frontière, et des hypothèses très générales sur la croissance du feedback au voisinage de zéro nous obtenons des résultats de stabilisation non linéaire. La méthode combine les techniques développées dans Grisvard [26] et Moussaoui [47] pour le traitement des singularités et la méthode de convexité optimale développée dans Alabau-Boussouira [2, 3] pour le traitement des feedbacks non linéaires avec une croissance arbitraire. Le principal avantage est aussi qu'il conduit à une formule simple, générale et explicite pour le taux

de décroissance énergétique, qui est optimale en dimension finie dans la plupart des cas (voir Alabau-Boussouira [3]).

Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^2$ . On suppose que  $\Gamma$  vérifie

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \\ \text{mes}(\Gamma_D) \neq 0 \\ \text{mes}(\Gamma_N) \neq 0 \end{cases}$$

On note  $\{S_1, S_2\} = \overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N$ , les points où les conditions aux limites mixtes se rencontrent.

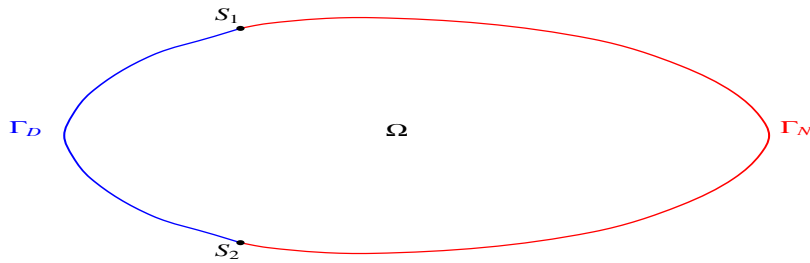


Figure 0.0.1 : Un exemple de domaine  $\Omega$

Le but de cette thèse est d'étudier la stabilisation frontière de la solution du problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + m \cdot \nu d(u_t) = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_N, \\ u(0, \cdot) = u^0, & \text{sur } \Omega, \\ u_t(0, \cdot) = u^1, & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où

- $d$  est une fonction non linéaire à valeurs réelles et à croissance linéaire à l'infini,
- $\nu$  est la normale unitaire extérieure.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $m$  comme suit,

$$\begin{cases} m(x) = x - x_0, & \forall x \in \mathbb{R}^2, \\ \Gamma_D = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \leq 0\}, \\ \Gamma_N = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu > 0\}. \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes sur la fonction de feedback non linéaire  $d$ :

$$\begin{cases} d \in C(\mathbb{R}) \text{ est monotone croissante,} \\ \exists \text{ une fonction } g \in C^1(\mathbb{R}) \text{ impaire strictement croissante telle que,} \\ g(|v|) \leq |d(v)| \leq Cg^{-1}(|v|) & \text{si } |v| \leq 1, \\ |v| \leq |d(v)| \leq C|v| & \text{si } |v| \geq 1, \end{cases} \quad (\text{HD})$$

où  $C > 0$  est une constante.

On rappellera dans cette thèse le caractère bien posé de (0.0.1) dans le cadre fonctionnel suivant

On introduit les espaces

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\},$$

et l'espace d'énergie

$$\mathcal{H} := V \times L^2(\Omega).$$

Il est bien connu que pour des données initiales  $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ , le problème (0.0.1) est bien posé en  $\mathcal{H}$ . En effet, on définit l'opérateur non linéaire  $A$  par

$$A(u, v) = (-v, -\Delta u)$$

où

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (u, v) \in V \times V; \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = -(m \cdot \nu) d(v) \text{ sur } \Gamma_N \right\}$$

Ici  $\Delta u$  est pris au sens des distributions alors que l'égalité  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(m \cdot \nu) d(v)$  est supposée donnée au sens faible, qui est

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(v) \varphi \, d\sigma, \quad \forall \varphi \in V.$$

Alors, (0.0.1) peut être écrit sous la forme abstraite

$$\begin{cases} (u, v)' + A(u, v) = 0 \\ (u, v)(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

On montrera par la suite que  $A$  est un opérateur maximal monotone sur  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 0.0.1** *Supposons l'hypothèse (HD). Alors pour toute  $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ , le problème (0.0.1) a une solution unique  $u \in C([0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$ . De plus, son énergie, définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad t \geq 0 \quad (0.0.2)$$

est décroissante, en outre, si  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$

$$E'(t) = - \int_{\Gamma_N} m(x) \cdot \nu(x) u_t d(u_t) d\sigma \leq 0.$$

Ces types de problèmes ont été étudiés par de nombreux auteurs. On peut citer Lagnese [37]; Grisvard [26]; Komornik [35] Komornik et Zuazua [36]; Niane et Seck [49]. On peut également consulter Nicaise [50] et Puel et Zuazua [51]. Ce type d'analyse repose bien souvent sur des techniques de multiplicateur qui exigent des solutions régulières, en général dans  $H^2(\Omega)$  où  $\Omega$  est le domaine spatial. Dans le cas de la stabilisation frontière avec des conditions aux limites mixtes, l'une des principales difficultés est que, même pour des données très régulières, la dérivée normale de la solution de (0.0.1) n'est pas dans  $L^2((0, \infty) \times \Gamma_D)$  (voir Moussaoui [47] pour plus de détails). Ceci est lié au fait que la solution  $u$  de (0.0.1) est telle que pour  $t \geq 0$ ,  $u(t, \cdot) \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et n'est pas dans  $H^{3/2}(\Omega)$ . On décrit ci-dessous la forme de la partie singulière de la solution au voisinage des points singuliers  $S_1, S_2$ . Pour  $(u, v)$  de  $D(A)$ ,  $(m \cdot \nu) d(v)$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

En utilisant un résultat de trace, on peut construire  $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$  telle que:

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = - (m \cdot \nu) d(v) \quad \text{sur } \Gamma.$$

Soit  $f = \Delta \tilde{u} - \Delta u$ , alors  $U = u - \tilde{u}$  satisfait le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta U = f & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

où  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ . Il est bien connu (voir Grisvard [26]), que la solution de (0.0.3) n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ .

Plus précisément, la solution est donnée par

$$U(r, \theta) = U_R(r, \theta) + c_1 \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \chi_1 + c_2 \sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \chi_2, \quad (0.0.4)$$

où  $U_R \in H^2(\Omega)$  est la partie régulière de la solution,  $(r_j, \theta_j)$  sont les coordonnées polaires locales au point  $S_j$ ,  $c_j$  sont des constantes réelles, et  $\chi_j$  est une fonction troncature de telle sorte que  $0 \leq \chi_j \leq 1$  et  $\chi_j = 1$  dans un voisinage de  $S_j$  pour  $j = 1, 2$ . Ainsi  $u = U + \tilde{u}$  admet une décomposition de la même forme que dans (0.0.4). Par conséquent, si  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$  pour  $t$  fixé, la solution  $u$  de (0.0.1) peut être écrite sous la forme

$$u(t, r, \theta) = u_R(t, r, \theta) + c_{1s}(t) \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \chi_1 + c_{2s}(t) \sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \chi_2$$

où  $c_{is} \in C^1(0, \infty)$  pour  $i = 1, 2$  et  $u_R(t, \cdot) \in H^2(\Omega)$ .

Dans le cas régulier,  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$ , Komornik [35] (voir aussi Komornik et Zuazua [36]) a prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie pour des feedbacks linéaires. En revanche, lorsque  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N \neq \emptyset$ , le changement de condition au bord génère pour les solutions fortes des solutions singulières qui n'ont plus la régularité  $H^2$ . Pour remédier ce manque de régularité dans l'étude de la contrôlabilité exacte, Grisvard [26] a introduit une condition géométrique restrictive et a prouvé que l'inégalité de Rellich est vérifiée. Komornik et Zuazua [36] ont également considéré l'équation des ondes avec un feedback linéaire, dans le cas singulier pour des dimensions inférieures ou égales à 3. Pour cela, ils ont généralisé l'inégalité de type Rellich prouvée par Grisvard et l'ont combiné avec une méthode d'énergie perturbée. Celle-ci consiste à introduire l'énergie modifiée  $E_\epsilon$ , et à prouver que  $E_\epsilon$  satisfait une inégalité différentielle appropriée qui est;  $E'_\epsilon(T) \leq cE_\epsilon(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Moussaoui [47], Bey, Lohéac et Moussaoui [11] ont étendu le résultat de

[26] et [32] à la dimension  $n \geq 3$ , avec la même condition géométrique. Brossard et Lohéac [13] ont étudié les relations de type Rellich pour un problème de l'élasticité frontière mixte en dimension  $n \geq 3$ , et dans [14] ils ont étendu leurs résultats de stabilisation frontière à un système élastodynamique en présence de singularités. Cornilleau, Lohéac et Osses [20] ont étudié la stabilisation frontière non linéaire de l'équation des ondes en présence de singularités à l'aide de multiplicateurs tournants, en dimension 2, ainsi pour la dimension supérieure à 3.

Dans cette thèse, on étend les résultats précédents aux feedbacks non linéaires arbitraires (près de l'origine). On généralise le résultat d'Alabau-Boussouira [2, 3] au cas  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N \neq \emptyset$  sous des conditions géométriques restrictives données dans Grisvard [26]. Nos résultats permettent ainsi d'étendre les résultats précédents dans une classe de feedbacks beaucoup plus large, que celle de la croissance linéaire ou polynomiale. Pour autant qu'on sache, ce sont les premiers résultats dans cette direction. Notons que nous ne pouvons pas utiliser directement les résultats de Komornik et Zuazua [36], car ces résultats sont basés sur la méthode de l'énergie modifiée et sur l'approche de l'inégalité différentielle. Néanmoins, il existe des liens pédagogiques, comme dans tous les documents concernés par le sujet des conditions limites mixtes, entre la partie de notre document traitant des singularités et l'approche de Grisvard [26] et Moussaoui [47].

On réfère à Lasiecka et Tataru [40] pour les premiers résultats en utilisant des arguments de convexité avec des inégalités différentielles pour les feedbacks de croissance arbitraires dans le cas de solutions régulières, mais avec l'inconvénient qu'aucune formule d'énergie de décroissance semi-explicite n'est donnée sauf pour les feedbacks de croissance linéaire et polynomiale. Nous nous référons aux papiers (Martinez, [44, 45]) et aux références qui s'y rapportent pour des arguments de convexité différents, basés sur des inégalités intégrales et, qui conduisent à des formules explicites de décroissance de l'énergie mais qui ne sont pas toujours optimales. Ces deux documents sont les premiers à établir deux formules explicites de décroissances énergétiques explicite générales. Le fait que ces formules ne conduisent pas toujours à des taux de décroissance optimales est

dû au choix d'une fonction poids dans l'intégrale d'une part qui n'est pas liée à l'énergie et d'autre part non optimale.

La méthode de convexité de poids optimal (Alabau-Boussouira, [2]) est la première méthode complète qui conduit à des taux de décroissance de l'énergie simples, en une seule étape, optimale et qui permet de le faire de manière unifiée. Il s'avère en outre, être valable dans un cadre général abstrait comprenant comme cas particulier l'équation des ondes, avec des feedbacks non linéaires localement ou frontière. Le document (Cavalcanti, Domingos Cavalcanti et Lasiecka, [18]) considère le cas d'une équation des ondes avec damping non linéaire, en présence de termes source à la fois dans le domaine et sur sa frontière. Il utilise les idées clés d'Alabau-Boussouira [2] pour obtenir des taux de décroissance explicite pour différents exemples (voir la remarque 8.1 de Cavalcanti et al., [18]).

Cavalcanti et al. [18] ne fournissent pas une formule de décroissance semi-explicite simple directe en termes de  $H$ , comme dans Alabau-Boussouira [2, 3] dans le cas général, mais plutôt utilise l'approche d'inégalité différentielle de Lasiecka et Tataru [40] pour donner une comparaison avec la solution d'une équation différentielle ordinaire en décomposition. Plus précisément, corollaire 8.1 dans Cavalcanti et al. [18] repose sur la fonction  $H(x) = \sqrt{x}g(\sqrt{x})$  définie dans  $(HD)$  ci-dessous, et introduit dans Alabau-Boussouira [2]. En particulier, les auteurs utilisent la fonction  $H$ , pour définir l'équation différentielle ordinaire qui donne l'information utile sur le taux de décroissance de l'énergie, ce qui est essentiel.

Soulignons également qu'un aspect important est que la méthode que nous utilisons pour traiter la non-linéarité, n'est pas basée sur une énergie modifiée comme dans Komornik et Zuazua [36], ni sur les inégalités différentielles comme dans Komornik et Zuazua [36], Lasiecka et Tataru [40]. Elle est basée sur la démonstration que l'énergie, quand elle est une fonction positive décroissante sur  $[0, \infty)$  (voir [34] pour les fonctions feedbacks linéaires ou polynomiales), satisfait une inégalité intégrale. Dans le cas linéaire, cette

inégalité intégrale prend la forme:

$$\int_S^T E(t) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

où  $T_0$  est une constante positive, et ne dépendant pas de  $S, T$ . On peut alors en déduire que l'énergie est à décroissance exponentielle à l'infini (voir [34] pour la démonstration). Pour une fonction damping avec croissance  $|x|^{p-1}x$  pour  $x$  proche de 0 (et une croissance linéaire à l'infini), l'inégalité intégrale prend la forme

$$\int_S^T E^{p-1/2}(t) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

On peut alors en déduire que l'énergie décroît comme  $t^{-2/(p-1)}$  quand  $t$  tend vers l'infini (voir [34] pour la démonstration). L'une des principales obstructions, avant le travail Alabau-Boussouira [2] (les résultats ont été en premier annoncés dans Alabau-Boussouira [1]), était de déterminer une formule de décroissance énergétique générale semi-explicite (donnée en (1.3.23)), qui couvrirait les cas polynomiaux habituels ainsi que des cas d'amortissement très faibles (lorsque, par exemple, la fonction d'amortissement  $d$  décroît à 0 de façon exponentielle lorsque ses arguments tend vers 0), d'une manière unifiée. Pour cela, la construction d'une fonction de poids explicite pour une croissance arbitraire de la fonction  $d$  (supposée seulement à se dégrader plus vite que linéairement à 0, la situation inverse ne nécessitant que l'échange  $d$  et  $d^{-1}$ ) et son utilisation, est un résultat clé donné dans Alabau-Boussouira [2].

Cette formule prend la forme donnée en (1.3.21), qui est

$$\int_S^T w(E(t)) E(t) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

où  $w$  est la fonction de poids optimale (qui est liée au feedback, et définie dans (1.3.15)). On déduit alors la formule de taux de décroissance optimale générale (1.3.23) (voir Alabau-Boussouira [2] pour la preuve), et sous d'autres hypothèses, la formule simplifiée (1.3.25) (voir Alabau-Boussouira [3] pour la preuve). Une utilisation appropriée des propriétés de convexité est déterminante si l'on veut obtenir des taux de décroissance ex-

plicités, "optimales" et générales de l'énergie. La formule semi-explicite (1.3.23) est simplifiée dans Alabau-Boussouira [3]. Cette simplification repose sur l'introduction d'une classification des croissances d'amortissement de  $d(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 en utilisant une nouvelle fonction  $\Lambda_H$  telle que définie dans (1.3.16). Cette nouvelle fonction permet de définir des feedbacks de croissance proches de linéaires. Pour les feedbacks qui ne sont pas proches d'une linéarité, la formule simplifiée de décroissance énergétique semi-explicite est donnée en (1.3.25). Précisons le gain essentiel dans de tels taux de décroissance de l'énergie optimale explicite. En effet, Si on peut prendre  $g = d$  en  $(HD)$  (en supposant que  $d$  est sous-linéaire près de 0 et pas proche d'une croissance linéaire, ce qui est le cas difficile), et si certaines propriétés de convexité sont satisfaites, alors on déduit de nos résultats que l'énergie  $E$  décroît à l'infini comme

$$E(t) \leq C_1(H')^{-1}\left(\frac{C_2}{t}\right), \text{ pour } t \text{ suffisamment grand,}$$

où  $H(x) = \sqrt{x}d(\sqrt{x})$  pour  $x \in [0, r_0^2]$  ( $r_0$  étant suffisamment petit), et  $C_1, C_2$  sont des constantes positives ( $C_1$  en fonction de  $E(0)$  d'une manière explicite,  $C_2$  étant indépendante de  $E(0)$ ).

Le travail de cette thèse est constituée de trois chapitres et d'une conclusion. Le premier chapitre est un récapitulatif des résultats sur la stabilisation linéaire et non linéaire ( résumé de Alabau-Boussouira [4]). Dans le deuxième chapitre on prouve l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation des ondes non linéaire. Le troisième chapitre concerne l'étude de la stabilisation non linéaire de l'équation des ondes en présence de singularités par un feedback frontière. On démontre par la suite une inégalité intégrale pour l'énergie. Grâce à cette inégalité, nous établissons un résultat de stabilisation non linéaire de l'équation des ondes avec des conditions mixtes. Ce travail a fait l'objet d'une publication [6]. On termine ce chapitre par un résultat de stabilisation non linéaire de l'équation des ondes en présence de singularités avec le multiplicateur tournants  $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$ .

---

# La stabilisation linéaire et non linéaire

**L**e but de ce chapitre est de présenter quelques avancées récentes sur la stabilisation. Pour la stabilisation non linéaire, notre objectif est de présenter la méthode de convexité de poids optimal introduite dans [2, 3], qui fournit une méthodologie complète pour établir des taux de décroissance de l'énergie qui sont optimales ou quasi optimales, et dans la dimension finie ou infinie et permettent de traiter, d'une manière unifiée différents EDP's, ainsi que différents types d'amortissement: localisé, frontière. L'optimalité est prouvée dans des dimensions finies et en particulier pour des EDP semi-discrétisées. Ces résultats sont obtenus à l'aide de principes de comparaison de l'énergie [3]. Cette méthodologie peut être étendue à la configuration dimensionnelle infinie grâce à des principes de comparaison d'énergie encore complétés par des techniques d'interpolation. La méthode de convexité optimale est présentée avec deux approches: une directe et une indirecte. La première approche est basée sur la méthode du multiplicateur et nécessite les hypothèses de la méthode du multiplicateur sur la zone de localisation du feedback. La seconde est basée sur un argument indirect, à savoir que les solutions des systèmes non amortis correspondent à une inégalité d'observabilité, la zone d'observation correspondant à la zone amortie pour le système amorti. L'avantage est que cette inégalité d'observation se maintient dans la condition de contrôle géométrique optimale de Bardos Lebeau et Rauch [10]. La stabilisation indirecte des systèmes couplés

a reçu beaucoup d'attention récemment. Ce sujet concerne les questions de stabilisation pour les EDP's couplées avec un nombre réduit de feedbacks. En pratique, il n'est souvent pas possible de contrôler toutes les composantes de l'état vectoriel, soit en raison de limitations technologiques, soit en raison des coûts. Du point de vue mathématique, cela signifie que certaines équations du système couplé ne sont pas directement stabilisées. Cela génère des difficultés mathématiques, ce qui nécessite d'introduire de nouveaux outils pour étudier ces questions.

## 1.1 Introduction

Commençons par quelques motivations du matériel présenté dans ce chapitre. Une question importante en ingénierie pour les sciences des matériaux est la stabilisation de structures souples telles que des poutres, des plaques ou des structures mécaniques telles que des antennes de satellites. Les oscillations ou vibrations des matériaux ou structures élastiques ou visco-élastiques sont décrites par des EDP's réversibles. En général, pour de telles applications, il est important de réduire les vibrations en mettant en œuvre des lois de rétroaction dans le système. Ces feedbacks sont construits de manière à stabiliser le système, c'est-à-dire à réduire les oscillations des solutions au fur et à mesure que le temps augmente. Une façon courante de mesurer cette décroissance est de considérer l'énergie naturelle associée au système. L'un des objectifs de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique de l'énergie des solutions des systèmes stabilisés c-à-d déterminer si la convergence vers les états d'équilibre quand le temps tend vers l'infini détient, déterminer sa vitesse de convergence si nécessaire.

Le but de ce chapitre est de montrer comment les méthodes d'énergie associées à d'autres outils tels que convexité, les inégalités intégrales différentielles et non différentielles sont puissantes pour obtenir des taux de décroissance énergétique optimale ou quasi optimale, liées aux propriétés physiques des systèmes dissipatifs. Dans cette analyse, une question essentielle est celle de l'optimalité. La dérivation des taux de décroissance n'est pas suffisante, il est essentiel de savoir si ces taux de décroissances sont optimaux. Nous

allons montrer comment prouver l'optimalité pour les systèmes dissipatifs de dimension finie et comment relier des techniques dans des dimensions finies et infinies.

## 1.2 Stabilisation linéaire

### 1.2.1 Introduction

Le but de cette section est de considérer le cas de la stabilisation linéaire de l'équation des ondes par un feedback distribué localement. Nous rappeller les conditions géométriques sur la région d'amortissement à la fois du multiplicateur et des conditions d'optique géométrique. On présente ensuite la méthode du multiplicateur par morceaux par Zuazua [57] pour le cas d'un ou plusieurs points d'observation et K. Liu [42] avec un point de qui préparera le cas de stabilisation non linéaire. En particulier, on souligne le fait que la méthode du multiplicateur permet d'identifier une énergie dominante, à savoir l'énergie cinétique.

La décroissance exponentielle de l'énergie, pourvu que la région d'amortissement satisfasse la condition multiplicatrice par morceaux, est prouvée grâce à une inégalité linéaire de Gronwall.

On considère maintenant le cas d'une équation des ondes linéairement amortie localement

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, +\infty) \times \Gamma \\ (u, u_t)(0) = (u^0, u^1), & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$\Omega$  un ensemble ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^N$  avec une frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  régulière,  $a \geq 0$  p.p dans  $\Omega$ . On définit l'énergie de la solution par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 + |\nabla u|^2 dx$$

En multipliant formellement la première équation de (1.2.1) par  $u_t$ , en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant la formule de Green, on obtient pour des solutions fortes la relation de

dissipation suivante:

$$E'(t) = - \int_{\Omega} a(x) |u_t(t, x)|^2 dx \leq 0. \quad (1.2.2)$$

### 1.2.2 Aspects géométriques

La propriété de la vitesse finie de propagation est valable pour l'équation des ondes. Cela signifie que, si les conditions initiales  $u^0, u^1$  ont un support compact, alors le support de  $u(t, \cdot)$  évolue dans le temps à une vitesse finie. Ainsi, si le support de l'ensemble sur lequel l'amortissement est actif est tel que certains rayons émis ne le rencontrent pas, on peut construire des solutions de l'équation des ondes amortie dont l'énergie se concentre près de ces rayons, de sorte que l'énergie ne décroît pas uniformément au fur et à mesure que le temps augmente. Cela explique pourquoi, pour l'équation des ondes, la géométrie de  $\Omega$ , en particulier sa taille et sa localisation, joue un rôle essentiel dans toutes les questions liées au contrôle et à la stabilisation.

On désigne la région de support dans laquelle le feedback est actif par  $\omega$ . Il est pris comme un sous-ensemble de  $\Omega$  de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,  $a$  est supposé être continu sur  $\overline{\Omega}$  et tel que

$$a \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } a \geq a_0 \text{ sur } \omega, \quad (1.2.3)$$

pour une constante  $a_0 > 0$ . Dans ce cas, le feedback est dit distribué. De plus, on dit qu'il est globalement distribué si  $\omega = \Omega$  et localement distribué si  $\Omega \setminus \omega$  a une mesure de Lebesgue positive.

La méthode du multiplicateur et la méthode de l'optique géométrique basée sur l'analyse microlocale sont les deux principales méthodes qui ont été développées et utilisées pour étudier les premiers taux d'énergie exponentielles des équations hyperboliques amorties réversibles, puis étendues pour traiter les amortissements non linéaires. La méthode de l'optique géométrique donne les résultats géométriques les plus nets. Les travaux de Bardos, Lebeau et Rauch [10] donnent à la géodésique des conditions suffisantes sur la région de contrôle actif pour une maîtrise exacte et par conséquent de stabilisation à tenir. Ces conditions disent que chaque rayon d'optique géométrique doit rencontrer la

région de contrôle. Burq et Gérard [15] ont montré que ces résultats tiennent à des hypothèses de régularité plus faible sur le domaine et les coefficients des opérateurs (voir aussi [16, 17]). Ces conditions géodésiques ne sont pas explicites, en général, mais elles permettent d’obtenir des estimations de décroissance de l’énergie sous des hypothèses très générales.

La méthode du multiplicateur est une méthode explicite. Elle est basée sur des estimations d’énergie et des inégalités de Gronwall. Les cas de contrôle des frontières et de stabilisation sont considérés dans les contributions fondamentales de plusieurs auteurs, comme Ho [33], [19], J.-L. Lions [41], Lasiecka-Triggiani, Komornik-Zuazua [36], et beaucoup d’autres. Zuazua [57] donne une condition géométrique explicite sur  $\omega$  pour une équation des ondes semi-linéaire soumise à un amortissement localement réparti sur  $\omega$ , à savoir qu’elle doit contenir un  $\varepsilon$ -voisinage de toute la frontière de  $\Omega$ . En utilisant les estimations d’observabilité obtenues par Fu, Yong et Zhang [25] combinées aux résultats de Zuazua [57], le résultat de stabilisation exponentielle de Zuazua s’étend au cas géométrique pour lequel  $\omega$  ne contient qu’un  $\varepsilon$ -voisinage de la partie de la frontière qui n’est pas visible à partir d’un point donné  $x_0$  de  $\mathbb{R}^N$ , qui symbolise un observateur placé à cet endroit. Une telle condition exclut le cas d’un coefficient d’amortissement qui disparaît aux deux pôles d’une sphère. K. Liu [42] méthode de multiplicateur par morceaux généralise le résultat de Zuazua (voir aussi Martinez [44]). Il permet plusieurs points d’observation et donc de détendre les hypothèses géométriques comme on le voit plus loin.

Pour ces questions, on rappelle que la méthode des estimations de Carleman est également l’un des principaux outils pour de tels résultats. Les résultats utilisant des estimations de Carleman ont été récemment obtenus par Tebou [?].

Expliquons maintenant l’extension de Zuazua et K. Liu. La condition géométrique de multiplicateur de Zuazua peut être décrite comme suit. Si l’on donne un sous-ensemble  $O$  de  $\bar{\Omega}$ , on peut définir un  $\varepsilon$ -voisinage de  $O$  dans  $\bar{\Omega}$  comme le sous-ensemble de points de  $\Omega$  qui sont à distance au plus  $\varepsilon$  de  $O$ . Zuazua a prouvé que si l’ensemble  $\omega$  est tel qu’il existe un point  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ - point d’observation - pour lequel  $\omega$  contient un voisinage  $\varepsilon$  de

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}, \quad (\text{CG})$$

alors l'énergie décroît exponentiellement.

Si  $a$  s'annule par exemple dans un voisinage des deux pôles d'une boule  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ , on ne peut pas trouver un point d'observation  $x_0$  tel que  $(CG)$  se maintienne. K. Liu [42] (voir aussi [44]) a introduit une méthode de multiplication par morceaux qui permet de choisir plusieurs points d'observation, et donc de traiter le cas ci-dessus. Notons par  $x_j \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 1, \dots, J$ , ces points d'observation distincts. Introduire les domaines lipschitziens disjoints  $\Omega_j$  de  $\Omega$ ,  $j = 1, \dots, J$ , et définissent

$$\gamma_j(x_j) = \{x \in \partial\Omega_j, (x - x_j) \cdot \nu_j(x) \geq 0\}$$

Ici  $\nu_j$  représente le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière de  $\Omega_j$ . Alors la

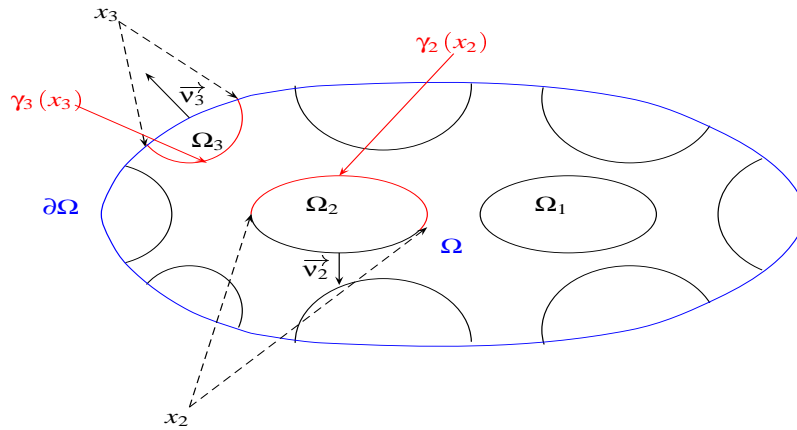


Figure 1.2.1 :

condition géométrique du multiplicateur par morceaux pour  $\omega$  est:

$$\left\{ \omega \supset N_\varepsilon \left( \bigcup_{j=1}^J \gamma_j(x_j) \cup (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^J \Omega_j) \right) \right\} \quad (\text{HG})$$

Avec cette méthode, on peut gérer la situation dans laquelle  $a$  s'annule dans un voisinage des deux pôles d'une boule dans  $\mathbb{R}^N$  comme suit. On choisit deux sous-ensembles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  contenant respectivement les deux régions où  $a$  s'annule et applique la méthode multiplicatrice par morceaux avec  $J = 2$  et avec les choix appropriés de deux points d'observation et  $\varepsilon$ .

Présentons maintenant en quelques mots les principes de la méthode du multiplicateur. Il consiste à intégrer par parties des expressions de la forme

$$\int_0^T \int_{\Omega} Mu (u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t) dx dt = 0 \quad 0 \leq t \leq T,$$

où  $u$  représente une solution (forte) de (1.2.4), avec un choix approprié de  $Mu$ . Les multiplicateurs ont généralement la forme

$$Mu = (m(x) \cdot \nabla u + cu) \Psi(x),$$

où  $m$  dépend des points d'observation et  $\Psi(x)$  est une fonction troncature. D'autres multiplicateurs de la forme  $Mu = \Delta^{-1}(\beta u)$ , où  $\beta$  est une fonction de troncature et  $\Delta^{-1}$  est l'inverse de l'opérateur laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, ont également été utilisés dans la littérature (voir [22]).

**Théorème 1.2.1** *Supposons que les conditions géométriques (CG) ou (HG) sont vérifiées.*

*Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.2.1) et  $E$  son énergie.*

*Alors  $E$  satisfait une estimation de la forme*

$$\int_t^T E(s) ds \leq C_1 E(t) + C_2 \int_t^T \left( \int_{\Omega} a(x) |u_t|^2 dx + \int_{\omega} |u_t|^2 dx \right) ds \quad t \geq 0, \quad (1.2.4)$$

où  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  désignent des constantes positives génériques

**Preuve.** On va prouver que l'énergie des solutions satisfait une estimation de la forme (1.2.4) en utilisant la méthode du multiplicateur par morceaux. On procède comme dans [44]

$$\rho(x, s) = a(x) s \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

Soit  $(u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Soit  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$  et définit pour  $i = 0, 1, 2$  :

$$Q_i = N_{\varepsilon_i} [\cup_j \Gamma_j(x_j) \cup (\Omega \setminus \cup_j \Omega_j)].$$

Comme  $(\overline{\Omega_j} \setminus Q_1) \cap \overline{Q_0} = \emptyset$ , on peut construire une fonction  $\Psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  qui satisfait

$$0 \leq \Psi_j \leq 1, \Psi_j = 1 \text{ sur } \overline{\Omega_j} \setminus Q_1, \Psi_j = 0 \text{ sur } Q_0.$$

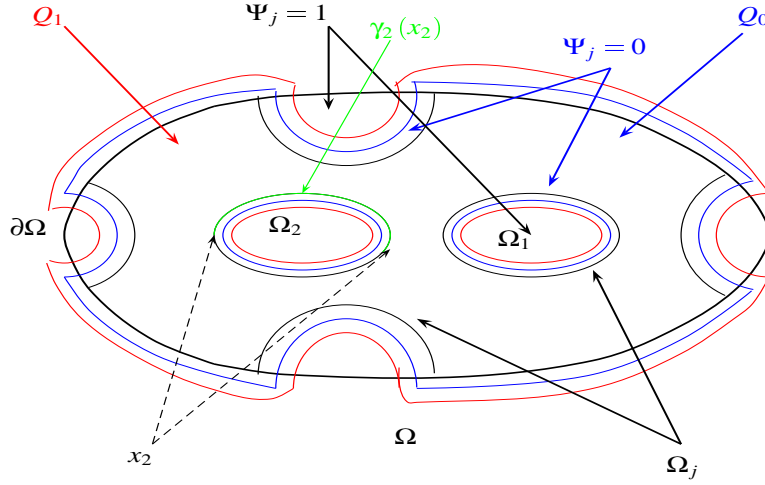


Figure 1.2.2 :

On définit le champ vecteur  $C^1$  sur  $\Omega$ :

$$h(x) = \begin{cases} \Psi_j(x) m_j(x) & \text{si } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \cup_j \Omega_j, \end{cases}$$

et le multiplicateur  $h \cdot \nabla u$ . En procédant comme dans [44], on considère l'expression

$$\int_t^T \int_{\Omega_j} h(x) \cdot \nabla u (u_{tt} - \Delta u + \rho(x, u_t)) dx dt = 0$$

Par souci de concision, nous omettrons le  $dx dt$  dans les intégrales suivantes. Cela donne, après intégration appropriée par parties

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu_j} h(x) \cdot \nabla u + \frac{1}{2} (h \cdot \nu) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \right) &= \left[ \int_{\Omega_j} h(x) \cdot \nabla u u_t \right]_S^T \\ - \int_S^T \int_{\Omega_j} \left( \frac{1}{2} \operatorname{div}(h) (u_t^2 - |\nabla u|^2) + {}_{i,k} \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + \rho(x, u_t) h(x) \cdot \nabla u \right). & \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Grâce au choix de  $\Psi_j$ , seul le terme de limite sur  $(\Gamma_j \setminus \gamma_j(x_j)) \cap \Gamma$  est non-évolutif dans le côté gauche de (1.2.5). Mais sur cette partie de la frontière  $u = 0$ , de sorte que  $u_t = 0$  et  $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu_j} \cdot \nu_j = \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu$ . Par conséquent, le côté gauche de (1.2.5) se réduit à

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma(\Gamma_j \setminus \gamma_j(x_j)) \cap \Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu_j} \right)^2 \Psi_j (m_j \cdot \nu_j) \leq 0.$$

Par conséquent, puisque  $\Psi_j = 0$  sur  $Q_0$  et grâce à l'inégalité ci-dessus utilisée dans (1.2.5), on en déduit

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega_j} h(x) \cdot \nabla u u_t \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega_j} \frac{1}{2} \operatorname{div}(h) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \\ & + ({}_{i,k} \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + h(x) \cdot \nabla u \rho(x, u_t)) \leq 0. \end{aligned}$$

En utilisant  $\Psi_j = 1$  sur  $\overline{\Omega_j} \setminus Q_1$  et en additionnant les inégalités résultantes sur  $j$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} h(x) \cdot \nabla u u_t \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega_j \setminus Q_1} \frac{1}{2} [N(u_t^2 + (2-N)|\nabla u|^2)] + \int_S^T \int_{\Omega} h(x) \cdot \nabla u \rho(x, u_t) \\ & \leq -j \int_S^T \int_{\Omega_j \cap Q_1} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{div}(\Psi_j m_j) (u_t^2 - |\nabla u|^2) + {}_{i,k} \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u \right] \\ & \leq C \int_S^T f(E) \int_{\Omega \cap Q_1} (u_t^2 + |\nabla u|^2) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

où  $C$  est une constante positive qui ne dépend que de  $\Psi_j$  et  $m_j$ . On utilise maintenant le deuxième multiplicateur  $u(N-1)/2$  et évaluons donc le terme

$$\frac{N-1}{2} \int_S^T \int_{\Omega_j} u (u_{tt} - \Delta u + \rho(x, u_t)) dx dt = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{N-1}{2} \left[ \int_{\Omega} u u_t \right]_S^T - \frac{N-1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - |u_t|^2 + u \rho(x, u_t)) dx dt = 0 \tag{1.2.7}$$

On pose  $M(u) = h(x) \cdot \nabla u + \frac{N-1}{2} u$ . En ajoutant (1.2.7) à (1.2.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_S^T E \leq C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} (u_t^2 + |\nabla u|^2) - \left[ \int_{\Omega} M(u) u_t \right]_S^T \\ & - \int_S^T \int_{\Omega} M(u) \rho(x, u_t). \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

On estime les termes du côté droit de (1.2.8) comme suit. Tout d'abord, puisque  $E$  est non-croissant, on déduit

$$\left| \left[ f(E) \int_{\Omega} M(u) u_t \right]_S^T \right| \leq CE(S). \quad (1.2.9)$$

Nous estimons le dernier terme de (1.2.8) comme suit

$$\left| \int_S^T \int_{\Omega} M(u) \rho(x, u_t) \right| \leq \frac{C}{\delta} \int_S^T \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 + \delta \int_S^T E(t), \quad \forall \delta > 0. \quad (1.2.10)$$

La difficulté est maintenant d'estimer le premier terme du côté droit de (1.2.8). On suit ici la technique habituelle de l'équation des ondes développée dans [44]. On donne les étapes pour le bien de l'exhaustivité. Puisque  $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus Q_2} \cap \overline{Q_1} = \emptyset$ , il existe une fonction  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  telle que

$$0 < \xi < 1; \quad \begin{cases} \xi = 1 & \text{sur } Q_1, \\ \xi = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus Q_2. \end{cases}$$

En multipliant la première équation de (1.2.1) par  $\zeta u$  et en intégrant l'équation résultante sur  $[S, T] \times \Omega$ , on obtient après plusieurs intégrations par parties:

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \xi &= - \left[ \int_{\Omega} u \xi u_t \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} \xi |u_t|^2 + \frac{1}{2} u^2 \Delta \xi \\ &\quad - \int_S^T \int_{\Omega} \xi u \rho(x, u_t) dx dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_S^T f(E) \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 \leq CE(S) + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_2} |\rho(x, u_t)|^2 + |u_t|^2 + u^2 \quad (1.2.11)$$

Comme on a  $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} \cap \overline{Q_2} = \emptyset$ , il existe une fonction  $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  telle que

$$0 < \beta < 1; \quad \begin{cases} \beta = 1 & \text{sur } Q_2, \\ \beta = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \omega. \end{cases}$$

On fixe  $t$  et on considère la solution  $z$  du problème elliptique suivant:

$$\begin{cases} \Delta z = \beta(x) u & x \in \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Donc,  $z$  et  $z'$  satisfont aux estimations suivantes:

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.12)$$

$$\|z'\|_{L^2(\Omega)} \leq c \int_{\Omega} \beta |u_t|^2. \quad (1.2.13)$$

En multipliant la première équation de (1.2.1) par  $z$  et en intégrant l'équation résultante sur  $[S, T] \times \Omega$ , on obtient après intégration par parties:

$$\int_S^T \int_{\Omega} \beta(x) u^2 = \left[ \int_{\Omega} z u_t \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} (z \rho(x, u_t) - z' u_t) dx dt.$$

Par conséquent, en utilisant les estimations (1.2.12) et (1.2.13) dans la relation ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_2} |u|^2 &\leq CE(S) + \frac{c}{\eta} \int_S^T \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 + \eta \int_S^T E(t) dt \\ &+ \frac{c}{\eta} \int_S^T \int_{\omega} |u_t|^2 \quad \forall \eta > 0. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

On utilise maintenant les estimations (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11) et (1.2.14) dans (1.2.8).

Cela donne

$$\begin{aligned} \int_S^T E &\leq CE(S) + \frac{c}{\delta} \int_S^T \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 \\ &+ \frac{c}{\delta} \int_S^T \int_{\omega} |u_t|^2 + c\delta \int_S^T E(t) dt \quad \forall \delta > 0 \end{aligned}$$

En choisissant  $\delta$  suffisamment petit, on obtient finalement

$$\int_S^T E \leq CE(S) + c \int_S^T \left[ \int_{\omega} |u_t| + \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 \right].$$

Donc, on a prouvé que  $E$  satisfait une estimation de la forme (1.2.4). ■

Une fois cette estimation prouvée, on peut utiliser la relation de dissipation pour prouver que l'énergie satisfait des inégalités intégrales du type Gronwall. Cela est facile dans le cas linéaire et fait l'objet de la section suivante.

### 1.2.3 Décroissance exponentielle pour des feedbacks linéaires

La décroissance exponentielle sera déduite de (1.2.4) en utilisant l'inégalité linéaire Gronwall suivante (voir aussi Haraux [31]):

**Théorème 1.2.2** ((Komornik [65],[Theorem 8.1]) *Soit  $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  soit une fonction décroissante satisfaisant, pour  $T > 0$ , l'inégalité linéaire de Gronwall*

$$\int_t^\infty E(s) ds \leq TE(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (1.2.15)$$

Alors,  $E$  satisfait

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (1.2.16)$$

**Preuve.** On définit

$$f(t) = \int_t^\infty E(s) ds$$

Grâce à (1.2.15),  $f$  satisfait

$$Tf'(t) + f(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

ce qui donne

$$f(t) \exp\left(\frac{t}{T}\right) \leq f(0) = \int_0^\infty E(s) ds \leq TE(0)$$

Par conséquent, on a

$$\int_t^\infty E(s) ds \leq TE(0) \exp\left(\frac{-t}{T}\right) \quad \forall t \geq 0$$

Comme  $E$  est une fonction décroissante et positive

$$\begin{aligned} TE(t) &\leq \int_{t-T}^t E(s) ds \\ &\leq \int_{t-T}^{\infty} E(s) ds \\ &\leq TE(0) \exp\left(\frac{-(t-T)}{T}\right) \end{aligned}$$

d'où (1.2.16) est prouvée. ■

**Remarque 1.2.1** On peut remarquer que pour  $t \leq T$ ,  $E(t) \leq E(0) \leq \exp\left(1 - \frac{t}{T}\right)$ .

On peut établir:

**Théorème 1.2.3** Supposons les hypothèses du théorème (1.2.1). Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.2.1) et  $E$  son énergie. Alors  $E$  satisfait

$$E(t) \leq CE(0) \exp(-\gamma t) \quad \forall t \geq 0$$

où  $C, \gamma$  des constantes positives.

**Preuve.** En utilisant la relation de dissipation (1.2.2), on a

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_{\Omega} a |u_t|^2 dx ds &\leq \int_t^T -E'(s) ds \\ &\leq E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (1.2.3) sur le coefficient  $a$ , on a

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_{\omega} |u_t|^2 dx ds &\leq \frac{1}{a_0} \int_t^T \int_{\Omega} a |u_t|^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{a_0} E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Par les inégalités ci-dessus et (1.2.4),  $E$  satisfait

$$\int_t^T E(s) ds \leq CE(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

■

Grâce au théorème 1.2.2,  $E$  décroît exponentiellement à l'infini. L'extension aux données initiales seulement dans l'espace d'énergie est facile en utilisant la densité de  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$  dans l'espace d'énergie et sur la propriété de dissipativité

**Remarque 1.2.2** *Une autre méthode consiste à introduire une énergie modifiée (ou perturbée)  $E_\varepsilon$  qui est équivalente à la valeur naturelle pour les petites valeurs du paramètre  $\varepsilon$  comme dans Komornik et Zuazua [36]. On montre alors que cette énergie modifiée satisfait une inégalité différentielle de sorte qu'elle décroît exponentiellement à l'infini. La décroissance exponentielle de l'énergie naturelle suit à la fois. Dans ce cas, l'énergie modifiée est en effet une fonction de Lyapunov stricte pour l'EDP. L'énergie naturelle ne peut pas être en général telle une fonction de Lyapunov stricte dûe à la vitesse de propagation finie (considérer les données initiales qui ont un support compact intégré dans  $\Omega \setminus \omega$ ). Il existe également des approches très intéressantes utilisant l'approche du domaine fréquentiel, ou une analyse spectrale telle que développée par K. Liu [42], Z. Liu et S. Zheng [43].*

### 1.3 Stabilisation non linéaire en dimensions finies

On présente ici la méthode de convexité de poids optimal, introduite dans le cas de dimension infinie dans [2], adaptée au cas de dimension finie dans [3] avec des résultats d'optimalité dans ce dernier cas. Par conséquent, on considère dans cette section le cas de la stabilisation non linéaire pour les équations différentielles ordinaires. L'objectif est de fournir une caractérisation complète (optimale) des taux de décroissance de l'énergie pour les fonctions d'amortissement général avec des applications à la semi-discrétisation des EDPs. On va donner des outils généraux basés sur les inégalités non linéaires de Gronwall, les propriétés de convexité et un lemme clés de comparaison [3] pour établir cette caractérisation. Cette approche est basée sur les propriétés de convexité proches de 0 d'une fonction  $H$  liée au feedback (voir [2]) et sur un nouveau critère pour classer le comportement des feedbacks sur la base du comportement à 0 d'une fonction  $\Lambda_H$  introduit

pour la première fois, autant que nous le savons, dans [3]. On combine ces nouveaux outils mathématiques pour établir des taux de décroissance de l'énergie supérieure et des principes de comparaison d'énergie. Ces outils seront également utilisés dans le cas de la dimension infinie combinée avec la méthode du multiplicateur pour gérer les aspects géométriques.

### 1.3.1 Inégalités non linéaires de Gronwall

On a déjà vu dans la section 2 comment une inégalité linéaire de Gronwall conduit à une décroissance exponentielle de la solution d'équations des ondes linéairement amorties. Pour les feedbacks non linéaires, les inégalités non linéaires de Gronwall seront utiles. La principale difficulté est d'identifier une fonction de poids appropriée pour prouver les inégalités non linéaires pondérées de Gronwall, le poids étant connu seulement dans le cas particulier de feedback de croissance polynomiale proche de l'origine. Rappelons d'abord l'inégalité polynomiale non linéaire de Gronwall (voir également les références dans [34]).

**Théorème 1.3.1 (Komornik[34], theoreme 9.1)** *Soit  $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  une fonction décroissante satisfaisant, pour certaines constantes  $r > 0$  et  $T > 0$ , l'inégalité non linéaire de Gronwall*

$$\int_t^\infty E^{r+1}(s) ds \leq T E^r(0) E(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.3.1)$$

Alors,  $E$  satisfait

$$E(t) \leq E(0) \left( \frac{T + rt}{T + rT} \right)^{\frac{-1}{r}}. \quad (1.3.2)$$

**Preuve.** Le résultat est clairement valable pour le cas  $E(0) = 0$ . Supposons que  $E(0) \neq 0$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $E(0) = 1$ . On définit une fonction  $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  par

$$F(t) = \int_t^\infty E^{r+1}(s) ds$$

En différenciant  $F$  et en utilisant (1.3.1), on a

$$-F' \geq T^{-r-1} F^{r+1} \quad \text{sur } ]0, \infty[$$

Soit l'ensemble  $T^+ = \sup \{t \geq 0, E(t) > 0\}$ . Alors, en utilisant l'inégalité

$$F(0) \leq TE(0)^{r+1}$$

On en déduit

$$F(s) \leq T^{(r+1)/r} (T + rs)^{-1/r} \quad \forall s \in [0, T^+]. \quad (1.3.3)$$

De plus, puisque  $F \equiv 0$  sur  $[T^+, \infty)$ , cette dernière inégalité est valable pour tout  $s \geq 0$ . Grâce au fait que  $E$  est décroissante et positive, on a

$$F(s) \geq \int_s^{T+(r+1)s} E^{r+1} dt \geq (T + rs) E^{r+1} (T + (r + 1)s)$$

En utilisant (1.3.3) dans cette dernière inégalité et en posant  $t = T + (r + 1)s$ , on obtient (1.3.2). ■

La fonction de poids dans l'inégalité du type Gronwall non linéaire ci-dessus est donnée par  $f(E)$  où  $f(s) = s^r$  pour  $s > 0$ . Pour étudier les taux de décroissance de l'énergie pour les feedbacks généraux et non seulement les feedbacks croissantes linéaires ou polynomiales, il faut prouver des inégalités non linéaires plus générales de Gronwall, ce qui généralise le cas des feedbacks de croissance polynomiale. Pour énoncer les résultats, on devrait introduire une notation. Soit  $\eta > 0$  et  $T_0 > 0$  fixés et  $L$  une fonction de nombres réels strictement croissante de  $[0, +\infty)$  sur  $[0, \eta)$ , avec  $L(0) = 0$  et  $\lim_{y \rightarrow \infty} L(y) = \eta$ . On définit comme dans Alabau-Boussouira [1, 2] et pour tout  $r \in (0, \eta)$ , une fonction  $K_r$  de  $(0, r]$  sur  $[0, +\infty)$  comme suit

$$K_r(\tau) = \int_{\tau}^r \frac{dy}{yL^{-1}(y)} \quad (1.3.4)$$

Et  $\Psi_r$  qui est strictement croissante de  $\left[\frac{1}{L^{-1}(r)}, +\infty\right)$  vers  $\left[\frac{1}{L^{-1}(r)}, +\infty\right)$  définie par

$$\Psi_r(z) = z + K_r\left(L\left(\frac{1}{z}\right)\right) \geq z \quad \forall z \geq \frac{1}{L^{-1}(r)} \quad (1.3.5)$$

de sorte que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi_r^{-1}(s) = \infty$ . Donc, on prouve le résultat suivant.

**Théorème 1.3.2 (Alabau-Boussouira [2])** *On suppose que  $E$  est une fonction décroissante, absolument continue de  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , satisfaisant  $0 < E(0) < \eta$  et l'inégalité*

$$\int_S^T E(t) L^{-1}(E(t)) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (1.3.6)$$

*Alors  $E$  satisfait l'estimation suivante:*

$$E(t) \leq L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right)} \right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{L^{-1}(r)}, \quad (1.3.7)$$

*pour tout réel  $r$  tel que*

$$\frac{1}{T_0} \int_0^\infty E(\tau) L^{-1}(\tau) d\tau \leq r \leq \eta$$

*Ainsi, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ , le taux de décroissance étant donné par l'estimation (1.3.7).*

**Preuve.** On définit une fonction  $k$  et une fonction  $M$  par

$$k(t) = \int_t^{+\infty} M(E(\tau)) d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.3.8)$$

où  $M$  est donné par

$$M(y) = yL^{-1}(y), \quad \forall y \geq 0.$$

Ensuite, grâce à (1.3.6), on a

$$k(t) \leq T_0 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.3.9)$$

En outre, étant donné que  $L^{-1}$  est une fonction strictement positive,  $M$  est une fonction croissante positive ou nulle. Ainsi, différencier (1.3.8), et en utilisant (1.3.9), on déduit que

$$-k'(s) = M(E(s)) \geq M \left( \frac{k(s)}{T_0} \right), \quad \forall s \geq 0,$$

Intégrer cette dernière inégalité entre 0 et  $t$  et faire le changement de variable

$$y = \frac{k(t)}{T_0}$$

dans l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\int_{\frac{k(t)}{T_0}}^B \frac{dy}{M(y)} \geq \frac{t}{T_0}, \quad \forall t \geq 0,$$

où  $B$  est défini par

$$0 < B = \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} E(\tau) L^{-1}(E(\tau)) d\tau \leq E(0) < \eta.$$

Comme  $M$  est positif sur  $(0, \eta]$ , on déduit que pour tout  $r \in [B, \eta]$ , on a

$$\int_{\frac{k(t)}{T_0}}^r \frac{dy}{M(y)} \geq \frac{t}{T_0}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.3.10)$$

Grâce à la définition de  $K_r$  et puisque  $L^{-1}$  augmente strictement sur  $[0, \eta]$ , on en déduit que pour tout  $r \in [B, \eta)$  et tout  $\tau \in (0, r]$ , on a

$$\frac{1}{L^{-1}(r)} (\ln r - \ln \tau) \leq K_r(\tau), \quad \forall 0 < \tau \leq r.$$

Par conséquent,  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} K_r(\tau) = +\infty$ . Ainsi,  $K_r$  est une fonction strictement décroissante de  $(0, r]$  sur  $[0, +\infty)$ . Ceci, avec (1.3.10), donne l'estimation

$$k(t) \leq T_0 K_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right), \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier, comme  $M$  est croissant et positive ou nulle sur  $[0, \eta]$ , alors que  $E$  est décroissant, on en déduit

$$\theta M(E(t+\theta)) \leq \int_t^{t+\theta} M(E(\tau)) d\tau \leq k(t) \leq T_0 K_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right), \quad \forall t \geq 0, \forall \theta \geq 0.$$

Par conséquent, on a l'estimation suivante

$$E(t) \leq M^{-1} \left( \min_{\theta \in (0, t]} (T_0 \gamma_t(\theta)) \right), \quad \forall t > 0, \quad (1.3.11)$$

où on pose

$$\gamma_t(\theta) = \frac{1}{\theta} K_r^{-1} \left( \frac{t-\theta}{T_0} \right), \quad \forall \theta \in (0, t].$$

Soit  $t > 0$  fixé pour le moment. Ainsi,  $\theta^*$  est un point critique de  $\gamma_t$ , si et seulement s'il satisfait la relation:

$$K_r^{-1} \left( \frac{t - \theta^*}{T_0} \right) + \frac{\theta^*}{T_0 K_r' \left( K_r^{-1} \left( \frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right)} = 0.$$

Par conséquent, en utilisant la définition de  $M$  et de  $\Psi_r$ ,  $\theta^*$  est un point critique de  $\gamma_t$ , si et seulement si il satisfait

$$\Psi_r \left( \frac{\theta^*}{T_0} \right) = \frac{t}{T_0}.$$

Notons que  $\Psi_r$  est strictement croissante de  $\left[ \frac{1}{L^{-1}(r)}, +\infty \right)$  sur  $\left[ \frac{1}{L^{-1}(r)}, +\infty \right)$ , on en déduit que pour tout  $t \geq T_0 \frac{1}{L^{-1}(r)}$ ,  $\gamma_t$  a un point critique unique  $\theta(t)$  auquel il atteint un minimum. Ce point  $\theta(t)$  est donné par:

$$\theta(t) = T_0 \Psi_r \left( \frac{t}{T_0} \right). \quad (1.3.12)$$

De plus, grâce à la définition de  $\theta(t)$ , on remarque que

$$M^{-1} (T_0 \Phi (\theta(t))) = K_r^{-1} \left( \frac{t - \theta(t)}{T_0} \right) = L \left( \frac{T_0}{\theta(t)} \right).$$

Ainsi, en utilisant ces identités dans (1.3.11), avec (1.3.12), on obtient (1.3.7). On remarque maintenant que  $\Psi_r^{-1}(\tau) \rightarrow +\infty$  quand  $\tau \rightarrow +\infty$  et comme  $L$  est continue à 0 avec  $L(0) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right)} \right) = 0$ . Ainsi, la limite supérieure dans (1.3.7) tend vers 0 lorsque le temps tend vers  $\infty$ . ■

La fonction  $L$  ci-dessus sera choisie ultérieurement de manière optimale en utilisant des arguments de convexité. On rappelle certaines définitions et introduisons une notation pour les fonctions convexes. On rappelle que si  $\Phi$  est une fonction convexe propre de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , alors son conjugué convexe  $\Phi^*$  Est défini comme:

$$\Phi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - \Phi(x)\}.$$

**Proposition 1.3.1** ([6]) *Soit  $g$  une fonction donnée strictement croissante impaire de classe  $C^1$ , définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g'(0) = 0$ . Supposons qu'il existe  $r_0 > 0$  suffisamment petit de telle que la fonction  $H$  définie par*

$$H(x) = \sqrt{x}g(\sqrt{x}) \quad (1.3.13)$$

est strictement convexe  $[0, r_0^2]$ .

On définit

$$\widehat{H}(x) = \begin{cases} H(x) & \text{si } x \in [0, r_0^2] \\ +\infty & \text{si } x \in \mathbb{R}/[0, r_0^2] \end{cases} \quad (1.3.14)$$

et

$$L(y) = \begin{cases} \frac{\widehat{H}^*(y)}{y} & \text{si } y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (1.3.15)$$

où  $\widehat{H}^*$  représente la fonction conjuguée convexe de  $\widehat{H}$ , c'est  $\widehat{H}^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - \widehat{H}(x)\}$ .

On définit également une fonction  $\Lambda_H$  sur  $(0, r_0^2]$  par

$$\Lambda_H(x) = \frac{H(x)}{xH'(x)}. \quad (1.3.16)$$

Ensuite, les propriétés suivantes:

- $L$  est une fonction continue strictement croissante de  $[0, +\infty)$  sur  $[0, r_0^2)$  donnée par:

$$L(y) = \begin{cases} (H')^{-1}(y) - \frac{H((H')^{-1}(y))}{y}, & \text{si } y \in [0, H'(r_0^2)], \\ r_0^2 - \frac{H(r_0^2)}{y}, & \text{si } y \in [H'(r_0^2), +\infty). \end{cases} \quad (1.3.17)$$

- $L$  est dérivable sur  $(0, H'(r_0^2))$  et

$$L'(v) = \frac{H((H')^{-1}(v))}{v^2}, \quad v \in (0, H'(r_0^2)) \quad (1.3.18)$$

- $L$  satisfait également

$$L(v) = (H')^{-1}(v) \left(1 - \Lambda_H((H')^{-1}(v))\right), \quad (1.3.19)$$

et en particulier

$$0 < L(H'(r_0^2)) < r_0^2,$$

- $\Lambda_H(x) \in [0, 1]$  pour tous  $x \in [0, r_0^2]$
- En outre, tous les résultats ci-dessus sont toujours valables dans le cas  $r_0 = \infty$ , remplacer les intervalles fermés à droite par intervalles ouverts à droite de l'extrémité  $+\infty$ . En particulier  $H'(r_0^2)$  remplacée par  $\infty$ .

**Remarque 1.3.1** Lorsque  $g'(0) \neq 0$ , le feedback a une croissance linéaire proche de l'origine, et il est alors bien connu que l'énergie décroît exponentiellement (voir [36]).

**Remarque 1.3.2** Les hypothèses sur  $H$  peuvent être assouplies. En particulier, les définitions ci-dessus ont encore un sens si  $H$  est seulement supposée convexe dans un voisinage de 0, pour s'annuler à 0 et pour être positive ou nulle dans un voisinage de 0. Mais dans ce dernier cas, on ne trouvera pas de taux de décroissance explicites. On préfère ici fournir des conditions suffisantes qui conduisent à des taux de décroissance énergétique optimale explicites et simples sous des hypothèses encore très générales sur les feedbacks. En fonction du comportement de la fonction  $\Lambda_H$  à l'origine, on peut établir une estimation supérieure simple explicite des taux de décroissance de l'énergie. Nous nous référons à Fatih A.-B. [3] pour plus de résultats.

**Théorème 1.3.3 (Alabau-Boussouira [3])** Soit  $H$  une fonction  $C^1$  strictement convexe donnée de  $[0, r_0^2]$  à  $\mathbb{R}$  telle que  $H(0) = H'(0) = 0$ , et  $r_0 > 0$  soit suffisamment petite. On définit  $\hat{H}$  par (1.3.14),  $L$  par (1.3.15) et  $\Lambda_H$  par (1.3.16).

Soit  $E$  une fonction réelle décroissante, absolument continue, non négative définie sur  $[0, +\infty)$ ,  $T_0 > 0$  un nombre réel fixe. On définit  $\beta = \beta_{E(0)} > 0$  par

$$\beta = \beta_{E(0)} = \max(\eta_1, \eta_2 E(0)) \quad (1.3.20)$$

où  $\eta_1, \eta_2$  sont donnés en (1.5.10).

Supposons que  $E$  vérifie l'inégalité intégrale pondérée

$$\int_S^T E(t) L^{-1} \left( \frac{E(t)}{2\beta} \right) dt \leq T_0 E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T \quad (1.3.21)$$

sous condition

$$0 < \frac{E(0)}{2L(H'(r_0^2))} \leq \beta \quad (1.3.22)$$

Alors  $E$  satisfait le taux de décroissance générale suivant

$$E(t) \leq 2\beta L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right)} \right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)} \quad (1.3.23)$$

où

$$\Psi_r(x) = \frac{1}{H'(r_0^2)} + \int_{\frac{1}{x}}^{H'(r_0^2)} \frac{1}{v^2 (1 - \Lambda_H((H')^{-1}(v)))} dv, \quad x \geq \frac{1}{H'(r_0^2)}. \quad (1.3.24)$$

En outre, si  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ , alors on a la formule plus simple de décroissance de l'énergie

$$E(T) \leq 2\beta (H')^{-1} \left( \frac{CT_0}{t} \right) \quad (1.3.25)$$

pour  $t$  suffisamment grand et où  $C$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $E(0)$ .

Enfin, tous les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cas où  $r_0 = +\infty$  supprimant la condition (1.3.22) et remplaçant respectivement  $H'(r_0^2)$  par  $\infty$  et  $\frac{1}{H'(r_0^2)}$  par 0 dans (1.3.24).

**Preuve.** On pose

$$\widehat{E}(t) = \frac{E(t)}{2\beta}$$

En utilisant (1.3.21),  $\widehat{E}$  satisfait (1.3.6). Alors, comme  $E$  est décroissante, et grâce à la proposition (1.3.1) appliquée à  $\widehat{E}$ , on en déduit

$$\widehat{E}(t) \leq \widehat{E}(0) \leq L(H'(r_0^2)) = r_0^2 - \frac{H(r_0^2)}{H'(r_0^2)} < r_0^2. \quad (1.3.26)$$

On définit  $\eta = r_0^2$  et définissons  $L$  comme dans la proposition (1.3.1). Alors,  $L$  est une fonction strictement croissante de  $[0, +\infty)$  sur  $[0, \eta)$ . On définit  $B$  par

$$0 < B = \frac{1}{T} \int_0^{+\infty} \widehat{E}(\tau) L^{-1}(\widehat{E}(\tau)) d\tau \leq \widehat{E}(0) < \eta. \quad (1.3.27)$$

On pose aussi  $r = L(H'(r_0^2))$ . Ensuite, grâce à (1.3.26) et (1.3.27),  $r \in [B, \eta)$  Ainsi,  $\widehat{E}$  satisfait aux hypothèses du théorème (1.3.2) avec  $r$  et  $B$  définis comme ci-dessus, de sorte que l'estimation suivante sera satisfait

$$\widehat{E}(t) \leq L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right)} \right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}, \quad (1.3.28)$$

où  $\Psi_r$  est défini dans (1.3.5) et  $K_r$  est défini par (1.3.4). Faire le changement de variable  $v = L^{-1}(y)$  dans (1.3.4) et en utilisant les formules (1.3.18) et (1.3.19), on obtient

$$\begin{aligned} x \leq \Psi_r(x) &= x + K_r \left( L \left( \frac{1}{x} \right) \right) = x + \int_{\frac{1}{x}}^{H'(r_0^2)} \frac{\Lambda_H((H')^{-1}(v))}{v^2(1-\Lambda_H((H')^{-1}(v)))} dv \\ &= \frac{1}{H'(r_0^2)} + \int_{\frac{1}{x}}^{H'(r_0^2)} \frac{1}{v^2(1-\Lambda_H((H')^{-1}(v)))} dv, \quad x \geq \frac{1}{H'(r_0^2)} \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

On déduit facilement l'estimation (1.3.23) dans le cas général.

On suppose maintenant que  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ . Ainsi, il existe  $0 < 2\varepsilon_0 < 1 - \limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x)$  et il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\frac{1}{1 - \Lambda_H(x)} < \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad \forall x \in (0, \delta].$$

En utilisant cette borne supérieure avec  $x = (H')^{-1}(v)$  dans (1.3.29), on en déduit

$$\begin{aligned} \Psi_r(x) &\leq \frac{1}{H'(r_0^2)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\frac{1}{x}}^{H'(\delta)} \frac{1}{v^2} dv + \int_{H'(\delta)}^{H'(r_0^2)} \int_{\frac{1}{x}}^{H'(r_0^2)} \frac{1}{v^2(1-\Lambda_H((H')^{-1}(v)))} dv \\ &\leq D(x) \quad \text{pour } x \text{ suffisamment grand} \end{aligned}$$

où  $D$  est une constante positive qui dépend de  $r_0$  et  $\delta$ . Depuis  $\Psi_r$  est strictement croissante, on en déduit que

$$\frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)} \leq \frac{DT_0}{t}, \quad \text{Pour } t \text{ suffisamment grand.}$$

Grâce à la définition de  $\widehat{E}$ , estimer (1.3.28), la formule (1.3.19) et puisque  $L$  est une fonction croissante et  $\Lambda_H$  une fonction non négative, on obtient l'estimation désirée (1.3.25). ■

**Remarque 1.3.3** *La fonction poids optimal est donnée comme la fonction  $L^{-1}(\frac{\cdot}{2\beta})$  avec un choix approprié de  $\beta$ . Ce choix est basé sur la méthode de convexité optimale, Introduit pour la première fois dans [2], plus simplifié dans [3], et expliqué dans un cours de [5]. On peut choisir d'autres poids qui peuvent donner des taux de décroissance plus faibles, et toujours suivre la preuve originale de la méthode de convexité optimale.*

**Remarque 1.3.4** Quand  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ , il a été montré dans [3] que le taux de décroissance donné par (1.3.25) (ou équivalent par (1.3.23)) est optimal dans le cas de dimension finie.

**Remarque 1.3.5** Les cas pour lesquels  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$  correspondent à des cas pour lesquels le feedback  $g$  n'est pas à proximité d'une croissance linéaire proche de 0. En particulier, le cas  $g(x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , donne  $\Lambda_H \equiv 1$ . On renvoie le lecteur à [3] pour d'autres exemples et détails sur le cas  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) = 1$ .

**Remarque 1.3.6** Notons que par définition de  $\beta$  dans (1.5.10), on a

$$0 < \frac{E(0)}{2L(H'(r_0^2))} \leq \beta \quad (1.3.30)$$

Par conséquent,  $L^{-1}(\frac{E(t)}{2\beta})$  est bien définie pour tous  $t \geq 0$ .

## 1.4 Feedback polynomial en dimensions infinies

Le but de cette section est de présenter les premiers résultats obtenus chronologiquement pour des feedbacks non linéaires spécifiques, c'est le cas des feedbacks polynomiales.

De nombreux auteurs ont obtenu des résultats dans ce sens: Lagnese [38], Haraux [29], Zuazua [59], Komornik [34], Nakao [48], Conrad et Rao [21] et leurs références. Ces résultats concernent les équations des ondes avec feedback distribué ou frontière et utilisent soit la méthode de l'énergie perturbée combinée avec les inégalités non linéaires différentielles, soit les inégalités polynomiales de Gronwall pour l'énergie naturelle avec la méthode multiplicateur. On présente l'approche basée sur les inégalités polynomiales de Gronwall combinées avec la méthode du multiplicateur. Dans ce contexte, on va, comme pour le cas de feedback linéaire, séparer les différentes étapes: identification des énergies dominantes et traitement de la non-linéarité des feedbacks.

On considère que le cas d'une équation des ondes polynomialement amortie localement, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \rho(x, u_t) = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, +\infty) \times \Gamma \\ (u, u_t)(0) = (u^0, u^1), & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où dans la suite  $g$  sera supposée avoir une croissance polynomiale proche de l'origine. On pose  $H = L^2(\Omega)$  et  $V = H_0^1(\Omega)$ . On considère le feedback  $\rho$  satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \text{ fonction monotone croissante par rapport à la seconde variable} \\ \exists a \in C^1(\bar{\Omega}), a \geq 0 \text{ sur } \Omega, \\ a(x)|v| \leq |\rho(x, v)| \leq Ca(x)|v|; \quad \forall x \in \Omega \quad \text{si } |v| \geq 1, \\ a(x)g(|v|) \leq |\rho(x, v)| \leq Ca(x)g^{-1}(|v|); \quad \forall x \in \Omega \quad \text{si } |v| \leq 1, \\ a \geq a_- > 0, \quad \forall x \in \omega, \end{array} \right. \quad (\text{HF})$$

où  $g^{-1}$  désigne la fonction inverse de  $g$  et où  $C$  est une constante positive.

On rappelle le résultat classique et le résultat de régularité suivants (voir, par exemple, [39], [30] pour la démonstration) en utilisant la théorie de l'opérateur maximal monotone non linéaire:

**Théorème 1.4.1** *Supposons l'hypothèse (HF). Alors pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times H$ , le problème (1.4.1) a une solution unique  $u \in C([0, +\infty); V) \times C^1([0, +\infty); H)$ ; De plus, pour tout  $(u^0, u^1) \in D(A) \times V$ , la solution est dans  $L^\infty([0, +\infty); D(A)) \times W^{1,\infty}([0, +\infty); V) \times W^{2,\infty}([0, +\infty); H)$  et son énergie définie par:*

$$E(t) = \frac{1}{2} (|u_t|_H^2 + |\nabla u|_H^2) \quad t \geq 0 \quad (1.4.2)$$

Satisfait la relation de dissipation suivante:

$$E'(t) = - \int_{\Omega} u_t \rho(x, u_t) dx \leq 0.$$

En utilisant les multiplicateurs  $E^{(p-1)/2}Ku$  où  $Ku$  représente les différents multiplicateurs utilisés pour le cas linéaire dans la section 2, on peut prouver de façon similaire au cas linéaire

**Théorème 1.4.2** *On suppose que (HF) sont satisfait avec  $g(s) = |s|^{p-1}s$  avec  $p > 1$  pour  $s$  proche de 0 (cas polynomial). On suppose également que  $w$  satisfait aux conditions géométriques (CG) ou (HG). Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de*

(1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans(1.4.2). Alors,  $E$  satisfait

$$\begin{aligned} \int_t^T E(s) E^{(p-1)/2}(s) ds &\leq \delta_1 E^{(p-1)/2}(t) + \delta_2 \int_t^T E^{(p-1)/2}(s) \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 \\ &+ \delta_3 \int_t^T E^{(p-1)/2}(s) \int_{\omega} |u_t|^2 ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

où  $\delta_i, i = 1, \dots, 3$  sont des constantes positives.

**Théorème 1.4.3** On prend les mêmes hypothèses du théorème 1.4.2. Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans(1.4.2).

Alors  $E$  satisfait

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}(s) ds \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (1.4.3)$$

**Preuve.** On définit  $\Omega_t = \{x \in \Omega, |u_t| \leq 1\}$  et  $\omega_t = \{x \in \omega, |u_t| \leq 1\}$ . Grâce à  $(HF)$ , on a

$$|\rho(\cdot, u_t)|^2 \leq C (u_t \rho(\cdot, u_t))^{\frac{2}{p+1}} \quad \text{sur l'ensemble } x \in \Omega_t$$

De la même manière, on a

$$|u_t|^2 \leq C (u_t \rho(\cdot, u_t))^{\frac{2}{p+1}} \quad \text{sur l'ensemble } x \in \omega_t$$

On a donc

$$\int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\Omega_t} |\rho(\cdot, u_t)|^2 \leq C \int_S^T E^{(p-1)/2} (-E')^{\frac{2}{p+1}} dt$$

et

$$\int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\omega_t} |u_t|^2 \leq C \int_S^T E^{(p-1)/2} (-E')^{\frac{2}{p+1}} dt$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\int_S^T E^{(p-1)/2} \left( \int_{\Omega_t} |\rho(\cdot, u_t)|^2 + \int_{\omega_t} |u_t|^2 \right) \leq \varepsilon \int_S^T E^{(p+1)/2} + C_\varepsilon E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

D'autre part, grâce à  $(HF)$ , on a

$$\int_S^T E^{(p-1)/2} \left( \int_{\Omega \setminus \Omega_t} |\rho(\cdot, u_t)|^2 + \int_{\omega \setminus \omega_t} |u_t|^2 \right) \leq C E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

En combinant ces différentes estimations, on obtient (1.4.3). ■

**Remarque 1.4.1** *L'idée de diviser l'ensemble  $\Omega$  en deux sous-ensembles, l'un avec des vitesses proches de zéro et son complémentaire remonte à une idée originale de Zuazua.*

**Théorème 1.4.4** *On prend les mêmes hypothèses du théorème 1.4.2. Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans (1.4.2).*

*Alors  $E$  satisfait*

$$E(t) \leq C(E(0)) t^{\frac{-2}{p-1}},$$

*pour  $t$  suffisamment grand et pour tout  $(u^0, u^1)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .*

**Preuve.** Si  $E(0) = 0$  alors le résultat se maintient facilement. Supposons maintenant que  $E(0) \neq 0$ . Grâce à (1.4.3) et en utilisant le théorème 9.1 de komornik [34], c'est-à-dire le théorème 1.2.2 de ce chapitre, avec  $r = (p - 1) / 2$ , on conclut. ■

## 1.5 La méthode de convexité optimale

### 1.5.1 Introduction

Le but principal de cette section est de présenter la méthode de convexité optimale basée sur la construction d'une fonction de poids optimal pour les inégalités générales de Gronwall, déterminée comme étant inconnue d'une équation explicite, grâce aux propriétés de convexité d'une relation. La méthode était introduite dans [2] pour le cas de dimension infinie et dans [3] pour sa version dans le cas de dimension finie. Cette approche est construite à partir de plusieurs nouveaux résultats: décroissance optimale des solutions des inégalités générales de Gronwall, classification des réactions par une nouvelle fonction  $\Lambda_{H(x)}$  (introduite dans [3]), taux de décroissance constructive et simplifiée, arguments de comparaison. Cette approche fournit une méthodologie complète et complète pour établir des taux de décroissance de l'énergie optimale et quasi-optimale calculables explicites avec des applications dans des paramètres de dimension finie et infinie, pour les amortissements localisés, limites et de mémoire, ainsi que pour de nombreuses EDP, pour divers exemples).

Présentons les grandes lignes de la méthode de convexité optimale. Elle est basée sur les étapes suivantes:

- Étape I: Estimations de l'énergie cinétique dominante

Utiliser des multiplicateurs de la forme  $K(u) f(E)$  pour prouver que l'énergie satisfait une estimation de la forme

$$\int_S^T f(E(t)) E(t) dt \leq \delta_1 E(S) f(E(S)) + \delta_2 \int_S^T \int_{O_2} |\rho(\cdot, u_t)|^2 + \delta_3 \int_S^T \int_{\omega} |u_t|^2 \quad \forall 0 \leq S \leq T$$

où les  $\delta_i > 0$  sont des constantes pour  $i = 1, \dots, 3$  et où

1.  $K$  représente divers multiplicateurs qui peuvent dépendre de  $u$ ,  $\nabla u$  et  $(-\Delta)^{-1}(\beta u)$ ,  $\beta$  étant une fonction de troncature. Ces multiplicateurs introduits par plusieurs auteurs sont maintenant bien connus.
2.  $f$  à ce stade est une fonction de poids régulière, positive ou nulle et non dépendante.
3.  $O_2 = \Omega$  dans le cas de feedbacks distribués localement et  $O_2 = \partial\Omega$  en cas de feedback frontière, alors que  $\omega$  représente le sous-domaine de  $\Omega$  (respectivement  $\partial\Omega$ ) où le feedback est efficace en cas de feedback distribués localement (resp. Frontière).

- Etape II: Détermination de la fonction de poids optimale

La fonction de poids optimale  $f(\cdot) = \frac{E(t)}{2\beta}$ , qui a été introduite pour la première fois par Alabau-Boussouira [2], est déterminée implicitement grâce aux propriétés de convexité d'une fonction  $H$  exprimée directement en termes de feedback proche de l'origine. En raison de ce choix de  $H$  et de ce choix optimal de la fonction de poids  $w$ , on démontre que  $E$  satisfait la même inégalité de Gronwall non linéaire générale de la section 3.1 présentée dans le contexte de la stabilisation de dimension finie, c'est-à-dire

$$\int_S^T E(t) L^{-1} \left( \frac{E(t)}{2\beta} \right) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

**Remarque 1.5.1** *Notez que certains auteurs utilisent cette stratégie ci-dessus, mais ils remplacent la fonction poids optimale  $\frac{E(t)}{2\beta}$  par une plus faible comme suit. On défini  $L$  par*

$$L(y) = \widehat{H}^*(y) \quad \text{pour } y > 0, \quad L(0) = 0.$$

*Il est facile de vérifier que*

$$L(y) \leq L_1(y)$$

*où*

$$L_1(\cdot) = (H')^{-1}(\cdot).$$

*En particulier, en appliquant notre méthode de convexité, la fonction de poids  $w$  devient*

$$w_1(\cdot) = L_1^{-1}(\varepsilon_0 \cdot) = H'(\varepsilon_0 \cdot)$$

*où  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2\beta}$ . Ensuite, ils suivent toute la méthodologie de la méthode de convexité optimale, celle de la section 5.3 ci-dessous, en remplaçant  $w$  par  $w_1$  et en suivant nos résultats sur les inégalités globales non linéaires non linéaires de Gronwall introduites initialement dans [2]. Les estimations obtenues sont plus faibles et la méthodologie n'est pas originale.*

- Étape III: Taux de décroissance optimales pour les solutions des inégalités Grönwall non linéaires

En appliquant les résultats de la section 3.1, on déduit que  $E$  satisfait à l'estimation semi-explicite:

$$E(t) \leq 2\beta L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1} \left( \frac{t}{T_0} \right)} \right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{L^{-1}(r)}$$

où  $r$  est tout réel tel que

$$\frac{1}{T_0} \int_0^\infty E(\tau) L^{-1} \left( \frac{E(\tau)}{2\beta} \right) d\tau \leq r \leq \eta.$$

- Étape IV Simplification des taux de décomposition et principe de comparaison de l'énergie

On utilise alors notre méthode de simplification introduite dans [3] pour prouver une estimation supérieure aiguë, explicite et facilement calculable, c'est-à-dire

1. Utiliser la nouvelle fonction  $\Lambda_H$  définie dans [3] qui comportement à l'origine mesure en quelque sorte le comportement de feedback proche de l'origine.
2. Si  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ , on applique les résultats énoncés dans la section 3.1 pour la stabilisation en dimensions finies et prouvons que  $E$  décroît à l'infini comme suit:

$$E(t) \leq 2\beta(H')^{-1} \left( \frac{DT_0}{t} \right),$$

pour  $t$  suffisamment grand et où  $D$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $E(0)$ .

3. Sous d'autres hypothèses sur le comportement de  $\Lambda_H$  proche de 0, on donne une estimation d'énergie supérieure basée sur le principe de comparaison d'énergie introduit dans [3], c'est-à-

$$E(t) \leq C_2 v^2(t) \quad \text{pour } t \text{ suffisamment grand,}$$

où  $C_2$  est une constante positive et  $v$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$v'(t) + g(v(t)) = 0, \quad v(0) = \sqrt{2E(0)}, \quad t \geq 0.$$

Nous compléterons la stratégie ci-dessus par une méthodologie pour obtenir des estimations d'énergie plus faibles (Voir la section 5.7).

### 1.5.2 Estimations de l'énergie cinétique dominante

Cette partie existe déjà dans le problème de stabilisation linéaire, même si elle n'est pas présentée sous cette forme en général. Il devient important de distinguer cette étape pour comprendre où et comment les propriétés de convexité sont utiles. Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  avec une frontière régulière notée par  $\Gamma$  et  $\omega$  un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$  de mesure positive. On suppose que le feedback  $\rho$  satisfait  $(HF)$  actuellement avec une fonction générale  $g$ .

**Théorème 1.5.1** *Supposons qu'on a (HF) où  $\omega$  satisfait aux conditions géométriques (CG) ou (HG). On définit respectivement  $H$ ,  $\widehat{H}$  et  $L$  par (HD), (1.3.14) et (1.3.15). Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans (1.3.6). On suppose que  $E(0) > 0$ . Alors pour toute fonction non négative, non décroissante  $C^1$ ,  $f$  définie sur  $[0, E(0)]$ ,  $E$  satisfait*

$$\begin{aligned} \int_t^T E(s) f(E(s)) ds &\leq \delta_1 E(t) f(E(t)) + \delta_2 \int_t^T f(E(s)) \int_{\Omega} |\rho(\cdot, u_t)|^2 ds \\ &+ \delta_3 \int_t^T f(E(s)) \int_{\omega} |u_t|^2 ds \quad \forall 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

où  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  sont des constantes positives.

**Remarque 1.5.2** *L'estimation ci-dessus montre que l'énergie cinétique non linéaire et l'énergie cinétique linéaire localisée dominent le comportement de l'énergie totale. Une estimation similaire est valable pour le cas d'amortissement des limites (voir [2, 3]). Cette estimation est également valable pour d'autres équations telles que l'équation de Petrowsky, les systèmes couplés tels que les poutres de Timoshenko. . . Pour des raisons de présentation et de clarté, nous n'incluons pas ici ces résultats. Ils peuvent être trouvés dans [2, 3] sous une forme abstraite avec plusieurs exemples d'applications PDE.*

**Preuve.** Soit  $f$  une fonction  $C^1$  positive, croissante, définie sur  $[0, E(0)]$ . La preuve suit celle de la stabilisation linéaire dans la section 2, sauf que l'on doit choisir des multiplicateurs de la forme  $f(E)Ku$ . Soit  $(u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Soit  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$  et définissons pour  $i = 0, 1, 2$  les sous-ensembles  $Q_i$  comme dans (1.3.6) et les fonctions  $\Psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  qui vérifient (1.3.7). On définit également  $h$  comme le champ de vecteur de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ :

$$h(x) = \begin{cases} \Psi_j(x) m_j(x) & \text{si } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \cup_j \Omega_j, \end{cases}$$

et considérons le multiplicateur  $f(E)Mu$  où  $Mu = h \cdot \nabla u + u \frac{N-1}{2}$ . On considère l'expression

$$\int_S^T \int_{\Omega_j} f(E)Mu (u_{tt} - \Delta u + \rho(x, u_t)) = 0.$$

Cela donne, après une intégration appropriée par parties et procédant comme dans la section 2

$$\begin{aligned} \int_S^T E f(E) dt \leq & - \left[ f(E) \int_{\Omega} M(u) u_t \right]_S^T + \int_S^T f'(E) E' \int_{\Omega} M(u) u_t \\ & - \int_S^T f(E) \int_{\Omega} M(u) \rho(x, u_t) + C \int_S^T f(E) \int_{\Omega \setminus Q_1} (u_t^2 + |\nabla u|^2). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

On doit estimer les termes du côté droit de (1.5.2). En raison du poids  $f(E)$  qui ne dépend que du temps il y a un terme supplémentaire

$$\int_S^T f'(E) E' \int_{\Omega} M(u) u_t$$

qui peut être facilement délimité au-dessus par

$$\left| \int_S^T f'(E) E' \int_{\Omega} M(u) u_t \right| \leq \int_S^T (-E') f'(E) E dt \leq C E(s) f(E(s)) \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

De la même manière, on a

$$\left| \left[ f(E) \int_{\Omega} M(u) u_t \right]_S^T \right| \leq C E(s) f(E(s)) \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

Comme pour le cas linéaire, la seule difficulté est d'estimer le premier terme du côté droit de (1.5.2). La preuve suit celle du cas linéaire jusqu'au poids additionnel multiplicatif  $f(E)$  qui ne dépend que du temps. On peut montrer que des termes supplémentaires dus à l'intégration par parties peuvent être limités ci-dessus. Plus précisément, on procède comme suit. On définit  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  comme dans (1.3.14) multipliant la première équation de (1.4.1) par  $f(E)\zeta u$  et en intégrant l'équation résultante sur  $[S, T] \times \Omega$ , on

obtient après une certaine intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \xi &= - \left[ f(E) \int_{\Omega} u \xi u_t \right]_S^T + \int_S^T f'(E) E' \int_{\Omega} u \xi u_t \\ &+ \int_S^T f(E) \int_{\Omega} \xi |u_t|^2 + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} u^2 \Delta \xi \\ &- \int_S^T f(E) \int_{\Omega} \xi u \rho(x, u_t) dx dt, \end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\int_S^T f(E) \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 \leq CE(S) f(E(S)) + C \int_S^T f(E) \int_{\Omega \cap Q_2} |\rho(x, u_t)|^2 + |u_t|^2 + u^2.$$

On définit  $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  tel que (1.3.17) se vérifie. On fixe  $t$  et on considère la solution  $z$  du problème elliptique suivant (1.3.18) et (1.3.19). En multipliant la première équation de (1.4.1) par  $f(E)z$  et en intégrant l'équation résultante sur  $[S, T] \times \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E) \int_{\Omega \cap Q_2} |u|^2 &\leq CE(S) f(E(S)) + \frac{C}{\eta} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 + \eta \int_S^T f(E) E(t) dt \\ &+ \frac{C}{\eta} \int_S^T f(E) \int_{\omega} |u_t|^2 \quad \forall \eta > 0. \end{aligned}$$

On utilise les estimations ci-dessus et nous procédons de la même façon que pour le cas linéaire, ceci donne

$$\begin{aligned} \int_S^T Ef(E) &\leq CE(S) f(E(S)) + \frac{C}{\delta} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 \\ &+ \frac{C}{\delta} \int_S^T f(E) \int_{\omega} |u_t|^2 + C\delta \int_S^T f(E) E(t) dt \quad \forall \delta > 0 \end{aligned}$$

Choisissant  $\delta$  suffisamment petit, on obtient finalement

$$\int_S^T Ef(E) \leq CE(S) f(E(S)) + c \int_S^T f(E) \left[ \int_{\omega} |u_t| + \int_{\Omega} |\rho(x, u_t)|^2 \right].$$

Donc, on a prouvé que  $E$  satisfait une estimation de la forme (1.5.1). ■

### 1.5.3 Fonction de poids comme inconnu optimal

En général, les méthodes usuelles utilisées pour prouver les taux de décroissance de l'énergie sont soit de prouver qu'une énergie perturbée, équivalente à l'origine, est une fonction de Lyapunov satisfaisant une inégalité différentielle non linéaire ou de prouver que l'énergie originale satisfait directement à une inégalité non linéaire de Gronwall. Dans ce dernier cas (aussi dans le premier), un point crucial pour être sûr de perdre aucune information sur la vitesse de la décroissance de l'énergie est de trouver des arguments mathématiques pour construire un poids optimal. Ceci est une nouveauté importante de notre travail dans [2] et plus tard, de sa simplification dans [3]. Ce travail est basé sur une approche pour laquelle, en utilisant des arguments de convexité et en particulier l'inégalité de Young, on détermine le poids optimal  $f$  comme la solution d'une relation implicite, c'est-à-dire

$$\beta \widehat{H}^*(f(E(t))) = \frac{1}{2} E(t) f(E(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Pour établir que l'énergie  $E$  satisfait une inégalité de Gronwall non linéaire appropriée. La relation implicite ci-dessus a une solution unique qui implique la fonction inverse de  $L$  définie par (1.3.15).

**Théorème 1.5.2** *Supposons que  $f$  satisfait aux conditions géométriques (CG) ou (HG). On définit respectivement  $H$ ,  $\widehat{H}$  et  $L$  par (1.3.13), (1.3.14), (1.3.15). Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans (1.3.6). On suppose que  $E(0) > 0$  et on définit  $b > 0$  comme la constante explicite dépendant de  $E(0)$ ,  $|\omega|$ ,  $|\Omega|$  défini dans (1.5.10). Soit  $f = L^{-1}\left(\frac{s}{2\beta}\right) \forall s \in [0, 2\beta r_0^2)$ , alors  $E$  vérifie*

$$\int_s^T E(s) f(E(s)) ds \leq T_0 E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

**Preuve.** On pose  $\varepsilon_0 = g(r_0)$ . En supposant que  $r_0$  est assez petit, on peut supposer que  $0 < \varepsilon_0 < 1$ .

De (HF), on peut facilement déduire que  $\rho$  satisfait aux inégalités suivantes:

$$c_1 a(x) |v| \leq |\rho(x, v)| \leq c_2 a(x) |v|; \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_0 \leq |v|, \quad (1.5.3)$$

$$c_1 a(x) g(|v|) \leq |\rho(x, v)| \leq c_2 a(x) g^{-1}(|v|); \quad \forall x \in \Omega \quad \forall |v| \leq \varepsilon_0, \quad (1.5.4)$$

Pour certaines constantes positives  $c_1, c_2$ . On pose pour tout  $t \geq 0$  fixe,

$$\Omega_1^t = \{x \in \Omega, |u_t(t, x)| \leq \varepsilon_0\}$$

On a également mis en place

$$c_g = \frac{1}{c_2 \|a\|_\infty}.$$

Ainsi, par définition de  $c_g$  et grâce à (1.5.4), on a:

$$c_g^2 |\rho(x, u_t(t)(x))|^2 \leq r_0^2, \quad \forall x \in \Omega_1^t.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} H \left( \frac{1}{|\Omega_1^t|} \int_{\Omega_1^t} c_g^2 |\rho(x, u_t(t)(x))|^2 dx \right) &\leq \frac{1}{|\Omega_1^t|} \int_{\Omega_1^t} H(c_g^2 |\rho(x, u_t(t)(x))|^2) dx \\ &\leq \frac{1}{|\Omega_1^t|} \int_{\Omega_1^t} c_g |\rho(x, u_t(t)(x))| g(c_g |\rho(x, u_t(t)(x))|) dx. \end{aligned}$$

En utilisant (1.5.4) et le fait que  $H$  augmente, on en déduit

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{\Omega_1^t} |\rho(x, u_t)|^2 dx dt \leq \int_S^T \frac{|\Omega_1^t|}{c_g^2} f(E(t)) H^{-1} \left( \frac{1}{|\Omega_1^t|} \int_{\Omega_1^t} c_g |\rho(x, u_t)| dx \right)$$

Comme  $\widehat{H}$  est une fonction convexe et propre, on peut appliquer l'inégalité de Young (voir [56], [54]), de sorte que

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{\Omega_1^t} |\rho(x, u_t)|^2 dx dt \leq \frac{|\Omega_1^t|}{c_g^2} \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + \frac{1}{c_g} E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (1.5.5)$$

Sur  $\Omega \setminus \Omega_1^t$ , on a  $|u_t(t)| \geq \varepsilon_0$ . Ainsi, grâce à (1.5.3), on a

$$|\rho(x, u_t)|^2 \leq \frac{1}{c_g} u_t \rho(x, \varepsilon_1), \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_1^t.$$

Cela implique

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{\Omega \setminus \Omega_1^t} |\rho(x, u_t)|^2 dx dt \leq \frac{1}{c_g} \int_S^T (-E'(t)) f(E) dt. \quad (1.5.6)$$

On tourne maintenant vers l'énergie cinétique localisée, c'est-à-dire que on veut estimer le terme  $\int_S^T f(E(t)) \int_{\omega} |u_t|^2 dx dt$ . On a établi comme dans [2]

$$r_1^2 = H^{-1}(c_1 a_- c_g H(r_0^2)),$$

et

$$\varepsilon_1 = \min(r_0, g(r_1)).$$

On peut remarquer que  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ . On définit, pour  $t \geq 0$  fixe, l'ensemble

$$\omega_1^t = \{x \in \omega, |u_t(t)(x)| \leq \varepsilon_1\}.$$

Grâce à (1.5.4), notre choix de  $\varepsilon_1$  et à l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{|\omega_1^t|} \int_{\omega_1^t} |u_t(t)(x)|^2 dx\right) &\leq \frac{1}{|\omega_1^t|} \int_{\omega_1^t} H(|u_t(t)(x)|^2) dx \\ &\leq \frac{1}{|\omega_1^t|} \int_{\omega_1^t} u_t(t)(x) g(|u_t(t)(x)|) dx \\ &\leq \frac{1}{|\omega_1^t| c_1 a_-} \int_{\omega_1^t} u_t \rho(x, u_t) dx. \end{aligned}$$

En utilisant une fois de plus l'inégalité de Young, on dérive

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{\omega_1^t} |u_t(t)(x)|^2 dx dt \leq |\omega| \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + \frac{1}{c_1 a_-} E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (1.5.7)$$

Sur  $\omega \setminus \omega_1^t$ , on a  $|u_t(t)| \geq \varepsilon_1$ . Pour  $|u_t(t)| \geq \varepsilon_0$ , (1.5.3) satisfait. On peut facilement vérifier qu'en utilisant (1.5.4), des inégalités similaires existent pour  $\varepsilon_1 \leq |u_t(t)| \leq \varepsilon_0$ .

Cela implique

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{\omega \setminus \omega_1^t} |u_t(t)(x)|^2 dx dt \leq \frac{1}{c_1 a_-} \int_S^T (-E'(t)) f(E) dt. \quad (1.5.8)$$

En insérant maintenant (1.5.5), (1.5.6), (1.5.7) et (1.5.8) dans (1.5.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E(t)) E(t) dt &\leq \delta_1 E(S) f(E(S)) + \left( \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{c_1 a_-} \right) E(S) + \\ &\quad \left( \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{c_1 a_-} \right) \int_S^T (-E'(t)) f(E) dt + \\ &\quad \left( \delta_2 \frac{\Omega}{c_g^2} + \delta_3 |\omega| \right) \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

On rappelle que  $L$ , définie par (1.3.15) est une fonction strictement croissante de  $[0, \infty) \rightarrow [0, r_0^2)$ . On choisit un nombre réel  $\beta = \beta_{E(0)} > 0$  comme suit:

$$\beta = \max \left( \delta_3 |\omega| + \delta_2 \frac{|\Omega|}{c_g^2}, \frac{E(0)}{2L(H(r_0^2))} \right) \quad (1.5.10)$$

Maintenant, on choisit la fonction de poids  $f$  annoncée, c'est-à-dire:

$$f(s) = L^{-1} \left( \frac{s}{2\beta} \right) \quad \forall s \in [0, 2\beta r_0^2)$$

Alors  $f$  est une fonction strictement croissante de  $[0, 2\beta r_0^2)$  sur  $[0, \infty)$ . De plus, par construction,  $f$  vérifie la relation:

$$\beta \widehat{H}^*(f(s)) = \frac{1}{2} s f(s) \quad \forall s \in [0, 2\beta r_0^2).$$

Comme  $E$  est décroissante, on a

$$E(t) \leq E(0) \leq E(0) \frac{r_0^2}{2L(H(r_0^2))} \leq 2\beta r_0^2 \quad \forall t \geq 0.$$

On a donc en particulier:

$$\beta \widehat{H}^*(f(E(t))) = \frac{1}{2} E(t) f(E(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Avec ce choix de  $\beta$  et  $f$ , le dernier terme du côté droit de (1.5.9) est borné dessus par

$$\frac{1}{2} \int_S^T E(t) f(E(t)) dt. \quad (1.5.11)$$

D'autre part, on rappelle que  $-E'$  est positive sur  $[0, \infty)$ ,  $E$  est positive et décroissante sur  $[0, \infty)$  alors que  $w$  est positive et augmente sur  $[0, 2\beta r_0^2)$ .

Ainsi, le troisième terme du côté droit de (1.5.9) est borné au-dessus par

$$\left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-}\right) \int_S^T (-E'(t)) f(E) dt \leq \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-}\right) E(S) L^{-1} \left(\frac{E(S)}{2\beta}\right) \quad (1.5.12)$$

On insère les estimations (1.5.11) et (1.5.12) dans (1.5.9). Cela donne

$$\int_S^T E(t) L^{-1} \left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq 2 \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-}\right) E(S) L^{-1} \left(\frac{E(S)}{2\beta}\right) + 2 \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-}\right) E(S).$$

Par conséquent, l'énergie  $E$  satisfait l'estimation

$$\int_S^T E(t) L^{-1} \left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq T_0 E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

où  $T_0$  est indépendant de  $E(0)$  et avec notre choix de  $\beta$  est donné par

$$T_0 = 2 \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-} + \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_3}{\tilde{c}_1 a_-}\right) H(r_0^2)\right)$$

Ainsi, les fonctions  $g, H, E$  et  $\beta$  satisfont aux hypothèses du théorème 1.3.3. En appliquant les conclusions de ce théorème, on déduit que  $E$  satisfait l'estimation désirée, ce qui conclut la démonstration. ■

### 1.5.4 Simplification des taux de décroissance de l'énergie

**Corollaire 1.5.1** *Supposons les hypothèses du théorème 1.5.2. On définit  $H$  par (HD) et supposons que  $H$  est strictement convexe sur  $[0, r_0^2]$ . On définit aussi  $\hat{H}$  par (1.3.14),  $L$  par (1.3.15) et  $\Lambda_H$  par (1.3.16). Soit  $(u^0, u^1) \in V \times H$  et désignons par  $u$  une solution de (1.4.1) et  $E$  son énergie définie comme dans (1.3.6). Supposons que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sup \Lambda_H(x) < 1$ , alors  $E$  satisfait*

$$E(t) \leq 2\beta (H')^{-1} \left(\frac{DT_0}{t}\right),$$

pour  $t$  suffisamment grand et où  $D$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $E(0)$  et  $\beta$  est donnée en (1.5.10). En outre, supposons que soit

$$0 < \liminf_{x \rightarrow 0} \Lambda_H(x) \leq \limsup_{x \rightarrow 0} \Lambda_H(x) < 1,$$

ou qu'il existe  $\mu > 0$  tel que

$$0 < \liminf_{x \rightarrow 0} \left( \frac{H(\mu x)}{\mu x} \int_x^{z_1} \frac{1}{H(y)} dy \right), \quad \text{et } \limsup_{x \rightarrow 0} \Lambda_H(x) < 1$$

pour une certaine  $z_1 \in (0, z_0]$  (arbitraire), alors l'énergie de la solution satisfait l'estimation

$$E(t) \leq CE(0)v^2(t) \quad \text{pour } t \text{ suffisamment grand,}$$

où  $v$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$v'(t) + g(v(t)) = 0, v(0) = \sqrt{2E(0)}, t \geq 0.$$

---

## Résultat d'existence et d'unicité

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités . En premier lieu on pose le problème avec tous les hypothèses géométriques et hypothèses sur le feedback. Ensuite, on donne quelques résultats préliminaires qui nous permettent de démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la solution de notre problème. En dernier lieu, on donne la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

### 2.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^2$  avec une frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^2$ .

On considère le problème suivant de la stabilisation frontière non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + m \cdot \nu d(u_t) = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_N, \\ u(0, \cdot) = u^0, & \text{sur } \Omega, \\ u_t(0, \cdot) = u^1, & \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

où  $d$  est une fonction non linéaire à valeurs réelles et à croissance linéaire à l'infini,  $\nu$  la normale unitaire extérieure,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  désigne la dérivée normale de  $u$ .  $u_t$  et  $u_{tt}$  sont respectivement la première et la seconde dérivée de  $u$  par rapport au temps. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $m$  comme suit,

$$\begin{cases} m(x) = x - x_0, & \forall x \in \mathbb{R}^2, \\ \Gamma_D = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \leq 0\}, \\ \Gamma_N = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu > 0\}. \end{cases} \quad (\text{HG1})$$

Ainsi,  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  et  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \{S_1, S_2\}$ .  $\tau(x)$  désigne le vecteur tangent unitaire de  $\Omega$  pour  $x \in \Gamma$ .

On suppose l'hypothèse suivante sur la fonction de feedback non linéaire  $d$ :

$$\begin{cases} d \in C(\mathbb{R}) \text{ est monotone croissante,} \\ \exists \text{ une fonction } g \in C^1(\mathbb{R}) \text{ impaire strictement croissante telle que,} \\ g(|v|) \leq |d(v)| \leq Cg^{-1}(|v|) \quad \text{si } |v| \leq 1, \\ |v| \leq |d(v)| \leq C|v| \quad \text{si } |v| \geq 1, \end{cases} \quad (\text{HD})$$

On introduit les espaces

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \Gamma_D\},$$

et

$$\mathcal{H} := V \times L^2(\Omega).$$

Il est bien connu que pour des données initiales  $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ , le problème (2.1.1) est bien posé en  $\mathcal{H}$ . En effet, on définit l'opérateur non linéaire  $A$  par

$$A(u, v) = (-v, -\Delta u)$$

où

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (u, v) \in V \times V; \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = -(m \cdot \nu) d(v) \text{ sur } \Gamma_N \right\}$$

Ici  $\Delta u$  est donné au sens des distributions alors que l'égalité  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(m \cdot \nu) d(v)$  est supposée donnée au sens faible, qui est

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(v) \varphi \, d\sigma, \quad \forall \varphi \in V.$$

(2.1.1) peut être alors, écrit sous la forme

$$\begin{cases} (u, v)' + A(u, v) = 0 \\ (u, v)(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

Il est classique que  $A$  est un opérateur maximal monotone sur  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{H}$  pour la norme usuelle (voir, par exemple, [12]). Par conséquent, pour toutes données initiales  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$ , il existe une unique solution forte  $(u, v)$  telle que  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}; V)$  et  $\Delta u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ . De plus, pour deux données initiales  $(u_i, v_i) \in \mathcal{H}$ , pour  $i = 1, 2$ , les solutions correspondantes satisfont

$$\|(u_1(t), v_1(t)) - (u_2(t), v_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq C \|(u_1^0, v_1^0) - (u_2^0, v_2^0)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall t \geq 0.$$

En utilisant la densité de  $\mathcal{D}(A)$ , on peut étendre l'application

$$\mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}, (u^0, u^1) \rightarrow (u(t), v(t))$$

à un semi-groupe de contractions fortement continues  $(S(t))_{t \geq 0}$ , et définir pour  $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$  la solution faible  $(u(t), v(t)) = S(t)(u^0, u^1)$  avec  $u \in C(\mathbb{R}_+; V) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ .

On établit le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1 (Existence et unicité)** *Supposons l'hypothèse (HD), pour toute  $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ , le problème (2.1.1) a une solution unique  $u \in C([0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$ .*

*De plus, son énergie, définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad t \geq 0 \quad (2.1.2)$$

*est décroissante, et si  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$*

$$E'(t) = - \int_{\Gamma_N} m(x) \cdot \nu(x) u_t d(u_t) d\sigma \leq 0.$$

Dans le cas de la stabilisation frontière avec des conditions aux limites mixtes sur des frontières connexes, l'une des principales difficultés est que, même pour des données très régulières, la dérivée normale de la solution de (2.1.1) n'est pas dans  $L^2((0, \infty) \times \Gamma_D)$  (voir Moussaoui [47] pour plus de détails). Ceci est lié au fait que la solution  $u$  de (2.1.1)

est telle que pour  $t \geq 0$ ,  $u(t, \cdot) \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . On décrit ci-dessous le comportement de la partie singulière de la solution au voisinages des points  $S_1, S_2$ . Pour  $(u, v) \in \mathcal{D}(A)$ ,  $(m \cdot \nu) d(v) \in H^{1/2}(\Gamma)$ , en utilisant un résultat de trace, on peut construire  $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$  tel que:

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -(m \cdot \nu) d(v) \quad \text{sur } \Gamma.$$

Soit  $f = \Delta \tilde{u} - \Delta u$ , alors  $U = u - \tilde{u}$  satisfait le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta U = f & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

où  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ . Il est bien connu (voir [26]), que la solution de (2.1.3) n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ .

Plus précisément, la solution est donnée par

$$U(r, \theta) = U_R(r, \theta) + c_1 \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \chi_1 + c_2 \sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \chi_2, \quad (2.1.4)$$

où  $U_R \in H^2(\Omega)$  est la partie régulière de la solution,  $(r_j, \theta_j)$  sont les coordonnées polaires locales au point  $S_j$ ,  $c_j$  sont des constantes réelles, et  $\chi_j$  est une fonction troncature de telle sorte que  $0 \leq \chi_j \leq 1$  et  $\chi_j = 1$  dans un voisinage de  $S_j$  pour  $j = 1, 2$ . Ainsi  $u = U + \tilde{u}$  admet une décomposition de la même forme que dans (2.1.4). Par conséquent, si  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$  pour  $t$  fixé la solution  $u$  de (2.1.1) peut être écrite sous la forme

$$u(t, r, \theta) = u_R(t, r, \theta) + c_{1s}(t) \sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \chi_1 + c_{2s}(t) \sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \chi_2 \quad (2.1.5)$$

où  $c_{is} \in C^1(0, \infty)$  pour  $i = 1, 2$  et  $u_R(t, \cdot) \in H^2(\Omega)$ .

## 2.2 Préliminaires

### 2.2.1 Analyse convexe

Ici, nous présentons brièvement les résultats fondamentaux relatifs à l'analyse convexe dans des espaces infiniment dimensionnels. Pour d'autres résultats et un traitement com-

plet du sujet, nous adressons le lecteur à Rockafellar [52, 53], Brezis [12], Barbu [9] et Ekeland, Temam [23].

Soit  $E$  un espace de Banach avec  $E'$  son dual. Soit  $\phi : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$  non identiquement égal à  $+\infty$

**Définition 2.2.1** *On dit que*

- $\phi$  une fonction propre convexe sur  $E$  si

$$\phi((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\phi(u) + \lambda\phi(v)$$

pour tout  $u, v \in E$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

- la fonction est semi-continue inférieurement en  $u \in E$  si

$$\text{pour toute suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_E = 0$$

$$\text{on a } \liminf_{u_n \rightarrow u} \phi(u_n) \geq \phi(u) \quad \forall u \in E.$$

La multi-application  $\partial\phi : E \rightarrow E'$  définie par

$$\partial\phi(u) = \{u' \in E' : \phi(v) \geq \phi(u) + \langle v - u, u' \rangle \quad \forall v \in E\}$$

s'appelle le sous-différentiel de  $\phi$ . [9]

**Définition 2.2.2 ( Ekeland, Temam [23])** *Soit  $\phi$  une fonction de  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , on appelle dérivée directionnelle de  $\phi$  en  $u$  dans la direction  $v$ , et on note*

$$\phi'(u; v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\phi(u + \lambda v) - \phi(u)}{\lambda}.$$

*S'il existe  $u^* \in E'$  tel que  $\forall v \in E, \phi'(u; v) = \langle v, u^* \rangle$ , on dit que  $\phi$  est Gateaux-différentiable en  $u$ , on appelle  $u^*$  la différentielle de Gateaux en  $u$  de  $\phi$ , et on la note  $\phi'(u)$ .*

**Proposition 2.2.1 ( Ekeland, Temam [23])** *Soit  $K$  un ensemble convexe de  $E$  et soit  $\phi : K \rightarrow (-\infty, +\infty]$   $G$ -différentiable en chaque  $u \in K$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

- $\phi$  convexe dans  $K$ .
- $(\phi'(u) - \phi'(v), u - v) \geq 0, \forall u, v \in K$
- $(\phi'(u), v - u) \leq \phi(v) - \phi(u), \forall u, v \in K$

**Proposition 2.2.2 ( Ekeland, Temam [23])** *Soit  $\phi$  une fonction convexe de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\phi$  est Gâteaux-différentiable en  $u \in E$ , elle est sous-différentiable en  $u$ , et  $\partial\phi(u) = \{\phi'(u)\}$ ,*

*Réciproquement, si au point  $u \in E$ ,  $\phi$  est finie continue et ne possède qu'un seul sous-gradient, alors  $\phi$  est Gâteaux-différentiable en  $u$  et  $\partial\phi(u) = \{\phi'(u)\}$ .*

**Théorème 2.2.1** *Soit  $\phi$  une fonction propre et semi-continue inférieurement dans  $E$ , alors le sous-différentiel  $\partial\phi(u)$  de  $\phi$  est un opérateur maximal monotone de  $E$  dans  $E'$ .*

**Preuve.** Rockafellar [52, 53] ■

## 2.2.2 Théorie des opérateurs

Soit  $E$  un espace de Banach,  $A$  opérateur défini de  $E \rightarrow E'$ .

**Définition 2.2.3** *On dit que*

- $A$  est monotone si  $\forall u, v \in E$ ,

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0$$

- $A$  est maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.
- $A$  est hémicontinu si pour tout  $u, v \in E$ , l'application

$$t \rightarrow \langle A(u + tv), v \rangle$$

*est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .*

**Proposition 2.2.3** *Soit  $A$  un opérateur défini de  $E$  dans  $E'$ . Il y'a equivalence entre les trois propriétés suivantes:*

1.  $A$  est maximal monotone.
2.  $A$  est monotone et  $R(I + A) = E$ .
3. Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction définie sur  $E$  tout entier.

**Preuve.** Brezis [12]. ■

**Proposition 2.2.4** Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et  $A$  un opérateur monotone, hémicontinu et borné de  $E$  dans  $E'$ .  $B$  un opérateur maximal monotone sur  $E$  dans  $E'$ . Alors  $A + B$  est maximal monotone.

**Preuve.** Barbu [9]. ■

**Théorème 2.2.2 (Hille-Yosida)** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  il existe une fonction

$$u \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), H)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale)}. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve.** Voir Brezis [12]. ■

## 2.3 Démonstration du théorème d'existence et unicité de la solution

On définit les espaces de Hilbert suivant

$$H = L^2(\Omega), \text{ muni de la norme } \|u\|_H^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

et

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \text{ muni de la norme } \|u\|_V^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

on peut voir grace au théorème de Poincaré que  $V$  est un espace de Banach.

On définit l'opérateur linéaire  $A : V \rightarrow V'$

$$\langle Au, v \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

L'application est bien définie, puisque en effet

$$\begin{aligned} \left| \langle Au, v \rangle_{V',V} \right| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

ceci prouve que  $Au \in V'$  et

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v \in V; \|v\|_V \leq 1} \left| \langle Au, v \rangle_{V',V} \right| \leq \|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

L'opérateur  $A$  étant linéaire borné donc il est continu. De plus,  $A$  est coercif car

$$\langle Au, u \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Soit l'opérateur  $B : V \rightarrow V'$  défini par

$$\langle Bu, v \rangle_{V',V} = \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(u) v d\sigma, \quad u, v \in V. \quad (2.3.1)$$

On multiplie la première équation du système(2.1.1) par  $v \in V$  et on intègre par parties sur  $\Omega$ . On utilise les conditions au bord et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u_{tt} - \Delta u) v dx \\ &= \int_{\Omega} u_{tt} v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma \\ &= \int_{\Omega} u_{tt} v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(u_t) v d\sigma \\ &= \langle u_{tt} + Au + Bu_t, v \rangle_{V',V}, \end{aligned}$$

donc

$$u_{tt} + Au + Bu_t = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

On pose

$$u_t := z, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -z \\ Au + Bz \end{pmatrix}.$$

On peut écrire le système (2.1.1) sous la forme

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ U(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

On définit l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = V \times H$  et on considère l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini dans  $\mathcal{H}$ , de domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : Au + Bz \in H\}.$$

Pour montrer que  $\mathcal{A}$  engendre un semi-groupe, il suffit de montrer que  $\mathcal{A}$  maximal monotone.

**Lemme 2.3.1**  *$\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone dans  $\mathcal{H}$ .*

### 2.3.1 Preuve du lemme

La croissance de la fonction  $d$  donne la monotonie de  $\mathcal{A}$ . En effet, pour  $U, \tilde{U} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U}, U - \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle z - \tilde{z}, u - \tilde{u} \rangle_V + \langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_H \\ &= -\langle \tilde{z} - z, u - \tilde{u} \rangle_V + \langle A(u - \tilde{u}) + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_{V',V'} \\ &= -\langle \tilde{z} - z, u - \tilde{u} \rangle_V + \langle A(u - \tilde{u}), z - \tilde{z} \rangle_{V'} + \langle Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_{V',V'} \\ &= \langle Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_{V',V'} \\ &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu (d(z) - d(\tilde{z})) (z - \tilde{z}) d\sigma \geq 0. \end{aligned}$$

On montre maintenant que l'opérateur  $I + \mathcal{A}$  est surjectif. En effet, soit  $(u^0, z^0) \in \mathcal{H}$ , on cherche  $(u, z) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tel que  $(I + \mathcal{A})(u, z) = (u^0, z^0)$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} u = z + u^0 \\ z + Az + Bz = z^0 - Au^0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Donc il suffit de montrer que  $I + A + B : V \rightarrow V'$  est surjectif et de prendre  $u = z + u^0$  et  $z \in V$  tel que

$$(I + A + B)z = z^0 - Au^0. \quad (2.3.3)$$

On remarque que l'application

$$z \rightarrow z + Az$$

est continue donc  $A$  est hémicontinue. De plus, comme

$$\begin{aligned} \langle Az, z \rangle_{V',V} &= \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \\ &= \|z\|_V^2 \geq 0 \end{aligned}$$

on aura la monotonie de l'opérateur  $A$ , il s'ensuit que  $I + A$  l'est également.

Maintenant, on montre que l'opérateur  $B$  est maximal monotone.

D'abord  $B$  est un opérateur bien défini, on a  $\Gamma_N = \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2$  où

$$\Gamma_N^1 = \{x \in \Gamma_N, |v| \leq 1\} \text{ et } \Gamma_N^2 = \{x \in \Gamma_N, |v| \geq 1\}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \langle Bu, v \rangle_{V',V'} \right| &= \left| \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(u) v d\sigma \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_N} |m \cdot \nu| |d(u)| |v| d\sigma \\ &\leq C \left( \int_{\Gamma_N} (d(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_N} v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left( \int_{\Gamma_N} (d(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_V \end{aligned}$$

par la continuité de la trace.

$$\begin{aligned}
 \left| \langle Bu, v \rangle_{V, V'} \right| &\leq C \left( \int_{\Gamma_N^1} (d(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_V + C \left( \int_{\Gamma_N^2} (d(u))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_V \\
 &\leq C \left( \int_{\Gamma_N^1} (g^{-1}(|u|))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_V + C \left( \int_{\Gamma_N^2} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_V \\
 &\leq C \left[ \left( \int_{\Gamma_N^1} (g^{-1}(1))^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Gamma_N^2} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|v\|_V \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

D'où  $Bu \in V'$  pour tout  $u \in V$ .

On définit la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned}
 J: V &\rightarrow \mathbb{R} \\
 v &\rightarrow J(v) = \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu D(v) d\sigma
 \end{aligned}$$

où

$$D(v) = \int_0^v d(s) ds.$$

On montre que  $J$  est sous-différentiable et que son sous-différentiel est l'opérateur  $B$ .

En effet la dérivée directionnelle de  $J$  en  $v \in V$  dans la direction de  $u$  est donnée par:

$$\begin{aligned}
 J'(v)(u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [J(v + \lambda u) - J(v)] \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \left( \int_0^{v+\lambda u} d(s) ds \right) d\sigma - \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \left( \int_0^v d(s) ds \right) d\sigma \right] \\
 &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \int_v^{v+\lambda u} d(s) ds \right) d\sigma \\
 &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(v) u d\sigma \tag{2.3.4}
 \end{aligned}$$

la dernière égalité vient du théorème de la moyenne. Donc  $J$  est G-différentiable  $\forall v \in V$ , de (2.3.1) et (2.3.4) on a

$$\begin{aligned} \langle J'(v), u \rangle_{V, V'} &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(v) u d\sigma \\ &= \langle Bv, u \rangle_{V, V'} \end{aligned}$$

d'où

$$J'(v) = Bv, \forall v \in V.$$

D'après le corollaire 2.2.2.  $B$  est le sous-différentiel de  $J$ , il suffit de montrer que  $J$  est convexe.

Comme  $J$  est G-différentiable, donc d'après la proposition 2.2.1 il suffit de montrer que  $\forall v, w \in V$

$$\langle J'(w) - J'v, w - v \rangle_{V, V'} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \langle J'w - J'v, w - v \rangle_{V, V'} &= \langle Bw - Bv, w - v \rangle_{V, V'} \\ &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(w) (w - v) d\sigma - \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu d(v) (w - v) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu [d(w) - d(v)] (w - v) d\sigma \geq 0 \quad \forall v, w \in V \end{aligned}$$

car  $m \cdot \nu > 0$  sur  $\Gamma_N$  et  $d$  est croissante. D'où  $J$  est convexe. En utilisant le corollaire 2.2.2 on a

$$\partial(Jv) = J'v = Bv, \forall v \in V,$$

d'où  $B$  est le sous différentielle de  $J$ .

Reste à prouver que  $J$  est continue. En effet, soit  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V$  une suite telle que  $v_n \rightarrow v$  dans  $V$

$$\begin{aligned}
 |Jv_n - Jv| &= \left| \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \int_v^{v_n} d(s) ds \right| \\
 &\leq C \int_{\Gamma_N} \int_v^{v_n} |d(s)| ds \\
 &\leq C \left[ \int_{\Gamma_N^1} \int_v^{v_n} |d(s)| ds + \int_{\Gamma_N^2} \int_v^{v_n} |d(s)| ds \right] \\
 &\leq C \left[ \int_{\Gamma_N^1} \int_v^{v_n} cg^{-1}(|s|) ds + \int_{\Gamma_N^2} \int_v^{v_n} c|s| ds \right] \\
 &\leq C \left[ \int_{\Gamma_N^1} \int_v^{v_n} cg^{-1}(1) ds d\sigma + \frac{c}{2} \int_{\Gamma_N^2} |v_n|^2 - |v|^2 d\sigma \right] \\
 &\leq C \left[ cg^{-1}(1) \int_{\Gamma_N^1} |v_n - v| d\sigma + \frac{c}{2} \int_{\Gamma_N^2} ||v_n|^2 - |v|^2| d\sigma \right]
 \end{aligned}$$

On a  $\int_{\Gamma_N^1} |v_n - v| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  comme  $v_n \rightarrow v$  dans  $V$ . Il reste à montrer que  $\int_{\Gamma_N^2} ||v_n|^2 - |v|^2| d\sigma \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_N^2} ||v_n|^2 - |v|^2| d\sigma &= \int_{\Gamma_N^2} |v_n - v| |v_n + v| d\sigma \\
 &\leq \left( \int_{\Gamma_N^2} |v_n - v|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_N^2} |v_n + v|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_N^2} |v_n + v|^2 d\sigma &\leq 2 \left( \int_{\Gamma_N^2} |v_n|^2 + \int_{\Gamma_N^2} |v|^2 \right) \\
 &\leq 2 \left( \|v_n\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2 \right) \\
 &\leq 2 \left( C + \|v\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2 \right) < \infty.
 \end{aligned}$$

D'où on aura  $\int_{\Gamma_N^2} ||v_n|^2 - |v|^2| d\sigma \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , donc  $J$  est continue.

On a montré que  $B : V \rightarrow V'$  est le sous différentielle d'une fonctionnelle  $J$  continue, convexe et propre, et d'après le théorème 2.2.1  $B$  est maximal monotone.

De la proposition 2.2.4 on en déduit que l'opérateur  $(I + A) + B$  est maximal monotone. Et donc l'équation (2.3.3) possède une unique solution  $z \in V$ . Comme on a  $u = z + u^0$  et  $Au + Bz = z^0 - z$  alors  $u \in V$  et  $Au + Bz \in H$  d'où le système (2.3.2) possède une solution  $(u, z) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . D'où  $\mathcal{A}$  est maximal monotone dans  $\mathcal{H}$ .

En utilisant le théorème de Hille-Yosida, pour  $U(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , il existe une unique solution  $U$  telle que  $U \in C([0, \infty), \mathcal{H})$ . On en déduit alors que le système (2.1.1) admet une unique solution  $u \in C([0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$ .

---

## Stabilisation frontière

### non linéaire de l'équation des ondes en présence de singularités

**D**ans ce chapitre on étudie la stabilisation de l'équation des ondes en présence de singularités avec un feedback non linéaire. Tout d'abord on énonce le résultat principal avec le lemme clé qui va nous aider dans la démonstration de notre résultat de stabilisation, puis on passe à la démonstration de ce lemme qu'on va appeler lemme principal dû à son importance qui se fait en trois étapes. La première étape consiste à approximer notre domaine, on fait des intégrations par parties sur ce nouveau domaine, la troisième étape on passe à la limite. Après démontre le résultat de stabilisation avec la méthode de multiplicateur. Puis on donne quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie. On termine par donner un autre résultat de stabilisation mais cette fois ci avec un multiplicateur retourné  $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$ .

### 3.1 Résultat principal

Dans cette section, on énonce le résultat principal. Pour cela on suppose la condition géométrique suivante

$$m(S_i) \cdot \tau_i \leq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (\text{HG2})$$

où  $\tau_i$  est le vecteur tangent unitaire à  $S_i$  pour  $i = 1, 2$  orienté de  $\Gamma_N$  à  $\Gamma_D$ .

**Théorème 3.1.1** *On suppose les hypothèses géométriques (HG1), (HG2) et l'hypothèse (HD). Supposons aussi qu'il existe  $r_0 \in (0, 1)$  avec  $g(r_0) < 1$ , telle que la fonction  $H$  définie par*

$$H(x) = \sqrt{x}g(\sqrt{x})$$

*est strictement convexe sur  $[0, r_0^2]$ . Alors  $E$  satisfait l'estimation*

$$E(t) \leq 2\beta L \left( \frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)} \right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}$$

*où  $\beta$  est donnée dans (3.2.9) et la fonction  $L$  définie par*

$$L(y) = \begin{cases} \frac{\widehat{H}^*(y)}{y} & \text{si } y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} .$$

*On définit également une fonction  $\Lambda_H$  sur  $(0, r_0^2]$  par*

$$\Lambda_H(x) = \frac{H(x)}{xH'(x)}.$$

*De plus, si  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ , alors  $E$  satisfait*

$$E(T) \leq 2\beta (H')^{-1} \left( \frac{CT_0}{t} \right).$$

Grâce au théorème 1.3.3, il suffit de prouver que l'énergie satisfait l'estimation intégrale pondérée (1.3.21), pour un certain  $T_0$ , pour prouver le théorème ci-dessus. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

**Remarque 3.1.1** *On utilise dans la preuve du lemme 3.1.1 ci-dessous, les notations suivantes*

$$\begin{cases} \tau_i = \tau(S_i), & \text{si } \tau(S_i) \text{ est orientée de } \Gamma_N \text{ à } \Gamma_D. \\ \tau_i = -\tau(S_i), & \text{autrement.} \end{cases}$$

Soit  $M \in \Gamma$  donné, on désigne par  $\tau(M)$  le vecteur tangent unitaire en  $M$ , orienté dans la direction trigonométrique.

### 3.1.1 Lemme principal

Soit

$$f(s) = L^{-1} \left( \frac{s}{2\beta} \right), \forall s \in [0, 2\beta r_0^2[ \quad (3.1.1)$$

où  $\beta$  est donnée dans (3.2.9). Notez que grâce à la proposition 1.3.1,  $f$  est une fonction  $C^1$  positive strictement croissante définie de  $[0, r_0^2[$  sur  $[0, \infty[$ . On fixe

$$Mu = m \cdot \nabla u + \frac{1}{2}u.$$

**Lemme 3.1.1** *On suppose les hypothèses du théorème 3.1.1. Soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$ , et  $E$  son énergie, définie en (2.1.2). Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \int_S^T E f(E) dt &\leq \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dx dt - \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_S^T + \\ &\quad \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt + \\ &\quad \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \nabla u + \frac{1}{2}u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt, \quad 0 \leq S \leq T \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

### 3.1.2 Preuve du lemme 3.1.1

La preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs (voir par exemple. [41, 34, 11, 26] et sur [2, 3, 5]) pour traiter la non-linéarité de feedback. On utilise le multiplicateur  $Mu$

défini ci-dessus. La méthode du multiplicateur repose sur la réalisation des intégrations par parties du côté gauche de la relation

$$\int_S^T \int_{\Omega} f(E) (u_{tt} - \Delta u) M u dx dt = 0.$$

Cependant, la régularité de la solution n'est pas suffisante pour effectuer directement ces calculs. Il faut d'abord approcher le domaine. Pour cela, on devise notre preuve en plusieurs étapes. Notez qu'on utilise la convention des indices répétés dans la suite.

**Étape 1: approximation du domaine:**

Pour remédier le manque de régularité de la solution aux ponts  $S_1$ , et  $S_2$ , nous travaillerons sur des domaines approchés. Ces domaines perturbés sont définis comme suit. Pour  $\varepsilon > 0$ , nous définissons les ensembles suivants

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(S_i, \varepsilon), \quad \partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon \cup C_\varepsilon^1 \cup C_\varepsilon^2,$$

$$C_\varepsilon^i = \partial B(S_i, \varepsilon) \cap \Omega,$$

où  $B(S_i, \varepsilon)$  est la boule de rayon  $\varepsilon$  et centrée dans  $S_i$ . Désignons par  $\eta(x)$  le vecteur normal unitaire externe de  $\Omega_\varepsilon$  à  $x \in \partial\Omega_\varepsilon$  tel que  $\eta = \nu$  sur  $\Gamma$ . Sur  $\Omega_\varepsilon$ , la solution  $u$  de (2.1.1) est suffisamment régulière pour intégrer par parties.

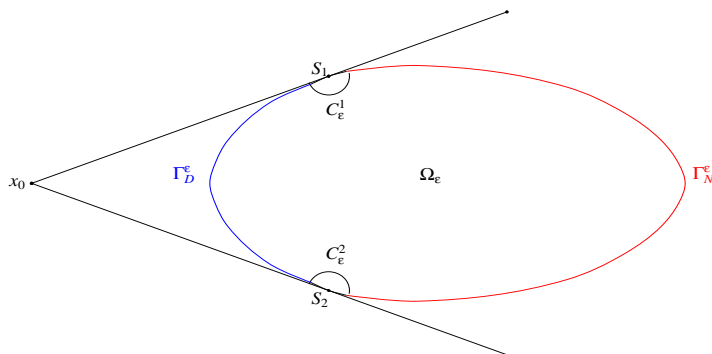


Figure 3.1.1 :

**Étape 2: intégration par parties:**

**Proposition 3.1.1** *Soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$ ,  $E$  son énergie et  $f$  définie par (3.1.1). On a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dxdt &= \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dxdt - \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T \\ &\quad + \Phi(\Gamma_D^\varepsilon) + \Phi(\Gamma_N^\varepsilon) + \Phi(C_\varepsilon^1) + \Phi(C_\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Où on a utilisé la notation suivante  $\Phi(U)$  avec  $U = \Gamma_D^\varepsilon$  ou,  $\Gamma_N^\varepsilon, C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^2$  donné par

$$\Phi(U) = \int_S^T f(E) \int_U \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt. \quad (3.1.4)$$

**Preuve.** On considère le terme

$$I(\varepsilon) = \int_S^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(E) (u_{tt} - \Delta u) M u dxdt = 0. \quad (3.1.5)$$

On écrit  $I(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) - I_2(\varepsilon)$  où

$$I_1(\varepsilon) = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_{tt} M u dxdt \quad \text{et} \quad I_2(\varepsilon) = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u M u dxdt.$$

Grâce à la régularité de  $u$  sur  $\Omega_\varepsilon$ , on peut intégrer par parties  $I_1(\varepsilon)$  et  $I_2(\varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_{tt} M u dxdt, \\ &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dxdt - \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \left( \frac{1}{2} m \cdot \nabla |u_t|^2 + \frac{1}{2} |u_t|^2 \right) dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} 2 |u_t|^2 dx dt \\
 &\quad - \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{m \cdot \eta}{2} |u_t|^2 dx dt - \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{2} |u_t|^2 dx dt, \\
 &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |u_t|^2 dx dt \\
 &\quad - \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{m \cdot \eta}{2} |u_t|^2 dx dt, \tag{3.1.6}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_2(\varepsilon) &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u M u dx dt, \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u m \cdot \nabla u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta u dx dt, \\
 &= - \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla (m \cdot \nabla u) dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} m \cdot \nabla u d\sigma \right] dt - \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} u d\sigma \right] dt.
 \end{aligned}$$

On pose

$$J = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt.$$

On a donc

$$I_2 = -J + \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} m \cdot \nabla u d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} u d\sigma \right] dt. \tag{3.1.7}$$

On évalue  $J$  comme suit

$$\begin{aligned}
 J &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,k} \partial_i u \partial_i (m_k \partial_k u) dx dt \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ \sum_{i,k} \partial_i u \partial_i m_k \partial_k u dx + \sum_{i,k} \partial_i u m_k \partial_i (\partial_k u) dx \right] dt \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} m \cdot \nabla (|\nabla u|^2) dx dt \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} m |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} m \cdot \eta |\nabla u|^2 d\sigma \right] dt
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$J = \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} m \cdot \eta |\nabla u|^2 d\sigma dt. \quad (3.1.8)$$

En utilisant (3.1.6) – (3.1.8) dans (3.1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt &= \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt \\
 &\quad - \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T + \Phi(\Gamma_D^\varepsilon) + \Phi(\Gamma_N^\varepsilon) + \Phi(C_\varepsilon^1) + \Phi(C_\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Où on a utilisé la notation suivante  $\Phi(U)$  avec  $U = \Gamma_D^\varepsilon$  ou,  $\Gamma_N^\varepsilon$ ,  $C_\varepsilon^1$ ,  $C_\varepsilon^1$  donné par

$$\Phi(U) = \int_S^T f(E) \int_U \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt.$$

■

La stratégie sera maintenant de passer à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans (3.1.3). La principale difficulté est due aux termes  $\Phi(C_\varepsilon^i)$  pour  $i = 1, 2$  dans (3.1.3). Dans l'étape suivante, nous allons passer à la limite dans (3.1.3) près des points  $S_i$ , pour  $i = 1, 2$ .

**Étape 3: passage à la limite au voisinage de  $S_i$  sur  $C_\varepsilon^i$ , pour  $i = 1, 2$ :**

**Proposition 3.1.2** *Sous les hypothèses de Lemme 3.1.1, soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(A)$ ,  $E$  son énergie et  $f$  définie comme dans (3.1.1), on a quand  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\Phi(C_\varepsilon^1) \rightarrow \frac{\pi}{8} m \cdot \tau(S_1) \int_S^T f(E) (c_{1s}(t))^2 dt, \quad (3.1.9)$$

$$\Phi(C_\varepsilon^2) \rightarrow -\frac{\pi}{8} m \cdot \tau(S_2) \int_S^T f(E) (c_{2s}(t))^2 dt, \quad (3.1.10)$$

où  $c_{is}(t)$ ,  $i = 1, 2$  sont donnés en (2.1.5).

**Preuve.** Considérons les termes des intégrales de frontière sur  $C_\varepsilon^i$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit  $\chi_i = 1$  sur  $C_\varepsilon^i$ , (2.1.5) devient

$$u = u_R + c_{is}(t) \varphi_s \quad i = 1, 2 \quad (3.1.11)$$

où la fonction singulière  $\varphi_s$  est définie par

$$\varphi_s(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & \text{dans } B(S_1, \varepsilon) \\ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} & \text{dans } B(S_2, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.1.12)$$

En utilisant la densité de  $C^1(\overline{\Omega})$  dans  $H^2(\Omega)$ , Nous pouvons supposer que  $u_R \in C^1(\overline{\Omega})$ . Cela implique que pour tout  $t \in [0, +\infty)$ , on a

$$u_R(t, \cdot) = O(1), \quad |\nabla u_R(t, \cdot)| = O(1) \text{ in } \overline{\Omega}. \quad (3.1.13)$$

D'autre part, grâce à la définition de  $\varphi_s$ , on a

$$\varphi_s = O(\sqrt{r}), \quad |\nabla \varphi_s| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ as } r \rightarrow 0. \quad (3.1.14)$$

En combinant (3.1.11), (3.1.13) et (3.1.14) on déduit que pour presque tous  $t \in [0, +\infty)$

$$u(t, \cdot) = O(1), \quad |\nabla u(t, \cdot)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ as } r \rightarrow 0. \quad (3.1.15)$$

Considérons à présent  $\Phi(C_\varepsilon^1)$  définie dans (3.1.4), pour estimer le terme associé dans (3.1.3). On procède comme suit

$$\begin{aligned} \Phi(C_\varepsilon^1) &= \int_{C_\varepsilon^1} \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma \\ &= \int_{C_\varepsilon^1} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \eta} + c_{1s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \right) \times \left( m \cdot (\nabla u_R + c_{1s} \nabla \varphi_s) + \frac{1}{2} (u_R + c_{1s} \varphi_s) \right) \\ &\quad + \frac{m \cdot \eta}{2} [((u_R)_t + (c_{1s})_t \varphi_s)^2 - (\nabla u_R + c_{1s} \nabla \varphi_s)^2] d\sigma. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

La forme quadratique  $\Phi(C_\varepsilon^1)$  peut être écrite comme

$$\Phi(C_\varepsilon^1) = \tilde{I}_\varepsilon(u_R) + \tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s) + \tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) + \tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R), \quad (3.1.17)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\varepsilon(v) &= \int_{C_\varepsilon^1} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla v + \frac{1}{2} v \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|(v)_t|^2 - |\nabla v|^2) d\sigma, \\ \tilde{J}_\varepsilon(w, z) &= \int_{C_\varepsilon^1} \left[ c_{1s} \frac{\partial w}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla z + \frac{1}{2} z \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} ((c_{1s})_t w z_t - c_{1s} \nabla w \nabla z) \right] d\sigma. \end{aligned}$$

On commence par calculer  $\tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s)$  et  $\tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R)$ . Au début

$$\tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) = \int_{C_\varepsilon^1} \left[ c_{1s} \frac{\partial u_R}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} ((c_{1s})_t \varphi_s (u_R)_t - c_{1s} \nabla \varphi_s \cdot \nabla u_R) \right] d\sigma.$$

De (3.1.14), nous avons dans le voisinage de  $C_\varepsilon^1$

$$\varphi_s = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad |\nabla \varphi_s| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) = 0. \quad (3.1.18)$$

De même, on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R) = 0. \quad (3.1.19)$$

Soit

$$\tilde{I}_\varepsilon(u_R) = \int_{C_\varepsilon^1} \frac{\partial u_R}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u_R + \frac{1}{2} u_R \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|(u_R)_t|^2 - |\nabla u_R|^2) d\sigma.$$

En utilisant (3.1.13), on a

$$\left| \tilde{I}_\varepsilon(u_R) \right| \leq c \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon d\theta.$$

(Voir figure 3.1.2 ci-dessous). par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \tilde{I}_\varepsilon(u_R) \right| = 0. \quad (3.1.20)$$

Considérons  $\tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s)$  dans le voisinage de  $S_1$ ,  $\varphi_s = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} = -\frac{\partial \varphi_s}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta}, \\ |\nabla \varphi_s|^2 = \frac{1}{4r}. \end{array} \right.$$

Au point  $S_i$ , les coordonnées locales sont définies de telle sorte que le demi-axe  $OX$  soit tangent à  $\Gamma$  dans le sens positif et que le demi-axe  $OY$  rentre dans  $\Omega$  (voir figure 3.1.2 ci-dessous)

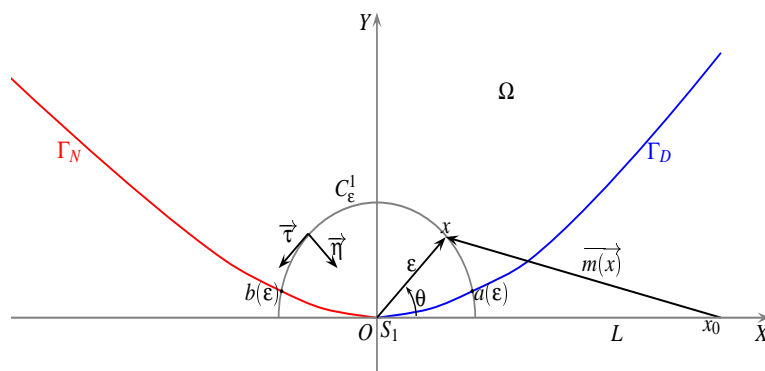


Figure 3.1.2 :

Comme nous avons  $m \cdot \eta = 0$  à  $O$ , le point  $x_0$  a les coordonnées  $(L, 0)$  et  $m(x) = (x - L, y)^t$ . En outre, on a  $\vec{\eta} = (-\cos \theta, -\sin \theta)^t$  et  $\vec{\tau} = (-\sin \theta, \cos \theta)^t$ . par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} m = m_r \vec{\eta} + m_\theta \vec{\tau}, \\ m_r = -((x - L) \cos \theta + y \sin \theta), \\ m_\theta = -(x - L) \sin \theta + y \cos \theta. \end{array} \right.$$

On a

$$\tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s) = \int_{C_\varepsilon^1} (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) d\sigma.$$

On pose

$$q = (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right),$$

calculer  $q$  sur  $C_\varepsilon^1$  comme suit.

$$\begin{aligned} q &= (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) \\ &= (c_{1s})^2 \left( m_r \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} m_\theta \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - \frac{1}{2} \varphi_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right) + \frac{m_r}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) \\ &= (c_{1s})^2 \left( \frac{1}{4r} m_r \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4r} m_\theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{m_r}{2} \left( (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4r} \right) \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{4r} \left( m_r \sin^2 \frac{\theta}{2} - m_\theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(c_{1s})^2}{8r} m_r - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{4r} \left( m_r \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) - m_\theta \frac{1}{2} \sin \theta \right) - \frac{(c_{1s})^2}{8r} m_r - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r - m_r \cos \theta - m_\theta \sin \theta - m_r) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r - m_r \cos \theta - m_\theta \sin \theta - m_r) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r \cos \theta + m_\theta \sin \theta) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{8r} \left( -((x-L) \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta + (-(x-L) \sin \theta + y \cos \theta) \sin \theta \right) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\quad + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (x-L) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_{C_\varepsilon^1} q d\sigma = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon \frac{(c_{1s})^2}{8\varepsilon} (\varepsilon \cos \theta - L) - \varepsilon \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Passant à la limite, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}(\varphi_s) &= \int_0^\pi \frac{(c_{1s})^2}{8} (-L) d\theta \\ &= -L \frac{(c_{1s})^2 \pi}{8}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Insérons (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) et (3.1.21) dans (3.1.17) on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(C_\varepsilon^1) = -L \frac{(c_{1s})^2 \pi}{8}.$$

On procède de la même façon au point  $S_2$ . On aura maintenant  $\varphi_s$  donné par

$$\varphi_s = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}.$$

En effectuant une analyse similaire, on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(C_\varepsilon^2) = L \frac{(c_{2s})^2 \pi}{8}.$$

Enfin, remarquant que grâce à notre notation précédente  $(m \cdot \tau)(S_i)$  est égal à  $-L$  pour  $i = 1, 2$ , qui est l'abscisse de  $x_0$  dans les coordonnées locales attachées à  $S_i$ , On récupère (3.1.9), et (3.1.10), ce qui conclut la preuve. ■

**Étape 4: passage à la limite dans (3.1.3) en dehors des points singuliers:**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la solution  $u(t, \cdot) \in V$  et  $u_t(t, \cdot) \in V$  et par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous avons  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx &\rightarrow \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx &\rightarrow \int_{\Omega} u_t M u dx. \end{aligned}$$

De même, nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt,$$

et

$$\left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_T^S + \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt \rightarrow \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_T^S + \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dx dt.$$

On passe à la limite dans (3.1.3) en considérant séparément les contributions de  $\partial\Omega_\varepsilon \cap \Gamma$  et  $C_\varepsilon^i$  pour  $i = 1, 2$ . On procède comme dans [26] et [11]. On considère les termes  $\Phi(\Gamma_D^\varepsilon)$ ,  $\Phi(\Gamma_N^\varepsilon)$ , soit  $x \in \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon$ , on pose  $x_1 \in \{S_1, S_2\}$  tel que:  $|x - x_1| = \text{dist}(x, \{S_1, S_2\})$ . Comme  $m \cdot \nu = 0$  sur  $\{S_1, S_2\}$  on peut écrire:

$$\begin{aligned} (m \cdot \nu)(x) &= -m(x_1) \cdot \nu(x_1) + m(x) \cdot \nu(x) \\ &= (-x_1 + x_0) \cdot \nu(x_1) + (x - x_0) \cdot \nu(x) \\ &= (x - x_1 - x + x_0) \cdot \nu(x_1) + (x - x_0) \cdot \nu(x) \\ &= (x - x_1) \cdot \nu(x_1) + (x - x_0) \cdot (\nu(x) - \nu(x_1)), \end{aligned}$$

comme  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ ,  $\nu$  est lipschitz dans  $\Gamma$  et alors nous obtenons

$$|(m \cdot \nu)(x)| \leq c \cdot \text{dist}(x, \{S_1, S_2\}),$$

et de (3.1.15)

$$|\nabla u|^2 = O\left(\frac{1}{\text{dist}(x, \{S_1, S_2\})}\right) \quad (3.1.22)$$

par conséquent

$$m \cdot \nu |\nabla u|^2 \in L^\infty(\Gamma). \quad (3.1.23)$$

Maintenant, comme  $u = 0$  dans  $\Gamma_D^\varepsilon$

$$\Phi(\Gamma_D^\varepsilon) = \int_{\Gamma_D^\varepsilon} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma,$$

en utilisant (3.1.23) et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on déduit

$$\int_{\Gamma_D^\varepsilon} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \rightarrow \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma,$$

quand  $\varepsilon$  tend vers zero. D'autre part, en utilisant la condition de frontière sur  $\Gamma_N^\varepsilon$ , (3.1.15),

(3.1.22) et (3.1.23) on obtient

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} (m \cdot \nabla u) \right| \leq c |d(u_t)|,$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ , de plus (3.1.23), donc le théorème de Lebesgue implique

$$\int_{\Gamma_N^\varepsilon} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma \rightarrow \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right]$$

Nous concluons maintenant la démonstration du lemme 3.1.1

$$\begin{aligned} \int_S^T E f(E) &= \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dx dt - \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_S^T + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \\ &\quad + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt \\ &\quad + \frac{\pi}{8} m \cdot \tau(S_1) \int_S^T f(E) (c_{1s}(t))^2 dt - \frac{\pi}{8} m \cdot \tau(S_2) \int_S^T f(E) (c_{2s}(t))^2 dt. \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Comme  $(m \cdot \tau)(S_1) \leq 0$  et  $(m \cdot \tau)(S_2) \geq 0$ , le résultat est prouvé.

**Remarque 3.1.2** Dans le lemme 3.1.1, on a appelé l'inégalité (3.1.2) une inégalité de Rellich pondérée généralisée. La démonstration ci-dessus de cette inégalité généralisée repose sur la preuve de l'inégalité de Rellich classique, qui est une inégalité qui n'implique seulement l'intégration spatiale. Pour prouver les taux de décroissance d'énergie, dans le cas linéaire en particulier, il est alors classique de ne traiter que les intégrales spatiales impliquant une énergie perturbée et de séparer ce qui se passe près des points singuliers et ce qui est éloigné des points singuliers.. Lorsqu'on utilise la méthode d'énergie modifiée (voir [36]), elle est généralement effectuée par des étapes différentes comme ci-dessus (voir également par exemple [26, 47]). Ceci est en outre effectué sans multiplier ces intégrales par une fonction de poids appropriée en fonction du temps et en s'intégrant davantage par rapport au temps. Ici, nous donnons l'approche complète liée à la méthode de l'inégalité intégrale. Ainsi, on choisit de présenter nos résultats de manière autonome pour des raisons de clarté. Cette présentation est originale et cette façon de procéder nous permet de combiner les aspects géométriques dus aux singularités, à la méthode de convexité de poids optimal. Cela nous permet de traiter les types généraux de croissance d'amortissement et d'obtenir des taux de décroissance optimale de l'énergie.

**Remarque 3.1.3** Notez que la condition (HG2) doit être supposée pour tous les points singuliers. Pour comprendre la nécessité de cette hypothèse, considérons des exemples d'ensembles  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  et des frontières  $\Gamma_D, \Gamma_N$  telles que  $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N}$  est formée de  $J$  points singuliers  $S_j$  pour  $j \in \{1, \dots, J\}$  avec  $J \geq 2$ , à savoir  $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} = \{S_1, \dots, S_J\}$ .

Dans ce cas, on peut généraliser la formule (3.1.24) en remplaçant les deux derniers termes par

$$\frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^J m \cdot \tau_i \int_S^T f(E) (c_{is}(t))^2 dt.$$

Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide  $J_\nu \subset \{1, \dots, J\}$  de points singuliers  $S_i$   $i \in J_\nu$ , tels que pour tout  $i \in J_\nu$  la condition (HG2) n'est pas vérifiée. On ne peut plus affirmer que la propriété suivante

$$\frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^J m \cdot \tau_i \int_S^T f(E) (c_{is}(t))^2 dt \leq 0$$

vérifie. Ainsi, on ne peut pas affirmer que l'inégalité de Rellich, classique ou généralisée, pondérée est valable. Prenons l'exemple d'une telle situation géométrique en dimension 2. Considérons la figure , la condition (HG2) n'est pas vérifiée pour le point singulier  $S_3$ . On ne peut donc pas appliquer nos résultats à une telle situation géométrique.

## 3.2 Preuve du résultat principal

On procède comme dans [2], on prouve que l'énergie  $E$  satisfait une inégalité intégrale pondérée de la forme (1.3.21) pour un certain  $T_0$ . Nous envisageons des solutions fortes. Grâce à l'inégalité donnée par Lemme 3.1.1, ainsi que l'inégalité  $m \cdot \nu \leq 0$  sur  $\Gamma_D$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -m \cdot \nu d(u_t)$  sur  $\Gamma_N$ , on a

$$\begin{aligned} \int_S^T E f(E) \leq & \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u - \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u \right]_S^T + \\ & \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \left[ \frac{1}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) - \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) d(u_t) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

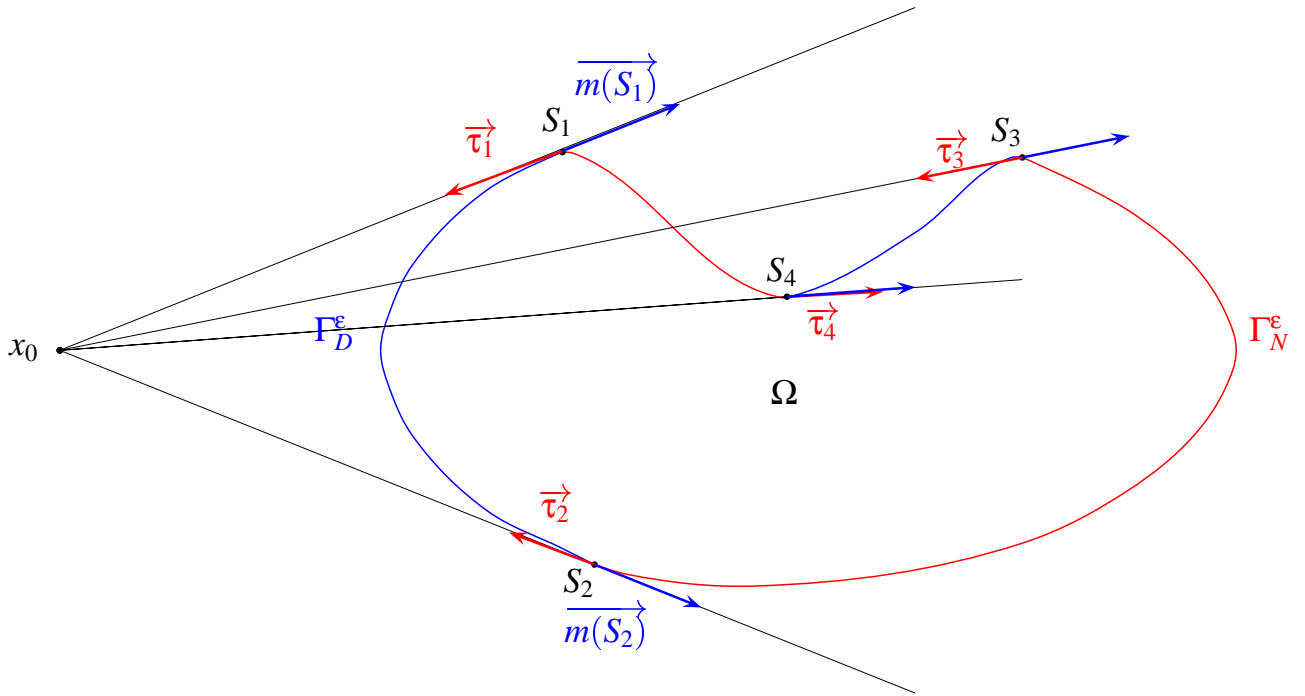


Figure 3.1.3 :

Les deux premiers termes du côté droit de l'inégalité ci-dessus sont bornés en valeur absolue par  $cE(S)f(E(S))$  où  $c$  est une constante qui ne dépend pas de  $E(0)$ . De plus, pour tout  $\delta > 0$ , grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le dernier terme du membre de droite est borné en valeur absolue par

$$\int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu \left[ \frac{1}{2} |u_t|^2 + c_\delta |d(u_t)|^2 \right] + \delta \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu |u|^2 \quad \forall \delta > 0. \quad (3.2.2)$$

En utilisant le fait que, pour tout  $u \in V$ , on a par continuité de la trace,

$$\int_{\Gamma_N} |u|^2 \leq cE.$$

On peut choisir  $\delta$  suffisamment petit et mettre le dernier terme de (3.2.2) sur le côté gauche de (3.2.1). Cela donne enfin pour tous  $(u_0, u_1) \in D(A) \times V$ ,

$$\int_S^T Ef(E) \leq \delta_1 E(S)f(E(S)) + \delta_2 \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu (|u_t|^2 + |d(u_t)|^2) \quad (3.2.3)$$

Cela prouve l'estimation de l'énergie dominante. Nous allons maintenant estimer les deux derniers termes du côté droit de cette inégalité.

Par densité de  $D(A) \times V$  dans l'espace d'énergie  $V \times L^2(\Omega)$ , (3.2.3) est également valable pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$ .

On fixe  $\varepsilon_0 = g(r_0)$ , sous l'hypothèse sur  $r_0$ , on a  $0 < \varepsilon_0 < 1$ . De plus l'hypothèse (HD), en déduit facilement que  $d$  satisfait aux inégalités suivantes:

$$c_1 |v| \leq |d(v)| \leq c_2 |v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_0,$$

et

$$c_1 g(|v|) \leq |d(v)| \leq c_2 g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_0.$$

Nous nous sommes fixés pour tous les  $t \geq 0$ ,  $\gamma_1^t = \{x \in \Gamma_N, |u_t| \leq \varepsilon_0\}$ , nous avons également mis en place

$$c_g = \frac{1}{c_2}.$$

Nous procédons maintenant comme dans [2]. pour  $t \geq 0$ , on pose

$$|\gamma_1^t| = \int_{\gamma_1^t} m \cdot \nu d\sigma, \quad d\gamma_m = m \cdot \nu d\gamma.$$

Comme  $\frac{1}{|\gamma_1^t|} \int_{\gamma_1^t} c_g^2 d^2(u_t) d\gamma_m \in [0, r_0^2]$ , et grâce à l'inégalité de Jensen, nous avons

$$H \left( \frac{1}{|\gamma_1^t|} \int_{\gamma_1^t} c_g^2 d^2(u_t) d\gamma_m \right) \leq \frac{1}{|\gamma_1^t|} \int_{\gamma_1^t} H(c_g^2 d^2(u_t)) d\gamma_m.$$

Par définition de  $H$ , on a

$$H(c_g^2 d^2(u_t)) = c_g |d(u_t)| g(c_g |d(u_t)|) \leq c_g u_t d(u_t) \text{ on } \gamma_1^t.$$

En utilisant cette dernière inégalité dans l'inégalité précédente, on obtient

$$H \left( \frac{1}{|\gamma_1^t|} \int_{\gamma_1^t} c_g^2 d^2(u_t) d\gamma_m \right) \leq -\frac{c_g}{|\gamma_1^t|} E'(t).$$

Comme  $H$  est croissante, on obtient

$$\int_S^T f(E) \int_{\gamma_1^t} d^2(u_t) d\gamma_m \leq \int_S^T \frac{|\gamma_1^t|}{c_g^2} f(E) H^{-1} \left( -\frac{c_g}{|\gamma_1^t|} E'(t) \right) dt.$$

Appliquant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\int_S^T f(E) \int_{\gamma_1^t} |d(u_t)|^2 d\gamma_m \leq \frac{|\Gamma_N|}{c_g^2} \int_S^T \widehat{H}^*(f(E)) + \frac{1}{c_g} E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.2.4)$$

En utilisant la croissance linéaire de  $d$  sur le sous-ensemble  $\Gamma_N \setminus \gamma_1^t$ , nous prouvons facilement

$$\int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N \setminus \gamma_1^t} |d(u_t)|^2 d\gamma_m dt \leq \frac{1}{c_g^2} \int_S^T (-E'(t)) f(E(t)) dt. \quad (3.2.5)$$

On estime maintenant le terme  $\int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} |u_t|^2 d\gamma_m dt$ . On pose

$$r_1^2 = H^{-1}(c_1 c_g H(r_0^2))$$

et

$$\varepsilon_1 = \min(r_0, g(r_1)).$$

On peut noter que  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ . Comme précédemment, on démontre que (jusqu'à un changement des constantes  $c_1, c_2$ ), on a

$$c_1 |v| \leq |d(v)| \leq c_2 |v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_1,$$

et

$$c_1 g(|v|) \leq |d(v)| \leq c_2 g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_1.$$

On définit, pour  $t \geq 0$  fixe, l'ensemble  $\gamma_2^t = \{x \in \Gamma_N, |u_t| \leq \varepsilon_1\}$ . Nous prouvons comme dans [2] que

$$\int_S^T f(E) \int_{\gamma_2^t} |u_t|^2 d\gamma_m \leq |\Gamma_N| \int_S^T \widehat{H}^*(f(E)) + \frac{1}{c_1} E(S). \quad \forall 0 \leq S \leq T, \quad (3.2.6)$$

et aussi que nous avons

$$\int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N \setminus \gamma_2^t} |u_t|^2 d\gamma_m \leq \frac{1}{c_1} \int_S^T (-E'(t)) f(E(t)) dt. \quad (3.2.7)$$

Insérer maintenant (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) dans (3.2.3), on obtient

$$\int_S^T Ef(E) \leq \delta_1 E(S)f(E(S)) + \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) E(S) + \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) \times \int_S^T (-E'(t)) f(E(t)) dt + \left(\delta_2 \frac{|\Gamma_N|}{c_g^2} + \delta_2 |\Gamma_N|\right) \int_S^T \widehat{H}^*(f(E)) dt. \quad (3.2.8)$$

Maintenant, on choisi notre fonction de poids  $f$  de manière optimale en procédant comme dans [2, 5] comme suit. Nous définissons  $F$  par (1.3.15). On rappelle que  $F$  est une fonction strictement croissante de  $[0, +\infty)$  sur  $[0, r_0^2)$ . On choisit aussi un nombre réel  $\beta = \beta_{E(0)}$  comme suit:

$$\beta = \max\left(\delta_2 \frac{|\Gamma|}{c_g^2} + \delta_2 |\Gamma_N|, \frac{E(0)}{2F(H'(r_0^2))}\right). \quad (3.2.9)$$

Notons que  $\beta$  ne dépend pas de  $f$ . Maintenant, nous choisissons la fonction de poids  $f$  comme annoncé, qui est,

$$f(s) = F^{-1}\left(\frac{s}{2\beta}\right), \quad \forall s \in [0, 2\beta r_0^2).$$

Alors  $f$  est une fonction strictement croissante de  $[0, 2\beta r_0^2)$  en  $[0, +\infty)$ . De plus,  $f$  satisfait la relation

$$\beta \widehat{H}^*(f(s)) = \frac{1}{2} s f(s), \quad \forall s \in [0, 2\beta r_0^2).$$

Comme  $E$  est décroissante, on a

$$E(t) \leq E(0) < E(0) \frac{r_0^2}{F(H'(r_0^2))} \leq 2\beta r_0^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, on a en particulier

$$\beta \widehat{H}^*(f(E(t))) = \frac{1}{2} E(t) f(E(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Avec ce choix de  $\beta$  et  $f$ , le dernier terme du côté droit de (3.2.8) est borné ci-dessus par

$$\frac{1}{2} \int_S^T E(t) f(E(t)) dt. \quad (3.2.10)$$

D'autre part, on rappelle que  $-E'$  est positive ou nulle sur  $[0, +\infty)$ , et  $E$  est positive ou nulle et décroissante sur  $[0, +\infty)$ , alors que  $f$  est positive ou nulle et croissante sur  $[0, 2\beta r_0^2)$ . Ainsi, le troisième terme sur le côté droit de (3.2.8) est borné ci-dessus par

$$\left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) \int_S^T (-E'(t)) f(E(t)) dt \leq \left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) E(S) F^{-1}\left(\frac{E(S)}{2\beta}\right). \quad (3.2.11)$$

On insère les estimations (3.2.10) et (3.2.11) dans ((3.2.8). Cela donne

$$\int_S^T E(t) F^{-1}\left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq 2\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) E(S) F^{-1}\left(\frac{E(S)}{2\beta}\right) + 2\left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) E(S).$$

Par conséquent, l'énergie  $E$  satisfait l'estimation

$$\int_S^T E(t) F^{-1}\left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

Où  $T_0$  est indépendant de  $E(0)$  et, avec le choix de  $\beta$ ,  $T_0$  est donné par

$$T_0 = 2\left(\frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1} + \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{c_g} + \frac{\delta_2}{c_1}\right) H'(r_0^2)\right).$$

On a donc prouvé que  $E$  satisfaisait l'estimation intégrale pondérée (1.3.21). En appliquant les conclusions du théorème 1.3.3, on déduit que  $E$  satisfait l'estimation désirée, ce qui conclut la preuve.

### 3.3 Quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie

On donne un exemple de taux de décroissance pour plusieurs exemples de feedbacks (voir [2]):

**Exemple 3.3.1 ( Le cas polynomial)** Soit  $g$  donné par  $g(x) = x^p$  où  $p > 1$  sur  $]0, r_0]$ . Alors l'énergie de la solution de (2.1.1) vérifie l'estimation

$$E(t) \leq C\beta_{E(0)} t^{-\frac{2}{p-1}},$$

### 3.3. Quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie

pour  $t$  suffisamment grand et pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  et où  $\beta_{E(0)}$  est définie comme dans (1.3.20). De plus, cette estimation est optimale dans le cas de dimension finie, la fonction  $\Lambda_H$  définie dans (1.3.16) satisfait  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) = \frac{2}{p+1} \in ]0, 1[$ .

**Preuve.** En effet, on a  $g(x) = x^p$  où  $p > 1$ , on a aussi la fonction  $\alpha$  définie dans (5.20) de [2] comme suit:

$$\alpha(\tau) = \int_{\tau}^{r_0} \frac{g(u) (u^2 g''(u) + u g'(u) - g(u))}{(u g'(u) + g(u))^2 (u g'(u) - g(u))} du$$

$$\varphi(v) = \frac{2v}{v g'(v) + g(v)} + 4\alpha(v)$$

$$g(x) = x^p, \quad p > 1 \quad g'(x) = p x^{p-1} \quad g''(x) = p(p-1) x^{p-2}$$

#### Exemple 3.3.2

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{u^p (u^2 p(p-1) u^{p-2} + u p u^{p-1} - u^p)}{(u p u^{p-1} + u^p)^2 (u p u^{p-1} - u^p)} du \\ &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{1}{(p+1) u^p} du \\ &= \left[ \frac{-1}{p^2-1} \frac{1}{u^{p-1}} \right]_{\tau}^{r_0} \\ &= \frac{1}{p^2-1} \left( \frac{1}{\tau^{p-1}} - \frac{1}{r_0^{p-1}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \frac{2v}{p v v^{p-1} + v^p} + 4\alpha(v) \\ &= \frac{2v}{(p+1) v^p} + \frac{1}{p^2-1} \frac{4}{v^{p-1}} - \frac{1}{p^2-1} \frac{4}{r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2}{(p+1) v^{p-1}} + \frac{4}{(p^2-1) v^{p-1}} - \frac{4}{(p^2-1) r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2(p-1) + 4}{(p+1)(p-1) v^{p-1}} - \frac{4}{(p^2-1) r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2(p+1)}{(p+1)(p-1) v^{p-1}} - \frac{4}{(p^2-1) r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2}{(p-1) v^{p-1}} - C \end{aligned}$$

### 3.3. Quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie

où  $C = \frac{4}{(p^2-1)r_0^{p-1}}$

on a aussi  $z(t) = \varphi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)$ ,  $\varphi(v) = \beta$ ,  $\varphi^{-1}(\beta) = v$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(p-1)v^{p-1}} - C &= \beta \Rightarrow \frac{2}{(p-1)v^{p-1}} = \beta + C \\ \Rightarrow \frac{2}{v^{p-1}} &= (p-1)(\beta + C) \\ \Rightarrow \frac{(p-1)}{2}(\beta + C) &= \frac{1}{v^{p-1}} \\ \Rightarrow (v^{p-1})^{\frac{1}{p-1}} &= \left(\frac{2}{(p-1)(\beta + C)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ \Rightarrow v &= \left(\frac{2}{(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{(\beta + C)^{\frac{1}{p-1}}} \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi^{-1}(\beta) = \left(\frac{2}{(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{(\beta + C)^{\frac{1}{p-1}}}$$

donc

$$\begin{aligned} z(t) &= \varphi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right) \\ &= \left(\frac{2}{(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\left(\frac{t}{T_0} + C\right)^{\frac{1}{p-1}}} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E(t) &\leq 2\beta z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} \\ &\leq 2\beta z^2(t) \frac{z(t)pz(t)^{p-1} - z(t)^p}{z(t)pz(t)^{p-1} + z(t)^p} \\ &\leq 2\beta \frac{p-1}{p+1} z^2(t) \end{aligned}$$

■

**Exemple 3.3.3 (Le cas exponentiel)** Soit  $g$  donnée par  $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  sur  $]0, r_0]$ . Alors l'énergie de la solution de (2.1.1) vérifie l'estimation

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} (H')^{-1} \left( \frac{D}{t} \right)$$

### 3.3. Quelques exemples du taux de décroissance de l'énergie

pour  $t$  suffisamment grand et pour tous  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  et où la fonction  $H$  est définie par

$$H(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0,$$

de sorte que

$$E(t) \leq C\beta_{E(0)} (\ln(t))^{-1},$$

pour  $t$  grand. De plus, cette estimation est optimale dans le cas de dimension finie, la fonction  $\Lambda_H$  définie dans (1.3.16) satisfait  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) = \frac{2}{p+1} \in ]0, 1[$ .

**Exemple 3.3.4 (Entre cas polynomial)** Soit  $g$  donnée par  $g(x) = x^p (\ln(1/x))^q$  où  $p > 2$  et  $q > 1$  sur  $]0, r_0]$ . Alors l'énergie de la solution de (2.1.1) vérifie l'estimation

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} (H')^{-1} \left( \frac{D}{t} \right),$$

pour  $t$  suffisamment grand et pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  et où

$$H'(x) = x^{\frac{p-1}{2}} \left( \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)^q \left( \frac{p+1}{2} - q \left( \ln \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{-1} \right),$$

La fonction  $H$  étant définie par

$$H(x) = x^{\frac{p+1}{2}} \left( \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)^q, \quad x \in (0, 1)$$

De plus, cette estimation est optimale dans le cas de dimension finie, la fonction  $\Lambda_H$  définie dans (1.3.16) satisfait  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) = \frac{2}{p+1} \in ]0, 1[$ .

**Exemple 3.3.5 (Plus rapide que les polynômes, moins qu'une exponentielle)** Soit  $g$  donnée par  $g(x) = e^{-(\ln(1/x))^p}$  où  $p > 2$  sur  $]0, r_0]$ . Alors l'énergie de la solution de (2.1.1) vérifie l'estimation

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} (H')^{-1} \left( \frac{D}{t} \right),$$

pour  $t$  suffisamment grand et pour tout  $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$  et où

$$H'(x) = \frac{e^{-(\ln(\frac{1}{\sqrt{x}}))^p}}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} + \frac{p}{2} \left( \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)^{p-1} \right),$$

La fonction  $\theta$  est définie par

$$H(x) = \sqrt{x} e^{-\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^p}, \quad x \in (0, 1).$$

De plus, cette estimation est optimale dans le cas de dimension finie, la fonction  $\Lambda_H$  définie dans (1.3.16) satisfait  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) = \frac{2}{p+1} \in ]0, 1[$ .

### 3.4 Cas de multiplicateur retourné $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$

Dans cette section on montre un résultat de stabilisation non linéaire du problème (2.1.1) en utilisant le multiplicateur retourné

$$m(x) = (aI + A)(x - x_0),$$

avec  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  donné,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrice identité,  $A$  une matrice antisymétrique  $A^t = -A$  a nombre réel positif

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \geq 1 \text{ nombre réel,}$$

avec

$$a^2 + \|A\|_2^2 = 1, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)} \text{ et } \rho(A) = \max(\lambda_i)$$

#### 3.4.1 Résultat de stabilisation

Dans cette sous-section, on énonce le résultat principal. On suppose toutes les hypothèses de la section précédente, on a alors:

**Théorème 3.4.1** *On suppose les hypothèses géométriques (HD), (HG1) et (HG2). Supposons aussi qu'il existe  $r_0 \in (0, 1)$  avec  $g(r_0) < 1$ , telle que la fonction  $H$  définie par (1.3.13) soit strictement convexe sur  $[0, r_0^2]$ . Alors  $E$  satisfait l'estimation (1.3.23). De plus, si  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_H(x) < 1$ , alors  $E$  satisfait (1.3.25).*

Pour prouver le théorème ci-dessus, il suffit de prouver que l'énergie satisfait l'estimation intégrale pondérée (1.3.21), pour un certain  $T_0$ , grâce au théorème 1.3.3. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

### Lemme principal

Soit

$$f(s) = F^{-1} \left( \frac{s}{2\beta} \right), \forall s \in [0, 2\beta r_0^2[$$

où  $\beta$  est donné dans (3.2.9). Notez que grâce à Proposition 1.3.1,  $f$  est une fonction  $C^1$  positive strictement croissante définie de  $[0, r_0^2[$  sur  $[0, \infty[$ . On fixe

$$Mu = m \cdot \nabla u + \frac{1}{2}u.$$

**Lemme 3.4.1** *Supposons les hypothèses du théorème 3.1.1 et soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in D(A)$ , et  $E$  son énergie, définie en(2.1.2). Alors l'inégalité suivante est vraie*

$$\begin{aligned} \int_S^T Ef(E) \leq & \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dx dt - \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_S^T + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt + \\ & \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \nabla u + \frac{N+1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt. \end{aligned}$$

### Preuve de lemme

#### Etape 1: Approximation du domaine

Pour remédier au manque de régularité de la solution  $S_1$  et  $S_2$ , on pose, pour  $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^2 B(S_k, \varepsilon), \quad \partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon \cup C_\varepsilon^1 \cup C_\varepsilon^2,$$

$$C_\varepsilon^k = \partial B(S_k, \varepsilon) \cap \Omega,$$

où  $B(S_k, \varepsilon)$  est la boule de rayon  $\varepsilon$  et centrée dans  $S_k$ .

#### Etape 2: Intégration par parties:

**Proposition 3.4.1** *Soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in D(A)$ ,  $E$  son énergie et  $f$  définie par (3.1.1). donc on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt \leq & \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt - \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T \\ & + \Phi(\Gamma_D^\varepsilon) + \Phi(\Gamma_N^\varepsilon) + \Phi(C_\varepsilon^1) + \Phi(C_\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

3.4. Cas de multiplicateur retourné  $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$

Avec la notation suivante  $\Phi(U)$  avec  $U = \Gamma_D^\varepsilon$  ou,  $\Gamma_N^\varepsilon, C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^1$  donnée par

$$\Phi(U) = \int_S^T f(E) \int_U \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2}u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt.$$

**Preuve.** On considère le terme

$$I(\varepsilon) = \int_S^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(E) (u_{tt} - \Delta u) M u dx dt = 0. \quad (3.4.2)$$

On écrit  $I(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) - I_2(\varepsilon)$  où

$$I_1(\varepsilon) = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_{tt} M u dx dt \quad \text{et} \quad I_2(\varepsilon) = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u M u dx dt.$$

Grâce à la régularité de  $u$  sur  $\Omega_\varepsilon$ , Nous pouvons intégrer par parties  $I_1(\varepsilon)$  et  $I_2(\varepsilon)$ ,

on a

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_{tt} M u dx dt, \\ &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt - \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \left( \frac{1}{2} m \cdot \nabla |u_t|^2 + \frac{1}{2} |u_t|^2 \right) dx dt, \\ &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} 2d |u_t|^2 dx dt \\ &\quad - \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{m \cdot \eta}{2} |u_t|^2 dx dt - \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{2} |u_t|^2 dx dt, \\ &= \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T - \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt + d \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |u_t|^2 dx dt \\ &\quad - \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{m \cdot \eta}{2} |u_t|^2 dx dt - \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{2} |u_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

et

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u M u dx dt, \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u m \cdot \nabla u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta u dx dt, \\
 &= - \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla (m \cdot \nabla u) dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\sigma \right] dt - \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} u d\sigma \right] dt.
 \end{aligned}$$

On pose

$$J = \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt,$$

On a donc

$$I_2 = -J + \int_S^T f(E) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} m \cdot \nabla u d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} u d\sigma \right] dt. \quad (3.4.4)$$

On évalue  $J$  comme suit

$$\begin{aligned}
 J &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,k} \partial_i u \partial_i (m_k \partial_k u) dx dt \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ \sum_{i,k} \partial_i u \partial_i m_k \partial_k u dx + \sum_{i,k} \partial_i u m_k \partial_i (\partial_k u) dx \right] dt \\
 &= \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u (dI + A) \nabla u dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} m \cdot \nabla |\nabla u|^2 dx dt \\
 &= d \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt + \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u (A \nabla u) dx dt - \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} m \cdot \eta |\nabla u|^2 d\sigma \right] dt
 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

on a  $\nabla u (A \nabla u) = 0$  comme  $A$  est antisymétrique, par conséquent

$$J = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} m \cdot \nu |\nabla u|^2 d\sigma dt$$

En utilisant (3.4.3) – (3.4.5) dans (3.4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2d-1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |u_t|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt &= \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt \\ &- \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T + \Phi(\Gamma_D^\varepsilon) + \Phi(\Gamma_N^\varepsilon) \\ &+ \Phi(C_\varepsilon^1) + \Phi(C_\varepsilon^1). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Avec  $\leq$  la notation suivante  $\Phi(U)$  avec  $U = \Gamma_D^\varepsilon$  ou,  $\Gamma_N^\varepsilon$ ,  $C_\varepsilon^1$ ,  $C_\varepsilon^1$  donnée par

$$\Phi(U) = \int_S^T f(E) \int_U \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt.$$

comme on a  $d \geq 1$ , alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx dt &\leq \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx dt \\ &- \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_S^T + \Phi(\Gamma_D^\varepsilon) + \\ &\Phi(\Gamma_N^\varepsilon) + \Phi(C_\varepsilon^1) + \Phi(C_\varepsilon^1). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

■

La stratégie sera maintenant de passer à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans (3.4.7). La principale difficulté est due aux termes  $\Phi(C_\varepsilon^i)$  pour  $i = 1, 2$  dans (3.4.7). Dans l'étape suivante, nous allons passer à la limite dans (3.4.7) proche des points singuliers.

**Étape 3: passage à la limite au voisinage de  $S_i$  sur  $C_\varepsilon^i$ , pour  $i = 1, 2$ :**

**Proposition 3.4.2** *Sous les hypothèses du Lemme 3.4.1, soit  $u$  la solution de (2.1.1) pour  $(u^0, u^1) \in D(A)$ ,  $E$  son énergie et  $f$  définie comme dans (3.1.1), lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a*

$$\Phi(C_\varepsilon^1) \rightarrow \frac{\pi a}{8} m \cdot \tau(S_1) \int_S^T f(E) (c_{1s}(t))^2 dt, \quad (3.4.8)$$

$$\Phi(C_\varepsilon^2) \rightarrow -\frac{\pi a}{8} m \cdot \tau(S_2) \int_S^T f(E) (c_{2s}(t))^2 dt, \quad (3.4.9)$$

où  $c_{is}(t)$ ,  $i = 1, 2$  sont donnés en (2.1.5).

**Preuve.** Considérons les termes d'intégrale sur la frontière sur  $C_\varepsilon^i$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit pour avoir  $\chi_i = 1$  sur  $C_\varepsilon^i$ , (2.1.5) devient

$$u = u_R + c_{is}(t) \varphi_s \quad i = 1, 2 \quad (3.4.10)$$

où la fonction singulière  $\varphi_s$  est définie par

$$\varphi_s(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & \text{dans } B(S_1, \varepsilon) \\ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} & \text{dans } B(S_2, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.4.11)$$

En utilisant la densité de  $C^1(\overline{\Omega})$  dans  $H^2(\Omega)$ , on peut supposer que  $u_R \in C^1(\overline{\Omega})$ . Cela implique que pour tout  $t \in [0, +\infty)$ , on a

$$u_R(t, \cdot) = O(1), \quad |\nabla u_R(t, \cdot)| = O(1) \quad \text{in } \overline{\Omega}. \quad (3.4.12)$$

D'autre part, grâce à la définition de  $\varphi_s$ , on a

$$\varphi_s = O(\sqrt{r}), \quad |\nabla \varphi_s| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (3.4.13)$$

En combinant (3.4.10), (3.4.12) et (3.4.13) on en déduit que pour presque tout  $t \in [0, +\infty)$

$$u(t, \cdot) = O(1), \quad |\nabla u(t, \cdot)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (3.4.14)$$

Nous considérons maintenant  $\Phi(C_\varepsilon^1)$  définie dans (3.1.4), pour estimer le terme associé dans (3.4.1). On procède comme suit

$$\begin{aligned} \Phi(C_\varepsilon^1) &= \int_{C_\varepsilon^1} \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma \\ &= \int_{C_\varepsilon^1} \left( \frac{\partial u_R}{\partial \eta} + c_{1s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \right) \times \left( m \cdot (\nabla u_R + c_{1s} \nabla \varphi_s) + \frac{1}{2} (u_R + c_{1s} \varphi_s) \right) \\ &\quad + \frac{m \cdot \eta}{2} [((u_R)_t + (c_{1s})_t \varphi_s)^2 - (\nabla u_R + c_{1s} \nabla \varphi_s)^2] d\sigma. \end{aligned}$$

La forme quadratique  $\Phi(C_\varepsilon^1)$  peut être écrite comme

$$\Phi(C_\varepsilon^1) = \tilde{I}_\varepsilon(u_R) + \tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s) + \tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) + \tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R), \quad (3.4.15)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\varepsilon(v) &= \int_{C_\varepsilon^1} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla v + \frac{1}{2}v \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|(v)_t|^2 - |\nabla v|^2) d\sigma, \\ \tilde{J}_\varepsilon(w, z) &= \int_{C_\varepsilon^1} \left[ c_{1s} \frac{\partial w}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla z + \frac{1}{2}z \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} ((c_{1s})_t w z_t - c_{1s} \nabla w \nabla z) \right] d\sigma. \end{aligned}$$

On commence par calculer  $\tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s)$  et  $\tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R)$ . Au début

$$\tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) = \int_{C_\varepsilon^1} \left[ c_{1s} \frac{\partial u_R}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2}\varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} ((c_{1s})_t \varphi_s (u_R)_t - c_{1s} \nabla \varphi_s \cdot \nabla u_R) \right] d\sigma.$$

De (3.4.13), on a dans le voisinage de  $C_\varepsilon^1$

$$\varphi_s = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad |\nabla \varphi_s| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(u_R, \varphi_s) = 0. \quad (3.4.16)$$

De même, on prouve que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{J}_\varepsilon(\varphi_s, u_R) = 0. \quad (3.4.17)$$

Soit à présent

$$\tilde{I}_\varepsilon(u_R) = \int_{C_\varepsilon^1} \frac{\partial u_R}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla u_R + \frac{1}{2}u_R \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} (|(u_R)_t|^2 - |\nabla u_R|^2) d\sigma.$$

En utilisant (3.4.12), nous avons

$$\left| \tilde{I}_\varepsilon(u_R) \right| \leq c \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon d\theta.$$

(Voir figure 3.1.2 ). par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \tilde{I}_\varepsilon(u_R) \right| = 0. \quad (3.4.18)$$

Maintenant, soit  $\tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s)$  au voisinage de  $S_1$ ,  $\varphi_s = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} = -\frac{\partial \varphi_s}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta}, \\ |\nabla \varphi_s|^2 = \frac{1}{4r}. \end{array} \right.$$

Au point  $S_i$ , les coordonnées locales sont définies de telle sorte que le demi-axe  $OX$  soit tangent à  $\Gamma$  dans le sens positif et que le demi-axe  $OY$  rentre dans  $\Omega$  (voir figure 3.1.2).

Comme  $m \cdot \eta = 0$  au point  $O$ , le point  $x_0$  a les coordonnées  $(L, 0)$  et  $m(x) = (x - L, y)^t$ . On a  $\vec{\eta} = (-\cos \theta, -\sin \theta)^t$  et  $\vec{\tau} = (-\sin \theta, \cos \theta)^t$ . par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} m = m_r \vec{\eta} + m_\theta \vec{\tau}, \\ m_r = -(x - L)(a \cos \theta + \alpha \sin \theta) - y(a \sin \theta - \alpha \cos \theta), \\ m_\theta = (x - L)(\alpha \cos \theta - a \sin \theta) + y(a \cos \theta + \alpha \sin \theta). \end{array} \right.$$

On a

$$\tilde{I}_\varepsilon(\varphi_s) = \int_{C_\varepsilon^1} (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) d\sigma.$$

On pose

$$q = (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right),$$

on calcule  $q$  sur  $C_\varepsilon^1$  comme suit.

$$\begin{aligned}
q &= (c_{1s})^2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \left( m \cdot \nabla \varphi_s + \frac{1}{2} \varphi_s \right) + \frac{m \cdot \eta}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) \\
&= (c_{1s})^2 \left( m_r \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} m_\theta \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - \frac{1}{2} \varphi_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right) + \frac{m_r}{2} \left( (c_{1s})_t^2 |\varphi_s|^2 - (c_{1s})^2 |\nabla \varphi_s|^2 \right) \\
&= (c_{1s})^2 \left( \frac{1}{4r} m_r \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4r} m_\theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{m_r}{2} \left( (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4r} \right) \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{4r} \left( m_r \sin^2 \frac{\theta}{2} - m_\theta \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(c_{1s})^2}{8r} m_r - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{4r} \left( m_r \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) - m_\theta \frac{1}{2} \sin \theta \right) - \frac{(c_{1s})^2}{8r} m_r - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r - m_r \cos \theta - m_\theta \sin \theta - m_r) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r - m_r \cos \theta - m_\theta \sin \theta - m_r) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{8r} (m_r \cos \theta + m_\theta \sin \theta) - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{(c_{1s})^2}{8r} \left[ \begin{aligned} &(- (x - L) (a \cos \theta + \alpha \sin \theta) - y (a \sin \theta - \alpha \cos \theta)) \cos \theta + \\ &((x - L) (\alpha \cos \theta - a \sin \theta) + y (a \cos \theta + \alpha \sin \theta)) \sin \theta \end{aligned} \right] \\
&\quad - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= -\frac{(c_{1s})^2}{8r} [-a(x - L) + \alpha y] - \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 r \sin^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_{C_\varepsilon^1} q d\sigma = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} -\varepsilon \frac{(c_{1s})^2}{8\varepsilon} [-a(\varepsilon \cos \theta - L) + \varepsilon \alpha \sin \theta] - \varepsilon \frac{(c_{1s})^2}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_r}{2} (c_{1s})_t^2 \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}(\varphi_s) &= \int_0^\pi \frac{(c_{1s})^2}{8} (-La) d\theta \\
&= -La \frac{(c_{1s})^2 \pi}{8}.
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

insérons (3.4.16), (3.4.17), (3.4.18) et (3.4.19) dans (3.4.15) on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(C_\varepsilon^1) = -La \frac{(c_{1s})^2 \pi}{8}.$$

On procède de la même façon au point  $S_2$ . On aura maintenant  $\varphi_s$  donné par

$$\varphi_s = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}.$$

En effectuant une analyse similaire, on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(C_\varepsilon^2) = La \frac{(c_{2s})^2 \pi}{8}.$$

Enfin, remarquant que grâce à notre notation précédente  $(m \cdot \tau)(S_i)$  est égale à  $-L$  pour  $i = 1, 2$ , qui est l'abscisse de  $x_0$  dans les coordonnées locales attachées à  $S_i$ , on récupère (3.1.9), et (3.1.10), ce qui conclut la preuve. ■

**Étape 4: passage à la limite dans (3.1.3) en dehors des points singuliers:**

Ici la preuve se fait de la même façon que la section précédente, on aura les convergences suivantes, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dxdt &\rightarrow \frac{1}{2} \int_S^T f(E) \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dxdt, \\ \left[ f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dx \right]_T^S + \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t M u dxdt &\rightarrow \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_T^S + \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dxdt. \\ \int_{\Gamma_N^\varepsilon} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma &\rightarrow \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma \\ \int_{\Gamma_D^\varepsilon} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &\rightarrow \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma, \end{aligned}$$

On conclut la démonstration du lemme 3.4.1

$$\begin{aligned} \int_S^T E f(E) &\leq \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega} u_t M u dxdt - \left[ f(E) \int_{\Omega} u_t M u dx \right]_S^T + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_D} \frac{m \cdot \nu}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \\ &\quad + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \left( m \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m \cdot \nu}{2} (|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \right] d\sigma dt \\ &\quad + \frac{\pi a}{8} m \cdot \tau(S_1) \int_S^T f(E) (c_{1s}(t))^2 dt - \frac{\pi a}{8} m \cdot \tau(S_2) \int_S^T f(E) (c_{2s}(t))^2 dt. \end{aligned}$$

### 3.4. Cas de multiplicateur retourné $m(x) = (aI + A)(x - x_0)$

---

Remarquez que dans la notation précédente  $(m \cdot \tau)(S_i)$  est égale à  $-L$ , qui est l'abscisse de  $x_0$  dans les coordonnées locales attachées à  $S_i$ , comme  $(m \cdot \tau)(S_1) \leq 0$  et  $(m \cdot \tau)(S_2) \geq 0$  le résultat est alors obtenu.

---

# Conclusion

**D**ans cette thèse on a montré comment étendre de manière autonome les résultats existants sur l'équation d'onde amortie limite au cas des hypothèses générales de croissance sur la fonction d'amortissement. Pour cela, nous combinons la méthode de Grisvard (et les travaux ultérieurs de [36, 47, 20]) et la méthode de convexité optimale du premier auteur [2, 3] (voir aussi [1]). Nous présentons la méthodologie générale pour combiner les deux constructions qui permettent de prouver d'un côté l'inégalité de Rellich sous des hypothèses géométriques appropriées et d'autre part de prouver l'inégalité globale pondérée globale (1.3.21) en utilisant la méthode de convexité optimale. Nous montrons que la présence des singularités n'affecte pas le taux de décroissance de l'énergie. Cela ouvre la voie à d'autres extensions, en utilisant les idées développées dans notre article, à des dimensions plus grandes ou égales à 3. Une autre question très difficile est liée aux aspects de discrétisation comme dans [7]. Il est bien connu, pour l'équation d'onde linéairement amortie, qu'il faut ajouter une viscosité numérique pour obtenir la désintégration uniforme de l'énergie. Nous nous référons à [8], et aussi à [58] pour une présentation très intéressante des différents aspects sur ce sujet et [24] et les références qui y figurent. Il existe une littérature très intéressante sur ce sujet qui est particulièrement intéressante dans les applications. Dans [7], les auteurs ont étudié les discrétisations des systèmes non linéaires localement amortis, y compris comme cas particuliers l'équation d'onde, ainsi que les équations de Schrödinger ou de plaques, qui sont uniformes par rapport aux paramètres de discrétisation. Il serait très intéressant d'étudier la discrétisation de l'équation d'onde singulièrement amortie. Pour cela, il faut d'abord comprendre comment étendre les résultats existants au cas des

opérateurs d'amortissement non bornés. Il faut alors déterminer si la présence de singularités et leur discrétisation a ou non les problèmes de discrétisation, et en particulier si, comme dans [7], une viscosité numérique, comme dans le cas linéaire, est suffisante pour dériver l'uniformité Énergie dans le cas singulier.

---

# Bibliographie

- [1] F. Alabau-Boussouira. A general formula for decay rates of nonlinear dissipative systems. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 338:35–40, 2004.
- [2] F. Alabau-Boussouira. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. *Appl. Math. Optim.*, 51(1):61–105, 2005.
- [3] F. Alabau-Boussouira. A unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems. *J. Differential Equations*, 248(6):1473–1517, 2010.
- [4] F. Alabau-Boussouira. Control of Partial Differential Equations. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, July 19 - 23, 2010.
- [5] F. Alabau-Boussouira. On some recent advances on stabilization for hyperbolic equations. Lecture Note in Mathematics/C.I.M.E. Foundation Subseries Control of Partial Differential Equations, Springer Verlag, 2048, 2012.
- [6] F. Alabau-Boussouira, T. Ali-Ziane, F. Arab and O. Zaïr. Boundary stabilisation of the wave equation in the presence of singularities. *International Journal of Control*, DOI: 10.1080/00207179.2017.1282624
- [7] F. Alabau-Boussouira, Y. Privat and E. Trélat. Nonlinear damped partial differential equations and their uniform discretizations. Preprint Hal hal-01162639 (2015) .
- [8] H.T. Banks, K. Ito, C. Wang, Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. Estimation and control of distributed parameter systems (Vorau, 1990), 1{33, Internat. Ser. Numer. Math., 100, Birkhauser, Basel, 1991.
- [9] V.Barbu, Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2010.
- [10] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optimization* 30, 1024–1065 (1992).

- 
- [11] R. Bey, J.-P. Lohéac, and M. Moussaoui. Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation. *J. Math. Pures Appl.* (9), 78(10):1043–1067, 1999.
- [12] H. Brézis. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. *Math. Stud.* 5 (1973).
- [13] R. Brossard and J.-P. Lohéac. Boundary stabilization of elastodynamic systems. I. Rellich-type relations for a problem in elasticity involving singularities. *Acta Appl. Math.*, 109(3):875–901, 2010.
- [14] R. Brossard and J.-P. Lohéac. Boundary stabilization of elastodynamic systems, II. The case of a linear feedback. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 16(3):355–375, 2010.
- [15] N. Burq, P. Gérard, Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math* 325, 749–752 (1997).
- [16] N. Burq, G. Lebeau, Mesures de défaut de compacité, application au système de Lamé. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 34, no. 6, 817–870 (2001).
- [17] N. Burq, M. Hitrik, Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains. *Math. Res. Lett.* 14, no. 1, 35–47 (2007).
- [18] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and I. Lasiecka. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping–source interaction. *Journal of Differential Equations*, 236 (2): 4076459, 2007.
- [19] G. Chen, A note on boundary stabilization of the wave equation. *SIAM J. Control Optimization* 19, 106–113 (1981).
- [20] P. Cornilleau, J.-P. Lohéac, and A. Osses. Nonlinear Neumann boundary stabilization of the wave equation using rotated multipliers. *J. Dyn. Control Syst.*, 16(2):163–188, 2010.
- [21] F. Conrad, B. Rao, Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback. *Asymptotic Anal.* 7, 159–177 (1993).
- [22] J.-M. Coron, Control and nonlinearity. *Mathematical surveys and monographs* 136, American mathematical society (2007).
- [23] I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problème variationnels*, Dunod, Paris, 1974.
- [24] S. Ervedoza, E. Zuazua, Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems. *J. Math. Pures Appl.* 91: 20{48, 2009.
- [25] X. Fu, J. Yong, X. Zhang, Exact controllability for multidimensional semilinear hyperbolic equations. *SIAM J. Control Optim.* 46, 1578–1614 (2007).
- [26] P. Grisvard. Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. *J. Math. Pures Appl.* (9), 68(2):215–259, 1989.

- 
- [27] P. Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, London, 1985.
- [28] P. Grisvard. Singularities in boundary value problems, Masson, Paris, 1992.
- [29] A. Haraux, Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Masson. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées Paris, Milan, Barcelone (1991).
- [30] A. Haraux, Nonlinear evolution equations—global behavior of solutions. Lecture Notes in Mathematics 841, Springer-Verlag Berlin-New York (1981).
- [31] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolutions linéaires périodiques. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique 78011, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1978.
- [32] A. Heibig and M. Moussaoui. Exact controllability of the wave equation for domains with slits and for mixed boundary conditions. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 2(3):367–386, 1996.
- [33] L. F. Ho, Observabilité frontière de l'équation des ondes. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math 302, 443–446 (1986).
- [34] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization The multiplier method*. RAM: Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.
- [35] V. Komornik. On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 14(2):153–164, 1993. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A 14 (1993), no. 3, 390.
- [36] V. Komornik and E. Zuazua. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 69(1):33–54, 1990.
- [37] J. Lagnese. Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation. *J. Differential Equations*, 50(2):163–182, 1983.
- [38] J. Lagnese, Decay of solutions to wave equations in a bounded region. *J. Diff. Eq.* 50, 163–182 (1983).
- [39] I. Lasiecka, Stabilization of waves and plate like equations with nonlinear dissipation on the boundary. *J. Diff. Eq.* 79, 340–381 (1989).
- [40] I. Lasiecka, D. Tataru Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. *Differential and Integral Equations* 8, 507–533 (1993).
- [41] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]. Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.
- [42] K. Liu, Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM J. Control Optimization* 35, 1574–1590 (1997).

- 
- [43] Z. Liu, S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems. Chapman Hall CRC Research Notes in Mathematics, 398. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL (1999).
- [44] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping. *Rev. Mat. Complut.* 12, 251–283 (1999).
- [45] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 4 (1999), 419–444 (1999).
- [46] P. Martinez, Stabilization for the wave equation with Neumann boundary condition by a locally distributed damping, *ESAIM Proc.* 8 (2000) 119–136.
- [47] M. Moussaoui. Singularités des solutions du problème mêlé, contrôlabilité exacte et stabilisation frontière. In *Élasticité, viscoélasticité et contrôle optimal (Lyon, 1995)*, volume 2 of *ESAIM Proc.*, pages 195–201 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1997.
- [48] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Math. Ann.* 305, 403–417 (1996).
- [49] M.-T. Niane and O. Seck. Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec conditions mêlées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(10):945–948, 1994.
- [50] S. Nicaise. Exact controllability of a pluridimensional coupled problem. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 5(1):91–135, 1992.
- [51] J.-P. Puel and E. Zuazua. Exact controllability for a model of a multidimensional flexible structure. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 123(2):323–344, 1993.
- [52] R. T. Rockafellar, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, *Pac. J. Math* 33 (1970), 209-216.
- [53] R. T. Rockafellar, Characterization of the subdifferentials of convex functions, *Pacific J. Math.* 17 (1966), 497-510.
- [54] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton University Press (1970).
- [55] M. L Williams, Surface stress singularities resulting from various boundary condition in angular corners of plates under bending, *Proc. First U.S. Nat. Cong. App. Mech*, 325-329 (1951).
- [56] W. H. Young, On classes of summable functions and their Fourier series. *Proc. Royal Soc. (A)* 87, 225–229 (1912).
- [57] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. *Comm. in P.D.E.* 15, 205–235 (1990).
- [58] E. Zuazua, Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Rev.* 47: 197–243, 2005.

- [59] E. Zuazua, Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear feedbacks. *SIAM J. Control Optimization* 28, 265–268 (1989).