

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari
Boumediene
Faculté des Mathématiques



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Modélisation Mathématique et Numérique

Par : FADIS Badreddine

Thème

Identification des systèmes oscillants et minimisation du nombre des
compartiments à mesurer dans les systèmes caténaux

Soutenu publiquement, le 09/11/2014. Devant le jury composé de :

MKHEMMOUDJ Ammar
M HEBRI Belkhaled
MTOUZALINE Arezki
M KHELIFASalim

Maître de conférence/A
Maître de conférence/A
Professeur
Maître de conférence/A

à l'USTHB
à l'USTHB
à l'USTHB
à l'USTHB

Président
Directeur de Mémoire
Examineur
Examineur

DEDICACES

Je dédie ce travail en premier lieu

*A mes chers parents pour leurs soutient et leur patience dont ils
ont fait preuve ces années.*

A toute ma famille

A mes Amis

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou loin

Remerciements

*Cette recherche a été réalisée à la faculté des Mathématique, université des sciences et technologie houari Boumediene. Sous la direction de Monsieur **HEBRI BELKHALED**. Je tien à lui exprimer toute ma gratitude pour m 'avoir encadré et soutenu dans mon travail, sans lequel cette recherche n 'aurait pu être réalisé. Je lui dois plus que des remerciements de circonstance. Pour son patient et sa gentillesse.*

*J'exprime mes remerciements à Monsieur **KHEMMOUDJ Ammar** professeur à l '**USTHB** qui m 'a fait l 'honneur d 'accepter de la présidence de notre jury. Je lui prie de bien vouloir respectueusement croire à mes sincères et profondes reconnaissances.*

*Je tiens remerciements à Monsieur **TOUGALINE Arezki** et Monsieur **KHELIFA Salim** qui mon fait l 'honneur d 'avoir Accepté de juger ce travail et participer à notre jury.*

Je remercie mes parents pour leur soutien pendant toutes ces Années

Je remercie mes Amis pour leur encouragement et leur soutien

Table des matières

1	Présentation d'un système à compartiments	8
1.1	Considération sur la modélisation	8
1.1.1	La notion de compartiments et de système comparti- mental	8
1.1.2	Le diagramme de connectivité et les coefficients d'échange	9
1.1.3	Les variables d'état	10
1.1.4	Construction du modèle mathématique	10
1.1.5	Un exemple typique du modèle compartimental	13
1.2	Analyse compartimentale	15
1.2.1	L'établissement du modèle	15
1.2.2	Le problème direct	16
1.2.3	Le problème inverse	16
1.2.4	L'identification de somme exponentielle	16
1.3	D'autres techniques de modélisation	17
1.3.1	Les modèles de connaissance	18
1.3.2	Les modèles de type " boîte noire "	18
1.3.3	Les modèles mixtes	19
2	Quelques notions de base	20
2.1	Rappels de quelques propriétés des valeurs propres et des vec- teurs propres	20
2.1.1	localisation des valeurs propres	21
2.2	Résolution d'un système différentiel linéaire homogène à coef- ficients constants	23
2.3	Systèmes compartimentaux	25
2.3.1	graphe sagittal	25
2.3.2	Propriétés des systèmes compartimentaux	26
2.3.3	Structures compartimentales particulières	27
2.3.4	Propriétés des valeurs propres	28

3	Identification des systèmes compartimentaux oscillants	31
3.1	Quelques rappels sur l'identification d'un système compartimental réel	31
3.1.1	Cas de système à n compartiments mesurés	32
3.1.2	Cas de système à $(n-1)$ compartiments mesurés	34
3.2	Identification d'un système compartimental oscillant	37
3.2.1	Cas de n compartiments mesurés	38
3.2.2	Cas de $n - 1$ compartiments mesurés	39
3.2.3	Complétude de $\bar{B}$	40
4	Identification de quelques systèmes compartimentaux particuliers	47
4.1	Systèmes à compartiments caténaux	47
4.1.1	caractérisation des matrices caténaux	48
4.1.2	Numérotation des compartiments d'un système caténaire	48
4.2	Identification d'un système caténaire	51
4.2.1	Identification d'un système caténaire à partir d'un seul compartiment mesuré	52
	Bibliographie	62

Table des figures

1.1	un compartiment	9
1.2	interaction entre 2 compartiments	9
1.3	exemple	14
2.1	système compartimental général	26
2.2	système n-cyclique unilatérale	29
3.1	Système compartimental à n compartiments	34
4.1	Système caténaire	49

Introduction

La biomathématique est une science qui relie la médecine et la biologie d'une part et les mathématiques de l'autre part, elle cherche à exprimer les phénomènes biologiques sous la forme d'un modèle mathématique ; théoriquement on peut donner un modèle à tous les phénomènes ou systèmes biologiques si on réussit à avoir suffisamment des données expérimentales fiables ; On doit seulement travailler en collaboration avec des médecins et biologistes pour que notre modèle soit toujours réel.

Un modèle est défini en biomathématique comme un système d'équations mathématique rendant comptant de toutes les données expérimentales connues du phénomène biologique étudié .Rappelons que le modèle permet de mieux comprendre le phénomène examiné et d'agir sur le système de façon optimale.

On peut distinguer deux grandes familles des modèles biomathématiques :

Les modèles de connaissance dont les équations sont obtenues en traduisant les lois physiques auxquelles obéit le système (conservation de la masse, de la quantité d'énergie, d'électricité $\dots$).

Les modèles de simulation qui ignorent les mécanismes physiques sous-jacents et proposent à priori des équations qu'il faudra ajuster (en identifiant des coefficients inconnus aux données expérimentales).

Il est clair que les modèles de connaissance sont les plus satisfaisants pour l'esprit car ils tiennent compte de la physico-chimie du système, ils exigent que le phénomène soit parfaitement connu et que les lois physiques auxquelles il obéit soient bien quantifiées ce qui est rarement réalisées ; cette condition nous oblige à être dans des situations intermédiaires entre les deux types de modélisation.

On remarque aussi dans plusieurs cas que pour le même phénomène il existe plusieurs modèles différents, ce qui nous amène à poser la question sur l'unicité du modèle, c'est un problème sans objet car tout modèle (d'un phénomène donné) rendant compte des données expérimentales est convenable, les modèles d'un même système se différencient car ils sont basés sur des approximations différentes. En pratique, on choisit souvent le modèle le plus

simple et le plus maniable. C'est -à- dire celui qui sera traduit par le système d'équations le plus facile à manipuler et à traiter. La seule contrainte à imposer au modèle est son utilité

Les recherches dans le domaine de la biomathématique permettent de développer plusieurs modèles parmi lesquels on cite :

- Effet d'une drogue sur l'organisme humain.
- Modèle d'hormones antagonistes.
- Echange gazeux au cours de la respiration.
- Modélisation de la marche humaine.

Pour modéliser un système biologique il existe plusieurs techniques qui sont des méthodes très générales et fort utiles, parmi lesquelles on cite : Les modèles de simulation pure, Les systèmes avec diffusion, convection -réaction et Les modèles compartimentaux.

La modélisation compartimentale est une technique largement utilisée dans divers domaines comme la biologie, l'épidémiologie, la dynamique des populations... , elle convient très bien aux systèmes de transformations chimiques dans *in vivo*. Les modèles à compartiments ont été avant tout compagnons de la méthode de traceurs notamment radioactif, ces derniers ont rendu possible les études des taux de transformation et des taux de renouvellement dans les systèmes biologiques. Bien que le terme compartiment a été utilisé pour la première fois par C.W Sheppard, 1948 , ce type de modélisation a été utilisée dans des travaux en physiologie en pharmacologie en biochimie depuis les années trente du siècle passé (A.R Benkhe et al 1935, T.Teorel 1937).

Dans l'analyse compartimentale on peut étudier deux problèmes principaux. Le premier c'est le problème direct qui consiste à étudier l'existence et l'unicité des variables (vecteur d'état $x(t)$), ce dernier a été abordé par la plupart des auteurs. Le deuxième est le problème inverse ou de l'identification, il consiste à déterminer de la structure des paramètres d'un modèle susceptible et de décrire des données issues d'une expérience entrée sortie effectuée sur le processus considéré.

Un système compartimental linéaire est régi par le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où A est la matrice des coefficients d'échange entre les compartiments, elle est appelée matrice compartimentale

Dans ce travail qui se compose de quatre chapitres, on s'intéresse à l'identification des coefficients d'échange dans un système compartimental linéaire à coefficients constants. Nous donnerons au **chapitre 1** les notions fondamentales sur la modélisation et l'analyse compartimentale ainsi qu'un aperçu sur d'autres techniques et modèles mathématiques utilisés en biologie.

Au **chapitre 2**, on présente un rappel sur des notions fondamentales d'algèbre et d'analyse concernant la résolution des systèmes différentiels à coefficients constants et une brève étude sur les propriétés des systèmes compartimentaux et des matrices associées.

Les **chapitres 3 et 4** sont considérés comme le noyau du travail présenté.

Dans le **chapitre 3**, on expose dans la première partie la méthode d'identification directe d'un système compartimental réel à partir de $n-1$ compartiments mesurés. Cette méthode se base sur les propriétés des matrices compartimentales et la condition initiale associée à notre système différentiel. Elle se compose de trois parties essentielles, la première est l'identification d'une somme d'exponentielles, la deuxième consiste à compléter la matrice dite "matrice des mesures partielles" et dans la dernière partie, on résout n systèmes, chaque système permet d'identifier une colonne de la matrice A . Dans la deuxième partie du **chapitre 3** on a généralisé la méthode précédente au cas des systèmes compartimentaux oscillants.

Dans le **chapitre 4**, on s'intéresse à l'étude des systèmes caténaire. Les systèmes caténaires présentent un cas particulier des systèmes compartimentaux réels, la forme particulière de la matrice compartimentale associée, nous a encouragés à essayer de minimiser le nombre des compartiments qu'on doit mesurer pour pouvoir identifier les coefficients d'échange.

La matrice compartimentale A associée à un système caténaire est en générale une matrice tridiagonale, dans le cas contraire une modification de la numérotation des compartiments permet d'obtenir la forme désirée, cette opération est interprétée algébriquement comme une permutation des lignes et des colonnes de la matrice compartimentale ce qui est équivalent à la multiplication de la matrice A par des matrices de permutation, dans le but de simplifier ces opérations et de bien choisir la nouvelle numérotation, un algorithme basé sur les caractéristiques des matrices caténaires est proposé.

La matrice caténaire est tridiagonale alors il y'a $3n - 2$ (n le nombre des compartiments) éléments qu'on doit identifier, en outre, en raison des propriétés des matrices compartimentales, le nombre des éléments à identifier est réduit à $2n - 2$ éléments pour les systèmes fermés et $2n - 1$ pour les systèmes ayant un seul compartiment qui fait un échange avec le milieu extérieur car les éléments de la diagonale seront calculés à partir des éléments de la même colonne. Plusieurs hypothèses ont été testées pour réduire le nombre des compartiments nécessaires pour identifier notre système. L'idée de se limiter que

sur les mesures effectuées sur le premier compartiment (compartiment principal) nous a permis de développer un algorithme pour l'identification de la matrice A dans le cas où les éléments à identifier sont tous non nuls.

Chapitre 1

Présentation d'un système à compartiments

Quel que soit le domaine dans lequel interviennent les modèles à compartiments, ils sont utilisés pour décrire le comportement dynamique d'une certaine entité. Elle constitue avec le processus au cours duquel elle subit des transformations ce que nous qualifions de système de transformation réel désigné généralement par S .

1.1 Considération sur la modélisation

1.1.1 La notion de compartiments et de système compartimental

Le système de transformation S peut être considéré comme un ensemble d'éléments qui interagissent entre eux et éventuellement avec l'extérieur. On peut regrouper ces éléments quand ils partagent des propriétés communes (caractéristique anatomiques, biologique, physiologiques ou autres). On peut caractériser ces propriétés par une certaine relation d'équivalence dont les classes sont alors ces groupes d'éléments qu'on appelle "compartiments". L'ensemble quotient de cette relation est appelé "système compartimental". En pratique, il convient assez souvent d'assimiler les compartiments à des espaces physiologiques ou des volumes d'organes ou de liquides. Par suite des interactions qu'elle subit, l'entité peut transiter dans un ou plusieurs compartiments ou aller vers l'environnement par excrétion. De sorte qu'entre deux compartiments il peut y avoir un échange unidirectionnel, bidirectionnel ou pas d'échange du tout.

1.1.2 Le diagramme de connectivité et les coefficients d'échange

Soit S un système de transformation auquel on associe n compartiments, où n désigne un entier naturel, on identifie un compartiment en lui associant un numéro i , on le représente de la manière suivante :

FIG. 1.1 – **un compartiment**

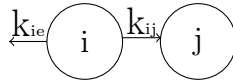


On pose : $I = \{1, 2, \dots, n\}$: et soit l'ensemble $C_0 = \{(i, j)/i \neq j, j \in I \cup \{e\}, i \in I\}$ des **couples ordonnés** tels que (i, j) appartient à C_0 si et seulement si, il y a transfert du compartiment i vers le compartiment j .

L'ensemble C_0 définit le diagramme de connectivité associé au système S en tant que modèle à compartiments dont on adoptera une représentation (possible) comme montre la figure 1.2. entre deux compartiments génériques i et j . L'existence d'un arc signifie l'existence d'une interaction dans ce sens et traduit l'appartenance de (i, j) à C_0 par exemple dans la figure 1.2 $(i, j) \in C_0$, mais $(j, i) \notin C_0$,

Une fois on associe à un système de transformation S , n compartiments avec des échanges établis entre eux et éventuellement avec l'extérieur, on fait correspondre au diagramme de connectivité ainsi défini des grandeurs via desquelles pourra être décrite l'évolution de S comme ci-dessous. Ces grandeurs permettent de formuler la nature des interactions entre les compartiments. On associe aux transformations de compartiment i vers le compartiment j le coefficient k_{ij} , ($i \neq j, i \in I$ et $j \in I \cup \{e\}$) appelé coefficients d'échange ou taux de transformation fractionnaire du compartiment i dans le compartiment j ($(i, j) \in I \times (I \cup \{e\}); i \neq j$) et k_{ie} est le taux d'excrétion fractionnaire du compartiment i vers l'extérieur .

FIG. 1.2 – **interaction entre 2 compartiments**



1.1.3 Les variables d'état

Selon la nature du processus et la technique utilisée pour étudier expérimentalement l'évolution de l'entité on est amené à faire correspondre à chacun des compartiments i une variable dépendant du temps[19], caractéristique de l'entité et susceptible d'être quantitativement. Ainsi pour i on peut être amené à étudier l'évolution de l'une des grandeurs suivantes :

1. $q_i(t)$ la quantité de la substance .
2. $c_i(t)$ La concentration de la substance.
3. $a_i(t)$ l'activité spécifique de Substance en cas de traceur.
4. $n_i(t)$ le nombre d'individus.

Quand on étudie l'une ou l'autre de ces grandeurs chaque compartiment i sera assimilé à une variable d'état dépendant du temps et qui sera le $i^{\text{ème}}$ compartiment d'un vecteur $X(t)$ de $\mathbb{R}^n$.

1.1.4 Construction du modèle mathématique

L'évolution de la structure compartimentale résulte de la variation au cours du temps de $X(t)$, c'est -à-dire des grandeurs $x_i(t)$ dans chaque compartiment i .

Il existe plusieurs hypothèses d'échange qui expriment cette évaluation , parmi lesquelles on peut noter les trois suivantes[17] :

L'hypothèse d'échange linéaire :[13][17] (dictée par la loi de Fick)(ou hypothèse de la cinématique du premier ordre) " le flux sortant du compartiment i vers le compartiment j est proportionnel à $x_i(t)$ de constante de proportionnalité k_{ij} "

L'hypothèse d'échange homographique :[15][17] (dictée par la loi de Michaelis-Menten)

" le flux sortant du compartiment i vers le compartiment j à l'instant t vaut

$$\frac{v_{ij}x_i(t)}{k_{ij} + x_i(t)}$$

Où v_{ij} et k_{ij} sont les constantes de Michaelis-Mention et $x_i(t)$ la quantité de substance du compartiment i

L'hypothèse d'échange polynomial d'ordre $(\alpha + \beta)$:[16][17].

Le flux sortant du compartiment i vers le compartiment j est proportionnel à $x_i^\alpha(t)x_j^\beta(t)$ de constante de proportionnalité k_{ij}

Ces hypothèses permettent de regrouper les systèmes compartimentaux en deux classes :

- Les systèmes **compartimentaux linéaires** qui sont caractérisés par l'hypothèse d'échange linéaire.
- Les systèmes compartimentaux **non linéaires**.

Pour un système de transformation S on s'appuie sur le principe fondamental de ” **conservation de la masse**” dans le système en faisant état du bilan des masses des entrées-sorties pour chaque compartiment i de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{Taux de variation} \\ \text{instantane} \\ \text{de } x_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Flux entrant} \\ \text{dans le} \\ \text{compartiment } i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Flux sortant} \\ \text{du} \\ \text{compartiment } i \end{pmatrix}.$$

C'est- à- dire en écrivant les équations de balance : ainsi les différentes hypothèses d'échange émises ci-dessous conduisent elles, selon le cas aux systèmes différentiels suivants :

cas d'un système linéaire : selon l'hypothèse d'échange linéaire, le taux de variation instantanée est exprimé par l'équation :

$$x \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n k_{ji} x_j(t), \quad i \in \mathbf{I} \quad (1.1)$$

où on a noté :

$$k_{ii} = -k_{ie} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij}.$$

De sorte que le flux total de la matière quittant le compartiment i à l'instant t est $k_{ii}x_i(t)$, il est compté négativement pour exprimer une **perte** de la matière ou de concentration, selon le cas du compartiment i . Ce système différentiel peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t). \quad (1.2)$$

Où $A = a_{ij}$ est la matrice définie par : $a_{ij} = k_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

en tenant compte du fait que le système occupe un état initial

$$X_0^T = (x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0)),$$

correspondant à la quantité de substance présente à l'instant initial dans chaque compartiment i ; le système compartimental linéaire est alors régi par le système différentiel linéaire avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Cas des systèmes non linéaires de type homographique : dans ce cas la variation au cours du temps de $x_i(t)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{V_{ji}}{k_{ji} + x_j(t)} x_j(t) - \sum_{j=1}^n \frac{V_{ij}}{k_{ij} + x_i(t)} x_i(t).$$

ou encore :

$$X'(t) = F(X(t))$$

où $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes valent :

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{V_{ji}}{k_{ji} + x_j} x_j - \sum_{j=1}^n \frac{V_{ij}}{k_{ij} + x_i} x_i, i \in I$$

L'état initial du système fournit le système différentiel de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Cas des systèmes non linéaires de type polynomial d'ordre $(\alpha + \beta)$: la variation de $x_i(t)$ au cours du temps est présentée par l'équation :

$$X'_i(t) = \sum_{j=1}^n k_{ji} x_j^\alpha(t) x_i^\beta(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i^\alpha(t) x_j^\beta(t) - k_{ie} x_i^\alpha(t), i \in \mathbf{I}$$

ou encore :

$$X'(t) = F(X(t)),$$

où $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes valent :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n k_{ji} x_j^\alpha(t) x_i^\beta(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i^\alpha(t) x_j^\beta(t) - k_{ie} x_i^\alpha(t), i \in \mathbf{I}$$

Considérations physiques sur les éléments du modèle

Sur les éléments de la matrice A il existe un certain nombre de contraintes qui découlent de leur interprétation physique [19] :

1. $x_i(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[\quad \forall i \in I.$
2. $k_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in I \cup \{0\} \quad i \neq j.$
3. $k_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} - k_{ie} \quad ; k_{ii} \leq 0.$
4. $\sum_{j=1}^n k_{ij} = -k_{ie}$

Définition 1.1 [17] Toute matrice $A = (a_{ij})$ telle que $a_{ij} = k_{ji}$ et vérifiant les propriétés 2 et 3 est appelée matrice compartimentale.

1.1.5 Un exemple typique du modèle compartimental

Présentation du phénomène étudié

La glande thyroïde a la propriété de concentrer l'iode de façon sélective et de l'utiliser comme constituant principal de ses hormones, le problème posé est de préciser la répartition de l'iode dans l'organisme par la détermination de certains coefficients d'échange[5], pour cela on injecte une certaine quantité d'iode radioactif et on mesure la fixation de l'iode au niveau du cou. Les phénomènes d'échanges et de métabolisme de l'iode peuvent se résumer de la manière suivante :

1. Une partie de l'iode inorganique du sang passe dans la glande thyroïde où elle se transforme en iode organique (hormones) avant de retourner dans le sang circulant.

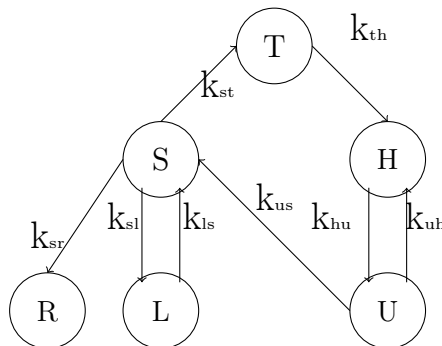
2. Le sang libère partiellement l'iode dans les liquides interstitiels où une partie de l'iode organique reprendra la forme inorganique (cette phase correspond à l'utilisation des hormones). La quantité totale de l'iode diffusée retourne ensuite dans le sang circulant.
3. L'iode inorganique du sang est éliminé partiellement par les voies rénales.
4. Les phénomènes de sécrétion gastrique et de transit intestinal de l'iode inorganique sont négligés pour l'étude.

Description du modèle compartimental

Compte tenu des échanges décrits précédemment la quantité d'iode radioactif injectée se répartit au cours du temps dans divers compartiments :

- La glande thyroïde représentée par T
- Le sang, décomposé en deux compartiments :
 - S (correspondant à l'iode inorganique)
 - H (correspondant à l'iode organique)
- Les liquides interstitiels représentés également par deux compartiments
 - L pour l'iode inorganique
 - U pour l'iode organique
- Les voies rénales représentées par le compartiment R

FIG. 1.3 – exemple



Formulation mathématique

Les quantités de l'iode radioactif contenues dans les différents compartiments sont des fonctions de temps représentées par un ensemble de fonction indicées par les lettres attribuées aux divers compartiments auxquelles elles

sont respectivement associées. En négligeant le décalage dans le temps entre l'entrée sous forme inorganique et la sortie sous forme organique de l'iode de la glande thyroïde le système différentiel décrivant les échanges peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{dx_s(t)}{dt} &= -(k_{sl} + k_{sr} + k_{st})x_s + k_{ls}x_l + k_{us}x_u \\ \frac{dx_l(t)}{dt} &= k_{sl}x_s - k_{ls}x_l \\ \frac{dx_t(t)}{dt} &= k_{st}x_s - k_{th}x_t \\ \frac{dx_h(t)}{dt} &= k_{th}x_t - k_{hu}x_h + k_{uh}x_u \\ \frac{dx_u(t)}{dt} &= k_{hu}x_h - (k_{uh} + k_{us})x_u \\ \frac{dx_r(t)}{dt} &= k_{sr}x_s\end{aligned}$$

En prenant comme unité de quantité la dose injectée, les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{aligned}x_s(0) &= 1 \\ x_l(0) &= x_t(0) = x_h(0) = x_u(0) = x_r(0) = 0\end{aligned}$$

1.2 Analyse compartimentale

C'est une partie de la théorie générale de modélisation mathématique qui étudie les systèmes à compartiments, son objectif est de développer des modèles mathématiques simples pour des phénomènes particuliers qui permettent de faire une étude fiable sur le comportement et le fonctionnement du phénomène étudié . Elle s'effectue en trois phases principales : L'établissement du modèle, le problème direct et le problème inverse.

1.2.1 L'établissement du modèle

La spécification du modèle est la phase la plus importante elle est basée au plan quantitatif comme au plan qualificatif sur toute connaissance théorique et expérimentale que l'on peut avoir sur le système étudié. Elle consiste à déterminer le nombre de compartiments et les interconnexions possibles entre ces compartiments, cette dernière est fondée sur une analyse théorique dans laquelle on étudie le comportement dynamique du processus S en tenant compte de sa nature et des phénomènes dont il est siège. La mise des équations de ces dernières se fait à partir des lois physiques, chimiques appropriées à la nature du système. Une deuxième étude expérimentale est

nécessaire pour pouvoir déterminer la structure finale du modèle (linéaire, non linéaire) et d'affecter des valeurs numériques à tous ou à une partie des paramètres du modèle.

1.2.2 Le problème direct

En analyse compartimentale le problème direct consiste à étudier :

- L'existence et l'unicité de $x(t)$.
- Exprimer $x(t)$.
- Analyser le comportement de $x(t)$: stabilité périodicité et le comportement asymptotique.

Selon la nature du système on est amené à étudier l'un des deux problèmes directs suivants :

Trouver une fonction

$$X : [0, +\infty[\rightarrow R^n$$

telle que

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{Plin})$$

ou

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{Pnlin})$$

Le problème linéaire (*Plin*) admet toujours une solution unique. Dans le cas non linéaire l'étude de l'existence et l'unicité de la solution suffit pour envisager d'identifier (par approximation) le système ; Une méthode de linéarisation nous ramène au cas précédent.

1.2.3 Le problème inverse

Le problème d'identification des coefficients d'échange est un problème inverse. Pour traiter ce type de problème on prend des données expérimentales (observation de certains compartiments du système) dans le but de déterminer la matrice A du système (*Plin*).

1.2.4 L'identification de somme exponentielle

L'identification de somme exponentielle est une étape très importante pour résoudre le problème inverse de l'analyse compartimentale. Dans la littérature concernant ce problème, il existe différentes méthodes pour sa résolution. Nous citons les principales méthodes : la méthode asymptotique, la méthode de fourier, une méthode de type spectral, la méthode de Prony,

la méthode des moments, la méthode des moindres carrées non-linéaires et moindres carrées non linéaires avec une méthode d'optimisation réductrice. Cette dernière a été développée par Le professeur Y. CHERRUAULT elle consiste à appliquer une technique d'optimisation sur la fonctionnelle J définie par :

$$j(\beta_1^1, \dots, \beta_1^n, \beta_2^1, \dots, \beta_{n-1}^1, \beta_{n-1}^n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_i(t_j) - \sum_{k=1}^n \beta_k^i e^{\lambda_k t_j})^2 \right) \quad (1.4)$$

on suppose que la forme de la solution de (P_{lin}) est $x(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k e^{\lambda_k t}$

Certains chercheurs considèrent n comme une inconnue autrement dit que la structure de système compartimental n'est pas connue. Puisque n est en relation directe avec le nombre des compartiments. Ceci montre qu'on peut avoir besoin de résoudre le problème inverse avant l'étape de l'établissement du modèle. Ce problème est classé comme un problème mal posé par plusieurs auteurs. Cette propriété est due à l'extrême sensibilité des paramètres n, β_k et λ_k par rapport aux petites perturbations sur les valeurs de x_t . Mathématiquement on pose le problème suivant :

Soit V_e l'espace vectoriel des fonctions sommes d'exponentielles

$$V_e = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}; f(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k e^{-\lambda_k t}, n \in \mathbb{N}, \beta_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, k = 1, \dots, n\}$$

Connaissant les valeurs $f(t)$ d'une fonction $f \in V_e$ sur tout l'intervalle $[0, T]$, il s'agit de déterminer les paramètres $n \in \mathbb{N}, \beta_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$

, $k = 1, \dots, n$ correspondants. La solution de ce problème existe, car f est supposée dans V_e . Elle est unique, à cause de l'hypothèse supplémentaire assurant que f est donnée sur tout l'intervalle $[0, T]$ et du fait que la famille $\{f_\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}; f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}, \lambda \geq 0\}$ est libre.

La méthode développée par Ali Kheffif nommée méthode de fenêtrage a permis de trouver une solution pour le problème posé.

1.3 D'autres techniques de modélisation

Comme indiqué dans l'introduction il existe plusieurs techniques pour modéliser un système biologique. Ces techniques sont regroupées en trois familles les modèles stochastiques, déterministes et les modèles mixtes.

Les modèles déterministes peuvent être regroupés en deux catégories.

1.3.1 Les modèles de connaissance

On peut obtenir un modèle par la traduction mathématique des lois physiques auxquelles obéit le système étudié si celles-ci sont connues. On aboutit à ce qu'on appelle un modèle de connaissance. Les modèles compartimentaux sont considérés comme des modèles de connaissance.

1.3.2 Les modèles de type " boîte noire "

On a des situations pour lesquelles le système étudié est très peu ou pas du tout connu quant aux lois physiques auxquelles il obéit ; par contre on dispose de données expérimentales ou statistiques concernant le phénomène à modéliser. On relie alors ces paramètres entre eux par un système des équations posées ; c'est l'expérience du modélisateur et les analogies qu'il fera avec des systèmes modélisés dans la littérature qui le conditionneront pour proposer tel type de modèle ou tel autre. Les modèles ainsi obtenus s'appellent modèles de simulation ou modèles d'action ou encore modèles de type " boîte noire ". Les cas les plus fréquents sont les suivants : Si le phénomène étudié ne dépend que du temps et s'il est linéaire, on a :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_{10} + a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n0} + a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où les $x_i(t)$ sont des paramètres (quantité, concentration, pressions etc...). La difficulté d'un tel modèle se situe au niveau de l'identification des coefficients a_{ij} qui n'ont aucune signification physique. Si par contre, le phénomène est dépendant du temps mais non linéaire alors on a le système suivant :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour lequel il nous faut identifier les fonctions f_i au moins sous une forme mathématique particulière à partir des données sur les $x_i(t)$. On peut avoir à considérer des problèmes encore plus compliqués qui imposeront des équations plus complexes que celles déjà vues. En supposant, par exemple, que l'état à l'instant t_i ne dépend que du passé $t \leq t_1$ et du présent $t = t_1$, on obtient un modèle représenté par une équation intégrale telle que.

$$x_i(t) = \int_0^t f(t, x_1(u), \dots, x_n(u))K(t, x_1(u), \dots, x_n(u))du \quad i = 1, \dots, n.$$

Les modèles de simulation présentent un inconvénient par rapport aux modèles de connaissance en ce sens que certains paramètres des équations sont inconnus. Pour que le modèle soit défini sans ambiguïté, il nous faut calculer ces paramètres : on est alors confronté à un problème d'identification. Dans la littérature, nous disposons de modèles standards que l'on peut utiliser pour approcher certains phénomènes généraux tels que :

Les modèles de LOKTA-VOLTERRA

Ces modèles ont été utilisés pour modéliser l'évolution au cours du temps de deux populations en compétition appelées proies et prédateurs dans un écosystème ; on les appelle quelquefois "modèles proies-prédateurs" la formule générale est :

$$\left(\frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t)(r_i - \sum_{j=1}^p d_{ij}N_j(t)) \quad i = 1, \dots, p \right)$$

où N_i est le nombre d'individus de l'espèce i on a $N_i(0) = \alpha_i$ constantes connues.

p est le nombre d'espèces en compétition.

les r_i sont le taux de croissance spécifique de l'espèce i

les d_{ij} sont les coefficients qui mesurent l'ampleur avec laquelle la présence de l'espèce j affecte la survie de l'espèce i .

1.3.3 Les modèles mixtes

Comme l'indique son nom les modèles mixtes représentent une troisième famille de modélisation qui s'installe entre les modèles déterministes et les modèles stochastiques ; certaines variables sont reliés par des relations des probabilités, nous pouvons citer comme exemple, le modèle de MARCHUK en immunologie, qui décrit l'évolution d'une maladie infectieuse. Il peut s'appliquer à un large groupe de patients sans avoir besoin de décrire les particularités de la dynamique de la maladie. Il prend en compte les réactions de défense de l'organisme qui sont traduites par des équations mathématiques.

Chapitre 2

Quelques notions de base

L'étude du problème inverse des systèmes compartimentaux nécessitent la connaissance de certaines notions de base d'algèbre et d'analyse, ainsi que des propriétés des systèmes compartimentaux et des matrices associées qu'on introduit dans ce chapitre.

2.1 Rappels de quelques propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E , B une base de E et $A = M(f, B, B) = (a_{ij})$.

Définition 2.1 [24]

On appelle valeur propre de f tout élément λ de K (K désigne un corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel que : $(f - \lambda I)$ ne soit pas injectif.

On appelle valeur propre de A tout élément λ de K tel que $\det(A - \lambda I) = 0$, autrement dit tel que $(A - \lambda I)$ ne soit pas inversible.

Proposition 2.1 [26]

soit $A_{n \times n}$ une matrice carrée à coefficients réels alors :

- A admet au moins une valeur propre réelle si n est impair.*
- si la matrice A admet une valeur propre complexe λ alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A*
- si V est un vecteur propre correspondant à une valeur propre complexe λ alors $\bar{V}$ est un vecteur propre correspondant à $\bar{\lambda}$*

Définition 2.2 [19] La matrice A est dite à diagonale principale dominante par rapport aux lignes si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| ; \forall i, 1 \leq i \leq n$$

La matrice A est dite à diagonale principale dominante par rapport aux colonnes si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| ; i = 1, \dots, n$$

Si les inégalités sont strictes, la diagonale principale est dite strictement dominante.

On dit qu'une matrice A d'ordre n est à diagonale dominante partiellement stricte si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in \mathbb{I} / |a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Théorème 2.1 :[19] Toute $n \times n$ matrice à diagonale strictement dominante est non singulière.

2.1.1 localisation des valeurs propres

Soit $A = a_{ij}$ une matrice carrée d'ordre n on note

$$L_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| ; C_i = \sum_{j=1}^n |a_{ji}| ; i = 1, \dots, n$$

$$L = \max L_i ; l = \min L_i ; i = 1, \dots, n$$

$$C = \max C_i ; c = \min C_i ; i = 1, \dots, n$$

Théorème 2.2 [19] (théorème de Gershgorin) Toute valeur propre de A est située dans au moins un des disques

$$D_i = \{z; |z - a_{ii}| \leq C_i\} ; i = 1, \dots, n.$$

$$D'_i = \{z; |z - a_{ii}| \leq L_i\} ; i = 1, \dots, n.$$

Démonstration : si λ est une valeur propre de A il existe des scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda x_r = \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j \quad r = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

soit $|x_i| = \max |x_r| \quad r = 1, \dots, n$

on a $|x_i| > 0$ ce que nous permet d'écrire l'équation 2.1 sous la forme :

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j$$

par suite

$$|\lambda - a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) |x_i|$$

soit $|\lambda - a_{ii}| |x_i| \leq L_i |x_i| \Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq L_i$

D'où $\lambda \in D'_i$

En fait toute valeur propre λ est telle que $\lambda \in \cup D'_i$. sachant que A et A' ont le même spectre, on opère avec A' pour montrer qu'on a aussi $\lambda \in \cup D_i$

Théorème 2.3 [19] Soit A une matrice à coefficients réelles. s'il existe un entier r , $1 \leq r \leq n$ tel que :

$$|a_{rr} - a_{ii}| > C_i + C_r \quad ; i = 1, \dots, n \quad r \neq i$$

Alors le disque D_r contient une et une seule valeur propre de A qui est de plus réelle.

Théorème 2.4 [19] Pour toute $n \times n$ matrice réelle A si :

$$|a_{jj} - a_{ii}| > C_i + C_j \quad ; j, i = 1, \dots, n$$

Alors toutes les valeurs propres de A sont réelles et simples.

Autrement dit, toute matrice carrée réelle dont les disques de Gershgorin D_i sont deux à deux disjoints, a toutes ses valeurs propres réelles et simples (chaque disque contient une et une seule valeur propre qui est de plus réelle)

Remarque 2.1 *il n'est pas vrai que tout disque de Gershgorin doive contenir une valeur propre de A . Ainsi pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ D_2 ne contient pas de valeurs propres de A cependant, toute réunion de disques de Gershgorine disjointe des autres disques doit contenir une valeur propre de A .*

pour A arbitraire, si D_r est disjoint avec les $n-1$ autres disques, il contient une et une seule valeur propre de A .

2.2 Résolution d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}'$ un vecteur de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

On considère le système linéaire homogène à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Ax(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Cas où A est diagonalisable en $\mathbb{R}$

On note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A (avec $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$) et $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble des solutions de 2.2 est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n . La solution est donnée par :

$$X(t) = \sum_{j=1}^n C_j V_j e^{\lambda_j t}$$

Cas où A est diagonalisable en $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Si la matrice A admet $2p$ ($2p < n$) valeurs propres complexe 2 à 2 conjuguées, et $n - 2p$ valeurs propres réelles c'est à dire :

$$\begin{cases} \lambda_j = a_j + ib_j \text{ avec } a_j, b_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, \dots, p \\ \lambda_j = \overline{\lambda_{j-p}} = a_{j-p} - ib_{j-p} \text{ avec } a_{j-p}, b_{j-p} \in \mathbb{R} \quad j = p+1, \dots, 2p \\ \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 2p+1, \dots, n \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\begin{cases} V_j = U_j + iW_j \text{ avec } U_j, W_j \in \mathbb{R}^n \quad j = 1, \dots, p \\ V_j = \overline{V_{j-p}} = U_{j-p} - iW_{j-p} \text{ avec } U_{j-p}, W_{j-p} \in \mathbb{R}^n \quad j = p+1, \dots, 2p \\ V_j \in \mathbb{R}^n \text{ pour } j = 2p+1, \dots, n \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions :

$$S = \{Re(V_1 e^{\lambda_1 t}), Im(V_1 e^{\lambda_1 t}), \dots, Re(V_p e^{\lambda_p t}), Im(V_p e^{\lambda_p t}), V_{2p+1} e^{\lambda_{2p+1} t}, \dots, V_n e^{\lambda_n t}\}$$

est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.

La solution est donnée par :

$$X(t) = \sum_{j=1}^p C_j Re(V_j e^{\lambda_j t}) + C'_{j+p} Im(V_j e^{\lambda_j t}) + \sum_{j=2p+1}^n C_j V_j e^{\lambda_j t}$$

sachant que : $Re(V_j e^{\lambda_j t}) = (U_j \cos(b_j t) - W_j \sin(b_j t)) e^{a_j t}$

et que :

$$Im(V_j e^{\lambda_j t}) = (U_j \sin(b_j t) + W_j \cos(b_j t)) e^{a_j t}$$

Donc la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_{j=1}^p C_j (U_j \cos(b_j t) - W_j \sin(b_j t)) e^{a_j t} + C'_{j+p} (U_j \sin(b_j t) + W_j \cos(b_j t)) e^{a_j t} + \sum_{j=2p+1}^n C_j V_j e^{\lambda_j t}$$

$$X(t) = \sum_{j=1}^p (C_j U_j + C'_{j+p} W_j) \cos(b_j t) e^{a_j t} + (C'_{j+p} U_j - C_j W_j) \sin(b_j t) e^{a_j t} + \sum_{j=2p+1}^n C_j V_j e^{\lambda_j t}$$

Si on pose que :

$$\begin{cases} \alpha_j = (C_j U_j + C'_{j+p} W_j) \text{ pour } j = 1, \dots, p. \\ \sigma_{j+p} = (C'_{j+p} U_j - C_j W_j) \text{ pour } j = 1, \dots, p. \\ \beta_j = C_j V_j \text{ pour } j = 2p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Alors la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cos b_j(t) e^{a_j t} + \sigma_{j+p} \sin b_j(t) e^{a_j t} + \sum_{j=2p+1}^n \beta_j e^{\lambda_j t} \quad (2.3)$$

2.3 Systèmes compartimentaux

2.3.1 graphe sagittal

Soient $M = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n , et $P_1; P_2; \dots; P_n$ n points distincts du plan euclidéen.

Définition 2.3 On appelle *graphe sagittal* de la matrice M associé aux points $P_1, P_2, \dots, P_n$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{P_i P_j}$ (ou bipoints) tels que $a_{ij} \neq 0$ et $i \neq j$.

Le graphe sagittal de M est noté $G(M)$

$$G(M) = \{\overrightarrow{P_i P_j} / a_{ij} \neq 0 \text{ et } i \neq j\}$$

Définition 2.4 On dit que le graphe sagittal de la matrice M est *fortement vectoriellement connexe* si pour tous points $P_i; P_j$, il existe un chemin de $G(M)$ allant de P_i à P_j , c'est-à-dire que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}; i \neq j \exists \{i_1, i_2, \dots, i_q\} \subset \mathbb{I} / \{\overrightarrow{P_i P_{i_1}}, \overrightarrow{P_{i_1} P_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{P_{i_q} P_j}\} \subset G(M)$$

On peut remarquer que :

$$\overrightarrow{P_i P_j} = \overrightarrow{P_i P_{i_1}} + \overrightarrow{P_{i_1} P_{i_2}} + \dots + \overrightarrow{P_{i_q} P_j}$$

Définition 2.5 On dit qu'une matrice carrée M d'ordre n ($n > 1$) est *réductible* s'il existe une matrice de permutation P d'ordre n telle que :

$$PMP^t = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

où $M_{11} \in M_m(\mathbb{C})$ et $M_{22} \in M_{n-m}(\mathbb{C})$

Proposition 2.2 : Une matrice $M = (m_{ij})$ d'ordre n est irréductible (non réductible) si et seulement si, pour toute partition de $\mathbb{I}$ en deux sous-ensembles S et T , il existe i dans S et j dans T tels que $m_{ij} \neq 0$.

Proposition 2.3 Une matrice carrée est irréductible si, et seulement si, son graphe sagittal est fortement vectoriellement connexe.

Proposition 2.4 Toute matrice irréductible et à diagonale dominante partiellement stricte est inversible.

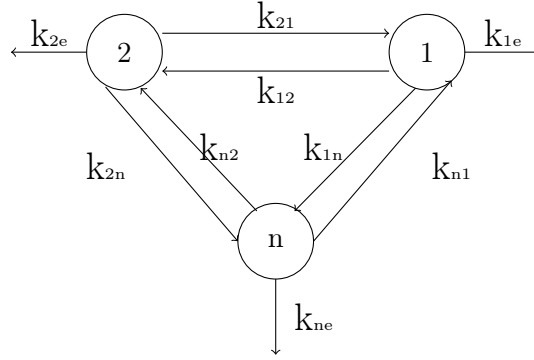
Définition 2.6 Un cycle est un chemin d'un point P_i vers lui même.

Définition 2.7 On dit qu'un système compartimental est *acyclique* s'il ne contient aucun cycle.

2.3.2 Propriétés des systèmes compartimentaux

Soit le système compartimental général(S_G) représenté par la figure suivante :

FIG. 2.1 – système compartimental général



Le choix même du modèle présuppose qu'un compartiment ne peut être "isolé" c'est-à-dire que dans chaque compartiment i arrive au moins un arc et en ressort au moins un autre, ou encore que (S_G) vérifie l'hypothèse suivante dite compartimentale est notée H_{comp} :

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i_0 j} \neq 0 \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i j_0} \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La matrice compartimentale associée à ce système est :

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

où

$$k_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} - k_{ie}$$

On peut remarquer que la matrice A est à diagonale dominante partiellement stricte si et seulement s'il existe i_0 tel que $k_{i_0 e} \neq 0$

Définition 2.8 [19] *On dit qu'un système compartimental, en état d'évolution, est **homogène** si $x_i(0) = 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$*

Définition 2.9 [19] On dit qu'un système compartimental en état d'évolution est **non homogène** s'il existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $x_i(0) \neq 0$

Définition 2.10 [17] On dit qu'un compartiment i est **fuyant** si $k_{ie} \neq 0$

Définition 2.11 [17] On appelle **faisceau sortant** du compartiment i le

vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté K_i^s , défini par $K_i^s = \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{pmatrix}$

On appelle **faisceau rentrant** dans le compartiment i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté K_i^r , défini par $K_i^r = \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{pmatrix}$

2.3.3 Structures compartimentales particulières

Définition 2.12 [19]

Un système compartimental est dit ouvert s'il existe un compartiment i_0 fuyant.

Remarque 2.2 Ainsi pour un système ouvert à n compartiments, au moins une des inégalités exprimant le fait que A soit à diagonale dominante stricte c'est à dire :

$$|k_{jj}| = -k_{jj} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n k_{ij}$$

pour au moins un $j \in \{1, \dots, n\}$

Définition 2.13 [19]

Un système à n compartiments est dit totalement ouvert si et seulement si :

$$k_{ie} \neq 0 \quad \forall i \Leftrightarrow -k_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n k_{ij} \quad \forall j$$

Définition 2.14 [19]

Un système compartimental est dit fermé si $k_{ie} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Corollaire 2.1 : Si le système compartimental est fermé on a les deux résultats suivants :

$$\text{système fermé} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n k_{ij} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{système fermé} \Rightarrow \det A = 0$$

Donc A possède au moins une valeur propre structurale et on a ainsi

$$\text{rang} A \leq n - 1$$

2.3.4 Propriétés des valeurs propres

Proposition 2.5 [17] Toute matrice compartimentale associée à un système compartimental ouvert vérifiant l'hypothèse (H_{Comp}) est inversible.

Théorème 2.5 [19]

Les valeurs propres de chaque système cyclique pris individuellement sont les valeurs propres de système total. Tous les sous-diagrammes acycliques sont associés à des valeurs propres nulles structurellement i.e indépendantes des valeurs des paramètres des modèles

Théorème 2.6 [19] Soit A une matrice compartimentale, la partie réelle de toute valeur propre non nulle de A est strictement négative.

Par conséquent la matrice A n'a aucune valeur propre imaginaire pure.

Démonstration : D'après le théorème de cercle de Gerschgorin sur les valeurs propres d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ toutes les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion des disques D_k tels que :

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}| \} \quad k = 1, \dots, n$$

En particulier, si A est une matrice compartimentale on a pour $i \neq k$:

$$a_{ik} \geq 0$$

et la somme des éléments de la k^{ime} colonne est égale à $-a_{ke}$.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} |a_{ik}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} - a_{kk} \leq -a_{ke} \leq |a_{kk}|$$

donc

$$D_k \subset D(a_{kk}, |a_{kk}|)$$

et si on note $|a_{k_0 k_0}| = \max_k |a_{kk}|$, alors :

$$D_k \subset D(a_{kk}, |a_{kk}|) \subset D(a_{k_0 k_0}, |a_{k_0 k_0}|) = D_{k_0}$$

mais

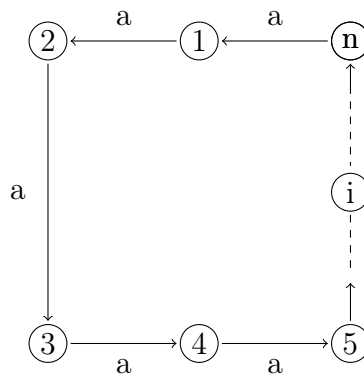
$$D_{k_0} - 0 \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$$

Définition 2.15 *Un système compartimental est dit oscillant si la matrice compartimentale associée admet des valeurs propres complexes*

La structure n-cyclique unilatérale : un exemple typique

L'exemple classique d'une structure compartimentale résultant en des valeurs propres non réelles, est celui du n-cycle unilatérale à coefficients d'échange égaux.

FIG. 2.2 – système n-cyclique unilatérale



A ce type de système on associe la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{(n-1)(n-1)} & k_{n(n-1)} \\ k_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{nn} \end{pmatrix}$$

sachant que :

$$k_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j + 1 \text{ ou } i = 1 \text{ et } j = n \\ -a & \text{si } i = j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour ce système fermé il n'y a qu'un disque de Gershgorin $D(-a, a)$ de l'axe des réels et qui est donc tangent à l'axe des imaginaires. On obtient facilement que

$$\text{Det}(\lambda I - A) = (\lambda + a)^n - a^n, \quad n \geq 2$$

Et les valeurs propres de A et leur localisation dans le plan complexe : en fait elles sont situées sur le cercle $C(-a, a)$ et sont données par

$$\lambda_{n-k} = -a + ae^{2k\pi i/n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chapitre 3

Identification des systèmes compartimentaux oscillants

Les premières études sur le problème d'identification de systèmes compartimentaux linéaires à coefficients constants ont concerné le cas où tous les compartiments du système sont mesurés puis par optimisation de la fonctionnelle J de Y. Cherruault [6] On est amené à identifier des sommes d'exponentielles. Par la suite, des travaux ont été réalisés dans le cas où on ne peut mesurer un ou deux compartiments. Dans tous ces travaux, les chercheurs supposent que la matrice compartimentale associée au système étudié admet uniquement des valeurs propres réelles. Dans ce chapitre, on expose brièvement ces travaux puis on donne une extension au cas des systèmes oscillants.

3.1 Quelques rappels sur l'identification d'un système compartimental réel

Les rappels qui suivent sont utiles puisqu'ils permettent de voir dans quelle mesure il est possible de généraliser les résultats valables dans le cas des systèmes compartimentaux réels aux systèmes oscillants.

Considérons un système compartimental générale (S_n) régi par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX \\ X_0 = (a, 0, \dots, 0)' \end{cases} \quad (3.1)$$

où A est la matrice compartimentale associée.

Dans le cas où les valeurs propres de A (λ_i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) sont réelles strictement négatives et distinctes, la solution du système différentiel 3.1 est

de la forme

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j e^{\lambda_j t}$$

où $\beta_j = C_j V_j$ et V_j est un vecteur propre associée à λ_j .

Si on remplace $x_i(t)$ et $\frac{dx_i}{dt}$ par leurs expressions dans le système 3.1 et on applique l'identification on obtient les n systèmes suivants :
pour tout i fixé dans $\{1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{cases} \lambda_j \beta_j^i = \sum_{l=1}^n k_{li} \beta_j^l \\ j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour identifier la matrice A des mesures sont effectuées sur l compartiments à m instants ($x_i(t_k)$ mesurés pour $i \in \{1, \dots, l\}$ et $k \in \{1, \dots, m\}$).

3.1.1 Cas de système à n compartiments mesurés

Si tous les compartiments du système étudié sont mesurés ($l = n$) alors l'identification de la matrice A se fait en deux étapes.

- La première consiste à l'application d'une méthode d'optimisation sur la fonctionnelle J définie par [6] :

$$J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \beta_1^2, \dots, \beta_n^2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - \sum_{j=1}^n \beta_j^i e^{\lambda_j t_k})^2 \right) \quad (3.3)$$

Ce qui permet de déterminer β_j^i et λ_i $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

On pose que :

$$\min J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \beta_1^2, \dots, \beta_n^2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{1*}, \beta_1^{2*}, \dots, \beta_n^{2*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*). \quad (3.4)$$

on introduit maintenant la matrice B^* définie par :

$$B^* = \begin{pmatrix} \beta_1^{1*} & \beta_1^{2*} & \dots & \beta_1^{n-1*} & \beta_1^{n*} \\ \beta_2^{1*} & \beta_2^{2*} & \dots & \beta_2^{n-1*} & \beta_2^{n*} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta_n^{1*} & \beta_n^{2*} & \dots & \beta_n^{n-1*} & \beta_n^{n*} \end{pmatrix}$$

Définition 3.1 [17] : La matrice B^* est appelée matrice des **masses algébriques élémentaires** du système compartimental.

Remarque 3.1 Chaque colonne $\begin{pmatrix} \beta_1^{i*} \\ \vdots \\ \beta_n^{i*} \end{pmatrix}$ de la matrice B , notée β^i , est associée au compartiment (i) et représente les masses élémentaires algébriques de ce compartiment par rapport à la base $\{e^{\lambda_i t}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.

– La deuxième étape est la détermination de la matrice A [14] :

Théorème 3.1 [17] Soit le système compartimental (S_n) homogène ayant au plus un compartiment fuyant mesurable et vérifiant l'hypothèse (H_{Comp}) On suppose que tous les compartiments sont mesurés et soit B^* la matrice des masses algébriques élémentaires, le système (S_n) est identifié de façon unique si, et seulement si

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \exists i_0 \in \{1, \dots, n\}, \beta_j^{i_0} \neq 0$$

Plus précisément, chaque faisceau entrant $K_i^{(r)}$ est solution du système algébrique linéaire :

$$B^* k_i^{(r)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \beta_1^i \\ \lambda_2^* \beta_2^i \\ \vdots \\ \lambda_n^* \beta_n^i \end{pmatrix} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.5)$$

Le compartiment principal étant mesuré, $x_1(t)$, on a alors :

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j^{1*} e^{\lambda_j^* t}$$

On définit la fonction $y_1(t)$, primitive de $x_1(t)$ telle que :

$$y_1(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_j^{1*}}{\lambda_j^*} \quad (3.6)$$

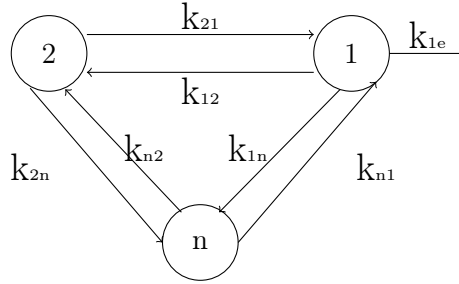
$$y_1(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_j^{1*}}{\lambda_j^*} e^{\lambda_k^* t} \quad (3.7)$$

Remarque 3.2 [14] La fonction y_1 représente la fonction énergie associée au compartiment principal.

3.1.2 Cas de système à (n-1) compartiments mesurés

Considérons le système différentiel 3.1 où A est la matrice compartimentale associée au système compartimental (figure 3.1).

FIG. 3.1 – Système compartimental à n compartiments



La première étape pour déterminer les coefficients d'échange k_{ij} est d'appliquer une méthode d'optimisation sur la fonction $J2$ définie par :

$$J2(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \dots, \beta_1^{n-1}, \dots, \beta_n^{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(t_k) - \sum_{j=1}^n \beta_j^i e^{\lambda_j t_k})^2 \right) \quad (3.8)$$

on pose que :

$$\min J2(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \dots, \beta_1^{n-1}, \dots, \beta_n^{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J2(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{n-1*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*) \quad (3.9)$$

On introduit maintenant la matrice B_{n-1}^* définie par :

$$B_{n-1}^* = \begin{pmatrix} \beta_1^{1*} & \beta_1^{2*} & \dots & \beta_1^{n-1*} & \beta_1^n \\ \beta_2^{1*} & \beta_2^{2*} & \dots & \beta_2^{n-1*} & \beta_2^n \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta_n^{1*} & \beta_n^{2*} & \dots & \beta_n^{n-1*} & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

Définition 3.2 [17] La matrice B_{n-1}^* est appelée matrice des mesures partielles des masses algébriques élémentaires.

Remarque 3.3 *Pour identifier le système compartimental, on doit compléter la matrice des mesures partielles.*

**Complétude de B_{n-1}^*
Cas d'un système fermé**

Théorème 3.2 [5] *Soit S_n un système compartimental fermé, qui vérifie*

$$\begin{aligned} (H1) \quad & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i_0 j} \neq 0 \\ (H2) \quad & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i j_0} \neq 0 \end{aligned}$$

Si $(n - 1)$ compartiments du système sont mesurés et

$$\min J2(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \dots, \beta_1^{n-1}, \dots, \beta_n^{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J2(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{n-1*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$$

Alors

$$\beta_1^n = a - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_1^i \quad (3.10)$$

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^i \quad \forall l \in \{2, \dots, n\} \quad (3.11)$$

Cas d'un système ouvert

Théorème 3.3 [5] *Soit S_n un système compartimental ouvert, qui vérifie*

$$\begin{aligned} (H1) \quad & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i_0 j} \neq 0 \\ (H2) \quad & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i j_0} \neq 0 \end{aligned}$$

Si $(n - 1)$ compartiments du système sont mesurés et

$$\min J2(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \dots, \beta_1^{n-1}, \dots, \beta_n^{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J2(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{n-1*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$$

Alors

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} - k_{1e} \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \quad \forall l \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.12)$$

Théorème 3.4 [5] *Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées alors on a :*

$$y_1(0) = - \frac{a}{k_{1e}} \quad (3.13)$$

Remarque 3.4 – La relation 3.6 nous permet d'écrire :

$$y_1(t)_{t=0} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^{1*}}{\lambda_k^*} e^{\lambda_k^* t} \right)_{t=0} = -\frac{a}{k_{1e}} < 0 \quad (3.14)$$

ce qui nous permet d'interpréter $y_1(0)$ comme une dissipation instantanée d'énergie à l'instant initial du compartiment principal vers le milieu extérieur.

– à partir de la relation précédente, on peut identifier k_{1e} par la relation :

$$k_{1e} = -\frac{a}{y_1(0)} = -\frac{a}{\sum_{l=1}^n \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^{1*}}} \quad (3.15)$$

Remarque 3.5 [5] Grace aux théorèmes 3.3 et 3.4 la matrice B_{n-1}^* est complétée par

$$\beta_l^{n*} = -\sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} + \frac{a}{y(0)} \cdot \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \quad (3.16)$$

Théorème 3.5 [5] Soit $B_n^* = (\beta_j^{i*})$ la matrice des mesures complétées. Le système compartimental est identifié de façon unique si et seulement si

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists i^* \in \{1, 2, \dots, n\} / \beta_j^{i*} \neq 0. \quad (3.17)$$

Plus précisément on a :

$$B_n^* \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \beta_1^{i*} \\ \lambda_2^* \beta_2^{i*} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n^* \beta_n^{i*} \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

3.2 Identification d'un système compartimental oscillant

Considérons un modèle général à n compartiments (figure 3.1) , il est régi par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \\ X(0) = (a, 0, \dots, 0)^t \end{cases} \quad (3.18)$$

Si le système est supposé oscillant, alors la matrice A possède $2p$ valeurs propres complexes distinctes. On suppose que les autres valeurs propres réelles sont distinctes. La solution du système différentiel s'écrit alors (voir chapitre 2 eq 2.3)

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^i \cos(b_j t) e^{a_j t} + \sigma_{j+p}^i \sin(b_j t) e^{a_j t} + \sum_{j=2p+1}^n \beta_j^i e^{\lambda_j t} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

De plus on a :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^p (a_j \alpha_j^i + b_j \sigma_{j+p}^i) e^{a_j t} \cos(b_j t) + (a_j \sigma_{j+p}^i - b_j \alpha_j^i) e^{a_j t} \sin(b_j t) + \sum_{j=2p+1}^n \lambda_j \beta_j^i e^{\lambda_j t}$$

Si on substitue la solution $X(t)$ dans le système différentiel (3.18) et on identifie les coefficients des fonctions $e^{\lambda_j t}$; $e^{a_j} \cos(b_j t)$; $e^{a_j} \sin(b_j t)$ qui sont linéairement indépendantes, on obtient alors les relations :

$$\begin{cases} a_l \alpha_l^i + b_l \sigma_{l+p}^i = k_{1i} \alpha_l^1 + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \alpha_l^j + k_{ni} \alpha_l^n & \text{pour } l = 1 \dots p \\ a_{l-p} \sigma_l^i - b_{l-p} \alpha_{l-p}^i = k_{1i} \sigma_l^1 + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \sigma_l^j + k_{ni} \sigma_l^n & \text{pour } l = p+1, \dots, 2p \\ \beta_l^i \lambda_l = k_{1i} \beta_l^1 + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \beta_l^j + k_{ni} \beta_l^n & \text{pour } l = 2p+1 \dots, n \\ \text{pour } i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.19)$$

Soit $y_i(t)$ la primitive de $x_i(t)$ définie par :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^i \left(\frac{b_j}{a_j^2 + b_j^2} e^{a_j t} \sin b_j t + \frac{a_j}{a_j^2 + b_j^2} e^{a_j t} \cos b_j t \right) + \sigma_{j+p}^i \left(\frac{-b_j}{a_j^2 + b_j^2} e^{a_j t} \cos b_j t + \frac{a_j}{a_j^2 + b_j^2} e^{a_j t} \sin b_j t \right) + \sum_{j=2p+1}^n \frac{\beta_j^i}{\lambda_j} e^{\lambda_j t}$$

Pour $i = 1$ et $t = 0$ on a :

$$y_1(0) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^1 \frac{a_j}{a_j^2 + b_j^2} - \sigma_{j+p}^1 \frac{b_j}{a_j^2 + b_j^2} + \sum_{j=2p+1}^n \frac{\beta_j^1}{\lambda_j} \quad (3.20)$$

3.2.1 Cas de n compartiments mesurés

Dans le cas où on peut mesurer tous les compartiments du système étudié durant m instants alors grâce à la minimisation de la fonctionnelle $J3$ (voir [6]).

$$J_3(\alpha_1^1, \dots, \alpha_p^n, \sigma_{p+1}^1, \dots, \sigma_{2p}^n, \beta_{2p+1}^1, \dots, \beta_n^n, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, \lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j^i \cos(b_j t_k) e^{a_j t_k} + \sigma_{j+p}^i \sin(b_j t_k) e^{a_j t_k} + \sum_{j=2p+1}^n \beta_j^i e^{\lambda_j t_k} \right)^2 \right) \quad (3.21)$$

on peut identifier la somme d'exponentielles [6]

En posant :

$$\min J_3(\alpha_1^1, \dots, \alpha_p^n, \sigma_{p+1}^1, \dots, \sigma_{2p}^n, \beta_{2p+1}^1, \dots, \beta_n^n, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, \lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n) = J(\alpha_1^{1*}, \dots, \alpha_p^{n*}, \sigma_{p+1}^{1*}, \dots, \sigma_{2p}^{n*}, \beta_{2p+1}^{1*}, \dots, \beta_n^{n*}, a_1^*, \dots, a_p^*, b_1^*, \dots, b_p^*, \lambda_{2p+1}^*, \dots, \lambda_n^*)$$

Pour déterminer les coefficients de la matrice A on résoud les n systèmes suivants :

pour $i = 1 \dots, n$ a

$$\overline{B} \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* \alpha_1^{i*} + b_1^* \sigma_{1+p}^{i*} \\ \vdots \\ a_p^* \alpha_p^{i*} + b_p^* \sigma_{2p}^{i*} \\ a_1^* \sigma_{p+1}^{i*} - b_1^* \alpha_1^{i*} \\ \vdots \\ a_p^* \sigma_{2p}^{i*} - b_p^* \alpha_p^{i*} \\ \lambda_{2p+1}^* \beta_{2p+1}^{i*} \\ \vdots \\ \lambda_{2p+1}^* \beta_{2p+1}^{i*} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

où $\overline{B}$ est la matrice définie par :
pour $j \in \{1, \dots, n\}$

$$b_{jl} = \begin{cases} \alpha_l^j & \text{si } l \in \{1, \dots, p\} \\ \sigma_l^j & \text{si } l \in \{p+1, \dots, 2p\} \\ \beta_l^j & \text{si } l \in \{2p+1, \dots, n\} \end{cases}$$

On a un résultat analogue à celui des systèmes réels. S'il existe un élément non nul dans chaque ligne de la matrice $\overline{B}$ alors A est identifiable de manière unique en résolvant les systèmes 3.22

3.2.2 Cas de $n - 1$ compartiments mesurés

Dans le cas où on ne peut mesurer le dernier compartiment x_n alors grâce à la minimisation de la fonctionnelle $J4$ (voir [6]).

$$J4(\alpha_1^1, \dots, \alpha_p^{n-1}, \sigma_{p+1}^1, \dots, \sigma_{2p}^{n-1}, \beta_{2p+1}^1, \dots, \beta_n^{n-1}, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, \lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n) =$$

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(t_k) - (\sum_{j=1}^p \alpha_j^i \cos b_j(t_k) e^{a_j t_k} + \sum_{j=p+1}^n \beta_j^i \sin b_j(t_k) e^{a_j t_k} + \sum_{j=2p+1}^n \beta_j^i e^{\lambda_j t_k})^2) \right) \quad (3.23)$$

on peut identifier la somme d'exponentielles [6]

En posant :

$$\min J4(\alpha_1^1, \dots, \alpha_p^{n-1}, \sigma_{p+1}^1, \dots, \sigma_{2p}^{n-1}, \beta_{2p+1}^1, \dots, \beta_n^{n-1}, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, \lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_n) =$$

$$J(\alpha_1^{1*}, \dots, \alpha_p^{(n-1)*}, \sigma_{p+1}^{1*}, \dots, \sigma_{2p}^{(n-1)*}, \beta_{2p+1}^{1*}, \dots, \beta_n^{(n-1)*}, a_1^*, \dots, a_p^*, b_1^*, \dots, b_p^*, \lambda_{2p+1}^*, \dots, \lambda_n^*)$$

Pour déterminer le reste des coefficients β^n, σ^n et α^n on applique le théorème suivant :

3.2.3 Complétude de $\overline{B}$

Cas d'un système ouvert

Théorème 3.6 *Considérons un système compartimental oscillant ouvert dont la matrice associée possède $2p$ valeurs propres complexes, vérifiant les hypothèses suivantes :*

$$(H1:) \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i_0 j} \neq 0$$

$$(H2:) \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists j_0 \in \{1, 2, \dots, n\} / k_{i j_0} \neq 0$$

alors :

$$\alpha_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} - k_{1e} \frac{a_l^* \alpha_l^{1*} - b_l^* \sigma_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \quad (3.24)$$

$$\sigma_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_l^{i*} - k_{1e} \frac{a_l^* \sigma_l^{1*} - b_l^* \alpha_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \quad \forall l \in \{p+1, \dots, 2p\} \quad (3.25)$$

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} - k_{1e} \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \quad \forall l \in \{2p+1, \dots, n\} \quad (3.26)$$

Démonstration : Dans le cas de $n-1$ compartiments mesurés les relations 3.19 s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_l^* \alpha_l^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^{i*} = k_{1i} \alpha_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \alpha_l^{j*} + k_{ni} \alpha_l^n \quad \text{pour } l \in \{1, \dots, p\} \\ a_{l-p}^* \sigma_l^{i*} - b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^{i*} = k_{1i} \sigma_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \sigma_l^{j*} + k_{ni} \sigma_l^n \quad \text{pour } l \in \{p+1, \dots, 2p\} \\ \beta_l^{i*} \lambda_l^* = k_{1i} \beta_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \beta_l^{j*} + k_{ni} \beta_l^n \quad \text{pour } l \in \{2p+1, \dots, n\} \\ \text{pour } i = 1, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n = k_{1n} \alpha_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{jn} \alpha_l^{j*} + k_{nn} \alpha_l^n \quad \text{pour } l \in \{1, \dots, p\} \\ a_{l-p}^* \sigma_l^n - b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^n = k_{1n} \sigma_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{jn} \sigma_l^{j*} + k_{nn} \sigma_l^n \quad \text{pour } l \in \{p+1, \dots, 2p\} \\ \beta_l^n \lambda_l^* = k_{1n} \beta_l^{1*} + \sum_{j=2}^{n-1} k_{jn} \beta_l^{j*} + k_{nn} \beta_l^n \quad \text{pour } l \in \{2p+1, \dots, n\} \\ \text{pour } i = n. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Pour $l \in \{2p+1, \dots, n\}$ la somme par rapport à i donne :

$$\lambda_l \sum_{i=1}^n \beta_l^{i*} + \lambda_l \beta_l^n = \beta_l^{1*} \sum_{i=1}^n k_{1i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \beta_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \beta_l^n$$

D'après la définition de la matrice compartimentale associée au système 3.18 on a :

$\sum_{i=1}^n k_{1i} = -k_{1e}$ et que $\sum_{i=1}^n k_{ji} = 0$ pour $j \neq 1$ donc on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\lambda_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} + \lambda_l \beta_l^n = -k_{1e} \beta_l^{1*}$$

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} - k_{1e} \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*}$$

Pour $l \in \{1, \dots, p\}$ une somme par rapport à i donne :

$$a_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} + a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{l+p}^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^n = \sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_l^{1*} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \alpha_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \alpha_l^n$$

$$a_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} + a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{l+p}^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^n = -k_{12} \alpha_l^{1*}$$

$$a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n = - \left(a_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} + b_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{l+p}^{i*} + k_{1e} \alpha_l^{1*} \right) \quad (3.29)$$

Pour $l \in \{p+1, \dots, 2p\}$ la somme par rapport à i donne :

$$\sum_{i=1}^n a_{l-p}^* \sigma_l^i - \sum_{i=1}^n b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^i = \sum_{i=1}^n k_{1i} \sigma_l^{1*} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \sigma_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \sigma_l^n$$

$$a_{l-p}^* \sigma_l^n - b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^n = -(k_{1e} \sigma_l^{1*} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{l-p}^* \sigma_l^{i*} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^{i*}) \quad (3.30)$$

En regroupant les équations 3.29 et 3.30 on obtient les p systèmes suivants :

pour $l \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{cases} a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n = -a_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} - b_l^* \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{l+p}^{i*} - k_{1e} \alpha_l^{1*} \\ -b_l^* \alpha_l^n + a_l^* \sigma_{l+p}^n = -k_{1e} \sigma_{l+p}^{1*} - \sum_{i=1}^{n-1} a_l^* \sigma_{l+p}^{i*} + \sum_{i=1}^{n-1} b_l^* \alpha_l^{i*} \end{cases} \quad (3.31)$$

La résolution des systèmes 3.31 permet d'obtenir les deux relations 3.24 et 3.25

Remarque 3.6 $a_l^2 + b_l^2 \neq 0 \ \forall l \in \{1, \dots, p\}$ car b_l est la partie imaginaire d'une valeur propre complexe.

On remarque que dans les relations 3.24, 3.25 et 3.26, k_{1e} est une inconnue supplémentaire, qu'il est possible de déterminer grâce au lemme suivant.

Lemme 3.1 La valeur de k_{1e} est donnée par la relation

$$k_{1e} = \frac{-a}{y_1(0)}$$

Démonstration : D'après la relation 3.26 on a

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} - k_{1e} \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \ \forall l \in \{2p+1, \dots, n\}$$

Ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^n \beta_l^i = -k_{1e} \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \ \forall l \in \{2p+1, \dots, n\}$$

on somme par rapport à l on obtient

$$\sum_{l=2p+1}^n \sum_{i=1}^n \beta_l^i = -k_{1e} \sum_{l=2p+1}^n \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \quad (3.32)$$

De la relation 3.24 on a

$$\alpha_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} - k_{1e} \frac{a_l^* \alpha_l^{1*} - b_l^* \sigma_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_l^i = -k_{1e} \left(\frac{a_l^* \alpha_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} - \frac{b_l^* \sigma_{l+p}^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \right) \quad \forall l \in \{1, \dots, p\}$$

Si on somme par rapport à l on obtient

$$\sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^n \alpha_l^i = -k_{1e} \sum_{l=1}^p \left(\frac{a_l^* \alpha_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} - \frac{b_l^* \sigma_{l+p}^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \right) \quad (3.33)$$

D'après les deux relations 3.32 et 3.33 on déduit que :

$$\sum_{l=1}^{n-p} \sum_{i=1}^n \alpha_l^i + \sum_{l=2p+1}^n \sum_{i=1}^n \beta_l^i = -k_{1e} \left(\sum_{l=1}^p \left(\frac{a_l^* \alpha_l^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} - \frac{b_l^* \sigma_{l+p}^{1*}}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} \right) + \sum_{l=2p+1}^n \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*} \right)$$

Par définition de $y_1(0)$ on a :

$$y_1(0) = \sum_{l=1}^n \alpha_l^{1*} \frac{a_l^*}{a_l^{*2} b_l^{*2}} - \sigma_{l+p}^{1*} \frac{b_l^*}{a_l^{*2} + b_l^{*2}} + \sum_{l=2p+1}^n \frac{\beta_l^{1*}}{\lambda_l^*}$$

Donc :

$$\sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^n \alpha_l^i + \sum_{l=2p+1}^n \sum_{i=1}^n \beta_l^i = -k_{1e} y_1(0) \quad (3.34)$$

d'après les conditions initiales on a :

$$x_1(0) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^i + \sum_{j=2p}^n \beta_j^i = a$$

et

$$x_i(0) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^i + \sum_{j=2p}^n \beta_j^i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^n x_i(0) = \sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^n \alpha_l^i + \sum_{l=2p+1}^n \sum_{i=1}^n \beta_l^i = a$$

Finalement on obtient :

$$k_{1e} = \frac{-a}{y_1(0)}$$

Cas d'un système fermé :

Théorème 3.7 *Considérons un système compartimental oscillant fermé dont la matrice associée possède $2p$ valeurs propres complexes ($2p < n$) et vérifie les hypothèses H1 et H2.*

Si λ_n est la valeur propre nulle, alors :

$$\alpha_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \quad (3.35)$$

$$\sigma_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_l^{i*} \quad \forall l \in \{p+1, \dots, 2p\} \quad (3.36)$$

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} \quad \forall l \in \{2p+1, \dots, n-1\} \quad (3.37)$$

$$\beta_n^n = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} - \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*} \quad (3.38)$$

Démonstration

Pour démontrer le théorème 3.7 on utilise les relations 3.27 et 3.28.

Cas où $l \in \{1, \dots, p\}$

Une somme par rapport à i donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_l^* \alpha_l^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^{i*} + a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n &= \sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_l^{1*} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \alpha_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \alpha_l^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_l^* \alpha_l^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^{i*} + a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n &= 0 \end{aligned}$$

$$a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_l^* \alpha_l^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^{i*} \quad (3.39)$$

cas où $l \in \{p+1, \dots, 2p\}$

La somme par rapport à i donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} -b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^{i*} + a_{l-p}^* \sigma_l^{i*} - b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^n + a_{l-p}^* \sigma_l^n &= \sum_{i=1}^n k_{1i} \sigma_l^{1*} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \sigma_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \sigma_l^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} -b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^{i*} + a_{l-p}^* \sigma_l^{i*} - b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^n + a_{l-p}^* \sigma_l^n &= 0 \\ -b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^n + a_{l-p}^* \sigma_l^n &= - \sum_{i=1}^{n-1} -b_{l-p}^* \alpha_{l-p}^{i*} + a_{l-p}^* \sigma_l^{i*} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En regroupant les équations 3.39 et 3.40 on obtient les p systèmes suivants :

pour $l \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{cases} a_l^* \alpha_l^n + b_l^* \sigma_{l+p}^n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_l^* \alpha_l^{i*} + b_l^* \sigma_{l+p}^{i*} \\ -b_l^* \alpha_l^{n*} + a_l^* \sigma_{l+p}^{n*} = - \sum_{i=1}^{n-1} -b_l^* \alpha_l^{i*} + a_l^* \sigma_{l+p}^{i*} \end{cases} \quad (3.41)$$

La résolution des systèmes 3.41 permet d'obtenir les deux relations 3.35 et 3.36 et

cas où $l \in \{2p+1, \dots, n-1\}$

la somme par rapport à i donne :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_l^* \beta_l^{i*} + \lambda_l \beta_l^n = \sum_{i=1}^n k_{1i} \beta_l^{1*} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{n-1} k_{ji} \beta_l^{j*} + \sum_{i=1}^n k_{ni} \beta_l^n$$

d'après la définition de la matrice compartimentale on déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_l^* \beta_l^{i*} + \lambda_l \beta_l^n = 0$$

$$\lambda_l^* \beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_l^* \beta_l^{i*}$$

$$\beta_l^n = - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i*}$$

Cas où $l = n$

D'après la condition initiale on a :

$$\sum_{l=1}^p \alpha_l^n + \sum_{l=2p+1}^n \beta_l^n = 0$$

donc

$$\beta_n^n = - \sum_{l=1}^p \alpha_l^n - \sum_{l=2p+1}^n \beta_l^n$$

en utilisant les relations 3.35 et 3.37 on obtient :

$$\beta_n^n = \sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_l^{i*} + \sum_{l=2p+1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_l^{i-1}$$

Après avoir déterminé β^n, α^n , et σ^n on détermine les coefficient de la matrice A par la résolution des n systèmes suivants :

pour $i = 1 \cdots, n$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{1*} & \alpha_1^{2*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_l^{n*} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_p^{1*} & \alpha_p^{1*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_p^{n*} \\ \sigma_{p+1}^{1*} & \sigma_{p+1}^{n*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_p^{n*} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{2p}^{1*} & \sigma_{2p}^{2*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{2p}^{n*} \\ \beta_{2p+1}^{1*} & \beta_{2p+1}^{2*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{2p+1}^{n*} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \beta_n^{1*} & \beta_n^{2*} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_n^{n*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* \alpha_1^{i*} + b_1^* \sigma_{1+p}^{i*} \\ \vdots \\ a_p^* \alpha_p^{i*} + b_p^* \sigma_{2p}^{i*} \\ a_1^* \sigma_{p+1}^{i*} - b_1^* \alpha_1^{i*} \\ \vdots \\ a_p^* \sigma_{2p}^{i*} - b_p^* \alpha_p^{i*} \\ \lambda_{2p+1}^* \beta_{2p+1}^{i*} \\ \vdots \\ \lambda_{2p+1}^* \beta_{2p+1}^{i*} \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Identification de quelques systèmes compartimentaux particuliers

Certains systèmes à compartiments présentent des diagrammes et des matrices particulières pour lesquelles on peut ramener à une caractérisation des valeurs propres. Dans ce chapitre on étudie à titre d'exemple le cas des systèmes caténaux.

4.1 Systèmes à compartiments caténaux

Un système à n compartiments caténaux (ou en chaîne) est un système dans lequel les n compartiments sont rangés en série, tout compartiment échange au plus avec le compartiment qui le précède et celui qui le succède. De tels systèmes se rencontrent souvent comme modèle de réactions biochimiques.

La matrice compartimentale correspondante aux systèmes caténaux est tridiagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1.1 caractérisation des matrices caténares

Une matrice A associée à un système caténaire est caractérisée par :

- A est une matrice compartimentale.
- Dans chaque ligne (colonne) on a au plus trois éléments non nuls.
- La première ligne a au plus deux éléments non nuls.
- La première colonne a exactement deux éléments non nuls.
- La dernière ligne a exactement deux éléments non nuls.
- La dernière colonne a au plus deux éléments non nuls

Dans une matrice compartimentale un élément non nul de la ligne i dans une colonne j ($i \neq j$) signifie qu'il y a un échange de compartiment i vers le compartiment j .

Dans une matrice compartimentale un élément non nul de la colonne j dans une ligne i ($i \neq j$) signifie qu'il y a un échange de compartiment j vers le compartiment i .

Pour un système caténaire un compartiment ne peut avoir d'échange qu'avec deux compartiments au plus (Le compartiment qui le précède et celui qui le succède) d'où la deuxième caractéristique.

Le premier et le dernier compartiment font un échange avec un seul compartiment, le sens inverse peut ne pas exister d'où les quatre dernières caractéristiques.

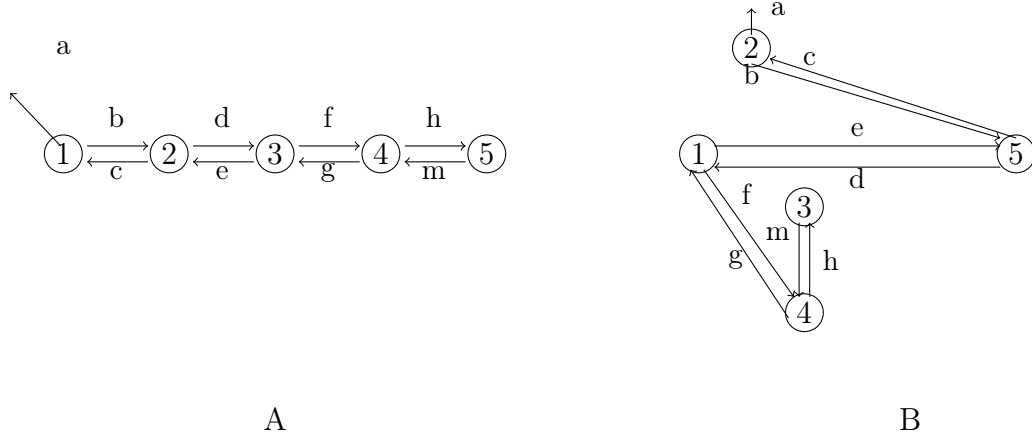
Proposition 4.1 [19] *Les valeurs propres d'une matrice compartimentale caténaire sont toutes réelles.*

4.1.2 Numérotation des compartiments d'un système caténaire

Pour les réactions biochimiques en chaîne, la numérotation de chaque état considéré comme un compartiment est naturelle, cependant en général la numérotation peut être aléatoire, d'où se pose le problème de la reconnaissance d'un système caténaire par la forme de la matrice compartimentale qui le représente. Le changement de numérotation des compartiments peut être interprété algébriquement comme une multiplication par une matrice de permutation.

Exemple : Considérons un système caténaire à 5 compartiments ; le problème qui se pose est de choisir la bonne numérotation pour le système caténaire.

FIG. 4.1 – Système caténaire



La matrice compartimentale A_1 qui correspond au système compartimental de la figure A est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} (-a-b) & c & 0 & 0 & 0 \\ b & (-c-d) & e & 0 & 0 \\ 0 & d & (-e-f) & g & 0 \\ 0 & 0 & f & (-g-h) & m \\ 0 & 0 & 0 & h & -m \end{pmatrix}.$$

De même la matrice compartimentale A_2 qui correspond au système compartimental de la figure B est :

$$A_2 = \begin{pmatrix} (-e-f) & 0 & 0 & g & d \\ 0 & (-a-b) & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -m & (-g-h) & 0 \\ f & 0 & m & h & 0 \\ e & b & 0 & 0 & (-c-d) \end{pmatrix}$$

Pour passer de la matrice A_2 à la matrice A_1 il suffit d'appliquer une permutation entre les lignes et les colonnes de la matrice A_2 .

Algorithme pour changer la numérotation d'un système caténaire

Ce problème peut être représenté comme suit : à partir d'une numération initiale des compartiments, comment on trouve la numérotation pour laquelle la matrice du système caténaire soit tridiagonale.

Pour cela je propose un algorithme qui se compose de deux parties , la première partie de l'algorithme consiste à vérifier si la matrice introduite est une matrice caténaire, pour la deuxième partie nous permutons les lignes et les colonnes de la matrice pour obtenir la bonne numérotation. Pour lancer la deuxième partie de l'algorithme on commence par chercher le premier compartiment puis on ordonne les autres compartiments.

Remarque 4.1 *Les quatre dernières caractéristiques de la matrice A sont des caractéristiques spécifiées pour une matrice caténaire tridiagonale, si la matrice caténaire n'est pas tridiagonale ces caractéristiques seront annoncées comme suit :*

- *Il existe une ligne p qui a au plus deux éléments non nuls, et une colonne p qui a exactement deux éléments non nuls.*
- *Il existe une ligne q qui a exactement deux éléments non nuls et une colonne q qui a au plus deux éléments non nuls.*

étape (1)

1. vérifier si la matrice est compartimentale ; si c'est vraie aller en 2 sinon
 - la matrice n'est pas caténaire.
 - Sortir de l'algorithme.

étape (2)

2. $p := 1 ; b := \text{faux} ; d = \text{faux}$
 3. tant que $b = \text{faux}$ et $p < n + 1$ faire
 4. vérifier que la colonne p a un seul élément positif $a(i1, p)$.
 - si c'est vraie aller à 5.
 - sinon $p := p + 1$ aller à 3
 5. vérifier que le seul élément positif s'il existe dans la ligne p est $a(p, i1)$
 - si c'est vrai $b := \text{true}$.
 - sinon $p := p + 1$fin tant que
 6. Si $b = \text{true}$
 - permuter la ligne p avec la première ligne
 - permuter la colonne p avec la première colonne
 7. pour $i=2$ jusqu'à $n-1$ faire
 - pour $j=2$ jusqu'à $n-1$ faire si $a(i, j) > 0$ ou $a(j, i) > 0$ alors
 - permuter la ligne j avec la ligne $i + 1$;
 - permuter la colonne j avec la colonne $i + 1$;Fin pour
Fin pour
 8. sinon la matrice n'est pas caténaire. Fin si.
 9. pour $i=1$ jusque à n faire
 - Si $a(i, i+1)=0$ et $d=\text{false}$ alors
 - $b := \text{false}$;
 - $d := \text{true}$;
 - Sortir de la boucle pour Aller à 3.
 - sinon si $a(i, i+1)=0$ et $d=\text{true}$ alors la matrice n'est pas caténaire.
-

4.2 Identification d'un système caténaire

Le problème d'identification (le problème inverse) est considéré comme le problème le plus important dans l'étude des systèmes compartimentaux linéaires à coefficients constants, dans le chapitre précédent (chapitre 3) on a

vu que l'identification de la matrice compartimentale a nécessité la connaissance de l'état de $n-1$ compartiments au moins. La structure particulière des systèmes caténaire nous a permis de réduire le nombre des compartiments nécessaires pour pouvoir identifier la matrice compartimentale, et de proposer une méthode qui permet de résoudre ce problème à partir des mesures effectuées sur le premier compartiment si le diagramme associée au système étudié est fortement vectoriellement connexe.

4.2.1 Identification d'un système caténaire à partir d'un seul compartiment mesuré

Nous nous intéressons, dans cette partie, au développement d'une méthode simple et générale pour l'identification d'un système compartimental ouvert qui a un graphe sagittal fortement vectoriellement connexe. à partir des mesures effectuées sur le compartiment principal. Considérons un système caténaire ouvert à n compartiments qui est régi par le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = -(k_{12} + k_{1e})x_1(t) + k_{21}x_2(t) \\ \frac{dx_i(t)}{dt} = k_{(i-1)(i)}x_{i-1}(t) - (k_{(i)(i-1)} + k_{(i)(i+1)})x_i(t) + k_{(i+1)i}x_{i+1}(t) \quad \text{pour } i \in \{2, \dots, n-1\} \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = k_{(n-1)n}x_{n-1}(t) - k_{n(n-1)}x_n(t) \\ x_1(t_0) = a \quad x_i(t_0) = 0 \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Remarque 4.2 *Sachant que le graphe sagittal de la matrice compartimentale d'un système caténaire est fortement vectoriellement connexe alors :*

$$k_{ij} \neq 0 \quad \text{pour } i = j, i = j-1, i = j+1$$

les valeurs propres $\lambda_i, (i = 1, \dots, n)$ sont supposées toutes distinctes, réelles et strictement négatives.

Les mesures effectuées sur le compartiment principal permettent de minimiser la fonctionnelle J introduite par Y.Cherruault (voir [?, 6])

$$J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^m (x_1(t_k) - \sum_{j=1}^n \beta_j^1 e^{\lambda_j t_k})^2 \quad (4.2)$$

Soit :

$$\min J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{1*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*). \quad (4.3)$$

Les relations (3.2) se simplifient dans le cas d'un système caténaire à :

$$\begin{cases} \lambda_j^* \beta_j^{1*} = k_{11} \beta_j^{1*} + k_{21} \beta_j^2 \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \lambda_j^* \beta_j^2 = k_{12} \beta_j^{1*} + k_{22} \beta_j^2 + k_{32} \beta_j^3 \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \lambda_j^* \beta_j^i = k_{(i-1)i} \beta_j^{i-1} + k_{ii} \beta_j^i + k_{(i+1)i} \beta_j^{i+1} \\ j \in \{1, \dots, n\}, i \in \{3, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \lambda_j^* \beta_j^n = k_{(n-1)n} \beta_j^{(n-1)} + k_{nn} \beta_j^n \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.7)$$

Lemme 4.1

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^i = 0 \quad \text{Pour } i \text{ fixé dans } \{3, \dots, n\}, \forall l, i-l \geq 2 \quad (4.8)$$

Démonstration : Pour démontrer le lemme 4.1 on utilise une démonstration par récurrence. Cas de $l = 1$: il suffit de sommer sur j les équations de système 4.6 et 4.7, on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^i = k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n \beta_j^{i-1} + k_{ii} \sum_{j=1}^n \beta_j^i + k_{(i+1)i} \sum_{j=1}^n \beta_j^{i+1}$$

D'après la condition initiale on déduit que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^i = 0 \quad \forall i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^n = k_{(n-1)n} \sum_{j=1}^n \beta_j^{(n-1)} + k_{nn} \sum_{j=1}^n \beta_j^n$$

D'après la condition initiale on déduit que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^n = 0$$

Supposons que 4.8 soit vraie pour tout $k < i-2$ et montrons qu'elle est vraie pour $k+1$; ($k+1 \leq i-2$).

Multiplions chaque équation j dans les systèmes 4.6 et 4.7 par $(\lambda_j)^{i-3}$ puis sommons par rapport à j

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{i-2} \beta_j^i = k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{i-3} \beta_j^{i-1} + k_{ii} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{i-3} \beta_j^i + k_{(i+1)i} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{i-3} \beta_j^{i+1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on déduit que

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{i-2} \beta_j^i = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{n-2} \beta_j^n = k_{(n-1)n} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{n-3} \beta_j^{n-1} + k_{nn} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{n-3} \beta_j^n$$

D'après l'hypothèse de récurrence on déduit que

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j^*)^{n-2} \beta_j^n = 0$$

Lemme 4.2

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^1 = k_{11} a \quad (4.9)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^i = \left(\prod_{l=1}^{i-1} k_{l(l+1)} \right) a \quad i \in \{2, \dots, n\} \quad (4.10)$$

Démonstration : Pour montrer :

i) (4.9) il suffit de sommer les équations du système 4.4 par rapport à j .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^1 &= \sum_{j=1}^n k_{11} \beta_j^1 + \sum_{j=1}^n k_{21} \beta_j^2 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^1 &= k_{11} \sum_{j=1}^n \beta_j^1 + k_{21} \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \end{aligned}$$

La condition initiale permet de conclure que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^1 = k_{11} a$$

ii) (4.10) on utilise une démonstration par récurrence.

Cas $i=2$:

Une sommation des équations (4.5) sur j donne :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2 &= \sum_{j=1}^n k_{12} \beta_j^{1*} + \sum_{j=1}^n k_{22} \beta_j^2 + \sum_{j=1}^n k_{32} \beta_j^3 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2 &= k_{12} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1*} + k_{22} \sum_{j=1}^n \beta_j^2 + k_{32} \sum_{j=1}^n \beta_j^3\end{aligned}$$

La condition initiale permet de conclure que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2 = k_{12} a$$

Supposons que (4.10) soit vraie jusqu'à l'ordre i et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $i+1$, ($i+1 \leq n$)

Remarque 4.3 Pour le cas où $i+1 = n$ on pose par convention que : $k_{(n+1)n} = 0$

En multipliant chaque équation j du système 4.6 par $\lambda_j^{*(i-1)}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_j^{*i} \beta_j^{i+1} = k_{i(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{(i)} + k_{(i+1)(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+1} + k_{(i+2)(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+2} \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Une sommation des équations obtenues sur j , donne

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^{i+1} &= \sum_{j=1}^n k_{i(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^n k_{(i+1)(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+1} + \sum_{j=1}^n k_{(i+2)(i+1)} \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+2} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^{i+1} &= k_{i(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{(i)} + k_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+1} + k_{(i+2)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+2}\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{(i)} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} k_{l(l+1)}\right) a$

$$\text{Et d'après le lemme 4.1 on a : } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{i+1} = 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{i+2} = 0 \end{cases}$$

Donc on déduit que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^{i+1} = k_{i(i+1)} \left(\prod_{l=1}^{i-1} k_{l(l+1)}\right) a = \left(\prod_{l=1}^i k_{l(l+1)}\right) a$$

Proposition 4.2 Soient $\min J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{1*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$.
 Et A une matrice compartimentale caténaire à graphe sagittal fortement vectoriellement connexe Alors on a les relations suivantes :

$$k_{11} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{1*}} \quad (4.11)$$

$$k_{21} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{*1} - k_{11} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{*1}}{k_{12} a} \quad (4.12)$$

$$\beta_j^2 = \frac{\lambda_j^* \beta_j^{*1} - k_{11} \beta_j^{1*}}{k_{21}} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.13)$$

Démonstration :

Pour montrer :

i)(4.11) : Il suffit de sommer les relations du système 4.4 par rapport à j

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*} = k_{11} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1*} + k_{21} \sum_{j=1}^n \beta_j^2$$

Rappelons que $\sum_{j=1}^n \beta_j^2 = 0$ et $\sum_{j=1}^n \beta_j^{1*} = a$

$$\text{Donc on obtient la relation : } k_{11} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{1*}}$$

ii)4.12 : Il suffit de multiplier chaque équations j du système 4.4 par λ_j^* .

$$\begin{cases} \lambda_j^{*2} \beta_j^{1*} = k_{11} \lambda_j^* \beta_j^{1*} + k_{21} \lambda_j^* \beta_j^2 \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.14)$$

On somme ces équations par rapport à j , on obtient alors la relation :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{1*} = k_{11} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*} + k_{21} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2$$

à partir de la relation obtenue et du lemme 4.2 on déduit que :

$$k_{21} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{*1} - k_{11} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{*1}}{k_{12} a}$$

i) 4.13 : Il suffit d'utiliser les relations du système 4.4

$$\lambda_j^* \beta_j^{1*} = k_{11} \beta_j^{1*} + k_{21} \beta_j^2 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\beta_j^2 = \frac{\lambda_j^* \beta_j^{1*} - k_{11} \beta_j^{1*}}{k_{21}} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Théorème 4.1 Soient $\min J(\beta_1^1, \dots, \beta_n^2, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = J(\beta_1^{1*}, \dots, \beta_n^{2*}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$.

Et A une matrice compartimentale caténaire à graphe sagittal fortement vectoriellement connexe.

Alors $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$ on a les relations suivantes :

$$k_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^i - k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^{(i-1)}}{\prod_{l=1}^{(i-1)} k_{l(l+1)} a} \quad (4.15)$$

$$k_{(i+1)i} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^i - k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^{i-1} - k_{ii} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^i}{\prod_{l=1}^i k_{l(l+1)} a} \quad (4.16)$$

$$\beta_j^{(i+1)} = \frac{\lambda_j^* \beta_j^i - k_{(i-1)i} \beta_j^{(i-1)} - k_{ii} \beta_j^i}{k_{(i+1)i}} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.17)$$

Démonstration Pour montrer :

i) 4.15 : On utilise une démonstration par récurrence sur i :

– $i = 1$ Il suffit de multiplier chaque relation J de 4.5 par λ_j^* pour obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_j^{*2} \beta_j^2 = k_{12} \lambda_j^* \beta_j^{1*} + k_{22} \lambda_j^* \beta_j^2 + k_{32} \lambda_j^* \beta_j^3 \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.18)$$

Ensuit sommer ces relations sur j , on obtient alors la relation :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^2 = k_{12} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*} + k_{22} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2 + k_{32} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^3$$

D'après le lemme 4.1 on sait que $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^3 = 0$

Et d'après le lemme 4.2 on a : $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^2 = k_{12} a$

Alors on déduit que :

$$k_{22} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^2 - k_{12} \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^1}{k_{12} a}$$

Supposons que la relation 4.15 soit vraie jusqu'à l'ordre i et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $i+1$ ($i+1 \leq n-1$)

En multipliant chaque relation j dans 4.6 par $\lambda_j^{*(i)}$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)} = k_{(i)(i+1)} \lambda_j^{*i} \beta_j^i + k_{(i+1)(i+1)} \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{(i+1)} + k_{i+1(i+2)} \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{i+2} \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Ensuit on somme les relations obtenues par rapport à j , on obtient alors la relation :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)} = k_{(i)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^i + k_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{(i+1)} + k_{(i+1)(i+2)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{i+2}$$

D'après le lemme 4.1 et 4.2 on à : $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{i+2} = 0$

et $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^{i+1} = \left(\prod_{l=1}^i k_{l(l+1)} \right) a$

Alors on déduit que :

$$k_{(i+1)(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)} - k_{(i)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i)} \beta_j^i}{\left(\prod_{l=1}^i k_{l(l+1)} \right) a}$$

ii)4.16 : On utilise une démonstration par récurrence sur i .

Cas du $i = 2$ Il suffit de multiplier chaque relation j du 4.5 par λ_j^{*2} . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_j^{*3} \beta_j^2 = k_{12} \lambda_j^{*2} \beta_j^{1*} + k_{22} \lambda_j^{*2} \beta_j^2 + k_{32} \lambda_j^{*2} \beta_j^3 \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.20)$$

ensuite on somme les relations obtenues sur j , on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*3} \beta_j^2 = k_{12} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{1*} + k_{22} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^2 + k_{32} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^3$$

on rappelle que : $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^3 = k_{23} k_{12} a$ Alors on déduit que :

$$k_{32} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*3} \beta_j^2 - k_{12} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{1*} - k_{22} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^2}{2 a \left(\prod_{l=1}^2 k_{l(l+1)} \right)}$$

supposons que la relation 4.16 soit vraie jusqu'à l'ordre i ($i \leq n - 2$) et montrons qu'elle est vraie à l'ordre de $i + 1$

En multipliant chaque relation j du 4.16 par λ_j^{*i+1} , on obtient alors les relations :

$$\begin{cases} \lambda_j^{*(i+2)} \beta_j^{(i+1)} = k_{(i)(i+1)} \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^i + k_{(i+1)(i+1)} \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)} + k_{(i+2)(i+1)} \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{i+2} \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4.21)$$

La somme des relations obtenues par rapport à j donne :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+2)} \beta_j^{(i+1)} = k_{(i)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^i + k_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)} + k_{(i+1)(i+2)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{i+2}$$

D'après le lemme 4.2 on a : $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{i+2} = \left(\prod_{l=1}^{i+1} k_{l(l+1)} \right) a$

Ce qui permet de calculer la valeur de $k_{(i+2)(i+1)}$

$$k_{(i+2)(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+2)} \beta_j^{(i+1)} - k_{(i)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^i - k_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^{(i+1)}}{\left(\prod_{l=1}^{i+1} k_{l(l+1)} \right) a}$$

iii) 4.17 : La relation 4.16 est déduite directement de 4.5 et 4.6

Pour $i = 2$ on a :

$$\lambda_j^* \beta_j^2 = k_{12} \beta_j^{1*} + k_{22} \beta_j^2 + k_{32} \beta_j^3 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\beta_j^3 = \frac{\lambda_j^* \beta_j^2 - k_{12} \beta_j^{1*} - k_{22} \beta_j^2}{k_{32}} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Pour $i \in \{3, \dots, n-1\}$:

$$\lambda_j^* \beta_j^i = k_{(i-1)i} \beta_j^{i-1} + k_{ii} \beta_j^i + k_{(i+1)i} \beta_j^{i+1} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\beta_j^{i+1} = \frac{\lambda_j^* \beta_j^i - k_{(i-1)i} \beta_j^{i-1} - k_{ii} \beta_j^i}{k_{(i+1)i}} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Corollaire 4.1 *Le système caténaire est identifiable, en mesurant uniquement le compartiment principal.*

En effet, la proposition 4.2 permet :

- D'identifier la première ligne de A c'est-à-dire k_{11} et k_{21} ; ce qui permet de déduire la valeur de $k_{12} = -k_{11} - k_{1e}$, on rappelle que [14] $k_{1e} =$

$$\sum_{j=1}^n n \frac{\beta_j^{*1}}{\lambda_j^*}.$$

- Et d'identifier la deuxième colonne de B matrice des mesures partielles

Le théorème permet à chaque passage de i ; $i = 2, \dots, n$)

- d'identifier k_{ii} et $k_{(i+1)i}$, la valeur de $k_{(i)(i+1)}$ est calculée par la formule $k_{(i)(i+1)} = -k_{(i)(i)} - k_{(i)(i-1)}$.
- Et d'identifier à chaque passage de i ; $i = 2, \dots, n-1$) la colonne numéro $(i+1)$ du matrice des mesures partielles B .

Ce que nous permet d'identifier simultanément pas à pas A et B grâce à l'algorithme suivant basé sur le proposition 4.2 et le théorème 4.1

début d'algorithme

étape 1 (initialisation de l'algorithme)

$$J(\beta_j^{1*}; \lambda_j^*; 1 \leq j \leq n) = \min J(\beta_j^1; \lambda_j; 1 \leq j \leq n).$$

étape 2 :détermination des coefficients.

$$k_{11} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{1*}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{1*}}$$

$$\text{si le système est ouvert } k_{1e} = \frac{-a}{\sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^{1*}}{\lambda_j^*}} \text{ sinon } k_{1e} = 0$$

$$k_{12} = -k_{11} - k_{1e}$$

$$k_{21} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*2} \beta_j^{*1} - k_{11} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \beta_j^{*1}}{k_{11} k_{12} a}$$

pour j=1 jusqu'à n

$$\beta_j^2 = \frac{\lambda_j^* \beta_1^j - k_{11} \beta_j^{1*}}{k_{21}}$$

fin pour

pour i = 2 jusqu'à (n - 1) faire

$$k_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-1)} \beta_j^i - k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i-2)} \beta_j^{(i-1)}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^i}, \quad k_{i(i+1)} = -k_{ii} - k_{(i-1)i}$$

$$k_{(i+1)i} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^{*(i+1)} \beta_j^i - k_{(i-1)i} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^{i-1} - k_{ii} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*i} \beta_j^i}{\prod_{l=1}^{(i-1)} k_{l(l+1)} a}$$

pour j=1 jusqu'à n

$$\beta_j^{(n+1)} = \frac{\lambda_j^* \beta_i^j - k_{(i-1)i} \beta_j^{(i-1)} - k_{ii} \beta_j^i}{k_{(i+1)i}}$$

fin pour

fin pour

$$k_{nn} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* - \sum_{j=1}^{n-1} k_{jj}$$

fin Algorithme

Conclusion et perspectives

Deux résultats principaux sont obtenus dans les chapitres 3 et 4, le premier résultat permet d'identifier un système compartimental oscillant à partir de $n - 1$ compartiments mesurés, ce résultat est considéré comme une généralisation de la méthode d'identification directe d'un système compartimental réel à partir de $n - 1$ compartiments mesurés [14].

Dans le chapitre 4, un résultat optimal a été obtenu pour le cas des systèmes caténaux à graphe sagittal fortement vectoriellement connexe. Ce type de système est identifié à l'aide de l'algorithme élaboré à partir de mesures effectuées uniquement sur le premier compartiment.

Cependant d'autres problèmes sont toujours non résolus, comme l'identification d'un système oscillant à partir des mesures effectuées sur $n - 2$ compartiment ou moins, l'identification des systèmes caténaux que leur graphe sagittal n'est pas vectoriellement fortement connexe. L'identification des systèmes mamillaires et l'identification des systèmes caténaux non linéaires.

Bibliographie

- [1] V.Arnold , ÉQuations Différentielles Ordinaires,ÉDitions De Moscou 1974
- [2] K.Arbenez ,A.Wohlhauser.Methode Mathématiques Pour L'ingenieur 2 Compléments d'Analyse.Presse Polytechnique Et Universitaires Romandes
- [3] Audoly S., D.Angio L., On The Identi.Ability Of Linear Compartmental Sys- Tems. A Revisited Transfer Function Approach Based On Topological Pro- Perties. Mathematical Biosciences,66, 201 – 228(1983)
- [4] Y.Cherrualut. Biomathématiques.Collection : Que Sais-Je ? Presses Uni- versitaire De France,1990.
- [5] Y.Cherrualut, P.Loriden. Modélisation Et Méthodes Mathématiques En Biomédecine. Masson, 1977.
- [6] Y.Cherrualut. Optimisation : Méthodes Locales Et Globales. Presses Uni- versitaires De France ,1999.
- [7] M.Chossat,Y.Privat Aide Mémoire Mathématique De L'ingenieur. Edi- tion DUNOD 2010
- [8] M.CROUZEIX,A.L.MIGNOT Analyse Numérique Des Equations Diffé- rentielles. Edition Masson 1984.
- [9] J.P.Demailly , Analyse Numérique Et Equations Différentielles. EDP Sciences 2006
- [10] A.Douneddu ,Analyse 8 Edition Vuibert 1985
- [11] Elizabeth S.Allman, John A.Rhodes , Mathematical Models In Biology An Introduction. CAMBRIDGE University Press 2004
- [12] P.Florant ,G Lauton Et M.Lauton Equations Et Systèmes Différentiels. Edition Vuibert ,1978
- [13] B. Hebri,Et Y.Cherruault, "Contribution To Identification Of Linear Compartmental Systems.", Kybernetes, Vol. 33 No.8, Pp. 1277–1291,2004
- [14] B.Hebri, Et Y.Cherruault, "Direct Identification Of General Linear Compartmental Systems By Means Of $(N - 2)$ Compartments Mea- sures.",Kybernetes, Vol. 34 No7/8, Pp.969 – 982, 2005.

- [15] B.Hebri, Et Y.Cherruault, "New Results About Identifiability Of Linear Open Bicompartemental Homogeneous System And Identification Of Openmichaelis- Menten System By A Linear Approach", Kybernetes, Vol.34 No7/8, Pp. 1159 – 1186, 2005.
- [16] B.Hebri, Ety.Cherruault, "Identification Of A Nonlinear Polynomial Compartmental System Of $(K + L)$ Order By A Linearization Method" MMA, Vol. 11 No2, Pp. 149-160, 2006
- [17] B.Hebri, "Sur Le Problème Inverse D'identification Dans Les Systèmes D'évolution En Analyse Compartmental Linéaire, Application Au Système Non Linéaires, USTHB 2006
- [18] A.Khefif, A Weak Stable Methode For Linear Integral Equation Of The First Kind Kybernetes 2001
- [19] A.Mohammedi Systemes A Compartiments Deterministes , Ecole Polytechnique Federale De Lausanne, Département De Mathématique 1990 .
- [20] F.Jedrzejewski, Introduction Aux Méthodes Numériques, Springer Verlag France, Paris 2005
- [21] D.Kincaid , W.Cheney Numerical Analysis Mathematics Of Scientific Computing Cole Publishing Company Pacific Grove, California 1991
- [22] C.Guilp MANUEL DE CALCUL NUMERIQUE APPLIQUE. EDP Sciences
- [23] A.Quarteroni, R.Sacco Et F.Saleri ; Numérical Mathematics, Spriger 2000
- [24] H.Roudier, Algèbre Linéaire Cours Et Exercices Vuibert 2008
- [25] E.Süli Et D.Mayers , An Introduction To Numérical Analysis, Cambridge University Press, 2003
- [26] P.Touvel, Algèbre, Dunoud Paris 2005.
- [27] J.Yoccoz , Cours De Topologie Calcul Différentielle Equations Différentielle .Paris Onze Edition, 1994