



Université des Sciences et de la technologie  
Houari Boumediène  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Génie Mécanique

**THESE**

Présentée par

**BOUAICHA FARID**

Pour l'obtention du

**DIPLOME de MAGISTER**

en Génie Mécanique

**Spécialité : Systèmes Thermiques Industriels**

**Thème**

**Etude et modélisation numérique de la phase  
d'allumage d'une flamme de diffusion turbulente.  
Application H<sub>2</sub>/AIR.**

Soutenue le 18 février 2002 devant la commission d'examen composée de

MM. BENMANSOUR S.  
BENTEBBICHE A.H.  
DIZENE R.  
BENKOUSSAS B.  
Mlle. KEHLERAS H.

Professeur  
Chargé de cours  
Maître de conférence  
Chargé de cours  
Maître de conférence

Président.  
Rapporteur.  
Examineur.  
Examineur.  
Examinatrice.

## **Dédicaces**

Je dédie ce travail

A ma mère.

A la mémoire de mon père.

A la mémoire de mes frères Saad et Othmane.

A la mémoire de ma sœur Siham.

A mes frères et mes sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous qui ont contribué à ma formation.

## **Remerciements**

Je tiens tout d'abord à remercier vivement M. Bentebbiche A. Halim d'avoir assuré la direction de cette étude et de m'avoir encourager par ses conseils clairs et efficaces durant toute cette étude.

Je tiens aussi à remercier MM. Benmansour S., Dizene R., Kehleras H. et Benkoussas B. pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de participer au jury de soutenance.

Je remercie toute l'équipe de génie mécanique et tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de cette étude.

Enfin, je remercie fortement mes chers parents, mes frères, mes sœurs et tous ceux qui ont contribué à ma formation.

# Sommaire

Dédicaces

Remerciements

Nomenclature

Résumé

Introduction générale 1

## **Chapitre I Généralités sur la combustion et les flammes**

I.1	Introduction	6
I.2	les flammes laminaires	7
I.2.1	Les flammes laminaires prémélangées	7
I.2.2	Les flammes laminaires de diffusion	8
I.3	Les flammes turbulentes	8
I.3.1	La flamme en écoulement turbulent	9
I.3.2	Caractéristiques de base de la turbulence	9
I.3.2.1	L'énergie cinétique de la turbulence	9
I.3.2.2	L'échelle intégrale de longueur de la turbulence	11
I.3.3	La structure des flammes turbulentes	11
I.3.3.1	La structure des flammes turbulentes de prémélange	12
I.3.3.2	Vitesse de propagation et épaisseur de la flamme	14
I.3.3.3	La structure des flammes de diffusion turbulentes	14
I.3.3.3.1	La flamme de Burke-Schumann	14
I.3.3.3.2	Les différents types de flammes de diffusion turbulente	15
I.3.4	L'influence de la turbulence sur la flamme	18
I.4	Stabilisation des flammes	18
I.4.1	Stabilisation des flammes de prémélange turbulentes	18
I.4.2	Stabilisation des flammes de diffusion turbulentes	19
I.5	Allumage d'une flamme	19
I.5.1	Le phénomène d'allumage	19
I.5.2	Allumage d'une flamme de diffusion turbulente	20
I.6	Modélisation de la combustion turbulente	20

I.6.1	Introduction	20
I.6.2	Les modèles utilisant le concept de flammelettes	21
I.7	Quelques définitions de base de la combustion et de la turbulence	23

## **Chapitre II**

### **Equations de base et modélisation**

II.1	Introduction	26
II.2	Les équations de bilan de l'aérothermochimie	27
II.3	Modélisation de la turbulence	29
II.3.1	Les équations de conservation moyennées	30
II.3.2	Les modèles de fermeture	31
II.3.2.1	Modèles à concept de viscosité turbulente	31
II.3.2.2	Le modèle K- $\epsilon$	32
II.4	Modélisation de la combustion	33
II.4.1	Combustion à réaction chimique infiniment rapide	33
II.4.2	Le modèle de flamme cohérente CFM	35
II.4.2.1	Régime des flammelettes	35
II.4.2.2	Relation de base du modèle CFM	35
II.4.2.3	Modélisation de l'étirement	37
II.4.2.4	Modélisation du terme de disparition	39
II.4.2.5	Calcul du taux de consommation des flammelettes	40
II.4.2.6	La chaleur dégagée par la réaction	40
II.5	Modélisation de l'allumage et valeur initiale de la densité de surface de flamme	41
II.6	Système d'équations modélisées des bilans moyens	42
II.6.1	Equations modélisées	42
II.6.2	Equations de conservation modélisées en coordonnées cartésiennes	43

## **Chapitre III**

### **Modélisation et résolution numériques**

III.1	Introduction	47
III.2	Maillage	47
III.3	Discrétisation des équations	48
III.3.1	Intégration spatiale	49
III.3.2	Les équations discrétisées du mouvement (maillage décalé)	52
III.3.3	Intégration temporelle	53

III.3.1 Linéarisation des termes sources	55
III.4 Résolution numérique	56
III.4.1 Méthode de résolution des équations discrétisées	56
III.4.2 Procédure de marche de la méthode Ligne Par Ligne	57
III.4.3 Algorithme de résolution d'un système tridiagonal (méthode TDMA)	58
III.4.4 Critère de convergence et méthode de relaxation	58
III.4.4.1 Critère de convergence	58
III.4.4.2 Facteur de sous relaxation	59
III.4.5 Equation de correction de la pression	59
III.4.6 Procédure de résolution	62
III.4.7 Configuration et conditions aux limites	62
III.4.7.1 L'influence de la paroi	63
III.4.7.2 Conditions à la paroi pour $k$ et $\epsilon$	65
III.4.7.3 Conditions aux limites	65
III.4.7.4 La quantité de surface de flamme imposée initialement	66
III.4.7.5 Données numériques	66
III.4.8 Structure du code de calcul	68

## **Chapitre IV**

### **Résultats et interprétations**

IV.1 Interprétation des résultats	69
IV.1.1 La densité de surface de flamme initiale	70
IV.1.2 L'influence de la turbulence à l'entrée	71
IV.1.3 L'influence du débit d'air	71
IV.1.4 L'influence de la flamme sur l'écoulement	72
IV.2 Quelques résultats de comparaison	72
IV.3 Ecoulement sans combustion, à froid	74
Conclusion générale	97
Références bibliographiques	99
Annexe 1	103
Annexe 2	105



## Nomenclature

$B_d$	Coefficient du model CFM.
$C_p$	Chaleur massique du mélange. $J.kg^{-1}.K^{-1}$
$C_\mu, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$	Coefficients du model k- $\varepsilon$
$D$	Coefficient de diffusion moléculaire des espèces. $m^2.s^{-1}$
$D_s$	Taux de disparition de surface de flamme. $s^{-1}$
$E_s$	Etirement microscopique. $s^{-1}$
$E_s'$	Etirement macroscopique. $s^{-1}$
$h$	Enthalpie massique. $J.kg^{-1}$
$h_f^\circ$	Enthalpie de formation. $J.kg^{-1}$
$h_t$	Enthalpie totale. $J.kg^{-1}$
$k$	Energie cinétique de la turbulence. $m^2.s^{-2}$
$l_m$	Echelle de longueur. m
$l_t$	Echelle intégrale de la turbulence. m
$M$	Masse molaire du mélange. $kg.mol^{-1}$
$m_k$	Masse molaire de l'espèce k. $kg.mol^{-1}$
$P$	Pression. Pa
$Pr$	Nombre de Prandtl.
$s$	Coefficient stœchiométrique.
$Sc$	Nombre de Schmidt.
$T$	Température. K
$t$	Temps. s
$u$	Vitesse axiale. $m.s^{-1}$
$u', u''$	Fluctuations des vitesses. $m.s^{-1}$
$v$	Vitesse transversale. $m.s^{-1}$
$V_{dk}$	Taux de consommation de l'espèce k par unité de surface de flamme. $m.s^{-1}$
$x, y, z$	Coordonnées spatiales. m
$Y_k$	Fraction massique de l'espèce k.
$\alpha, \alpha'$	Coefficients du model CFM.
$\varepsilon$	Taux de dissipation de la turbulence. $m^2.s^{-3}$
$\lambda$	Coefficient de conductivité thermique. $J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}$
$\mu_l, \mu_t$	Viscosité dynamique laminaire, turbulente du fluide. $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide. $m^2.s^{-1}$
$w_k$	Taux chimique de réaction de l'espèce k. $s^{-1}$
$\rho$	Masse volumique du fluide. $kg.m^{-3}$
$\Sigma$	Surface de flamme par unité de volume. $m^{-1}$
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Coefficients du model k- $\varepsilon$ .
$\sigma_\Sigma$	Nombre de Schmidt pour la surface de flamme.
$\tau_{\alpha\beta}$	Tenseur des contraintes visqueuses. $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$(\bar{\quad})$	Surlignage: moyenne statistique non pondérée.
$(\tilde{\quad})$	Tilde: moyenne pondérée par $\rho$ .
$k$	Indice indiquant les n constituants du mélange.
$F$	Indice indiquant le combustible.
$O$	Indice indiquant l'oxydant.
$P$	Indice indiquant les produits.



## **Résumé**

Le délai d'allumage est en pratique un facteur très important et sa détermination est nécessaire pour assurer la stabilité et le bon fonctionnement des systèmes de combustion. Il est donc nécessaire de connaître de façon précise le temps d'allumage pour atteindre un régime de combustion stable. Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié numériquement la phase d'allumage d'une flamme de diffusion turbulente. Cette étude se base, du côté combustion, sur le concept de flammelettes en utilisant le modèle de la flamme cohérente CFM, qui emploie une équation de transport pour la densité de surface de flamme et, du côté turbulence, sur le concept des grandeurs moyennes au sens statistique en utilisant la moyenne de Favre avec le modèle  $k-\varepsilon$  pour la fermeture de système d'équations de conservation. Nous présentons les principaux calculs d'allumage, en se basant sur le temps d'allumage de stabilisation d'une flamme de diffusion. Ces résultats sont en très bon accord avec d'autres calculs.

## **Summary**

The delay of the ignition is when put into practice a very important factor and its determination is necessary to assure the stability and the good working of the combustion systems. So, it is important to know accurately the time of the ignition to reach a steady combustion regime. During our work, we studied numerically the ignition of a turbulent diffusion flame. This study is based on the flamelets concept by using a coherent flame model CFM that uses a transport equation for the flame surface density, this on what concerns the combustion side. On what concerns the turbulence side, it is based on the concept of the time-averaged quantity using the Favre averaged and the  $k-\varepsilon$  model for the closing of the conservation equation system. We are presenting the most important calculations of ignition, that based on the time of the ignition of the diffusion flame's stabilisation. These results are in keeping with other calculations.

## Introduction générale

La combustion et les flammes sont en général les moyens principaux de l'énergie, essentiellement la production de l'énergie calorifique, qui provient principalement d'un réarrangement des atomes, et l'énergie cinétique qui provient principalement des mouvements de convection et des transferts par diffusion des espèces dans le milieu gazeux. La combustion est utilisée dans de nombreux systèmes industriels tels que les chaudières, les centrales thermiques, les moteurs automobiles, les moteurs avions, les moteurs bateaux, les moteurs aéronautiques etc.

La combustion est un phénomène très compliqué, mais avec une simple définition, la combustion est un ensemble de phénomènes de consommation du mélange frais et de dégagement d'énergie et de produits brûlés. La combustion, avec une description plus profonde, fait intervenir plusieurs phénomènes chimiques et physiques assez différents et qui interviennent conjointement et de façon couplée. A la base de ces phénomènes, se trouve principalement le phénomène chimique, le phénomène physique et le phénomène mécanique. Le phénomène chimique de la combustion est représenté par de nombreuses réactions chimiques qui ont lieu simultanément. Le phénomène physique de la combustion est représenté par les transferts de chaleur par conduction de chaleur et par rayonnement quelques fois, souvent par diffusion par des remous de la turbulence. Toutes ces actions entraînent l'élévation de la propagation et de la température du milieu gazeux. Le phénomène mécanique de la combustion est représenté par les transferts de masse par des mouvements de convection des gaz dans le milieu et par les transferts par diffusion, moléculaire ou turbulente, des espèces dans le milieu. Ces trois phénomènes ou aspects de la combustion se superposent et se combinent dans le milieu gazeux qui serait en propagation en formant ce qu'on appelle la flamme.

La flamme est avant tout une manifestation visible de la combustion, phénomène extrêmement répandu dans la nature, connu de l'homme depuis 500 mille ans sous la dénomination de feu. La combustion se fait au cœur de la flamme, sous forme d'un ensemble de réactions chimiques entre les espèces combustibles (l'hydrogène par exemple) et oxydantes (l'oxygène de l'air) au sein de la flamme et qui sont responsables de la libération de la chaleur et des émissions lumineuses des atomes et radicaux en produits (par exemple avec le méthane,

on peut constater à la base de la flamme une légère couleur bleue, due à l'émission de lumière visible par le radical CH). Le produits de toutes ces réactions chimiques est la formation de  $\text{CO}_2$  et de vapeur d'eau, en même temps que l'élévation de la température du milieu. Cependant, certains cas de flammes mettent en jeu des phénomènes secondaires qui sont essentiellement des phénomènes physiques de changement d'état (liquéfaction et vaporisation) et des phénomènes de nucléation des particules et de leur coagulation (ces phénomènes se voient très bien dans la flamme d'une bougie naturelle). Ces derniers phénomènes sont très importants si l'on s'intéresse spécifiquement au dégagement de fumées par les flammes.

Dans les cas pratiques, généralement, l'écoulement des gaz dans les flammes et leur voisinage est un écoulement turbulent, donc une flamme turbulente. La flamme turbulente se trouve dans plusieurs foyers dans l'industrie tels que le foyer d'un statoréacteur où l'écoulement du mélange gazeux est à forte vitesse (environ 50 m/s), dans les turboréacteurs, dans les moteurs à combustion interne, dans les brûleurs à gaz industriels et dans d'autres systèmes pratiques. Les phénomènes chimiques de combustion se produisent surtout à des échelles très petites, fluctuant continuellement à cause de la turbulence. La turbulence arrange bien les phénomènes dans les flammes, elle joue un rôle si bénéfique dans l'accélération des processus de diffusion qui sont très importants. La diffusion moléculaire, de la chaleur et des espèces, réchauffe les gaz dans toute la zone amont de la flamme et y apporte des espèces radicalaires qui déclencheront plus tard les réactions de combustion. De plus, la turbulence pousse bien à mélanger le gaz comburant avec le gaz combustible et aussi gaz brûlés. La turbulence permet donc d'accroître considérablement l'énergie dégagée par la combustion. Cependant, la combustion de son côté, par l'effet d'expansion des gaz, provoque en général des mouvements qui modifient de façon complexe la turbulence dans la flamme et par conséquent provoque des fluctuations de températures, de concentrations des espèces chimiques et de masse volumique.

Dans la flamme, les différents phénomènes physico-chimiques, mentionnés ci-avant, ne se produisent pas au même endroit et ne se combinent pas toujours de la même façon. La flamme donc a une structure bien définie, et sa forme géométrique peut varier suivant le cas. En fonction de ces considérations et plus précisément la manière de réactions chimiques des deux types d'espèces, le comburant et le carburant, deux grands types de flammes sont distingués et qui sont les flammes de prémélange et les flammes de diffusion, appelées aussi flammes non prémélangées. Dans le cas des flammes de prémélange, les réactions chimiques nécessitent

soit ces deux types d'espèces déjà mélangées à l'avance soit un seul corps chimique (un corps explosif) ; un exemple pratique de flamme de prémélange se trouve dans les moteurs à explosion à allumage commandé. Dans le cas des flammes de diffusion, les deux types d'espèces proviennent d'endroits différents, autrement dit le combustible et le comburant sont amenés séparément dans la flamme ; deux exemples très simples de ce type sont la flamme de bougie naturelle et la flamme-jet, constituée par un jet de gaz à forte vitesse dans un écoulement parallèle d'air à vitesse plus faible.

Pour une flamme de prémélange comme pour une flamme de diffusion, l'effet de la turbulence sur la flamme se traduit par un plissement et un étirement local de la zone de réaction et par conséquent des modifications dans la structure de la flamme. On peut distinguer plusieurs structures de flammes dans les deux types : pour la flamme de prémélange, on peut trouver des flammes plissées, des flammes épaissies, des flammes plissées-épaissies, et pour la flamme de diffusion, on peut trouver des flammelettes plissées et étirées, des flammelettes perturbées, des flammelettes épaissies. On peut donner pour toutes ces structures de flammes, et pour d'autres qui peuvent exister, un régime de structures ou de flammes. Les analyses et les hypothèses ont établi que lorsque les échelles de la turbulence, échelles de temps de convection et de diffusion, sont toutes plus grandes que l'échelle de temps de la réaction chimique, la flamme est composée de flammelettes ou flammes plissées. C'est le régime des flammelettes : c'est un régime qui s'applique bien avec la considération que les réactions chimiques sont très rapides par rapport à tous les processus de la dynamique des fluides, y compris la turbulence ; une chimie infiniment rapide.

En général, la combustion ne peut avoir lieu sans qu'il y ait un allumage. L'allumage en pratique est indispensable pour déclencher les réactions chimiques de la combustion. L'allumage de la combustion en pratique peut avoir lieu de façon incontrôlée, par exemple dans les incendies et dans les explosions ou de façon contrôlée comme sur les brûleurs industriels, dans les moteurs fusées, dans les moteurs à combustion interne. Par exemple, dans les moteurs à combustion interne, l'allumage est commandé électrique dans un «moteur à bougie» ou par compression adiabatique dans un «moteur Diesel».

L'allumage consiste à enflammer un mélange qui va se développer par la suite en une flamme stabilisée. Cette inflammation se fait en apportant de l'énergie, pendant un temps donné, en un point ou dans un volume du milieu gazeux disponible où combustible et comburant sont plus ou moins bien prémélangés. Plusieurs moyens sont utilisés en pratique pour apporter cette énergie d'inflammation, on peut citer des exemples pratiques tels que : un

apport d'énergie par étincelle, par un petit jet de gaz chauds, par un pulse d'un laser convenablement focalisé. Tous ces moyens ne sont pas simples et peuvent créer des processus compliqués tels que des déséquilibres au niveau moléculaire, des mouvements de gaz, des espèces ionisées etc.

Pour calculer l'allumage, nous devons représenter cet apport d'énergie de façon simple mais cependant réaliste. C'est ce qui a été fait dans notre travail par l'intermédiaire du modèle de la flamme cohérente CFM, ce modèle introduit une densité de surface de flamme qui sera utilisée initialement dans les calculs pour représenter cet apport d'énergie d'allumage. En effet, l'allumage de calcul est obtenu en imposant initialement pendant un temps une quantité de surface de flamme dans la maille qui correspond à l'endroit pratique de l'allumage.

Le phénomène de l'allumage est un problème complexe, le détail des processus d'allumage reste jusqu'à maintenant incomplet et il porte l'intérêt des chercheurs. Le phénomène d'allumage peut suivant les conditions, se maintenir de manière autonome ou se ralentir et cesser progressivement. Les débits des réactifs, la position de l'allumeur, la géométrie de la chambre de combustion sont des conditions particulièrement importantes, de même que les températures des deux types d'espèces (comburant et carburant) ou la pression. Donc la phase transitoire, correspondant à l'initiation de la combustion, est critique introduisant des difficultés supplémentaires à la combustion stable. La littérature et les recherches disponibles ont conduit à distinguer trois phases au cours de l'allumage, avec lesquelles nous nous basons dans notre travail :

- La Phase initiale d'allumage ou d'inflammation, elle se produit grâce à un apport d'énergie externe où une première poche de gaz va se développer en un front de flamme.
- La phase de développement de la flamme, c'est la propagation de ce front de flamme à travers le milieu hétérogène.
- La phase de stabilisation de la flamme de diffusion. Au cours de cette phase, plusieurs phénomènes agissent sur les flammelettes, essentiellement l'étirement et les phénomènes d'extinction de la flamme.

Les problèmes de la combustion, et en particulier le phénomène d'allumage, se traitent actuellement en grande partie par des méthodes expérimentales et par la modélisation et la simulation numérique. Cependant et sans diminuer de la valeur et de l'exactitude des méthodes expérimentales, la simulation numérique est devenue indispensable vu le nombre d'essais de mise au point et donc des coûts de conceptions industrielles pour chaque cas de problème que la méthode expérimentale demande. Dans le cadre de cette thèse, nous avons

traité numériquement ce problème d'allumage, allumage d'une flamme de diffusion turbulente. Quelques considérations sont nécessaires pour étudier ce problème, essentiellement est de considérer une chimie infiniment rapide et une combustion dans le régime des flammelettes ainsi que le calcul concerne des grandeurs moyennes au sens statistique.

L'étude sera présentée dans cette thèse en quatre chapitres. Le premier chapitre sera consacré aux généralités sur la combustion et les flammes. Nous présenterons essentiellement les différents phénomènes de combustion, de flamme et d'allumage. Nous citerons aussi les modèles qui sont développés et utilisés pour étudier les problèmes de la combustion turbulente.

Le deuxième chapitre sera réservé aux équations de base, qui sont tirées des équations classiques de l'aérothermochimie, et modélisation. Nous présenterons également la modélisation de la turbulence en s'intéressant à des quantités moyennes au sens statistique avec la moyenne de Favre, et le modèle  $k-\varepsilon$  pour la fermeture du problème. La modélisation de la combustion sera aussi présentée dans ce chapitre, avec le modèle de la flamme cohérente et le concept des flammes plissées ou flammelettes, tout en respectant une chimie infiniment rapide.

Dans le troisième chapitre nous allons procéder au traitement numérique du problème en question, en commençant par une démonstration détaillée de modélisation numérique en utilisant la méthode des volumes finis et en finissant par une description des méthode, procédure de résolution et le code de calcul utilisés.

Le quatrième et le dernier chapitre fera l'objet des calculs obtenus de notre problème d'allumage d'une flamme de diffusion turbulente. Ces résultats seront représentés sous forme de courbes et de champs et ils seront soutenus par des interprétations.

Enfin, l'étude sera achevée par une conclusion qui mettra en question les améliorations à envisager.

# Chapitre I

## Généralités sur la combustion et les flammes

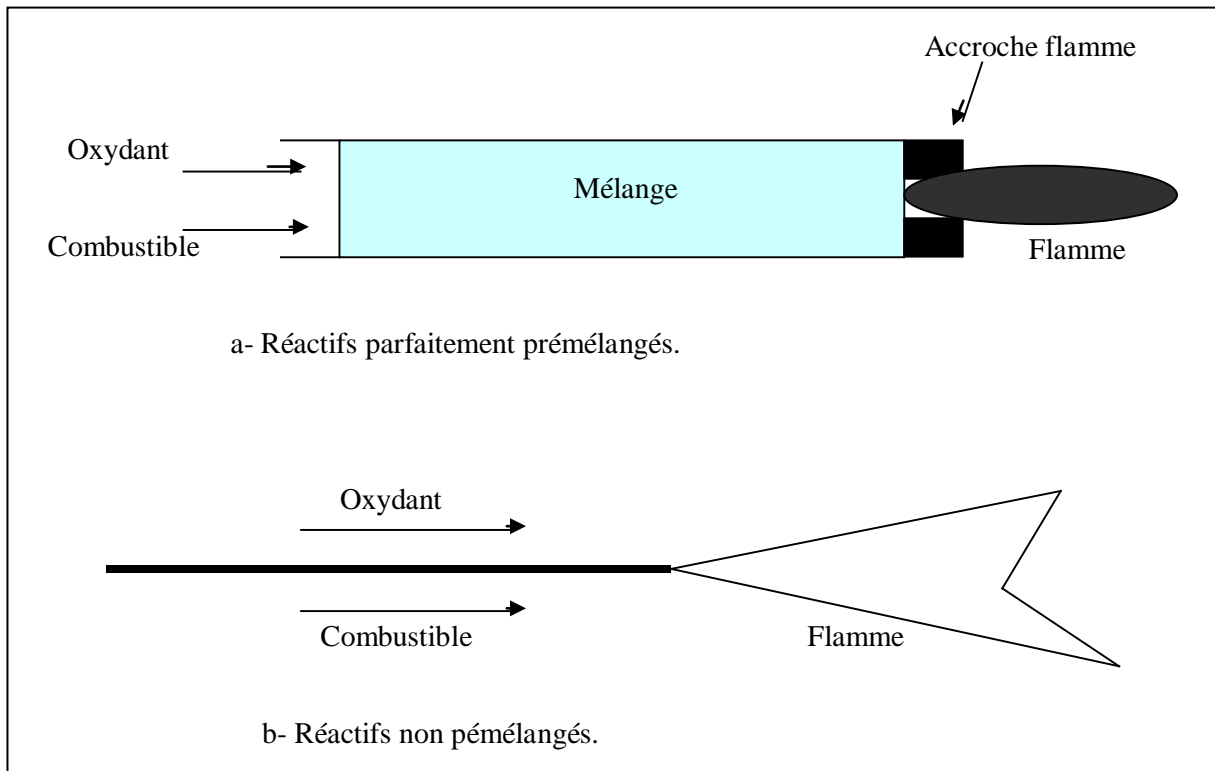
### I.1 Introduction

La combustion est un phénomène très compliqué ; plusieurs phénomènes chimiques, physiques et mécaniques interviennent conjointement et de façon couplée dans la combustion pour garder la vie de la flamme. Ces différents phénomènes sont essentiellement des réactions chimiques qui entraînent une élévation de température du milieu. Cette propagation de température représente les transferts de chaleur par conduction de chaleur, par rayonnement quelquefois et souvent par diffusion par des remous turbulents. Ces transferts de chaleur jouent un rôle primordial, pour échauffer le milieu gazeux où l'air et le combustible sont prémélangés. Les transferts de masse dans la combustion et qui sont des mouvements de convection des gaz et des transferts par diffusion moléculaire ou turbulente, de certaines espèces par rapport à d'autres dans le milieu. Ces derniers transferts sont nécessaires pour amener les réactifs en contact.

Les différents phénomènes physico-chimiques ne se combinent pas toujours de la même façon. De plus, à cause du fait que ces phénomènes ne se produisent pas au même endroit, la flamme a une structure bien définie qui varie suivant les cas. Tous ces cas de structure peuvent être répartis en deux grands types de flammes et qui sont les flammes de diffusion et les flammes de prémélange.

Dans les flammes de diffusion, les réactions chimiques nécessitent la présence de deux types d'espèces différentes : par exemple l'air (oxydant) et l'hydrogène (réducteur), et ces deux types d'espèces proviennent d'endroits différents de l'espace. Dans le cas des flammes de prémélange, les réactions chimiques nécessitent soit un seul corps chimique (qui peut être un corps explosif), soit deux corps différents mais déjà mélangés à l'avance.

Les deux grands types de flammes, flamme de prémélange et flamme de diffusion, sont représentés d'une façon très simple sur la figure(I.1) suivante :



**Figure I.1** : Flamme prémélangée et flamme de diffusion.

## I.2 les flammes laminaires

Les flammes laminaires considèrent un milieu laminaire où les échanges par diffusion turbulente sont pratiquement inexistantes. Ce sont presque uniquement des brûleurs de laboratoire qui peuvent éviter la turbulence, mais ils sont très utiles pour étudier en détail la structure des flammes.

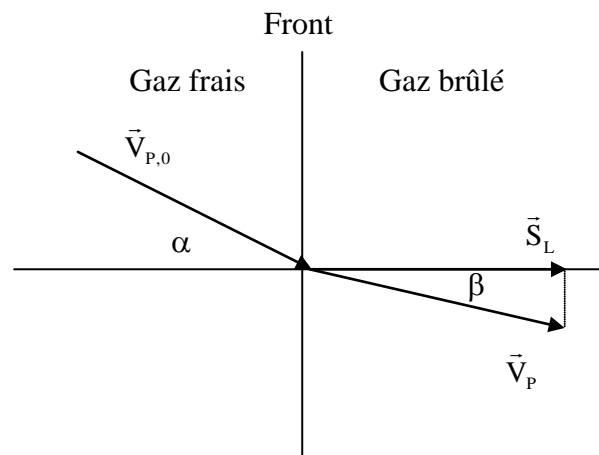
### I.2.1 Les flammes laminaires prémélangées

Dans les flammes de prémélange, le mélange de comburant et de combustible est réalisé avant le passage de la flamme. Par exemple dans un tube, la flamme balaie ce tube à la manière d'une onde solitaire, appelée « onde de combustion », en progressant du milieu brûlé vers le milieu frais.

#### - Propagation du front de la flamme de prémélange

Dans un milieu laminaire prémélangé, la flamme a le plus souvent une très faible épaisseur ; aussi, dans une première approche, on la considère comme nulle. Dans ce cas on représente

la flamme par une surface de discontinuité séparant le milieu frais du milieu brûlé, appelée «front de flamme».



**Figure I.2** : Déviation de la vitesse de propagation  $V_p$  au passage du front de flamme.

La vitesse fondamentale ou normale  $S_L$  de la flamme laminaire est la vitesse la plus représentative du mélange combustible. Cette vitesse dépend de plusieurs paramètres : nature du combustible et du comburant, composition du mélange, pression et température du milieu réactionnel.

### I.2.2 Les flammes laminaires de diffusion

Dans les flammes de diffusion, la combustion se produit en même temps que le mélange entre le gaz combustible et le gaz comburant. Un cas très simple de ce type est celui d'une flamme de briquet à gaz. La flamme de diffusion se caractérise principalement par le fait de présenter une zone de réaction séparant un milieu gazeux où le combustible est mélangé avec des gaz brûlés, d'un côté, et milieu gazeux où le comburant est mélangé avec les gaz brûlés de l'autre côté. Ce type de flamme se rencontre en pratique dans tous les dispositifs et porte l'avantage lorsque le mélange à l'avance du combustible et du comburant est dangereux.

### I.3 Les flammes turbulentes

Les flammes turbulentes se trouvent dans la plupart des systèmes énergétiques dans l'industrie. Par exemple dans les moteurs à combustion interne à allumage commandé, une flamme de prémélange turbulente se propage dans le milieu gazeux à partir d'une étincelle déclenchée au niveau de la bougie. Dans les brûleurs à gaz industriels, un jet de gaz

combustible est souvent injecté au centre d'un écoulement d'air périphérique, de même direction ; après allumage, la combustion se développe sous forme d'une flamme de diffusion turbulente.

### I.3.1 La flamme en écoulement turbulent

Dans une flamme turbulente, la vitesse des gaz, la température et toute autre caractéristique du milieu, mesurées en un point, fluctuent continuellement de façon apparemment aléatoire. La turbulence dépend de plusieurs facteurs ; dans un foyer de statoréacteur par exemple, on peut dire que la turbulence est due à la forte vitesse de l'écoulement entrant ; elle s'est développée dans le canal amont de la chambre à cause des gradients de vitesse aux parois, et à partir d'obstacles tels que les injecteurs, en particulier. Simplement, il suffit d'augmenter le débit de l'écoulement (donc la vitesse) dans un tube pour qu'il devient turbulent. On peut voir cette turbulence avec une simple expérience, en prenant un bec de gaz et en augmentant le débit qui le traverse ; on peut visualiser l'effet de la turbulence sur la flamme. Vue à l'œil, cette flamme a une allure épaisse.

### I.3.2 Caractéristiques de base de la turbulence

La connaissance des propriétés de la turbulence permettra d'expliquer avec suffisamment de détails la structure et le calcul des flammes turbulentes. La turbulence doit être caractérisée au minimum par deux quantités très importantes : l'énergie cinétique de la turbulence et l'échelle de longueur de la turbulence.

#### I.3.2.1 L'énergie cinétique de la turbulence

L'écoulement turbulent se caractérise par des fluctuations aléatoires de la vitesse. La moyenne statistique des composantes de la vitesse est définie par :

$$\bar{V}_B = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_B^{(i)}$$

B représente la composante du vecteur vitesse, B= 1,2,3.

i indice indiquant le numéro de la mesure effectuée.

On peut effectuer une moyenne temporelle, au lieu de la moyenne statistique, qui est valable et souvent employée si l'écoulement est permanent en moyenne. La moyenne temporelle est définie par :

$$\bar{V}_B^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_B(t) dt$$

La variance des fluctuations de  $V_B$  est définie par :

$$\overline{(V_B - \bar{V}_B)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_B^{(i)} - \bar{V}_B)^2$$

On note souvent :  $V'_B = V_B - \bar{V}_B$

L'énergie cinétique de la turbulence,  $k$ , est une caractéristique importante de la turbulence. Elle est la demi somme des trois variances pour les trois composantes de la vitesse. Elle est définie par :

$$\bar{K} = \frac{1}{2} [\overline{V_1'^2} + \overline{V_2'^2} + \overline{V_3'^2}]$$

Dans le cas des flammes, l'écoulement n'est pas incompressible donc il est souvent commode de définir la vitesse par une moyenne pondérée par la masse volumique, moyenne de Favre :

$$\tilde{V}_B = \frac{\rho \bar{V}_B}{\bar{\rho}} = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho^{(i)} V_B^{(i)}}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho^{(i)}}$$

alors :  $V'_B = V_B - \tilde{V}_B$  et  $V_B'^2 = \frac{\overline{\rho V_B'^2}}{\bar{\rho}}$

et

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} [\tilde{V}_1'^2 + \tilde{V}_2'^2 + \tilde{V}_3'^2]$$

### I.3.2.2 L'échelle intégrale de longueur de la turbulence

L'échelle intégrale de longueur de la turbulence est une caractéristique aussi importante que l'énergie cinétique de la turbulence. C'est une quantité qui caractérise l'échelle de longueur des remous ou tourbillons turbulents. Elle représente la taille moyenne des tourbillons turbulents.

On définit la corrélation des fluctuations de vitesses en deux points voisins, dans un milieu turbulent homogène ( $\bar{V}_B$  ne dépend pas de  $X$ ) et isotrope, par :

$$C(|\Delta X|) = \overline{V'_B(\vec{x}) V'_B(\vec{x} + \Delta \vec{x})}$$

L'échelle intégrale de la turbulence est une longueur de corrélation moyenne, définie par :

$$V_B'^2 \cdot \ell_t = \int_0^{\infty} C(|\Delta X|) d|\Delta X|$$

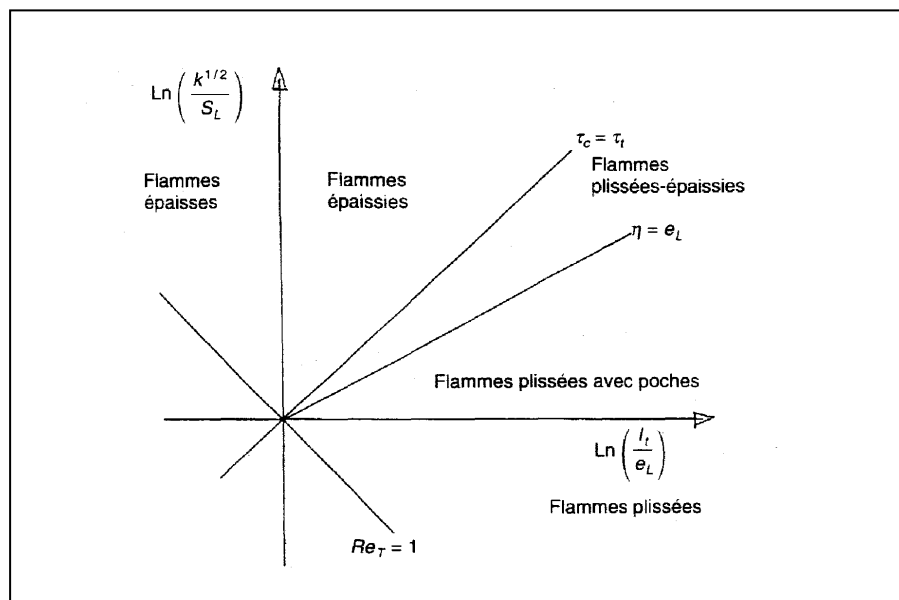
C'est une définition de  $\ell_t$  pour un écoulement aléatoire turbulent. [3],[4]

### I.3.3 La structure des flammes turbulentes

Dans la majorité des cas pratiques, l'écoulement en amont de la flamme comporte au moins des fluctuations de vitesse et de pression à cause des fortes vitesses et des forts gradients de vitesse qui y règnent, ce qui rend la flamme turbulente, même si la flamme était initialement laminaire. La flamme de son côté influence la turbulence par l'expansion des gaz, qui est due à la combustion et qui provoque généralement des mouvements qui modifient de façon complexe la turbulence. Des fluctuations de température, de concentration des espèces chimiques et de masse volumique peuvent avoir lieu dans la flamme au cours de la combustion même si elles n'étaient pas dans l'écoulement amont. Toutes ces considérations et qui se diffèrent dans les deux types de flamme, créent des structures différentes et qui dépendent essentiellement de cette turbulence.

### I.3.3.1 La structure des flammes de prémélange turbulentes

On peut se limiter à trois grandes structures de flammes turbulentes, suivant la valeur de deux nombres caractéristiques :  $k^{1/2} / S_L$  et  $l_t / e_L$  ;  $k^{1/2}$  et  $l_t$  sont les vitesses et longueurs caractéristiques de la turbulence qui règnent dans la flamme au point considéré, et  $S_L$  et  $e_L$  la vitesse fondamentale de propagation et l'épaisseur d'une flamme laminaire plane qui se propagerait dans le mélange considéré. Ces trois grandes structures, qui sont les flammes plissées, les flammes épaissies et les flammes plissées-épaissies, sont définies dans le diagramme de la figure suivante :



**Figure I.3** : Les différentes structures de flammes turbulentes de prémélange [3].

$k$  : énergie cinétique de la turbulence.

$l_t$  : échelle intégrale de la turbulence.

$Re_T$  : nombre de Reynolds de la turbulence.

$\eta$  : échelle de Kolmogorov.

$e_L$  : épaisseur de la flamme laminaire.

$S_L$  : vitesse de propagation laminaire.

$\tau_c$  : temps chimique défini par  $e_L / S_L$ .

$\tau_t$  : temps intégral de la turbulence, dit temps de retournement des tourbillons,  $\tau_t = l_t / k^{1/2}$

### a- Les flammes plissées

La flamme plissée est constituée de flammelettes du type laminaire qui sont plissées par la turbulence. Ce type de flamme est défini lorsque l'épaisseur de la flamme laminaire  $e_L$  reste petite devant l'échelle des plus petites perturbations de vitesse de la turbulence, l'échelle de Kolmogorov,  $\eta$ . A un instant donné, cette flamme se voit presque une ligne séparant des gaz complètement frais de gaz complètement brûlés, avec la présence éventuelle de poches de gaz frais dans les gaz brûlés ou inversement.

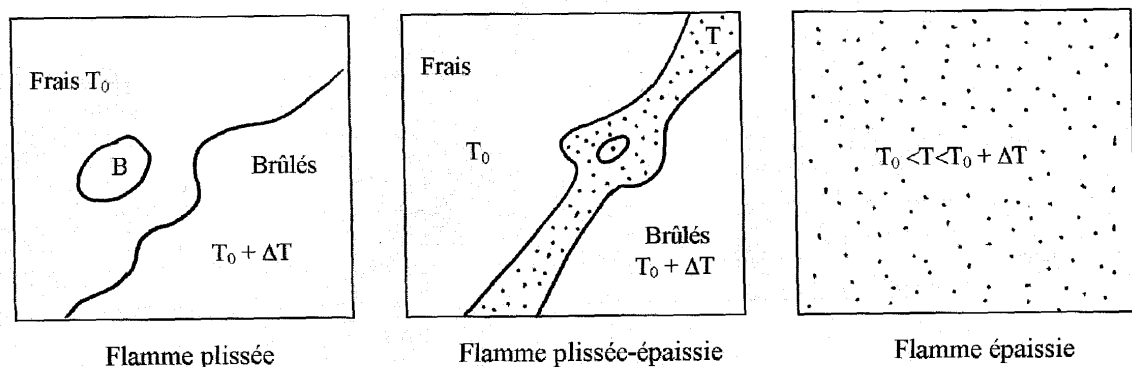
### b- les flammes plissées-épaissies

Lorsqu'on augmente l'énergie de la turbulence  $k$  à  $l_t$  constant de sorte que  $\eta < e_L$ , des interactions entre flammelettes proches se produisent de plus en plus fréquemment. Ces interactions entre flammelettes accroissent localement l'épaisseur de ces dernières au dessus de  $e_L$ . A d'autres endroits, cette épaisseur est au contraire réduite par l'étirement que la turbulence impose à la flammelette. L'étirement trop fort d'une flammelette peut entraîner son extinction à l'endroit où cet étirement est appliqué. Ceci peut être contrôlé par les nombres de Lewis, qui représentent le rapport des vitesses de diffusion de la chaleur et des différentes espèces au sein de la flammelette. En bref, ce type de flammelette peut distinguer de plus une zone de gaz en cours de combustion, d'épaisseur variable et possédant peut être des extinctions locales.

### c- Les flammes épaissies

Lorsqu'on augmente encore l'énergie de la turbulence  $k$  à  $l_t$  constant, la flamme devient très épaisse, beaucoup plus que  $e_L$ . Dans cette flamme, on ne voit plus de gaz brûlés ou frais mais uniquement des gaz en cours de combustion, à un degré plus au moins avancé.

Les trois types de structures de flammes sont schématisés sur la figure suivante :



**Figure I.4 :** Vision instantanée des trois types de structures de flammes.

### I.3.3.2 Vitesse de propagation et épaisseur de la flamme

La vitesse normale de propagation d'une flamme prémélangée laminaire et son épaisseur sont deux caractéristiques très importantes. Ces deux caractéristiques peuvent être définies en moyenne dans le cas d'une flamme turbulente, mais pour quelques cas seulement. Par exemple, dans le régime des flammelettes de type épaissi, on peut déterminer une vitesse intrinsèque de propagation de la flamme turbulente, ainsi qu'une épaisseur intrinsèque. Les vitesses et épaisseur moyennes de la flamme turbulente sont calculées, [3],[25], par :

$$S_T = \alpha \left( \frac{d_t}{\tau_c} \right)^{1/2}$$

$$e_T = S_T \tau_c$$

$d_t$  coefficient de diffusion turbulente, qui est  $d_t = \beta \cdot k^{1/2} \cdot l_t$

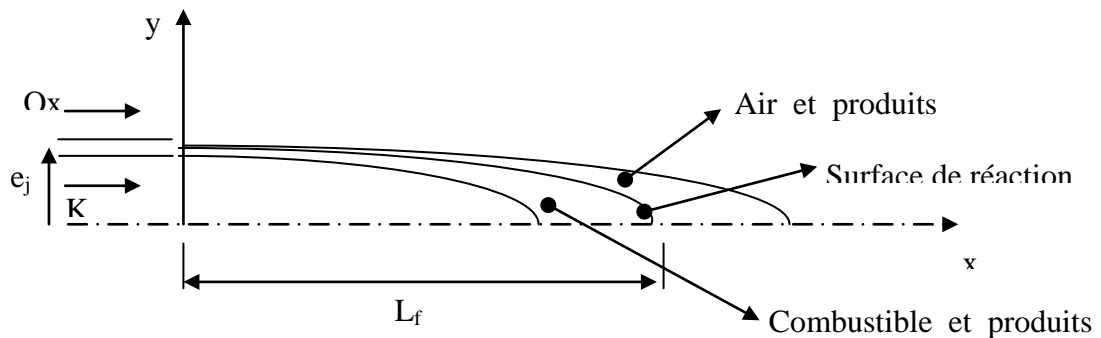
$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Pour les autres types de flammes, il n'existe pas à l'heure actuelle des démonstrations pour la vitesse de propagation et épaisseur intrinsèques. Cependant, on essaie d'étudier cette question par simulation numérique en utilisant des modèles approchés et des hypothèses ; on peut citer par exemple une simulation numérique stochastique, qui suit les déplacements aléatoires dans la turbulence de particules fluides de gaz frais et de gaz brûlés, et représente leur mélange à petite échelle, et les déplacements du front de flammelettes laminaires par des modèles approchés [3].

### I.3.3.3 La structure des flammes de diffusion turbulentes

#### I.3.3.3.1 La flamme de Burke-Schumann

Une description d'une flamme de diffusion laminaire a été proposée par Burke-Schumann en 1928, il s'agit de la flamme entre un jet de gaz plan et un écoulement d'air parallèle ; ces deux écoulements sont sensés avoir le même débit unitaire en chaque point, une seule réaction chimique simple (irréversible) à vitesse infiniment élevée est supposée se produire entre le combustible et le comburant.



**Figure I.5** : Schématisation de la flamme de Burke-Schumann

La zone de flamme est constituée d'une zone de réaction séparant deux zones de diffusion-convection. Cette zone de réaction est d'épaisseur infiniment faible lorsque les réactions de combustion sont représentées par une réaction infiniment rapide. L'épaisseur de la zone de réaction dépend aussi de la position : plus on se déplace à l'aval de la confluence des deux écoulements, plus la flamme est épaisse. Lorsque les réactions chimiques ne sont pas très rapides la flamme peut s'éteindre, soit localement, soit totalement.

### I.3.3.3.2 Les différents types de flammes de diffusion turbulente

Des discussions ont été faites [3] et se résument par :

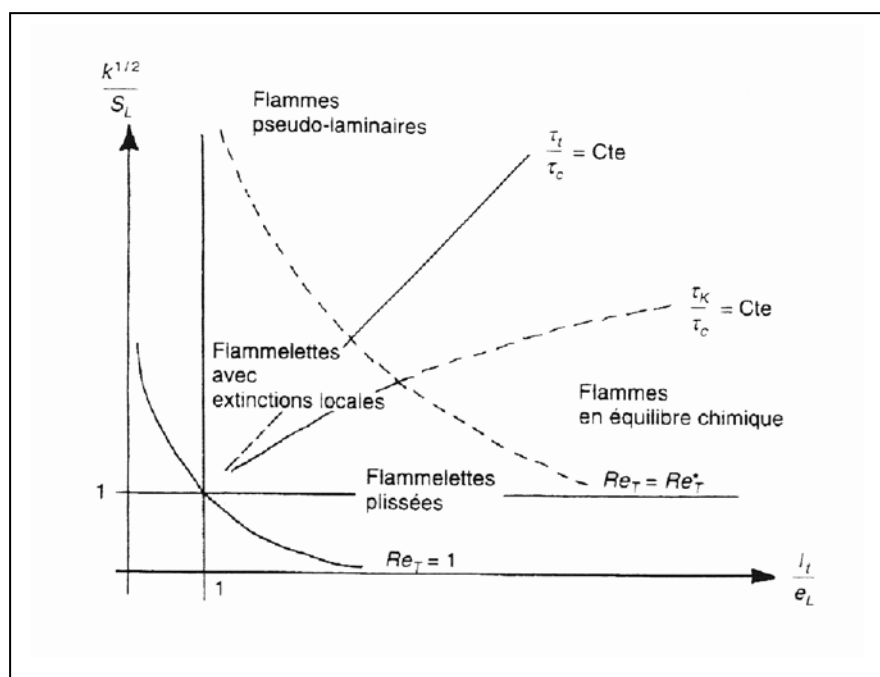
Si on considère la flamme de diffusion laminaire du type Burke-Schumann, et on augmente la turbulence dans l'écoulement : lorsque la turbulence n'est pas trop forte, la structure de la flamme de diffusion turbulente est celle d'une flamme plissée qui est constituée d'une longue flammelette continuellement plissée, étirée et comprimée alternativement par les mouvements turbulents. Lorsque la turbulence devient assez forte, deux phénomènes peuvent se produire :

- La turbulence peut étirer la flammelette de telle façon que celle-ci s'éteigne localement, à l'endroit où elle est suffisamment étirée.
- Une turbulence trop forte va provoquer des interactions entre deux portions de flammelettes. Les interactions à petite échelle de la turbulence, proche de l'épaisseur des flammelettes, entraîneront un épaississement local de celle-ci. Les interactions à grande échelle modifient aussi la structure de la flamme : la flamme n'est plus une surface unique. Lorsque ces interactions deviennent trop nombreuses, on ne peut plus considérer

la flamme comme composée d'une ou plusieurs flammelettes plissées ; ces dernières sont elles mêmes modifiées par la turbulence.

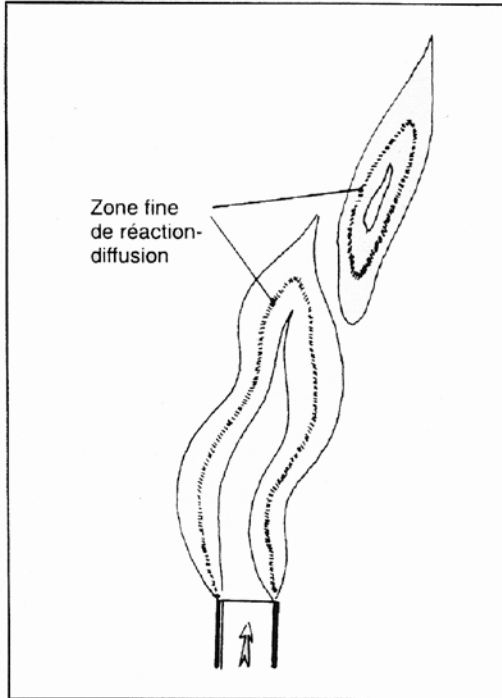
Les différents types de flammes de diffusion turbulentes peuvent être résumés en utilisant encore une fois le diagramme des deux nombres caractéristiques  $k^{1/2} / S_L$  et  $l_t / e_L$ .

Sur la figure I.6, on a tracé le domaine turbulent qui nous intéresse où  $Re_T > 1$ ,  $Re_T = Re_T^*$  qui limite le domaine des flammelettes, et aussi la ligne  $\tau_c / \tau_k = cte$ , qui est relative à l'extinction locale des flammelettes.

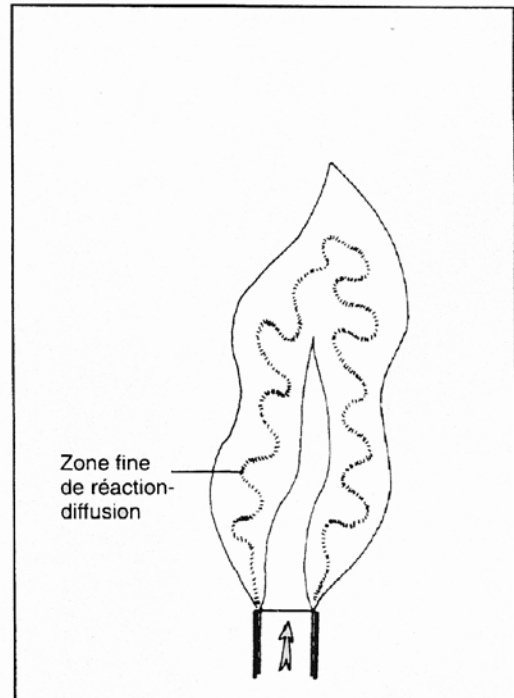


**Figure I.6** : Classification des différents types de flammes de diffusion turbulentes[3].

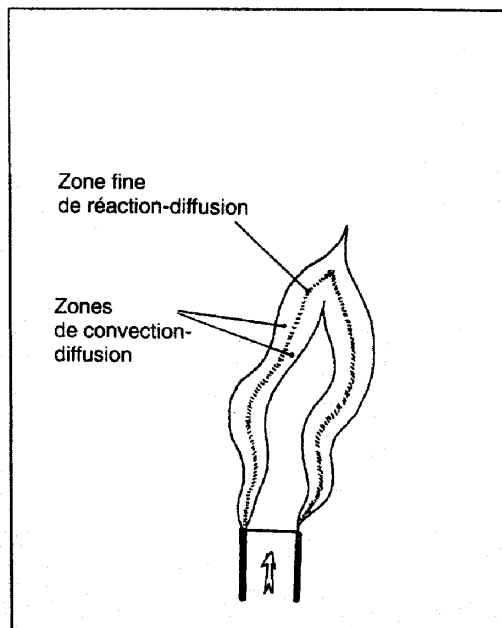
La structure locale d'une flamme de diffusion turbulente peut donc se repérer en fonction de la valeur de ces deux caractéristiques. On peut distinguer le domaine des flammelettes, le domaine des flammelettes à extinctions locales, le domaine des flammes en équilibre chimique où les fluctuations turbulentes de concentration et température, dans la flamme, sont très petites et elles ont eu le temps de se produire, et le domaine des flammes pseudo-laminaires où les fluctuations turbulentes sont très fortes mais à très petite échelle.



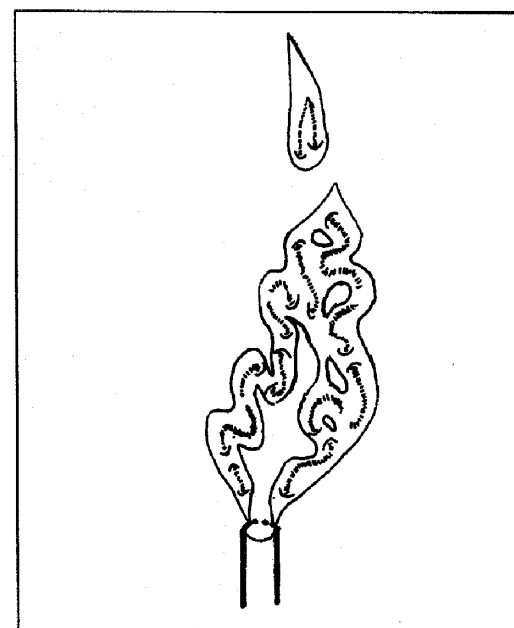
Flammelettes avec interaction à grande échelle.



Flammelettes avec interaction à petite échelle.



Flamme de diffusion faiblement turbulente.



Flammelettes éteintes à certains endroits.

**Figure I.7** : Allures, à un instant donné, des différents types de flammes de diffusion.

### **I.3.4 L'influence de la turbulence sur la flamme**

La turbulence arrange bien les choses dans les flammes. Dans un écoulement turbulent la vitesse à l'entrée est très élevée, le débit de combustible brûlé par unité de volume est élevé lui aussi ; la turbulence permet donc d'accroître considérablement l'énergie dégagée par unité de volume. En effet, la turbulence joue un rôle si bénéfique, elle accélère les processus de diffusion qui sont très importants. La diffusion moléculaire de la chaleur et des espèces réchauffe les gaz dans toute la partie amont de la flamme et y apporte des espèces radicalaires qui déclencheront plus tard les réactions de combustion. Aussi, la turbulence mélange considérablement le gaz comburant avec le gaz combustible et les gaz brûlés dans les flammes de diffusion. Cette turbulence qui est due en grande partie aux forts gradients de vitesse qui existent entre les vitesses d'arrivée de l'air et du gaz.

## **I.4 Stabilisation des flammes**

### **I.4.1 Stabilisation des flammes de prémélange turbulentes**

Les flammes sont allumées grâce à une source extérieure de chaleur, comme une étincelle ou une petite flamme auxiliaire (par exemple celle d'une allumette). Ces moyens d'allumage sont utilisés pendant un temps limité. Une fois allumées, les flammes doivent rester stables, sans source extérieure d'énergie. La stabilité dépend des conditions de propagation de l'onde de combustion dans le milieu essentiellement les limites d'inflammabilité. Ce sont des limites de richesse en dessus et en dessous desquelles la combustion ne se propage pas à l'ensemble du mélange réactif, quelles que soient les conditions géométriques et énergétiques (puissance dissipée par l'étincelle d'allumage). On peut élargir les limites d'inflammabilité en faisant varier tout paramètre, de pression et de température par exemple, qui augmente la vitesse de flamme  $S_L$ .

On utilise généralement dans le cas de l'écoulement prémélangé des vitesses très fortes des systèmes d'accroche-flamme pour maintenir la flamme. L'accroche-flamme est une sorte de gouttière torique, il maintient dans son sillage une zone de recirculation gazeuse, sous forme de deux tourbillons, ce qui permet à un transfert de masse avec l'écoulement extérieur. La combustion dans cette zone de recirculation se maintient si le temps de séjour moyen des gaz en son sein est assez long. Cette zone de recirculation représente une source stable de gaz chauds qui se libèrent en permanence dans l'écoulement principal.

## **I.4.2 Stabilisation des flammes de diffusion turbulentes**

Deux phénomènes peuvent être dans les flammes de diffusion turbulentes et qui sont les phénomènes de détachement de la flamme de la zone d'injection et le soufflage des flammes non prémélangées. Ces deux phénomènes ont été très étudiés tant d'un point de vue théorique que d'un point de vue pratique afin de permettre de comprendre la stabilisation de la flamme. De nombreux auteurs, Takahashi, Chen, Gross, Broadwell, Peters et d'autres, sont arrivés à deux approches assez différentes de ces phénomènes : la première explication du phénomène de détachement consiste à dire que lorsque la flamme est stabilisée à distance de l'injection, il se produit un mélange entre les deux réactifs auparavant séparés, et que ce mélange inflammable peut servir de pilote à la flamme de diffusion, l'empêchant ainsi d'être convectée et soufflée par l'écoulement. Broadwell et al. sont arrivés à dire que le phénomène de stabilisation est une combustion laminaire entretenue par des remous de gaz chauds. La deuxième explication fait appel à l'idée de taux de dissipation critique, proposée notamment par Peters. On a établi que la distance à laquelle se stabilise une flamme détachée est directement liée au taux de dissipation scalaire caractérisant la flamme à l'extinction [21].

## **I.5 Allumage d'une flamme**

### **I.5.1 Le phénomène d'allumage**

Les flammes stabilisées ou celles qui se propagent en laminaire ou en turbulent sont allumées initialement. Dans la pratique, lorsqu'on désire enflammer un mélange, l'inflammation se fait en un point, ou dans un petit volume du milieu disponible. L'allumage ou l'inflammation se fait en apportant de l'énergie, pendant un temps donné, dans un volume donné du milieu où le combustible et le comburant sont plus au moins bien prémélangés. Cet allumage permettra la création d'un front de flamme qui se propage par la suite avec le temps en formant une flamme stabilisée. Plusieurs moyens sont utilisés pour apporter cette énergie d'allumage ; souvent cette énergie est apportée par une étincelle, ou un petit jet de gaz chauds, ou même par un pulse d'un laser convenablement localisé. Ces moyens ne sont pas simples et se différencient ; ils peuvent créer des phénomènes supplémentaires et compliquer plus la combustion. Par exemple le jet de gaz chauds peut amener des espèces réactives et provoque des mouvements de gaz ; l'étincelle crée des espèces ionisées dans un processus très compliqué.

Plusieurs types d'allumage sont utilisés pour résoudre le problème d'allumage et donner l'inflammation nécessaire pour allumer la flamme. On peut citer par exemple, inflammation

par une zone chaude de taille initiale donnée, allumage d'une flamme par dépôt d'énergie, à puissance finie, dans une petite zone du milieu gazeux, et allumage avec effets de pression ; cette pression qui est à l'origine de l'augmentation de température du milieu, provoqué par le gaz chauffé.

### **I.5.2 Allumage d'une flamme de diffusion turbulente**

Dans les flammes de diffusion où le combustible est injecté sous forme non prémélangée, l'allumage a lieu bien après le début de l'injection. Un prémélange partiel existe dans les régions où les réactifs sont en contact prolongé, ce prémélange est nécessaire à la réussite de l'allumage. En effet, avant l'allumage, une zone de recirculation est remplie de prémélange, et c'est à la suite de la combustion de cette poche que va s'établir la flamme de diffusion. Il y a donc une transition entre deux régimes, entre flamme de prémélange et flamme de diffusion. A cause de cette transition, l'allumage d'une flamme de diffusion devient plus complexe et nécessite un modèle qui regroupe les deux types de flammes.

Des dispositifs différents d'allumage existent en pratique, mais ils sont avec un processus semblable. Par exemple, dans le cas d'un allumage produit par une bougie éloignée de la zone de contact entre les réactifs, un prémélange inflammable existe autour de la bougie et qui permet à la flamme de se propager vers les injecteurs. Un autre exemple d'allumage, il s'agit d'un dispositif pyrotechnique produisant des gaz chauds, au lieu de la bougie, dans les moteurs fusées. Dans les moteurs Diesel, l'allumage est assez proche de la description précédente. L'allumage ne se fait pas près de l'injection, mais plutôt au sommet du jet, dans une région où le carburant a eu le temps de se mélanger avec l'air chaud produit par la compression. Ensuite, la flamme remonte le long des bords du jet pour consommer les réactifs prémélangés et elle laisse derrière elle une flamme de diffusion qui consommera le reste du combustible injecté. Dans ce dernier dispositif d'allumage, la pression dans la chambre et le taux d'étirement local au point d'allumage sont également des paramètres déterminants.

## **I.6 Modélisation de la combustion turbulente**

### **I.6.1 Introduction**

Les équations de bilan qui décrivent les phénomènes de combustion dans la flamme présentent un terme et qui est le point crucial de l'étude de la combustion turbulente. Ce terme est le taux de réaction moyenné  $\bar{w}_f$ . Le taux instantané de réaction  $w_f$  est une fonction complexe de toutes les concentrations de toutes les espèces en présence, de la température et de la pression.

Si le taux de réaction instantané suit une loi d'Arrhénius, on a :  $\dot{\bar{w}}_f = \overline{AY_0Y_f \cdot \exp(-\frac{T_a}{T})}$  où  $T_a$  désigne la température d'activation. A cause du caractère non linéaire de l'exponentielle, le taux de réaction moyen est totalement différent du taux de réaction obtenu à partir de la température moyenne. Donc l'évaluation de  $\bar{w}_f$  constitue la clé et qui va être faite par la modélisation de la combustion turbulente. Le choix de la modélisation se diffère et il dépend du type de flamme rencontrée dans l'écoulement.

Plusieurs modèles de la combustion turbulente sont disponibles, on va se limiter seulement aux modèles qui sont basés sur le concept de flammelettes. Ce concept se base sur le fait que lorsque l'échelle de temps de la réaction chimique est petite devant les échelles de temps de convection et de diffusion, la combustion a lieu dans des feuillets asymptotiquement minces au sein de l'écoulement turbulent. Ces feuillets sont couramment appelés flammelettes. La structure des flammelettes est unidimensionnelle et dépend du temps.

## I.6.2 Les modèles utilisant le concept de flammelettes

Ces modèles de combustion consistent à exprimer le taux de réaction moyen  $\bar{w}_f$  en fonction des variables connues, c'est-à-dire des valeurs moyennes elles-mêmes, et probablement aussi en fonction des caractéristiques de la turbulence. Nous considérons le cas des flammes turbulentes où la chimie est très rapide par rapport à tous les processus dynamiques dans le fluide. C'est le régime de flammelettes, il caractérise plusieurs applications industrielles où l'écoulement est avec un nombre de Reynolds important, et le temps chimique est très petit.

- **Le modèle Eddy Break-Up**

C'est un modèle qui a été postulé par D.B. Spalding entre 1970 et 1980, conduit au résultat que  $\bar{w}_f$  est indépendant de la chimie, et est contrôlé par la turbulence elle-même. Plusieurs formulations existent pour ce modèle ; il peut s'écrire sous la forme [4] :

$$\bar{w}_f = -\rho c_F \tilde{c}(1 - \tilde{c})\epsilon/k$$

$C_F$  est une constante ajustable d'ordre un.

$\mathcal{E}$  est un taux de dissipation des fluctuations.

$\tilde{c}$  est une variable d'avancement de la réaction.

- **Les modèles à quantification de surface de flamme**

Ces modèles expriment le taux de réaction moyen en fonction d'une quantité  $\Sigma$  qui représente la surface de flamme disponible. Dans ces modèles, le taux de réaction moyen s'exprime, [20], [21], [26] et [38] par :

$$\overline{\dot{w}}_f = -\rho V_f \Sigma$$

$V_f$  est le taux de consommation local par unité de surface de flamme. Il peut être calculé indépendamment, en fonction de divers paramètres tels que le taux d'étirement, la richesse ou la température des réactifs.

La quantité  $\Sigma$ , qui est une densité de surface de flamme, doit être aussi modélisée ; on peut citer par exemple :

**a-** Les modèles BML fournissent une fermeture algébrique pour la densité de surface de flamme  $\Sigma$ . Deux versions sont disponibles pour ce modèle :

- Un modèle qui fait intervenir une fréquence de passage des flammelettes[41]. Cette fréquence est obtenue par :

$$f = \frac{g\tilde{c}(1-\tilde{c})}{\hat{T}}$$

où  $T$  est l'échelle temporelle des fluctuations et  $c$  est une variable d'avancement de la réaction.

- Un modèle qui détermine  $\Sigma$  [42] par :

$$\Sigma = \frac{g\tilde{c}(1-\tilde{c})}{\sigma_y \hat{L}_y}$$

où  $g$  est une constante,  $\sigma_y$  le facteur d'orientation et  $L_y$  est une longueur qui exprime l'échelle des plissements du front de flamme.

**b-** Le modèle de flamme cohérente CFM, qui a été utilisé dans ce travail, emploie une équation de transport pour la densité de flamme  $\Sigma$  ( Marble and Broadwell, Candel and Poinso ) [26],[7].

- **Les modèles à transport des fluctuations de taux de dissipation des fluctuations  $\epsilon_Y$ .** ( Mantel et Borghi )[44].

Borghi propose une relation liant  $\epsilon_Y$  à  $\Sigma$  par :

$$\epsilon_y = K_\Sigma \left( \frac{1}{2} - b_0 \right) S_L \Sigma$$

$K_\Sigma$  est une constante d'ordre un.

- **Le modèle à scalaire passif pour la diffusion ( Peters )**

C'est un modèle à fonctions de densité de probabilité. Ce modèle utilise un scalaire passif  $Z$  à partir duquel on peut connaître la position moyenne de la flamme, qui se situe autour de  $Z = Z_s t$ . La structure de la flamme est calculée dans un repère lié aux iso- $Z$ , de façon détaillée. Les champs moyens sont obtenus à partir de cette structure locale à l'aide de fonction de densité de probabilité. On peut citer une fonction par exemple[21] :

$$\tilde{y}_f(\tilde{z}) = \int y_f(x) P(\tilde{z}, x) dx$$

## I.7 Quelques définitions de base de la combustion et de la turbulence

### I.7.1 La combustion

- La combustion est une réaction chimique, globalement exothermique, elle se traduit globalement par un dégagement de chaleur. Cette réaction chimique est au début lente mais peut devenir ensuite rapide et même violente, avec émission de rayonnement et élévation de température.
- Une réaction chimique peut dégager ou consommer de la chaleur. Par convention, cette chaleur est considérée comme négative dans le cas de dégagement. C'est le cas pour une réaction de combustion.
- La réaction de combustion est globalement une réaction d'oxydo-réduction où l'oxydant est appelé comburant (oxygène pur ou dilué, ozone, chlore, nitrates, etc.) et le réducteur est appelé combustible (hydrogène  $H_2$ , hydrocarbure, etc.) se déroulant suivant un mécanisme complexe, comprenant un grand nombre de réactions dites élémentaires.

- Un mélange (initial) est dit stœchiométrique si le rapport du nombre de moles du combustible sur celui du comburant est précisément égale à celui d'une réaction qui oxydait de façon maximale le combustible, alors ce mélange a la composition optimale pour pouvoir être consommé complètement. On dit combustion complète ou réaction stœchiométrique.
- La richesse est le quotient qui existe entre le rapport (quantité de combustible/quantité de comburant) du mélange étudié et celui du mélange stœchiométrique.
- La richesse est un nombre sans dimensions qui vaut 1 quand le mélange étudié est le mélange stœchiométrique.
- On appelle un mélange riche quand la richesse est plus grande que 1, c'est un mélange riche en combustible.
- La combustion d'un mélange riche conduit fatalement à des imbrûlés et que la combustion est incomplète, même pour le mélange stœchiométrique.
- Les enthalpies de formation,  $\Delta h_f$ , d'un corps donné, sont définies comme étant les variations d'enthalpies des réactions de formation de ce corps à pression et à température données. Elles dépendent plus de la température que de la pression.
- La température thermodynamique : pour que la température soit la température thermodynamique du milieu, il faut que l'équilibre thermique soit atteint et donc que les températures associées aux différents mouvements possibles d'une molécule (vibration, translation, rotation) soient égales.

### I.7.2 La turbulence

- Un écoulement turbulent est un écoulement où la trajectoire des particules fluides n'est pas lisse, présente des changements brusques. Dans un tel écoulement, les particules fluides se comportent elles-mêmes un peu comme les molécules, qui ont chacune des mouvements complètement différents. C'est le cas en pratique, généralement, l'écoulement des gaz dans les flammes et leur voisinage est un écoulement turbulent.
- En écoulement turbulent, même si les variations des trajectoires sont brusques, elles se font sur des échelles très largement supérieures au libre parcours moyen des molécules.
- A la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, O.Reynolds a découvert ce phénomène de turbulence qui est du à l'instabilité de l'écoulement laminaire. Cette instabilité qui est créée par les perturbations dues à l'augmentation des vitesses.

- La turbulence maintenant se détermine par un nombre, dit le nombre de Reynolds  $v_r l_r / \nu$ , où  $v_r$  est une vitesse de référence et  $l_r$  une longueur de référence de l'écoulement,  $\nu$  est la viscosité cinématique.
- En fonction du nombre de Reynolds et à une certaine valeur, l'instabilité se déclenche, et l'écoulement devient pleinement turbulent si ce nombre est très grand.
- L'approche de Reynolds : l'idée de définir certaines vitesses, énergie, concentrations moyennes, etc., et de chercher les équations de bilan auxquelles elles satisfont. C'est ce qui est appelé l'approche de Reynolds. Son résultat va être la représentation d'un écoulement turbulent moyen très semblable à un écoulement laminaire avec des coefficients de diffusion turbulente de masse, énergie et quantité de mouvement.



## Chapitre II

### Equations de base et modélisation

#### II.1 Introduction

Les flammes mettent en jeu des phénomènes chimiques, des phénomènes physiques et mécaniques de transport de gaz par diffusion et par convection. Les effets des différents phénomènes mis en jeu dans une flamme peuvent être traités en considérant un certain nombre de variables. Le choix de ces variables est le premier point crucial du traitement. Pour les flammes à gaz, les études ont conduit à considérer trois types de variables :

- des variables dynamiques, les composantes de la vitesse de l'écoulement.
- des variables thermodynamiques, la masse volumique et l'énergie interne massique (ou l'enthalpie massique) du mélange.
- Des variables chimiques, la fraction massique pour les  $n$  constituants du milieu gazeux.

Entre ces variables, il existe deux types de relations :

- les équations de bilan, qui sont la traduction des grands principes de la physique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie).
- les équations d'état thermodynamique du fluide composé par le mélange gazeux.

Certaines considérations et phénomènes ne sont pas prises en compte et qui sont des cas particuliers des flammes :

- On ne considère pas le milieu ionisé ou hors d'équilibre de vibration-rotation (au niveau moléculaire), qui est un cas très particulier dans le domaine de la combustion.
- On considère les flammes sans gouttes ou particules solides, il serait très lourd, dans cette thèse de traiter de plus ce cas de flammes avec gouttelettes ou des particules.
- Pour ce travail, nous laisserons de côté les phénomènes de rayonnement, les problèmes radiatifs des flammes, et nous négligerons simplement le rayonnement dans le bilan énergétique des flammes. Ces problèmes ne sont pas spécifiques des flammes turbulentes, et il n'est pas possible de les considérer dans le cadre de cette étude.

- Les équations de bilan, pour chaque variable mentionnée ci-avant, sont des équations qui expriment que, dans le fluide, la variation dans le temps de chaque variable est due à ses échanges avec l'extérieur, d'une part, et à ses transformations à l'intérieur, d'autre part. Lorsqu'on considère des volumes de taille finie, ces équations sont sous forme intégral-différentielles. Lorsqu'on considère des volumes infiniment petits, on obtient des équations aux dérivées partielles, ou chaque variable est elle-même fonction de la position du petit volume considéré dans la flamme et du temps.

Pour les échanges avec l'extérieur, on peut trouver les effets de convection due aux vitesses elles-mêmes, et aussi les flux de diffusion de masse, quantité de mouvement et énergie. Les transformations internes sont les taux chimiques de réaction, les processus de transformation de l'énergie cinétique en énergie interne pour des écoulements assez rapides et les forces à distance qui provoquent, sans échanges avec l'extérieur proche, des changements de quantité de mouvement.

## II.2 Les équations de bilan de l'aérothermochimie.

Les équations de base que nous allons utiliser sont tirées des équations générales de l'aérothermochimie. Elles sont des équations qui régissent ensemble les phénomènes de convection et diffusion de masse et d'énergie, et les phénomènes chimiques. Ce sont les équations de conservation : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces chimiques.

Les équations de conservation que nous écrirons, par la suite, sont développées sur la base des considérations suivantes :

- Les forces de volume sont négligées, en particulier la convection naturelle par force d'Archimède et on fait l'hypothèse d'un fluide newtonien.
- Les écoulements qui nous intéressent étant à faibles vitesses (nettement subsoniques). Les termes d'énergie cinétique, les termes de travaux des forces de pression et des contraintes visqueuses sont négligeables devant les autres et l'enthalpie totale se ramène à l'enthalpie  $h$ . La diffusion d'enthalpie est représentée par la loi de Fourier et on néglige l'effet Dufour (les effets dus au gradient de concentration molaire de l'espèce).
- La diffusion des espèces est représentée par la loi de Fick et on néglige l'effet Soret (la thermodiffusion, les effets dus au gradient de température).

Les équations de conservation s'écrivent alors [3], [25] :

- **Conservation de la masse**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_{\alpha}) = 0 \quad (\text{II.2.1})$$

- **Conservation de quantité de mouvement**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_{\beta}) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_{\alpha} u_{\beta}) = -\frac{\partial P}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{II.2.2})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses est :

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu_l \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \frac{2}{3} \mu_l \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}}$$

$\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker ;  $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$

- **Conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_{\alpha} h) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\mu_l}{p_r} \frac{\partial h}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} + \dot{w}_h \quad (\text{II.2.3})$$

Par définition :  $C_p = \frac{dh}{dT}$

Le nombre de Prandtl :  $P_r = \frac{\mu_l C_p}{\lambda}$

$\dot{w}_h = \sum_{k=1}^n \Delta h_k^{\circ} \bar{w}$ , terme de réaction, exprimé en fonction de la chaleur dégagée par la réaction globale.

- **Conservation des espèces**

$$\frac{\partial(\rho Y_k)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 (\rho u_{\alpha} Y_k) = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\mu_l}{s c_k} \frac{\partial Y_k}{\partial x_{\alpha}} \right) + \dot{w}_k \quad (\text{II.2.4})$$

Le nombre de Schmidt pour l'espèce k,  $sc_k = \frac{\mu}{\rho D_k}$

### - Les équations d'état thermodynamique

On ce qui concerne les équations d'état thermodynamique du fluide composé par le mélange gazeux, on considère pratiquement toujours un mélange idéal de gaz parfaits en équilibre thermique, ce qui se traduit par les équations classiques :

$$\frac{P}{\rho} = \sum_{k=1}^n Y_k \frac{R}{m_k} T = \frac{R}{M} T \quad (\text{II.2.5})$$

$\bar{M}$ , masse molaire moyenne du mélange.

$m_k$ , masse molaire de l'espèce k.

$R=8.31441 \text{ J/mol.k}$ , constante molaire des gaz parfaits.

et 
$$h = \int_{T_0}^T C_p dT + h_{T_0} \quad , \quad C_p = \sum_{k=1}^n Y_k C_{p_k}$$

$h$ , l'enthalpie massique du mélange.

$C_p$ , la chaleur massique du mélange.

- Il n'y a lieu de considérer différentes températures pour les espèces gazeuses que dans des cas très particuliers de milieux ionisés ou hors d'équilibre de vibration-rotation (au niveau moléculaire), qui ne sont que l'exception dans le domaine de la combustion [R. Borghi][3],[4].

### II.3 Modélisation de la turbulence

Comme pour tout écoulement turbulent, les grandeurs varient rapidement avec le temps ce qu'il nous faut les considérer des variables aléatoires et fluctuantes, il faut encore insister, dès le début, sur le fait que le calcul concerne seulement des quantités moyennes au sens statistique. En effet, il est impossible de calculer les évolutions exactes, instationnaires, d'une flamme, puisque celles-ci dépendent des détails des conditions aux limites que nous sommes incapables de connaître. Par contre les grandeurs statistiques moyennes et toute autre caractéristique définie de façon statistique sont calculables.

Nous nous intéressons donc à la valeur moyenne. Il est alors possible d'établir des équations de bilan pour ces valeurs moyennes à partir des équations de base de l'aérothermochimie. Dans le cas où la température et la masse volumique ne sont pas constantes, c'est le cas dans les flammes, il s'avère plus intéressant d'utiliser des moyennes pondérées par la masse volumique, moyenne de Favre, que les moyennes statistiques ordinaires.

### II.3.1 Les équations de conservation moyennées

On décompose chaque variable en une partie moyenne et une autre fluctuante :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{II.3.1})$$

- $\bar{\phi}$  est la moyenne d'ensemble de  $\phi$ , moyenne de Reynolds, moyenne prise sur le temps.
- $\phi'$  est la fluctuation,  $\phi' = 0$

Dans le cas des écoulements où la température et la densité ne sont pas constantes, il est plus intéressant d'utiliser la moyenne de Favre, moyenne pondérée par la densité pour toutes les variables sauf la masse volumique  $\rho$  et la pression  $P$ .

Les équations qui gouvernent notre écoulement sont moyennées en utilisant la moyenne de Favre définie par :

$$\tilde{\phi} = \frac{\rho\phi}{\bar{\rho}} \quad (\text{II.3.2})$$

- $\phi$  est la moyenne de Favre.

- La fluctuation est  $\phi'' = \phi - \tilde{\phi}$  (II.3.3)

Les équations moyennées s'écrivent avec la moyenne de Favre,[3], [19] :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{u}_{\alpha}) = 0 \quad (\text{II.3.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_{\beta}) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{u}_{\beta}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \tilde{\tau}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} u_{\alpha}'' u_{\beta}'') \quad (\text{II.3.5})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{h}) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\mu_l}{P_r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} u_{\alpha}'' \tilde{h}'') + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{w}_h \quad (\text{II.3.6})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} Y_k}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{Y}_k) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{s c_k} \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial x_\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} u_\alpha'' Y_k'') + \bar{w}_k \quad (\text{II.3.7})$$

avec  $\bar{w}_h = \sum_{k=1}^n \Delta h_k^\circ \bar{w}_k$  où  $\sum \Delta h_k^\circ$  est l'énergie produite par la réaction.

- L'équation d'état garde la même forme :

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{R}{M} \bar{T} \quad (\text{II.3.8})$$

Ces équations présentent deux problèmes dus à la turbulence :

- a- Les termes  $u''u''$ ,  $u''h''$ ,  $u''Y''$  qui représentent les flux de diffusion turbulente de quantité de mouvement, d'enthalpie et d'espèces, respectivement, font intervenir les fluctuations, qui doivent être modélisées pour former les équations de bilan. La section suivante sera l'objet de cette modélisation.
- b- Les termes  $w_k$  et  $w_h$  qui représentent les taux de réaction moyens seront modélisés aussi dans la section de modélisation de la combustion.

## II.3.2 Les modèles de fermeture

La connaissance de la valeur des termes de flux de diffusion précédents est nécessaire à l'utilité des équations moyennées. Plusieurs modèles de fermeture sont mis à l'œuvre pour ce problème. On utilise généralement des modèles qui sont basés sur le concept de viscosité turbulente  $\mu_t$  de Boussinesq, proposé en 1877.

### II.3.2.1 Modèles à concept de viscosité turbulente

Le concept de viscosité turbulente met en évidence le transport turbulent par analogie avec la diffusion moléculaire : les flux de diffusion encore appelés contraintes de Reynolds sont calculés à travers une relation liant le taux de déformation et l'énergie cinétique de la turbulence.

Les flux de diffusion sont exprimés par la formule :

$$-\bar{\rho}u''_{\beta}u''_{\alpha} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\beta\alpha} \left( \mu_t \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial \tilde{u}_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} + \bar{\rho} \tilde{k} \right) \quad (\text{II.3.9})$$

$k$  est l'énergie cinétique de turbulente définie par :

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} u''_{\beta} u''_{\beta} \quad (\text{II.3.10})$$

En utilisant l'analogie de Reynolds, les flux turbulents, d'enthalpie et d'espèces sont :

$$-\bar{\rho}u''_{\alpha}h'' = \frac{\mu_t}{P_r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{II.3.11})$$

$$-\bar{\rho}u''_{\alpha}Y'' = \frac{\mu_t}{Sc_r} \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial x_{\alpha}} \quad (\text{II.3.12})$$

$Sc_k$  et  $P_r$  sont les nombres de Schmidt et de Prandtl turbulents respectivement. Ces nombres sont généralement dans ce domaine supposés égaux à l'unité, [4], [17].

Pour former le système d'équations, il reste à définir  $\mu_t$ . C'est le modèle  $k$ - $\varepsilon$  qui est utilisé pour calculer cette viscosité turbulente.

### II.3.2.2 Le modèle K- $\varepsilon$

Ce modèle « K- $\varepsilon$  », avec toutes ses variantes, est un moyen classique, validé par les expériences dans un certain domaine commode sinon très précis, il permet d'accéder à la connaissance approchée de la turbulence dans de nombreux écoulements. Il est une des retombées pratiques des études effectuées depuis près d'un siècle sur la turbulence, qui peut être utilisé avec profit pour l'étude de la combustion turbulente. C'est un modèle à deux équations de transport, une équation d'énergie cinétique turbulente  $K$  et une équation de dissipation d'énergie cinétique  $\varepsilon$ .

Le modèle K- $\varepsilon$  est un modèle relativement simple et il fournit des résultats acceptables avec un temps de calcul réduit.

Le modèle K- $\varepsilon$  se présente avec les équations suivantes :

- la viscosité turbulente, exprimée par :

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \cdot \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}}$$

- l'équation de l'énergie cinétique turbulente k :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{k}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{k}) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_\alpha} \right) + P_k - \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}$$

- L'équation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{\varepsilon}) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}$$

$P_k$  est un terme de production par les gradients de vitesse moyenne :

$$P_k = \left[ \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\beta\alpha} \left( \mu_t \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial \tilde{u}_\gamma}{\partial x_\gamma} + \bar{\rho} \tilde{k} \right) \right] \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha}$$

La viscosité laminaire  $\mu_l$  est généralement négligeable devant la viscosité turbulente  $\mu_t$ .

Les valeurs empiriques recommandées des constantes de ce modèle sont données dans le tableau suivant :

Constantes	$C_\mu$	$C_{1E}$	$C_{2E}$	$\sigma_K$	$\sigma_E$
Valeurs	0.09	1.44	1.92	1.	1.3

## II.4 Modélisation de la combustion

### II.4.1 Combustion à réaction chimique infiniment rapide

La combustion présente des phénomènes complexes qui rendent l'étude et le calcul des flammes très difficiles et même impossibles. Des calculs de façon approchée avec un bon rapport peuvent être obtenus pour les flammes. Ces calculs sont basés sur le cas des flammes turbulentes où les réactions chimiques sont très rapides par rapport à tous les processus de la dynamique des fluides (tels que les phénomènes physiques de convection et diffusion), y compris la turbulence. Nous allons simplifier les phénomènes chimiques qui s'y passent, sans les éliminer. Nous supposons dans la réaction que l'oxydant et le combustible ne

peuvent coexister dans la même particule fluide sans donner immédiatement des produits brûlés (chimie très rapide).

Nous pouvons donc supposer que seuls trois espèces chimiques réactives sont en présence, le combustible noté F, l'oxydant noté O, et les produits notés P. Nous écrivons alors la réaction chimique de la combustion sous la forme suivante :



s est le coefficient stœchiométrique dans la réaction.

La réaction produit un dégagement de chaleur ( $-\Delta h_f^\circ$ ) par unité de masse de combustible brûlé.

$$(-\Delta h_f^\circ) = \Delta h_f^\circ + s \Delta h_o^\circ - (1+s) \Delta h_p^\circ \quad (\text{II.4.2})$$

Les termes sources des espèces et de l'enthalpie sont donc reliés par :

$$w_f = w_o / s = w_p / (1+s) = w_h / (-\Delta h_f^\circ) \quad (\text{II.4.3})$$

La clé de la résolution maintenant est de trouver des modèles pour exprimer les taux de réactions moyens  $w_k$  en fonction des variables connues, des valeurs moyennes, et aussi en fonction des caractéristiques de la turbulence. Plusieurs modèles ont été développés pour exprimer ces taux de réaction, ces modèles se basent sur le concept du régime des flammelettes, nous le décrirons dans la section suivante. Parmi ces modèles, on peut citer :

- le modèle appelé Eddy Break-Up (Spalding).
- les modèles à quantification de surface de flamme.
- le modèle à scalaire passif pour la diffusion (Peters), modèle à fonctions de densité de probabilité.
- Les modèles à transport des fluctuations de  $\varepsilon_y$ , taux de dissipation des fluctuations [44].

Nous avons utilisé dans notre travail le modèle de flamme cohérente CFM, qui est un modèle à quantification de surface de flamme. Ce modèle s'effectue en deux étapes ou deux sous-modèles : un modèle local qui exprime le taux de réaction moyen en fonction de la densité de

surface de flamme et un modèle global qui emploie une équation de transport pour la densité de surface de flamme.

## **II.4.2 Le modèle de flamme cohérente CFM**

### **II.4.2.1 Régime des flammelettes**

Dans une flamme de diffusion, le combustible et le comburant sont amenés séparément dans la flamme. La flamme-jet et la flamme de briquet sont des exemples très simples de la flamme de diffusion. La flamme de diffusion, appelée aussi flamme non-prémélangée, est souvent rencontrée en pratique, elle est fréquemment utilisée, par exemple, pour les brûleurs industriels.

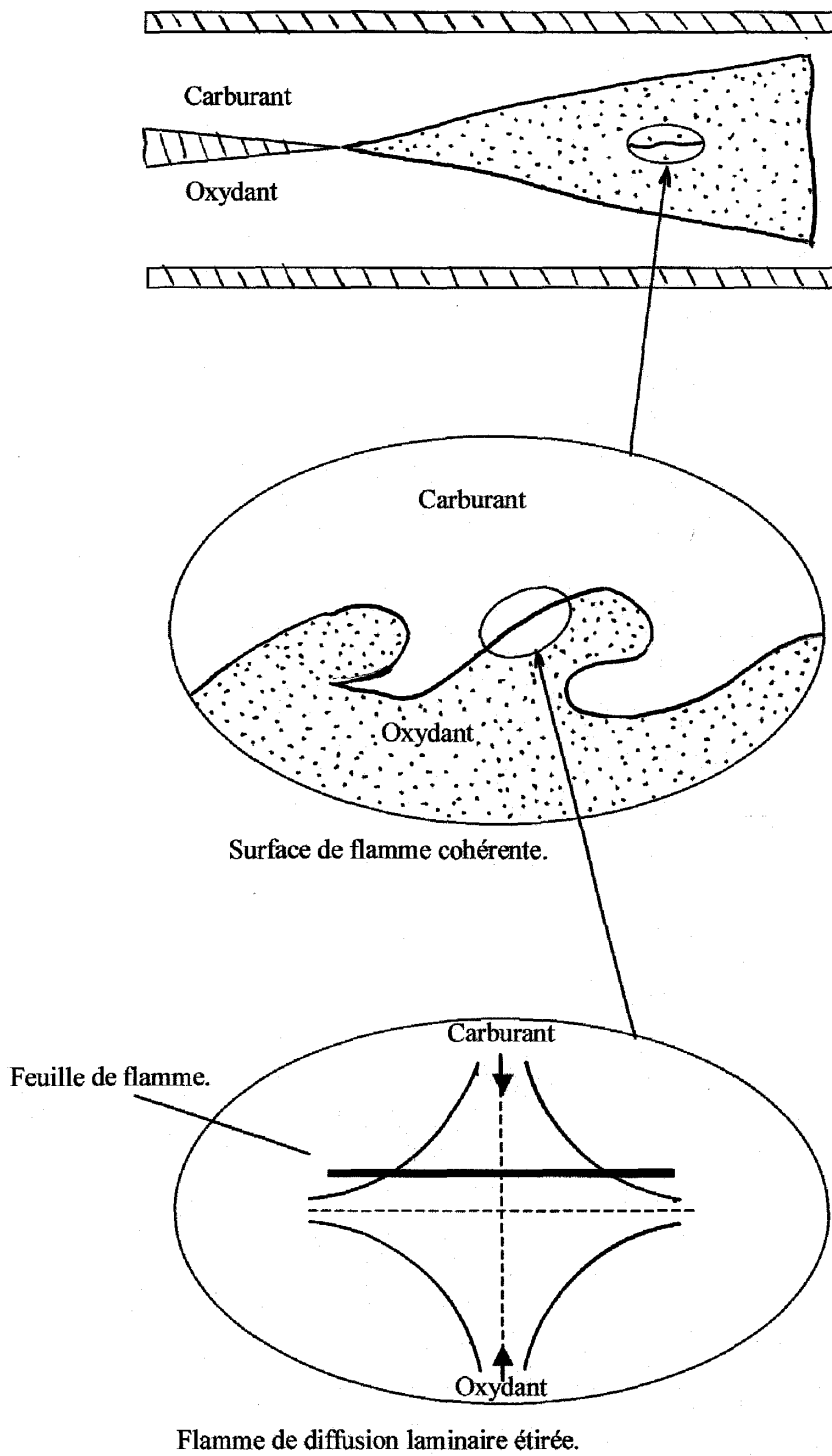
Des analyses et des hypothèses ont été faites disant que lorsque l'échelle de temps de la réaction chimique est petite devant les échelles de temps de convection et de diffusion, la combustion a lieu dans des feuillets asymptotiquement minces au sein de l'écoulement turbulent. Ces feuillets, dont la structure interne est bien définie, sont couramment appelés flammelettes. La structure des flammelettes est unidimensionnelle et dépend du temps.

Autrement dit, la flammelette peut être reconnue si les échelles de la turbulence sont toutes plus grandes que l'épaisseur de la flammelette elle-même. Cependant, lorsque la turbulence est assez forte, deux phénomènes peuvent se produire : d'une part la turbulence peut étirer la flammelette de telle façon que celle-ci s'éteigne localement, à l'endroit où elle est suffisamment étirée. L'étirement dans la flamme est d'une importance très considérable, et l'étirement efficace régissant sur les flammelettes est d'un grand intérêt. D'autre part, une turbulence trop forte va provoquer aussi des interactions entre deux portions de flammelette. Cela va former des boucles de flammelettes. Les interactions des flammelettes de diffusion sont contrôlées par le nombre de Reynolds de la turbulence et le régime des flammelettes dépend aussi de ce nombre.

### **II.4.2.2 Relation de base du modèle CFM**

Une méthode de flammelette est développée pour les flammes de diffusion. Elle consiste à représenter le milieu réactif turbulent par une collection de flammelettes de type laminaire, déplacées et étirées par la turbulence de façon aléatoire. Nous nous intéressons dans ce travail à ce régime de flammelettes qui sont appelées aussi flammes plissées.

Le modèle de la flamme cohérente CFM est fondé sur la base que la flamme turbulente est composée de flammelettes.



**Figure II.1** : Description de la flammelette en combustion turbulente.

Dans le modèle CFM, on relie directement par un modèle local le taux de réaction moyen  $w_k$  de chaque espèce à une quantité nouvelle qui est la surface de flamme par unité de volume notée  $\Sigma$ . Alors, ce taux s'exprime par :

$$\overline{\dot{w}_k} = -\overline{\rho} V_{Dk} \tilde{\Sigma} \quad (\text{II.4.4})$$

Avec  $V_{Dk}$  taux de consommation local de l'espèce  $k$  par unité de surface de flamme. La formule de calcul de ce taux sera donnée par la suite.

La surface de flamme  $\Sigma$  doit être aussi modélisée et son calcul demande une nouvelle équation de bilan. Marble et Broadwell [26] ont écrit une équation de transport pour  $\Sigma$ , puis améliorée par Candel et Poinso. Cette équation peut s'écrire sous une forme générale :

$$\frac{\partial \overline{\rho \tilde{\Sigma}}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho \tilde{u}_\alpha \tilde{\Sigma}}) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x_\alpha} \right) + \langle A_T \rangle_s \overline{\rho \tilde{\Sigma}} + \langle a_T \rangle_s \overline{\rho \tilde{\Sigma}} - \langle Disp \rangle_s \overline{\rho \tilde{\Sigma}} \quad (\text{II.4.5})$$

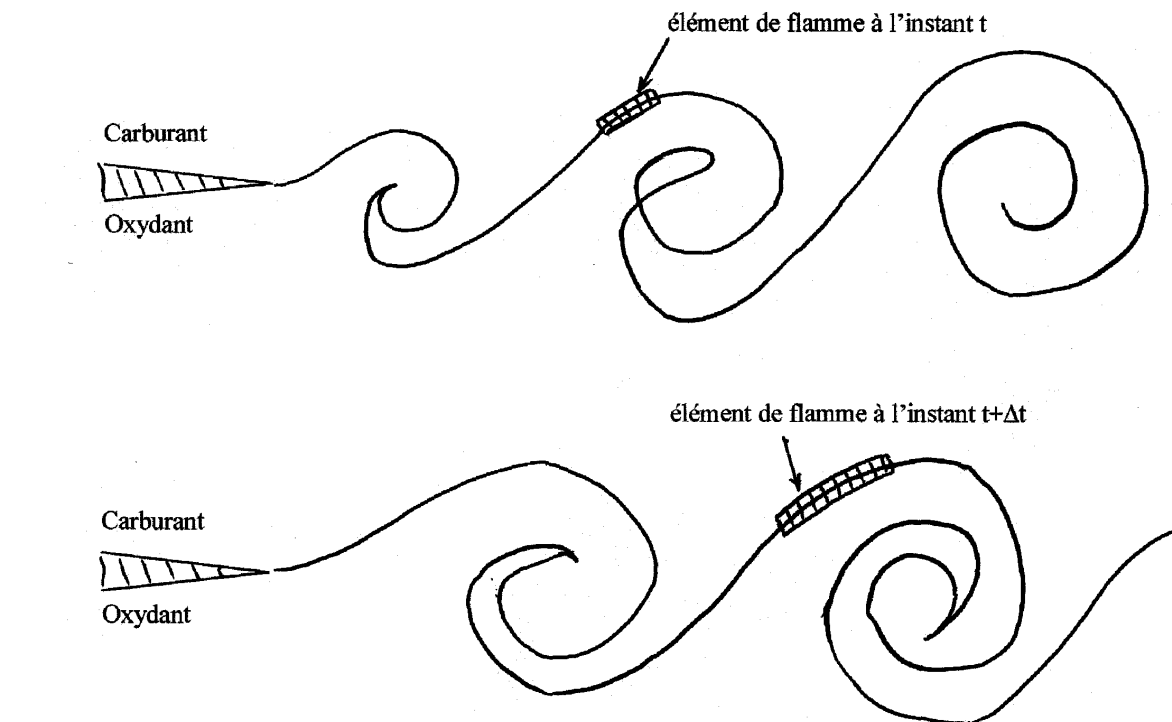
$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taux de disparition} \\ \text{de } \Sigma. \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Diffusion turbulente} \\ \text{de } \Sigma. \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Production de } \Sigma \\ \text{par étirement.} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Disparition de } \Sigma \\ \text{par annihilation.} \end{array} \right]$$

- La notation  $\langle \rangle_s$  désigne une moyenne sur la surface de flamme.
- Les termes  $\langle A_T \rangle_s$  et  $\langle a_T \rangle_s$  traduisent l'accroissement de surface de flamme sous l'effet de l'étirement de la flammelette imposé par le gradient de vitesse moyenne ou par le gradient de vitesse fluctuante.
- $\langle A_T \rangle_s$  est un étirement microscopique, étirement moyen.
- $\langle a_T \rangle_s$  est un étirement macroscopique, étirement turbulent.
- L'effet du terme  $\langle Disp \rangle$  n'est pas encore bien connu, création ou disparition de surface de flamme. Nous le considérons dans notre travail un terme de disparition.

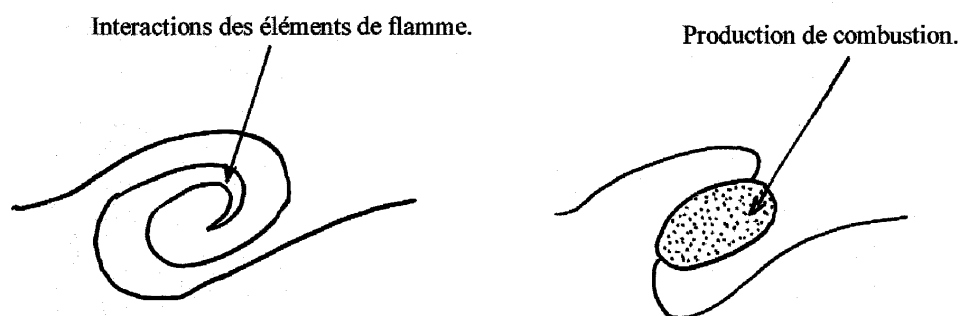
### II.4.2.3 Modélisation de l'étirement

La flammelette en déplacement dans un écoulement turbulent sera soit étirée par le gradient de vitesse, soit comprimée. Cet étirement est du, essentiellement, à la turbulence. Comme il a été déjà dit, l'étirement selon le degré de la turbulence, influe directement sur la structure de la flamme. L'étirement peut éteindre la flamme ou former des boucles de flammelettes

plissées, et il peut aussi former une longue flammelette plissée, étirée et comprimée alternativement (à faible turbulence).



a- Production de surface de flamme par l'étirement de l'écoulement.



b- Disparition par annihilation mutuelle des flammelettes adjacentes.

**Figure II.2 :** Représentation schématique du processus fondamental qui gouverne la combustion turbulente dans un régime de flammelettes.

l'étirement est donc d'une influence très importante sur la structure de la flamme, et il doit être modélisé et pris en compte comme un étirement efficace agissant sur les flammelettes.

#### - L'étirement turbulent $E_s$

Deux modélisations peuvent être apportées à ce terme selon les échelles de la turbulence, les petites échelles et les grandes échelles :

Pour les petites échelles telles que l'échelle de Kolmogorov, l'étirement turbulent est de  $(\varepsilon/\nu)^{1/2}$  et pour les grandes échelles est de  $(\varepsilon/k)$ .

Nous avons choisi, pour notre modélisation, celle qui est utilisée dans Montazel X. [27] et Fichot F. [20], [21], est qui est souvent acceptée :

$$E_s = \alpha \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{K}} \quad (\text{II.4.6})$$

Le paramètre  $\alpha$  peut prendre une valeur comprise entre 5 et 15.

#### - l'étirement par la vitesse moyenne

La modélisation de ce terme est précise. Des corrélations ont été utilisées dans des recherches, telles que les recherches de Dlhaye et al (1993). On simplifie ce terme par la relation :

$$E'_s = \alpha' \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\text{II.4.7})$$

Des résultats, trouvés par F. Fichot [21], ont montré que le taux d'étirement turbulent  $E_s$  de la flammelette est généralement plus important que le taux d'étirement de la flammelette du aux gradients de vitesse moyenne  $E'_s$ .

### II.4.2.4 Modélisation du terme de disparition

L'effet du terme de disparition de la surface de flamme par annihilation, noté  $D_s$ , n'est pas encore bien connu, création ou disparition de surface de flamme. Nous le considérons comme un terme de disparition. Ce taux de disparition de surface de flamme a été exprimé, d'après Marbe et Broadwel [26], par la somme des taux des différents réactifs. Pour une réaction

simple comme celle considérée dans notre travail, combustible et oxydant donnent des produits, le taux de disparition est exprimé en fonction des fractions massiques par :

$$D_s = B_d \left( \frac{1}{Y_f} + \frac{s}{Y_o} \right) V_{df} \cdot \Sigma \quad (\text{II.4.8})$$

Les indices  $f$  et  $o$  désignent le fuel et l'oxydant respectivement.

$B_d$  est une constante de proportionnalité, elle peut prendre  $B_d = 0.4$

La largeur de la flamme est une fonction croissante de  $B_d$  alors que le maximum de surface de flamme varie comme l'inverse de cette fonction [21].

#### II.4.2.5 Calcul du taux de consommation des flammelettes

Le taux de consommation des flammelettes  $V_{df}$  se calcule indépendamment, il est fonction de plusieurs paramètres tels que le taux d'étirement, la richesse ou la température des réactifs. Pour les flammes de diffusion, en supposant une chimie infiniment rapide, les taux de consommation se calculent, [7], [20], [26] par :

$$V_{df} = Y_{f\infty} \left( \frac{DE_s}{2\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{\phi_d + 1}{\phi_d} \right) e^{-\omega^2} \quad (\text{II.4.9})$$

$$V_{d_0} = Y_{o\infty} \left( \frac{DE_s}{2\pi} \right)^{1/2} (\phi_d + 1) e^{-\omega^2} \quad (\text{II.4.10})$$

$$\text{Avec} \quad \omega = \text{erf}^{-1} \left( \frac{\phi_d - 1}{\phi_d + 1} \right) \quad \text{et} \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{II.4.11})$$

$Y_{f\infty}$  et  $Y_{o\infty}$  sont les valeurs locales du combustible et de l'oxydant dans une cellule.

$D$  est la diffusivité des réactifs, coefficient de diffusion moléculaire des espèces.

$E_s$  est le taux d'étirement imposé à l'élément de la flamme.

$\phi_d$  est le rapport d'équivalence local en diffusion, richesse.

#### II.4.2.6 La chaleur dégagée par la réaction

La chaleur dégagée par la réaction globale  $(-\Delta h_f^\circ)$  est en réalité fonction de toutes les espèces  $-\sum \Delta h_k^\circ$ .

$$(-\Delta h_f^\circ) = -\sum \Delta h_k^\circ = \Delta h_f^\circ + s \Delta h_o^\circ - (1+s) \Delta h_p^\circ$$

(II.4.12)

Cependant cette chaleur ne peut être calculée que si l'on connaît la température atteinte, qui contrôle la composition des produits, et celle-ci ne peut être calculée que par l'équation (II.3.7) qui dépend elle-même de cette chaleur dégagée. Mais très souvent, de façon approchée, on donne à cette chaleur une valeur empirique qui correspond à une expérience dans des conditions de celles qui nous intéressent.

## II.5 Modélisation de l'allumage et valeur initiale de la densité de surface de flamme

L'allumage est un problème supplémentaire à la combustion turbulente. Les modèles de combustion turbulente ne permettent pas, en général, la description des phénomènes d'allumage. Des modèles pour décrire et représenter l'allumage s'avèrent donc nécessaires. Le modèle de la flamme cohérente, que nous avons utilisé, ne peut représenter l'allumage qu'avec l'introduction d'une certaine quantité de surface de flamme initiale pour démarrer et représenter la flamme naissante. Le calcul d'allumage s'est basé sur cette quantité initiale de la densité de surface de flamme qui va être imposée pendant quelques itérations en une maille. Cette quantité qui représente pratiquement l'énergie initiale d'allumage. L'évaluation de cette de cette surface de flamme initiale nous permet d'aller vers des résultats représentatifs.

La densité de surface de flamme est inversement proportionnelle au rayon du noyau enflammé. Plus le rayon est petit plus la densité de flamme est très importante.

Plusieurs approches ont été posées pour évaluer cette valeur initiale imposée de la densité de surface de flamme. Sur la base des constatations tirées par Rutland et al dans leur étude sur le développement d'un front de flamme de prémélange dans un champ turbulent ; on peut évaluer la valeur de surface de flamme initiale  $\Sigma_0$  qu'il faut placer en un point pour obtenir un développement satisfaisant de la flamme. Cette valeur est proportionnelle à  $E_s/S_1$  [21]:

$$\Sigma_0 = c_1 \cdot E_s / S_1$$

(II.5.1)

Une autre approche peut être aussi employée et qui suppose que  $\Sigma_0$  représente la flamme laminaire. Cette valeur de  $\Sigma_0$  est proportionnelle à  $E_s/u'$  :

$$\Sigma_0 = c_1 \cdot E_s / u' \quad (\text{II.5.2})$$

Cette valeur initiale de surface de flamme qui est imposée pendant un temps pour assurer l'allumage est d'une importance déterminante sur la longueur et la forme de la flamme.

Un test numérique a été fait [21] qui montre l'influence de la quantité de surface de flamme imposée initialement. Pour des valeurs  $\Sigma_0 = 1\text{m}^{-1}$ ,  $\Sigma_0 = 100\text{m}^{-1}$  et  $\Sigma_0 = 1000\text{m}^{-1}$ , une évolution identique a été constatée : La surface initiale de flamme imposée diffuse et se stabilise à une valeur d'équilibre, passe ensuite par un pic de même forme et même valeur maximale. Cependant, pour  $\Sigma_0 = 1\text{m}^{-1}$  la phase initiale d'allumage a duré 1ms de plus que pour  $\Sigma_0 = 10\text{m}^{-1}$  et pour  $\Sigma_0 = 1000\text{m}^{-1}$  a duré 1ms de moins. On peut constater donc que seul la phase initiale qui est différente.

## II.6 Système d'équations modélisées des bilans moyens

### II.6.1 Equations modélisées

En utilisant les modélisations précédentes, modélisation de la turbulence et de la combustion, les équations prêtes à la modélisation numérique s'écrivent maintenant :

$$\text{Continuité:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_\alpha) = 0 \quad (\text{II.6.1})$$

$$\text{Mouvement:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\beta) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_\alpha u_\beta) = -\frac{\partial P}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \quad (\text{II.6.2})$$

$$\text{avec:} \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

$$- \tau_{\alpha\beta} = \mu_t \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \left( \mu_t \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} + \rho K \right)$$

$$\text{Espèces:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_k) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_\alpha Y_k) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu_1 + \mu_t}{s_{ck}} \cdot \frac{\partial Y_k}{\partial x_\alpha} \right) - \rho V_{dk} \Sigma \quad (\text{II.6.3})$$

$$\text{avec: } \sum_{k=1}^n Y_k = 1$$

$$\text{Energie: } \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha}(\rho u_\alpha h) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left( \frac{\mu_l + \mu_t}{P_r} \cdot \frac{\partial h}{\partial X_\alpha} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \rho \cdot \Delta h_k^0 V_{dk} \cdot \Sigma \quad (\text{II.6.4})$$

$$\text{Turbulence: } \frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha}(\rho u_\alpha K) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial K}{\partial X_\alpha} \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{II.6.5})$$

$$\text{Dissipation: } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha}(\rho u_\alpha \varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_\alpha} \right) + c_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{K} P_k - c_{2\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{K} \rho \varepsilon \quad (\text{II.6.6})$$

$$\text{avec: } P_k = \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\beta} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\beta\alpha} \left( \mu_t \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial X_\gamma} + \rho K \right) \right] \frac{\partial u_\beta}{\partial X_\alpha}$$

**Densité de surface de flamme:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Sigma) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha}(\rho u_\alpha \Sigma) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial X_\alpha} \right) + (E_s + E'_s) \rho \Sigma - D_s \rho \Sigma \quad (\text{II.6.7})$$

$$\text{avec: } E_s = \alpha \frac{\varepsilon}{K} \quad E'_s = \alpha' \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\beta} \quad D_s = B_d \left( \frac{I}{Y_f} + \frac{s}{Y_0} \right) v_{df} \cdot \Sigma$$

## II.6.2 Equations de conservation modélisées en coordonnées cartésiennes

### • Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{II.6.8})$$

### • Equation de mouvement suivant x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho K \right] - \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.6.9})$$

### • Equation de mouvement suivant y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot v) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho K \right] - \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.6.10})$$

- **Equations des espèces chimiques**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot Y_k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot Y_k) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial Y_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial Y_k}{\partial y} \right) - \rho v_{dk} \cdot \Sigma \quad (\text{II.6.11})$$

- **Equation d'énergie**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot h) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot h) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \sum_{k=1}^n \rho \Delta h_k^0 \cdot v_{dk} \cdot \Sigma + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{II.6.12})$$

- **Equation d'énergie cinétique turbulente**

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot k) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{II.6.13})$$

$$P_k = \mu_t \left[ 2 \cdot \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho K \right)$$

- **Equation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente**

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{2\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \rho \varepsilon \quad (\text{II.6.14})$$

- **Equation de la densité de surface de flamme**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot \Sigma) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot \Sigma) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\sigma_\Sigma} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\sigma_\Sigma} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \right) + \left( \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{k} \right) \rho \Sigma \\ &- B_d \left( \frac{1}{Y_f} + \frac{s}{Y_{d_f}} \right) v_{d_f} \cdot \Sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{II.6.15})$$

avec:  $\mu_t = \rho \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}$  et  $\mu = \mu_\ell + \mu_t$

On peut développer l'équation de l'énergie en fonction de la température, en utilisant la chaleur massique à pression constante. Ce qui va permettre le passage de l'enthalpie à la température.

La résolution de ces équations permet de calculer, en chaque point du milieu fluide en réaction et à chaque instant, les grandeurs caractéristiques de ce milieu. La solution dépend des conditions aux limites du milieu, qui sont spécifiques de chaque flamme considérée.

Toutes ces équations de conservations, que nous avons écrites, peuvent se mettre sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S_\phi \quad (\text{II.6.16})$$

terme de convection

terme de diffusion

terme source

où  $\phi$  est une variable décrivant le milieu et qui peut être  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Sigma$  ou  $Y_k$ .

Les variables, les coefficients de diffusion et les termes sources de cette équation générale sont résumés dans le tableau suivant :

Equation	Variable $\phi$	Diffusivité	Source
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	u	$\mu$	$S_u$
Quantité de mouvement suivant y	v	$\mu$	$S_v$
Energie cinétique turbulente	k	$\Gamma_k$	$S_K$
Dissipation d'énergie cinétique turbulente	$\varepsilon$	$\Gamma_E$	$S_E$
Energie	h	$\Gamma_h$	$S_h$
Espèces chimiques	$Y_k$	$\Gamma_Y$	$S_Y$
Surface de flamme	$\Sigma$	$\Gamma_\Sigma$	$S_\Sigma$

$$\text{Avec : } \mu = \mu_l + \mu_t$$

$$\Gamma_\phi = (\mu_l + \mu_t) / \sigma_\phi$$

### Les termes sources :

- $$S_u = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho k\right) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\bullet S_v = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho k \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\bullet S_k = P_k - \rho \varepsilon$$

$$\bullet S_E = C_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot P_k - C_{2\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \rho \varepsilon$$

$$P_k = \mu_t \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho k \right)$$

$$\bullet S_h = - \sum_{k=1}^n \rho \Delta h_k^\circ \cdot V_{Dk} \cdot \Sigma + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\bullet S y_k = - \rho \cdot V_{Dk} \cdot \Sigma$$

$$\bullet S_E = \left( \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{k} \right) \rho \Sigma - B_d \left( \frac{1}{Y_f} + \frac{s}{Y_0} \right) V_{Df} \cdot \Sigma^2$$

## Chapitre III

# Modélisation et résolution numériques

### III.1 Introduction

Le problème maintenant se trouve sous forme d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles. La résolution analytique de telles équations est très difficile et dans certains cas même impossible. Des méthodes d'approche de la solution sont développées pour résoudre ce type d'équations ; elles sont les méthodes numériques.

Les méthodes numériques consistent à traduire les équations aux dérivées partielles en système d'équations algébriques, qui sera calculé, après l'avoir fermé, par l'ordinateur. Parmi les méthodes numériques qui sont appliquées aux problèmes physiques, on peut citer les méthodes aux différences finies, aux volumes finis et aux éléments finis.

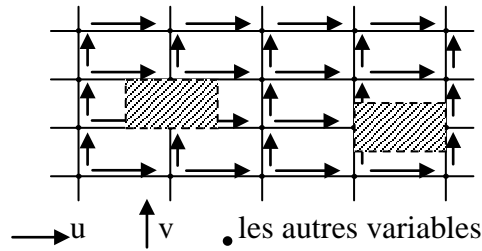
La méthode des volumes finis, méthode utilisée pour ce travail, est basée sur une forme intégrale des équations à résoudre. Elle consiste à diviser le domaine du calcul en  $n$  volumes élémentaires dans lesquels l'intégration sera effectuée.

La méthode des volumes finis présente une expérience numérique très considérable et efficace. Elle s'adapte très bien au problème physique comme elle linéarise facilement les termes sources, ce qui rend généralement cette méthode stable et convergente.

### III.2 Maillage

Le maillage est formé en décomposant le domaine d'étude en un nombre fini de volume de contrôle. Les variables de l'écoulement, à l'exception des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse, sont stockées aux nœuds de la grille. Les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse sont stockées au niveau des interfaces des volumes de contrôle. C'est le maillage décalé.

L'intérêt majeur du maillage décalé est d'assurer une bonne estimation des flux de convection dans les bilans de grandeurs scalaires, et aussi une meilleure évaluation des gradients de pression dans l'équation de mouvement.



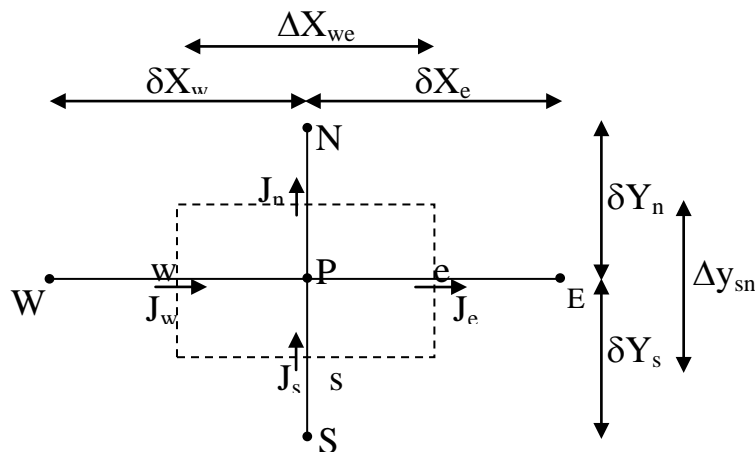
**Figure III.1** Localisation des variables dans un maillage décalé.

### III.3 Discrétisation des équations

Pour un cas bidimensionnel avec une géométrie plane, la forme générale des équations de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S_\phi \tag{III.1}$$

La discrétisation avec la méthode des volumes finis consiste à traduire, par intégration, l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques de substitution. Les équations sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Un volume de contrôle est défini sur la figure (III.2) suivante :



**Figure III.2 :** Représentation des nœuds et notation des interfaces dans un volume de contrôle.

Nous remplaçons le terme du flux par  $J$ , l'équation (III.1) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_\phi \quad (\text{III.2})$$

avec :

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Le flux  $J$  est constitué du flux de convection et du flux par diffusion.

Nous intégrons l'équation (III.3.2) par rapport au temps et à l'espace :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dy + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (J_x) dx \cdot dy \cdot dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (J_y) dx \cdot dy \cdot dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n S_\phi \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (\text{III.3})$$

- L'ordre d'intégration est choisi suivant le terme.

Puisque les dérivées en temps et en espace étant séparées et pour faciliter et faire montrer bien la discrétisation, nous allons séparer l'intégration temporelle et l'intégration spatiale.

### III.3.1 Intégration spatiale

Nous intégrons l'équation (III.2) par rapport à l'espace :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} (J_x) dx \cdot dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (J_y) dx \cdot dy = \int_w^e \int_s^n S_\phi \cdot dx \cdot dy \quad (\text{III.4})$$

Cette intégration donne :

$$J_e A_e - J_w A_w + J_n A_n - J_s A_s = \bar{S} A \Delta V \quad (\text{III.5})$$

-  $J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les flux totaux à travers les faces des volumes de contrôle :

$$J_e = (\rho u \phi)_e - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (\text{III.6})$$

$$J_w = (\rho u \phi)_w - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (\text{III.7})$$

$$J_n = (\rho v \phi)_n - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \quad (\text{III.8})$$

$$J_s = (\rho v \phi)_s - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \quad (\text{III.9})$$

- $A_e$ ,  $A_w$ ,  $A_n$  et  $A_s$  sont les aires de chaque face du volume de contrôle. Ces aires représentent, dans le cas bidimensionnel, respectivement les espacements  $\Delta Y_{sn}$ ,  $\Delta Y_{sn}$ ,  $\Delta Y_{we}$  et  $\Delta Y_{we}$ .
- $\bar{S}$  est la valeur moyenne du terme source dans le volume de contrôle. Pour pousser à la convergence, le terme source est linéarisé par :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_p \quad \text{avec } S_p \leq 0$$

- $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle, qui représente dans le cas bidimensionnel la surface  $\Delta X \cdot \Delta Y$ .

Afin d'aboutir à l'équation algébrique discrétisée :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w + a_N \phi_N + a_s \phi_s + b \quad (\text{III.10})$$

Nous devons écrire les flux aux interfaces, des équations III.6, III.7, III.8 et III.9, en fonction des flux aux nœuds :

- Le gradient de  $\phi$  à l'interface est proportionnel à  $\Delta \phi$  aux nœuds.
- Les  $\phi$  aux interfaces,  $\phi_e$ ,  $\phi_w$ ,  $\phi_n$  et  $\phi_s$ , doivent être approximées en fonction des  $\phi$  aux nœuds,  $\phi_E$ ,  $\phi_W$ ,  $\phi_N$ ,  $\phi_S$  et  $\phi_P$ . Plusieurs schémas sont développés pour donner cette approximation, on peut citer : le schéma centré, le schéma upwind, le schéma exponentiel, le schéma en loi de puissance (PLDS) et d'autres.

Nous avons choisi le schéma PLDS qui est un schéma approprié et recommandé par Patankar [31], il est très efficace et il approche beaucoup mieux la solution exacte.

Avec le schéma PLDS, les coefficients de l'équation III.10 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 a_E &= D_e [ [ 0, (1 - 0.1 | P_e|^5) ] ] + [ [ -F_e, 0 ] ] \\
 a_W &= D_w [ [ 0, (1 - 0.1 | P_w|^5) ] ] + [ [ F_w, 0 ] ] \\
 a_S &= D_s [ [ 0, (1 - 0.1 | P_s|^5) ] ] + [ [ F_s, 0 ] ] \\
 a_N &= D_n [ [ 0, (1 - 0.1 | P_n|^5) ] ] + [ [ -F_n, 0 ] ] \\
 b &= S_c \Delta V \\
 a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta V
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a_E \\ a_W \\ a_S \\ a_N \\ b \\ a_P \end{aligned}} \right\} \quad \text{(III.11)}$$

avec :

- D représente l'importance de la diffusion (positif) :

$$D_e = \left( \frac{\Gamma_{\phi_e}}{\delta x_e} \right) A_e \quad D_w = \left( \frac{\Gamma_{\phi_w}}{\delta x_w} \right) A_w \quad D_n = \left( \frac{\Gamma_{\phi_n}}{\delta y_n} \right) A_n \quad D_s = \left( \frac{\Gamma_{\phi_s}}{\delta y_s} \right) A_s$$

- F représente l'importance de la convection (positif ou négatif) :

$$F_e = (\rho u)_e A_e \quad F_w = (\rho u)_w A_w \quad F_n = (\rho y)_n A_n \quad F_s = (\rho y)_s A_s$$

ce sont des débits de masse.

- P est le nombre de Peclet, il représente le rapport de transfert par convection au transfert par diffusion :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

- Notation :  $[ [ a, b ] ] = \max(a, b)$

- **Evaluation des masses volumiques et des diffusivités aux interfaces :**

La masse volumique et les diffusivités aux interfaces sont évaluées en utilisant une variation linéaire entre les nœuds de l'interface en question :

$$\begin{aligned}
 \rho_e &= f_e \rho_E + (1 - f_e) \rho_P & \Gamma_e &= f_e \Gamma_E + (1 - f_e) \Gamma_P \\
 \rho_w &= f_w \rho_P + (1 - f_w) \rho_W & \Gamma_w &= f_w \Gamma_P + (1 - f_w) \Gamma_W \\
 \rho_n &= f_n \rho_N + (1 - f_n) \rho_P & \Gamma_n &= f_n \Gamma_N + (1 - f_n) \Gamma_P \\
 \rho_s &= f_s \rho_P + (1 - f_s) \rho_S & \Gamma_s &= f_s \Gamma_P + (1 - f_s) \Gamma_S
 \end{aligned}$$

avec :  $f_e = \frac{\delta X_{Pe}}{\delta X_e}$        $f_w = \frac{\delta X_{Ww}}{\delta X_w}$        $f_n = \frac{\delta X_{Nn}}{\delta y_n}$        $f_s = \frac{\delta X_{Ss}}{\delta y_s}$

Dans notre maillage, les interfaces sont à mi-distance donc  $f = 1/2$  et la variation devient une moyenne arithmétique, ex.  $\rho_e = (1/2) (\rho_E + \rho_P)$ .

On écrit l'équation III.10 sous la forme générale suivante :

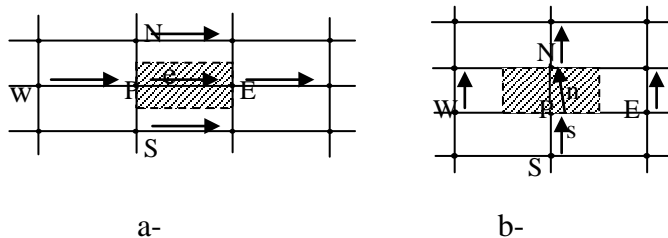
$$A_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \tag{III.12}$$

$nb$  dénote les nœuds voisins de P.

$\sum$  est la sommation des nœuds voisins.

### III.3.2 Les équations discrétisées du mouvement (maillage décalé)

Comme il a été mentionné dans la section III.2, des emplacements décalés sont utilisés pour les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse ; ce qui nécessite des changements appropriés dans leurs équations discrétisées. Les vitesses sont stockées au niveau des interfaces des volumes de contrôle. La figure suivante montre en détail les emplacements décalés des composantes,  $u$  et  $v$ , et de leurs interfaces :



**Figure III.3 :** Emplacements des  $u$  et  $v$  dans le maillage.  
( a- pour  $u$  et b- pour  $v$  )

Les formes discrétisées des équations de mouvements s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \text{suivant } -x : \quad a_e u_e &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \\ \text{suivant } -y : \quad a_n v_n &= \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \end{aligned} \right\} \tag{III.13}$$

où,

$nb$  note les quatre points voisins de la composante de vitesse.

$A_e$  représente la surface sur laquelle agit la pression.

- Les expressions des coefficients pour  $a_i$  et  $b$  sont identiques à celles données par les équations III.11 mais les emplacements décalés des vitesses (figure III.3) doivent être pris en compte dans l'évaluation des diffusions  $D_i$  et des convections  $F_i$ .
- Le gradient de pression est évalué sans aucune approximation (équation III.13) pour les pressions, ce qui est un des avantages du maillage décalé déjà mentionné dans la section III.2.

### III.3.3 Intégration temporelle

L'allumage est un problème avec des phénomènes instationnaires. Il nécessite, pour leur simulations numériques, de calculer toutes les étapes entre l'état initial, première apparition de flamme, et l'état convergé, l'état stabilisé ou final de la flamme.

L'intégration temporelle se fait sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ . Nous allons noter les valeurs à l'instant "  $t$  " de la variable  $\phi_P^\circ, \phi_E^\circ, \phi_W^\circ, \phi_N^\circ$  et  $\phi_S^\circ$ , et les valeurs à l'instant "  $t+\Delta t$  " par  $\phi_P, \phi_E, \phi_W, \phi_N$  et  $\phi_S$ .

En utilisant la discrétisation spatiale, l'intégration temporelle de l'équation III.3 se réduit à :

$$\Delta V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \cdot dt = \int_t^{t+\Delta t} (-a_p \phi_p + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b) dt$$

$$\Delta V ((\rho \phi) - (\rho \phi)^\circ) = \int_t^{t+\Delta t} (-a_p \phi_p + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b) dt \quad (\text{III.14})$$

Pour exprimer cette intégration, une approximation de variation de  $\phi$  par rapport au temps, de  $t$  à  $t+\Delta t$ , est nécessaire. Plusieurs approximations sont proposées, quelques-unes peuvent être généralisées par :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi \cdot dt = [f \cdot \phi + (1-f)\phi^\circ] \cdot \Delta t \quad (\text{III.15})$$

$f$  est un facteur entre 0 et 1 :

$f=0$  correspond à un schéma explicite.

$f=1$  correspond à un schéma totalement implicite.

$f = 1/2$  conduit au schéma de Crank-Nicholson.

Nous remplaçons les variations de  $\phi$  de l'équation III.14 par les expressions de l'équation III.15, nous obtenons un système algébrique identique, dans la forme, au système du cas stationnaire mais avec des termes supplémentaires dans les coefficients. Ce système algébrique instationnaire s'écrit :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.16})$$

avec :

$$\begin{aligned} a_E &= f \cdot a_E^\circ & a_S &= f \cdot a_S^\circ \\ a_W &= f \cdot a_W^\circ & a_N &= f \cdot a_N^\circ \\ a_P &= (\Delta V / \Delta t) \rho_P + f \cdot a_P^\circ \end{aligned}$$

$$b = \Delta V \cdot Sc + (\Delta V / \Delta t) (\rho_P \phi_P)^\circ + (1-f) [ -(a_P \phi_P)^\circ + (a_E \phi_E)^\circ + (a_W \phi_W)^\circ + (a_N \phi_N)^\circ + (a_S \phi_S)^\circ ]$$

Une discussion extensive sur la stabilité et la précision du calcul, pour les différents schémas, est faite par Patankar [31]. Cette discussion se résume comme suit :

- **Schéma explicite,  $f = 0$**

Avec ce schéma  $\phi_P$  est explicitement exprimée en fonction de  $\phi_P^\circ$ ,  $\phi_E^\circ$ ,  $\phi_W^\circ$ ,  $\phi_N^\circ$  et  $\phi_S^\circ$ , qui sont des valeurs connues et la stabilité est soumise à une condition sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

- **Schéma de Crank-Nicholson,  $f = 1/2$**

Le schéma de Crank-Nicholson suppose une variation linéaire de  $\phi$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Ce schéma est inconditionnellement stable ; mais dans certaines conditions on peut obtenir des résultats n'ayant pas de sens physique (des oscillations).

- **Schéma explicite,  $f = 1$**

Avec ce schéma  $\phi_P$  domine sur tout l'intervalle  $\Delta t$  sauf à l'instant  $t$  où  $\phi_P$  varie subitement de  $\phi_P^\circ$  à  $\phi_P$ . C'est un schéma toujours stable, il est le schéma préféré mais il n'est pas aussi précis que le schéma de Crank-Nicholson pour des petits pas de temps  $\Delta t$ .

### III.3.1 Linéarisation des termes sources

Le terme source  $\bar{S}$  dans l'équation algébrique est très important, il influence la solution. C'est un terme qui pousse à la convergence s'il est très bien linéarisé.

Une méthode de linéarisation, dite méthode de tangente, linéarise le terme source par :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_P \quad \text{avec le coefficient} \quad S_p \leq 0.$$

Les expressions de  $S_c$  et de  $S_p$  du terme source des différentes équations sont résumées dans le tableau suivant :

**Tableau des expressions de  $S_c$  et  $S_p$  du terme source des différentes équations**

u	$S_c$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho k \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$
	$S_p$	0
v	$S_c$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho k \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$
	$S_p$	0
	$S_c$	$P_k - \rho \varepsilon$ $P_k = \mu_t \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho k \right)$

k	S <sub>p</sub>	$-\left(\frac{c_{\mu}}{\mu_t} \cdot \rho^2 \cdot k\right)$
ε	S <sub>c</sub>	$\frac{c_{1\varepsilon} \cdot c_{\mu}}{\mu_t} \cdot p_k \cdot \rho \cdot k$
	S <sub>p</sub>	$-\left(\frac{c_{2\varepsilon} \cdot c_{\mu}}{\mu_t} \cdot \rho^2 \cdot k\right)$
h	S <sub>c</sub>	$-Q \cdot V_{Df} \cdot \rho \cdot \Sigma$
	S <sub>p</sub>	0
Y <sub>k</sub>	S <sub>c</sub>	$-V_{Dk} \cdot \rho \cdot \Sigma$
	S <sub>p</sub>	0
Σ	S <sub>c</sub>	$E_S \cdot \rho \cdot \Sigma$
	S <sub>p</sub>	$-\left[B_d \left(\frac{1}{Y_f} + \frac{S}{Y_0}\right) \cdot V_{Df} \cdot \rho \Sigma\right]$

### III.4 Résolution numérique

#### III.4.1 Méthode de résolution des équations discrétisées

La solution des équations algébriques nécessite une méthode de résolution. Plusieurs méthodes de résolution existent, on peut citer : les méthodes directes telle que l'élimination de Gauss, et les méthodes itératives telle que la méthode de Gauss-Seidel et la méthode Ligne Par Ligne.

Les méthodes directes sont coûteuses et non appropriées pour les systèmes non-linéaires, alors que les méthodes itératives sont moins coûteuses et conviennent mieux aux systèmes non-linéaires.

La méthode de Gauss-Seidel est lente dans la convergence. Nous pouvons accélérer la convergence avec la méthode Ligne Par Ligne, puisque notre système d'équations discrétisées peut s'écrire avec une forme matricielle et tridiagonale, qui est une condition d'application de cette méthode.

La méthode Ligne Par Ligne est une procédure semi-itérative, qui combine entre la méthode directe TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) et la méthode itérative de Gauss-Seidel.

### III.4.2 Procédure de marche de la méthode Ligne Par Ligne

l'équation (III-10) peut se mettre sous la forme indicielle suivante :

$$A_{ij} \phi_{ij} - A_{i,j-1} \phi_{i,j-1} - A_{i,j+1} \phi_{i,j+1} = A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + B_{ij} \quad (\text{III.4.1})$$

$$i=2, n-1$$

$$J=2, m-1$$

Nous allons décrire rapidement la procédure de marche. D'abord, on considère une ligne  $i$  et que les valeurs de  $\phi$  pour les lignes  $(i+1)$ ,  $(i-1)$  sont les dernières valeurs connues. Donc, on peut arranger ce système pour le mettre en tridiagonal :

On pose dans l'équation (III.4.1) :

$$A_{i,j-1} = c(j)$$

$$A_{i,j+1} = b(j)$$

$$A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + B_{i,j} = d(j)$$

$$A_{i,j} = a(j)$$

On obtient un système tridiagonal :

$$- c(j) \phi_{j-1} + a(j) \phi_j - b(j) \phi_{j+1} = d(j) \quad (\text{III.4.2})$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$[ A ] \phi = c \quad (\text{III.4.3})$$

[ A ] est une matrice tridiagonale.

Nous avons maintenant un système tridiagonal et sa résolution sera faite par la méthode TDMA, qui sera décrite dans la section suivante. Ensuite, on passe à la ligne suivante  $i+1$ , les valeurs en  $i$  et  $i+2$  sont les dernières valeurs connues, etc. C'est une procédure de marche en avant, ligne par ligne jusqu'à la frontière du domaine. Une fois que tout le domaine serait balayé, cette procédure est répétée jusqu'à ce que les champs de  $\phi$  ne changent plus au cours du balayage.

### III.4.3 Algorithme de résolution d'un système tridiagonal (méthode TDMA)

On cherche la solution du système tridiagonal suivant :

$$-c(j) \phi_{j-1} + a(j) \phi_j - b(j) \phi_{j+1} = d(j) \quad (\text{III.4.4})$$

où les inconnues sont les  $\phi_j$ ,  $j=1, n$  et  $a(j)$ ,  $b(j)$ ,  $c(j)$ ,  $d(j)$  sont donnés.

La méthode TDMA consiste à réduire la matrice tridiagonale en une matrice bidiagonale dont les termes de la diagonale principale sont égaux à l'unité. le système bidiagonal s'écrit :

$$\Phi(j) = P(j) \cdot \Phi(j+1) + Q(j) \quad (\text{III.4.5})$$

$$\text{avec } P(j) = \frac{b(j)}{a(j) - c(j) \cdot P(j-1)} \quad Q(j) = \frac{d(j) - c(j) \cdot Q(j-1)}{a(j) - c(j) \cdot P(j-1)}$$

#### - Opérations de TDMA

- 1- Calculer  $P(1)$  et  $Q(1)$  ;  $P(1) = b(1)/a(1)$   $Q(1) = d(1)/a(1)$
- 2- Calculer  $P(j)$  et  $Q(j)$  pour  $j= 2, \dots, n$  ; Pour  $j=n$  ( $b(n) = 0$ ) :  $P(n)= 0$
- 3- Obtenir  $\phi(n)$  et  $Q(n)$
- 4- Utiliser l'équation III.4.5 :  $\phi(j) = P(j) \phi(j+1) + Q(j)$  pour calculer  $\phi$ ,  $\phi(n-1)$ ,  $\phi(n-2)$ ,  
.....,  $\phi(3)$ ,  $\phi(2)$ ,  $\phi(1)$

### III.4.4 Critère de convergence et méthode de relaxation

#### III.4.4.1 Critère de convergence

Le critère de convergence utilisé ici est basé sur les résidus absolus normalisés des équations à résoudre, qui, lorsqu'il est satisfait, garantit la convergence de la solution itérative. C'est un critère qui est défini par :

$$\text{RESOR } \phi = \sum \left| \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_c - a_p \phi_p \right| / F_{in \phi}$$

RESOR  $\phi$  est la somme des résidus normalisés en valeur absolue de l'équation pour  $\phi$  associée à tous les volumes de contrôles du domaine.

et RESORM, la somme des résidus de masse normalisés en valeur absolue, est défini par :

$$\text{RESORM} = \sum |m_{ij}| / \min$$

Pour les équations de mouvement,  $F_{in \phi}$  est le flux total à l'entrée associé à la variable  $\phi$ ,  $\min$  est le débit massique total à l'entrée.

La solution est acceptable quand ces résidus se réduisent à une valeur inférieure à celle prescrite SORMAX. La valeur de SORMAX adopté, dans notre calcul, était de 0.5 %.

#### III.4.4.2 Facteur de sous relaxation

En présence de non-linéarités, avec les problèmes itératifs, la sous relaxation est utilisée pour éviter la divergence. La valeur de  $\phi_p$  relaxée est exprimée en fonction de la valeur  $\phi_p^0$  de l'itération précédente et la valeur  $\phi_p^1$  actuelle :

$$\phi_p = \phi_p^0 + \alpha_\phi (\phi_p^1 - \phi_p^0)$$

$\alpha_\phi$  est un paramètre de sous relaxation. La valeur adoptée à ce paramètre est entre 0.4 et 0.6 pour toutes les variables  $\phi$ .

#### III.4.5 Equation de correction de la pression

Les équations, de continuité et des vitesses, sont couplées. Ces équations ont besoin d'un champ de pression pour qu'elles soient résolues. Donc on doit formuler une équation de transport pour la pression. Plusieurs méthodes, comme SIMPLE(Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations), SIMPLER(SIMPLE Revised) et PISO(Pressure Implicit Solution by split Operator method), ont été formulées pour donner une équation de correction

de pression. Ces méthodes se basent sur une combinaison entre les équations de quantité de mouvement et de continuité.

Nous allons montrer rapidement le développement de l'équation de correction de pression en utilisant la méthode SIMPLE :

On donne des valeurs initiales pour la pression et la densité, qui seront corrigées par la suite.

On note les valeurs choisies par \* et les valeurs corrigées par ' :

$$P = P^* + P' \quad (1) \quad u = u^* + u' \quad (3)$$

$$\rho = \rho^* + \rho' \quad (2) \quad v = v^* + v' \quad (4)$$

### a- Formules de correction des vitesses

On a les équations de u et v déjà obtenues dans les sections précédentes :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_u + A_e (P_P - P_E) \quad (5)$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b_v + A_n (P_P - P_N) \quad (6)$$

Avec le choix initial, ces équations s'écrivent :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (7)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v + A_n (P_P^* - P_N^*) \quad (8)$$

Si on soustrait les équations (7) et (8) respectivement de (6) et (5) et en utilisant (1), (3) et (4), il en résulterait les formules de correction de vitesse suivantes :

$$u_e' = d_e (P_P' - P_E') \quad (9) \quad \text{avec : } d_e = A_e / a_e$$

$$v_n' = d_n (P_P' - P_N') \quad (10) \quad d_n = A_n / a_n$$

On a négligé les termes  $\sum a_{nb} u_{nb}'$  et  $\sum a_{nb} v_{nb}'$  devant les termes de correction de pression.

### b- formule de correction de la masse volumique

La forme compressible nécessite de donner une formule pour la correction de la masse volumique. La masse volumique est traitée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho u &= (\rho^* + \rho') (u^* + u') \\ \rightarrow \rho u &= \rho^* u^* + \rho' \rho^* + \rho^* u' \end{aligned} \quad (11)$$

Le terme  $\rho' u'$  est négligé.

De même pour v, on obtient :

$$\rho v = \rho^* v^* + \rho' \rho^* + \rho^* v' \quad (12)$$

où le terme de correction est donné par :

$$\rho' = k P' \quad \text{avec} \quad k = \partial \rho / \partial P \quad (13)$$

### c- Equation de correction de pression

Enfin, nous allons utiliser l'équation de continuité et faire les substitutions avec les équations (11) et (12) ensuite, nous employons les formules de correction des vitesses et de la masse volumique, les formules (9), (10) et (13). L'équation de continuité est :

$$(\rho A u)_w - (\rho A u)_e + (\rho A v)_s - (\rho A v)_n - (\rho_p - \rho_p^\circ) (\Delta V / \Delta t) = 0 \quad (14)$$

Les masses volumiques aux interfaces sont exprimées avec le schéma Upwind (décentré). Nous utilisons les équations (11), (12) puis (9), (10) et (13), nous obtenons à la fin l'équation de correction de pression suivante :

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } a_E &= A_e \rho_e^* d_e + A_e k_E [ | -u_e^* , 0 | ] \\ a_W &= A_w \rho_w^* d_w + A_w k_w [ | u_w^* , 0 | ] \\ a_N &= A_n \rho_n^* d_n + A_n k_n [ | -v_n^* , 0 | ] \end{aligned}$$

$$a_s = A_s \rho_s^* d_s + A_s k_s [ | v_s^* , 0 | ]$$

$$a_p = A_e \rho_e^* d_e + A_e k_E [ | u_e^* , 0 | ] + A_w \rho_w^* d_w + A_w k_w [ | -u_w^* , 0 | ] \\ + A_n \rho_n^* d_n + A_n k_n [ | v_n^* , 0 | ] + A_s \rho_s^* d_s + A_s k_s [ | -v_s^* , 0 | ] \\ b = ( \rho^* A u^* )_w - ( \rho^* A u^* )_e + ( \rho^* A v^* )_s - ( \rho^* A v^* )_n - ( \rho_p^* - \rho_p^{*o} ) ( \Delta V / \Delta t )$$

La résolution de l'équation de correction de pression permet de corriger la pression et les vitesses. Ces résultats vont être utilisés pour résoudre l'équation de mouvement. Les résultats de l'équation de mouvement remplaceront les anciennes valeurs de la vitesse et le processus itératif se répète jusqu'à ce que les résidus tendent vers zéro.

### III.4.6 Procédure de résolution

Le programme de résolution est construit sur la base du code TEAM. Nous l'avons utilisé pour résoudre toutes les équations de conservation. La procédure de résolution est décrite par les étapes suivantes :

- 1- Initialisation sur tout le domaine de calcul de toutes les variables.
- 2- Résolution des équations de mouvement.
- 3- Résolution de l'équation de correction de pression.
- 4- Corriger la pression et les vitesses.
- 5- Résolution des équations de conservation.
- 6- Corriger la viscosité turbulente.
- 7- Prendre ces valeurs comme nouveau choix initial et retourner à l'étape 2.
- 8- Répéter le processus jusqu'à convergence.

#### - L'avance en temps

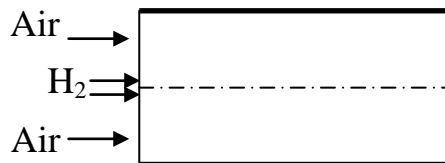
Pour les problèmes non-linéaires, la boucle générale d'itérations est répétée jusqu'à convergence pour chaque pas de temps. Les résultats convergés au dernier pas du temps sont considérés comme les anciennes valeurs de temps et aussi supposés comme valeurs pour le pas du temps suivant. L'avance du temps est avec  $\Delta t$  et la boucle générale d'itérations est

répétée jusqu'à convergence. Ces calculs peuvent être exécutés pour un nombre du pas de temps désiré.

### III.4.7 Configuration et conditions aux limites

Un problème ne peut être résolu qu'avec la spécification des conditions aux limites, pour l'écoulement et pour la configuration. Les valeurs à l'entrée ont une grande influence sur la solution ; il est nécessaire de bien connaître ces valeurs, aussi bien pour la combustion que pour la turbulence, pour que la solution soit très bien évaluée.

L'étude est faite sur une configuration bidimensionnelle simple, représentée sur la figure suivante :



**Figure III.4 :** Configuration géométrique de la chambre de combustion.

La configuration géométrique est symétrique, cela permettra d'effectuer les calculs sur la moitié de la configuration, qui sera considérée le domaine de calcul. Le domaine de calcul est bidimensionnel et constitué de  $40 \times 30$  mailles de  $1,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ .

#### III.4.7.1 L'influence de la paroi

Dans une flamme de diffusion turbulente, la turbulence est supposée créée en amont dans l'écoulement, par suite des gradients de vitesse aux parois. La nature de l'écoulement et de la turbulence près de la paroi est différente et nécessite un traitement particulier. L'influence de la viscosité importante près de la paroi se traduit par des transferts de chaleur qui influencent fortement la combustion. Un traitement spécial sera appliqué près de la paroi en utilisant la loi de la paroi.

Près de la paroi le nombre de Reynolds est faible et le model K- $\epsilon$  ne peut pas être appliqué dans cette zone, il est généralement utilisé avec une modélisation par la loi de paroi. Les lois

de paroi turbulentes permettent de calculer les valeurs de  $K$  et  $\mathcal{E}$  dans les mailles près de la paroi.

L'écoulement dans la couche limite turbulente est déterminé par la vitesse axiale  $u$  (la vitesse  $v$  est négligeable devant  $u$ ), la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_w$  et la distance à la paroi  $y$ .

La vitesse de frottement  $u^*$  est définie par :

$$u^* = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$$

On définit deux nombres adimensionnels, de vitesse et de Reynolds :

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu}$$

Plusieurs études, telle dans [37], ont montré que l'écoulement, de la couche près de la paroi, peut se diviser en deux couches externes, et cela dépend du nombre adimensionnel  $y^+$  de Reynolds. De son côté la couche interne se compose de deux sous-couches, la sous-couche visqueuse étendue ( $y^+ < 11.5$ ) et la sous-couche inertielle ( $11.5 < y^+ < 1000$ ).

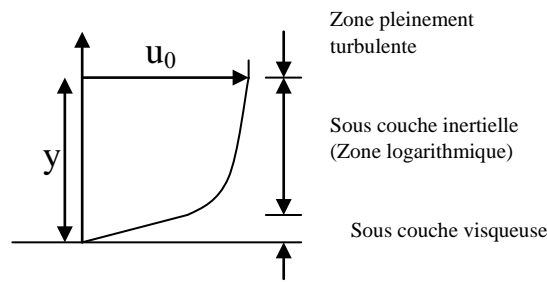
- Pour  $y^+ < 11.5$ , qui correspond à la sous-couche visqueuse, la vitesse de frottement  $u^*$  est exprimée par :

$$u^* = \sqrt{\frac{\nu u}{y}} \quad (\text{III.4.7.1})$$

- Pour  $y^+$  entre 11.5 et 1000, qui correspond à la sous-couche inertielle, la vitesse de frottement est exprimée par :

$$u^* = \frac{u}{2.5 \ln(y^+) + 5.5} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (\text{III.4.7.2})$$

$\tau_p$  : frottement à la paroi.



**Figure III.5** : Couche près de la paroi.

La contrainte de cisaillement dans la couche qui touche la paroi conserve une valeur constante qui égale au frottement à la paroi  $\tau_p$ .

La loi de la paroi permet d'estimer la contrainte de cisaillement dans la maille pariétale. La valeur de cette contrainte peut être calculée selon Schlichting [45] :

$$\tau_w = 0,0225 \cdot \rho \cdot u_\infty^{1,75} \cdot \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{0,25}$$

où  $u_\infty$  est la vitesse d'entrée,  $\delta$  l'épaisseur de la couche limite et  $\nu$  la viscosité cinématique de l'air.

### III.4.7.2 Conditions à la paroi pour $k$ et $\varepsilon$

Les expressions à la paroi pour  $k$  et  $\varepsilon$  sont obtenues sur la base que dans la zone pleinement turbulente la convection et la diffusion sont négligeables [38]. Ce qui traduit que la zone pleinement turbulente est une zone d'équilibre, la production  $y$  est égale à la dissipation. Alors, l'équation sur  $k$  se traduit à :

$$P_k = \rho \varepsilon$$

On obtient les expressions de  $k$  et  $\varepsilon$  :

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (\text{III.4.7.3})$$

$$\varepsilon = \frac{u^*}{c_k \cdot y} = \frac{U^*}{c_k \nu \cdot y^+} \quad (\text{III.4.7.4})$$

### III.4.7.3 Conditions aux limites

L'entrée, la sortie, la paroi et l'axe de symétrie sont les frontières du domaine de calcul. Les conditions aux limites adaptées pour notre étude, qui sont en général des types Dirichlet ( $\phi$  connue) et Neumann (gradient connu), sont :

- **A l'entrée :**

Les conditions à l'entrée sont de type Dirichlet. Les variables  $v=0$ ,  $u$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $Y_k$  et  $\Sigma$  sont définies soit à partir des données expérimentales disponibles ou par la connaissance préalable des paramètres de l'écoulement tels que le débit massique ou la vitesse moyenne à l'entrée. L'évaluation numérique de ces conditions sera donnée dans le chapitre des résultats.

- **A la paroi :**

- $u = v = 0$ ,  $k$  et  $\varepsilon$  sont de type Dirichlet exprimés par la loi de la paroi.
- La température, la pression et les concentrations des espèces sont de type Neumann : flux de chaleur nul  $\partial T / \partial y = 0$ , gradient de pression nul  $\partial P / \partial y = 0$ , et gradient d'espèces nul  $\partial Y_k / \partial y = 0$ .
- La température sur la surface de la paroi est généralement constante.

- **A la sortie :**

C'est une sortie libre où l'écoulement se caractérise, par supposition, par un gradient nul pour toutes les variables  $\phi$  :  $\partial \phi / \partial x = 0$ . On prend une pression constante à la sortie.

- **A l'axe de symétrie :**

Toutes les variables, à l'exception de  $v = 0$ , à l'axe de symétrie respectent la condition miroir de type Neumann :  $\partial \phi / \partial y = 0$ .

### III.4.7.4 La quantité de surface de flamme imposée initialement

Dans la plupart des études expérimentales, l'allumage dans les chambres de combustion est obtenu grâce à une bougie à haute tension installée sur la paroi supérieure de la chambre, à une distance déterminée en aval de l'injection. Dans notre domaine de calcul numérique, le

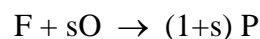
phénomène de l'allumage est exprimé d'une façon similaire où la quantité de surface de flamme  $\Sigma_0$  que nous imposerons initialement dans la maille, qui correspond à l'endroit où se trouve la bougie, remplacera l'énergie d'allumage de la bougie.

Des valeurs pour cette quantité  $\Sigma_0$  de démarrage du calcul d'allumage sont données et qui sont définies à partir des approches que nous avons présentées dans la section II.5.

### III.4.7.5 Données numériques

Les résultats, que nous allons présenter, sont liés aux conditions numériques considérées initialement et qui sont :

- On considère la combustion avec une réaction chimique sous la forme suivante :

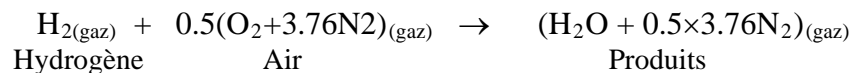


F est le combustible, l'hydrogène  $H_2$ .

O est l'oxydant, l'oxygène  $O_2$

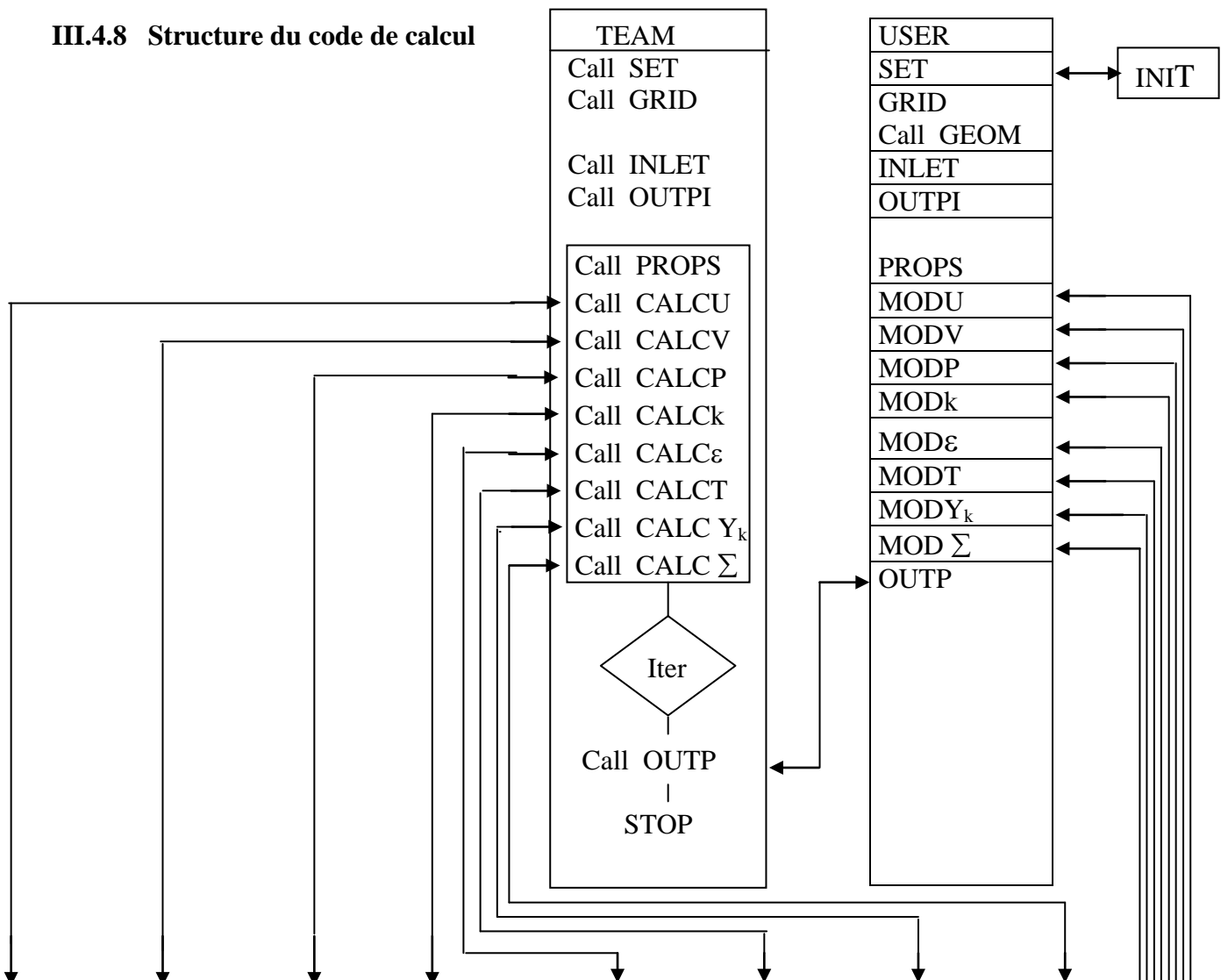
P représente les produits.

- Nous pouvons considérer, par exemple, un cas simple d'une réaction de combustion, avec mélange initial stœchiométrique :



- La température initiale au moment de l'allumage est de 300.K et la pression de 1. Atm.
- La chaleur dégagée lorsque la réaction ci-dessus se fait à la température initiale, soit environ  $60.5 \text{ k.cal.mol}^{-1} \approx 253302. \text{ kj.kmol}^{-1}$
- Le rapport d'équivalence  $\phi = 0.70$
- La chaleur massique à pression constante  $C_p$  est égale à celle de l'air à 1000 K , et ne varie pas au cours du calcul,  $C_p = 1.141 \text{ kj.kg}^{-1} .K^{-1}$
- Le domaine de calcul est constitué de  $40 \times 30$  mailles de  $1.5\text{mm} \times 0.5\text{mm}$ .
- La vitesse de l'air à l'entrée est de 10 m/s et la vitesse de l'hydrogène 2 m/s.
- L'échelle intégrale de la turbulence est choisie égale à la demi-hauteur de la section d'arrivée d'air,  $l_t = 13\text{mm}$ .
- On suppose une turbulence d'entrée de 10 % ,  $u' = 0.1 u_{\text{air}}$  et  $K = (3/2).u'^2$
- Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à l'entrée est  $\varepsilon = 0.41 \text{ K}^{3/2}/l_t$
- L'hydrogène est injecté entre  $y = 0 \text{ mm}$  et  $y = 1.5 \text{ mm}$  et l'air entre  $y = 1.5 \text{ mm}$  et  $15 \text{ mm}$ .

**III.4.8 Structure du code de calcul**





## Chapitre IV

### Résultats et interprétations

#### IV.1 Interprétation des résultats

L'allumage d'une flamme de diffusion turbulente est étudié numériquement. Ce problème est examiné par la résolution des équations de conservation pour la masse, la quantité de mouvement, l'énergie, les espèces chimiques, la densité de surface de flamme, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente ; c'est le modèle  $k-\varepsilon$  qui est utilisé pour ces deux équations de la turbulence. Le modèle de la flamme cohérente est utilisé et permet de relier le taux de réaction à la densité de surface de flamme, qui est exprimée par une équation de conservation propre à elle. Les équations sont discrétisées et résolues par la technique de la méthode des volumes finis. Le schéma PLDS est utilisé pour calculer les flux aux interfaces et un schéma semi-implicite est adopté pour l'avance en temps. L'allumage est obtenu en imposant initialement pendant un temps, quelques itérations, une quantité de surface de flamme dans la maille qui correspond à l'endroit pratique de l'allumage. Nous avons choisi la maille (1,3), où les réactifs sont en contact, comme endroit à cet allumage initial. La géométrie de la chambre de combustion est bidimensionnelle avec un axe de symétrie longitudinal. Seulement la moitié de la chambre,  $60\text{mm} \times 15\text{mm}$ , qui représente le domaine de calcul. L'hydrogène est injecté en entrée entre  $y=0\text{mm}$  et  $y=1.5\text{mm}$  avec une vitesse de  $2\text{ m/s}$ , et l'air est injecté entre  $y=1.5\text{mm}$  et  $y=15\text{mm}$  avec une vitesse de  $10\text{ m/s}$ . L'échelle intégrale de la turbulence est choisie égale :  $l_t = 13\text{ mm}$ . La turbulence d'entrée est supposée de 10% de la vitesse de l'air. Le domaine de calcul est constitué de  $40 \times 30$  maille de  $1.5\text{mm} \times 0.5\text{mm}$ . La température initiale au moment de l'allumage est de  $300\text{K}$  et la pression de  $1\text{atm}$ . Le rapport d'équivalence :  $\phi = 0.70$ . La chaleur dégagée, lorsque la réaction se fait à la température initiale, est environ  $60.5\text{ kcal.mol}^{-1}$ .

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats de calcul de notre travail sous forme de champs et de courbes.

Les figures IV.1 et IV.2 représentent respectivement les évolutions du champ de densité de surface de flamme et des champs de température au cours du temps. Nous pouvons remarquer très bien les différentes phases d'évolution ou de développement de la flamme à partir de l'étincelle, ces phases peuvent être trois : le développement initial de l'allumage sous forme de front de flamme, la propagation de ce front de flamme et la phase de stabilisation de la flamme de diffusion. Les figures IV.1 et IV.2 sont refaites avec un contour plein sur les figures IV.3 et IV.4 respectivement.

La figure IV.5 montre l'influence de l'étirement macroscopique(turbulent) sur le champ de la densité de surface de flamme. Nous avons tester l'étirement avec plusieurs cas de calcul en augmentant progressivement l'étirement dans chaque cas de calcul. Nous observons à travers ces cas un rétrécissement du champ de densité de surface de flamme. Ceci explique l'influence de l'étirement turbulent sur l'accroissement de la densité de surface de flamme et sur la température.

Les figures IV.6 et IV.7 représentent respectivement l'évolution de la densité de surface de flamme et de la température maximales au cours du temps. Nous pouvons voir sur ces figures aussi le développement de la flamme. En effet, la flamme diffuse et se stabilise à une valeur d'équilibre, cette durée peut représenter le délai d'allumage ou d'inflammation, passe ensuite par un pic à une valeur maximale et se stabilise enfin à une valeur déterminée.

La figure IV.8 représente l'évolution de la densité de surface de flamme le long de l'axe de symétrie pour différents instants au cours de développement de la flamme. Cette figure montre le développement du front de flamme, du front initial vers un front de propagation stationnaire. Nous pouvons remarquer une propagation globalement identique seulement elle commence initialement très fort, c'est le passage instationnaire, puis passe vers un front de propagation stationnaire.

Enfin, tous ces résultats sont avec un très bons accord avec d'autres expérimentaux ou numériques, tels que les résultats trouvés par F.Fichot ou par S.Candel, D.Veynante, F.Lacas, E.Maistret, N.Darabiha et T.Poinsot,[21],[7].

### **IV.1.1 La densité de surface de flamme initiale**

Le calcul d'allumage démarre grâce à la valeur de densité de surface de flamme qui est imposée initialement pendant un temps. Cette quantité de surface de flamme correspond à l'énergie fournie en pratique par un système d'allumage bien déterminé pour assurer l'allumage qui peut aller avec la combustion en protégeant la vie de la flamme durant la phase

transitoire. La densité de surface de flamme initiale de calcul, qui doit être imposée durant quelques itérations, est un facteur très déterminant du modèle de la flamme cohérente. La connaissance précise de sa valeur va nous permettre une prévision très améliorée des phases transitoires d'allumage et de développement de la flamme.

Les résultats illustrés sur les figures IV.9 et IV.10, qui montre l'évolution de la densité de surface de flamme et de la température maximales au cours du temps en variant  $\Sigma_0$  initiale, montrent l'influence majeure de la densité de surface initiale qui réside essentiellement sur la phase initiale de la flamme, elle devient plus courte si nous augmentons la valeur de surface de flamme initiale. La valeur de surface de flamme imposée initialement influe donc sur la durée de phase initiale de développement de la flamme.

### **IV.1.2 L'influence de la turbulence à l'entrée**

La turbulence dans la flamme accélère les processus de diffusion. La diffusion moléculaire de la chaleur et des espèces réchauffe les gaz dans toute la partie amont de la flamme et y apporte des espèces radicalaires qui déclencheront par la suite les réactions de combustion. La turbulence à l'entrée est l'une des sources les plus importantes de cette turbulence. La turbulence à l'entrée, qui est représentée par l'énergie cinétique turbulente  $k$  et la dissipation de l'énergie cinétique  $\varepsilon$ , est déterminante et influence la phase transitoire d'allumage de la flamme. Les valeurs à l'entrée déterminent d'une part la diffusivité turbulente et d'autre part  $\varepsilon$  a une grande influence sur le temps d'établissement d'une flamme stationnaire. Effectivement, ce que nous remarquons sur la figure IV.11, qui montre l'évolution de la densité de surface de flamme maximale au cours du temps en variant  $k$  et  $\varepsilon$  à l'entrée dans l'écoulement d'air, que si nous augmentons le taux de turbulence initial, le temps d'allumage diminue ; alors au contraire, si nous augmentons le taux de dissipation turbulente initial, le temps d'allumage augmente. Il est donc nécessaire de bien connaître la turbulence en particulier les profils à l'entrée pour améliorer la prévision d'allumage de la flamme et répondre avec précision si la turbulence était très bien déterminée.

### **IV.1.3 L'influence du débit d'air**

Le débit d'air influence la combustion et l'allumage sans doute. Il est évident qu'avec un débit d'air nul, la réaction chimique ne peut y avoir lieu, combustion sans comburant est impossible ; et avec un débit infini, la flamme sera soufflée et nous serions aussi dans un cas sans combustion. Il est donc claire qu'entre les deux limites du débit des évolutions et des

changements peuvent avoir lieu durant l'allumage de la flamme. Les figures IV.12 et IV.13, et qui représentent respectivement l'évolution de la densité de surface de flamme maximale au cours du temps en variant le débit d'air et l'évolution du champ de la densité de surface de flamme en variant toujours le débit d'air. Nous pouvons constater que, d'une part, plus nous augmentons le débit d'air, le temps d'allumage serait plus court et d'autre part, l'augmentation du débit d'air engendre un rétrécissement dans le champ de densité de surface de flamme. Il est évident aussi que si nous augmentons encore plus le débit d'air nous arriverons certes à souffler la flamme. Le débit d'air lui aussi un facteur déterminant de l'allumage en particulier et de la combustion en général.

#### **IV.1.4 L'influence de la flamme sur l'écoulement**

L'écoulement à froid et à chaud se diffère à cause des effets de réactions de combustion à travers la flamme. Ces effets provoquent des mouvements qui vont créer des déformations au niveau des profils de vitesses. En effet, sur la figure IV.14 qui représente les profils de vitesse axiale pour diverses abscisses, nous pouvons observer nettement qu'il y a un petit défaut d'uniformité de la vitesse entre 2 et 7 mm. L'écoulement de gaz issus de la flamme à vitesse à peu près constante s'élargit progressivement au fur et à mesure que  $x$ .

- **Concentration des espèces**

- La figure IV.15 montre l'évolution du champ de concentration des espèces au cours du temps. Les deux colonnes de la figure représentent respectivement la concentration en  $H_2$  et en Air. L' $H_2$  diffuse dans la chambre à un maximum au niveau de l'axe de symétrie de la chambre. L'Air diffuse dans la chambre à un maximum près de la paroi de la chambre.
- Les figures IV.16, a et b montrent les profils de concentration des espèces. Ces profils représentent la répartition des différentes concentrations,  $H_2$ , Air et Produits, dans la chambre de combustion. La figure « a » montre également que, le long de l'axe de symétrie, l' $H_2$  domine l'entrée et les produits dominant la sortie de la chambre de combustion.

## IV.2 Quelques résultats de comparaison

Dans cette section nous présentons des résultats de calculs d'allumage obtenus par F.Fichot [21] dans son travail effectué dans le cadre de sa formation doctorale. Ces résultats qui seront un appui de comparaison et de validation de nos résultats. Les résultats de F.Fichot ont été comparés et justifiés avec des résultats expérimentaux propre à lui ainsi qu'avec d'autres références. Le travail effectué par F.Fichot porte sur la modélisation et la simulation numérique de l'allumage d'une flamme de diffusion turbulente dans une application aux moteurs fusées cryotechniques. L'étude s'est basée sur le concept de régime des flammes plissées ou flammelettes. Les modèles développés et utilisés dans l'étude reposent sur une équation de transport pour la densité de surface de flamme. Ces modèles sont des extensions du modèle de la flamme cohérente CFM. Les calculs ont été faits dans une configuration simple avec un domaine de calcul constitué de  $35 \times 35$  mailles de  $0.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$ . Il a utilisé un code numérique pour le calcul, désigné sous le nom de MOCROI qui a été développé à l'ONERA par Dupoirieux et al. Le code a été utilisé pour résoudre les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, enthalpie, espèces chimiques, surface de flamme, énergie cinétique turbulente et dissipation) par une méthode numérique aux différences finies. La méthode de résolution est une méthode numérique semi-implicite en fractionnant le pas de temps et en calculant alternativement les contributions sur les deux axes du domaine (ADI). Les résultats, que nous allons présenter, sont obtenus avec les données suivantes :

La vitesse de l'air en entrée est d'environ 9 m/s et la vitesse de l'hydrogène 2 m/s. la chaleur massique à pression constante est égale à celle de l'air à 1000 K, et ne varie pas au cours du calcul. La turbulence d'entrée est supposée de 10 %. La température initiale est de 320 K et la pression de 1 atm. Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à l'entrée est obtenu par la relation  $\varepsilon = 0.41.k^{3/2}/l_t$ . L'échelle intégrale de la turbulence est choisie égale à la demi-hauteur de l'arrivée d'air. L'allumage est obtenu en imposant pendant un temps une certaine densité de surface de flamme dans une maille du domaine. Cette maille est prise dans son étude au voisinage de la paroi supérieure du domaine d'étude. Les constantes du modèle sont choisies égales 5 pour  $\alpha$  et 1 pour  $\beta$ . L'allumage a lieu à  $t=0$ .

La partie des résultats de F.Fichot qui sont présentés dans cette section, figures IV.17 et IV.18 montre le champ de température, représenté par des courbes iso-températures et les iso-valeurs pour la densité de surface de flamme. Ces résultats montrent essentiellement le développement de la flamme au cours du temps.

Les figures IV.19 et IV.20 portent les champs de densité de surface de flamme pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ . C'est un calcul bidimensionnel stationnaire dans le but est de tester l'influence des paramètres du modèle. Ces calculs montrent l'influence des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  du modèle sur la forme et l'extension de la zone de réaction. La conclusion tirée est que les effets observés se traduisent par des modifications dans la forme de la flamme. Lorsque  $\alpha$  est augmenté, la flamme se redresse et devient plus horizontale et plus fine. Dans le même temps, la valeur maximale de la densité de surface de flamme  $\Sigma_{\max}$  augmente. Augmenter  $\beta$  produit un élargissement et un raccourcissement de la flamme, ainsi qu'une diminution de  $\Sigma_{\max}$ . Il semble, d'après ces testes, que  $\beta$  produit des effets moins marqués que  $\alpha$ , que le paramètre  $\alpha$  apparaît comme prépondérant et que sa valeur soit comprise entre 5 et 15, ce qui conduit à un accord satisfaisant, dit F.Fichot.

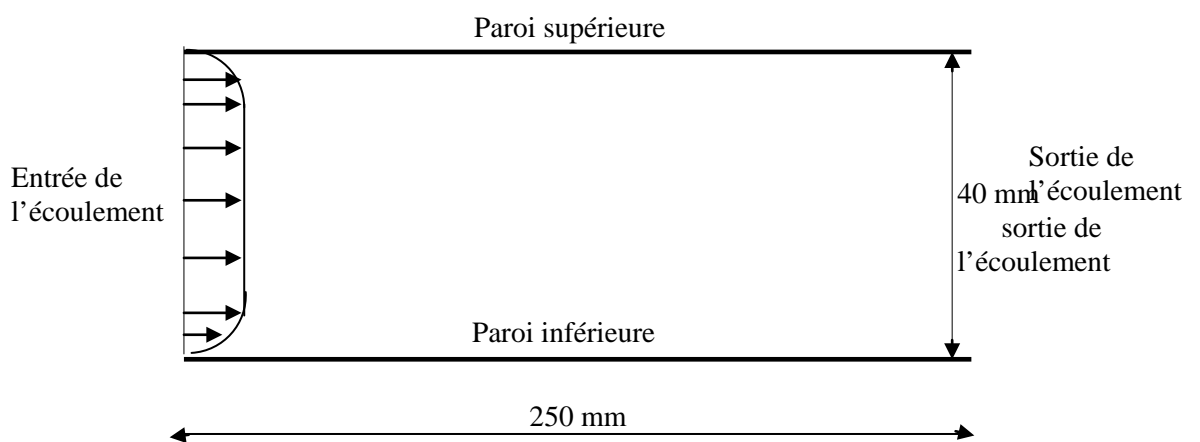
Enfin, ces derniers résultats montrent un très bon accord avec les nôtres. La méthode de résolution était totalement différente mais les résultats était qualitativement très semblables. De plus, l'allumage initial a été imposé, dans l'étude de F.Fichot, à la paroi supérieure tandis que dans notre étude a été à l'injection. Le changement de position d'allumage initial n'a pas été remarqué dans les deux calculs, seulement durant la phase initiale de développement de la flamme bien sur. En arrivant à la phase de stabilisation, la position d'allumage initiale n'a aucun effet sur la flamme. Malgré la différence des deux méthodes de résolution et les deux positions différentes de l'allumage initial, nos résultats sont avec un très bon accord avec cette partie de résultats exemplaires (de référence). Ceci donne un très bon soutien pour nos résultats que nous avons obtenus dans le cadre de cette thèse.

### IV.3 Écoulement sans combustion, à froid

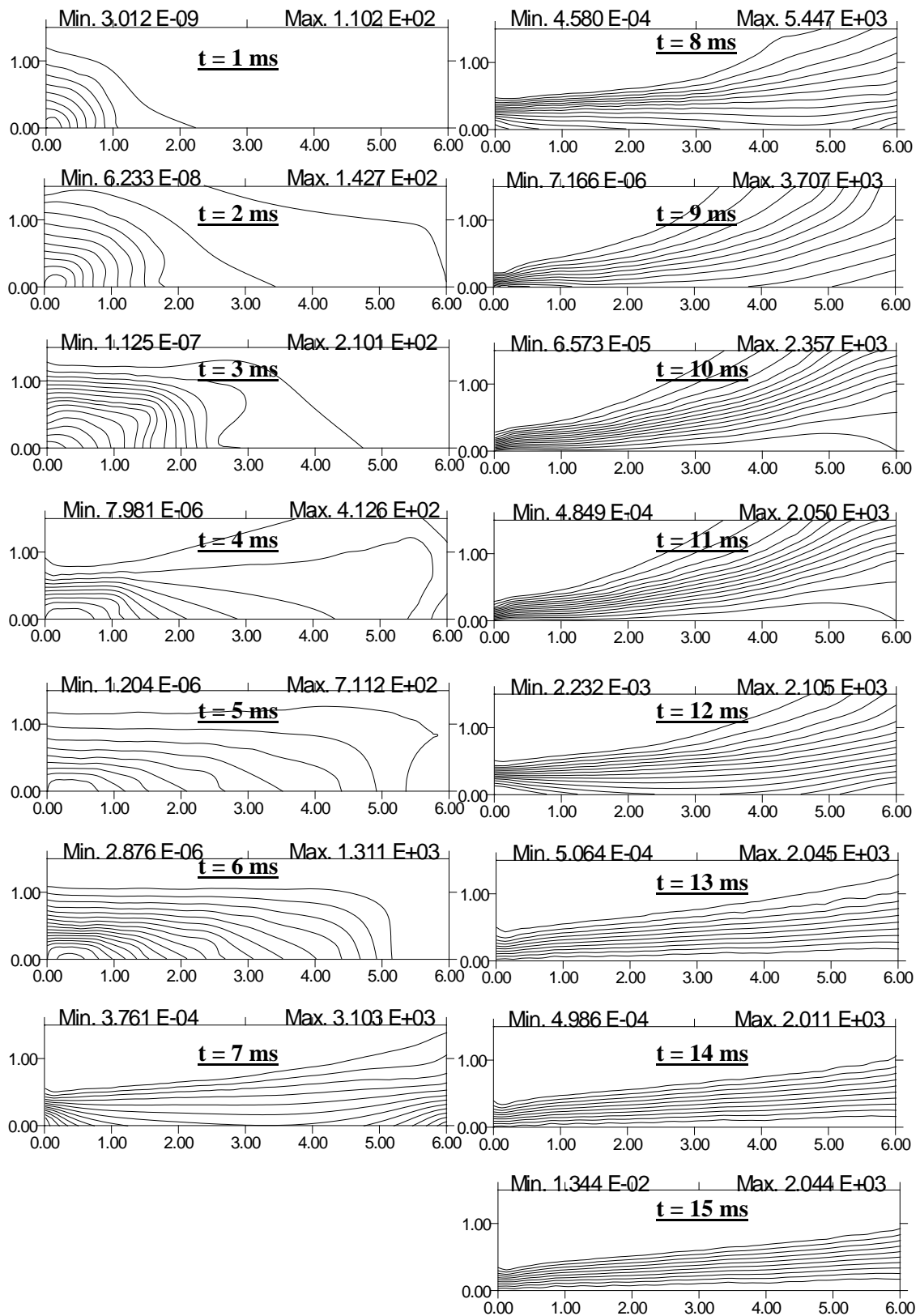
Cette partie présente une validation du code de calcul et du modèle k- $\epsilon$ . Le calcul effectué dans cette partie concerne un écoulement compressible sans combustion, dit aussi à froid, entre deux plaques. La configuration de ce cas de problème est simple ; elle est représentée sur la figure IV.3.1. L'écoulement à l'entrée est avec une vitesse de  $u_e = 248$  m/s et une température,  $T_e = 262$  K. La température à la paroi est fixée à  $T_w = 313$  K.

Ce calcul permet de comparer les profils de vitesse et de température avec des résultats expérimentaux calculés par Dizene R. dans le cadre de son travail de doctorat sur une étude d'interactions de jets avec un écoulement transversal compressible en vue des applications au refroidissement de paroi [15].

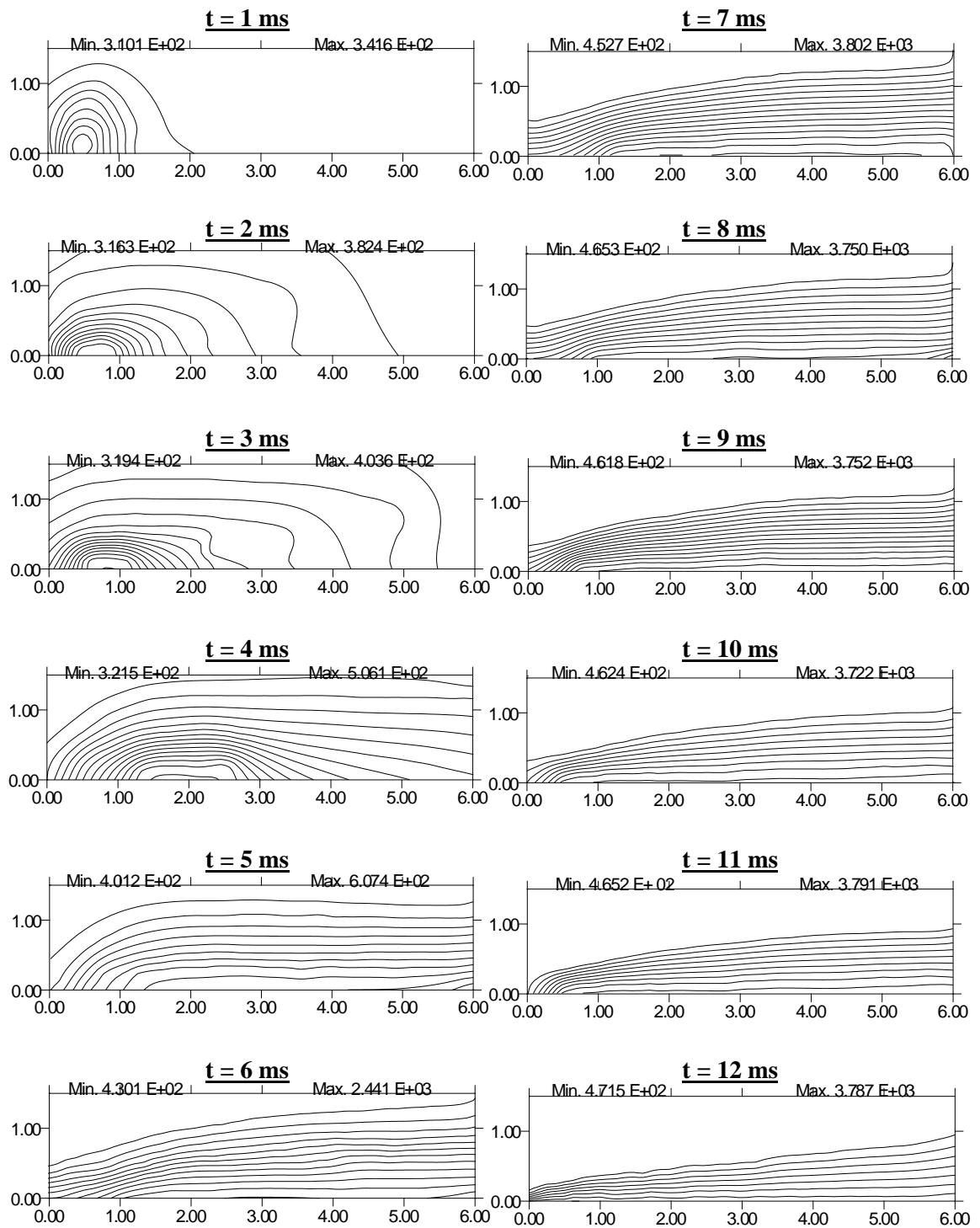
Les résultats représentés sur les figures IV.21 et IV.22 portent les profils de vitesse et de température à différentes positions longitudinales,  $x = 30\text{mm}$ ,  $x = 60\text{mm}$  et  $x = 130\text{mm}$ . La comparaison est assez bonne. Ce cas de problème nous a paru constituer un bon test pour valider le code de calcul puisqu'il présente des ressemblances avec celui étudié dans cette thèse, en particulier l'écoulement compressible avec lequel les flammes se caractérisent. On peut donc estimer que le code de calcul et le modèle  $k-\varepsilon$  permettent de calculer relativement bien l'écoulement turbulent sans réaction.



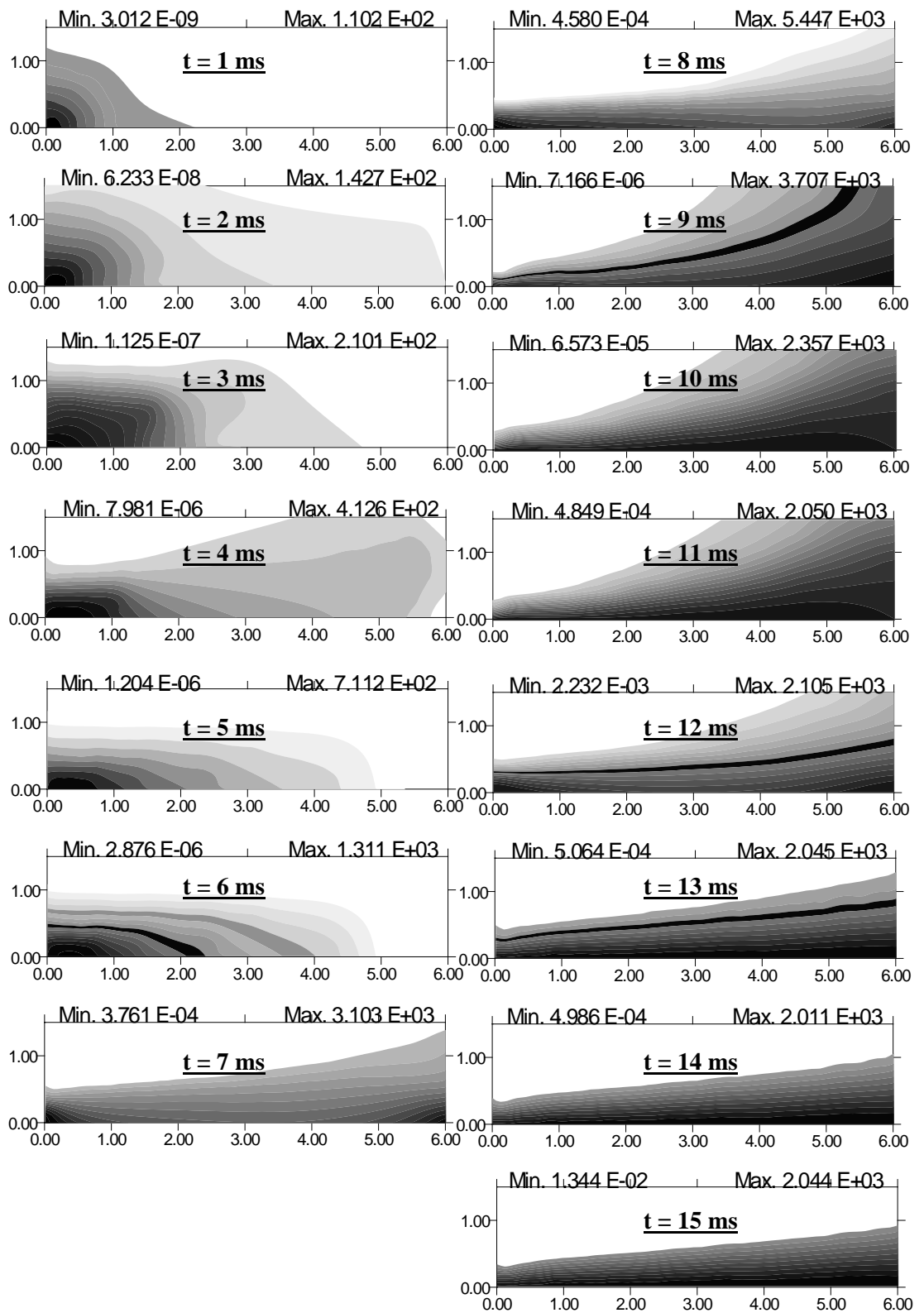
**Figure IV.3.1** : Configuration du problème test



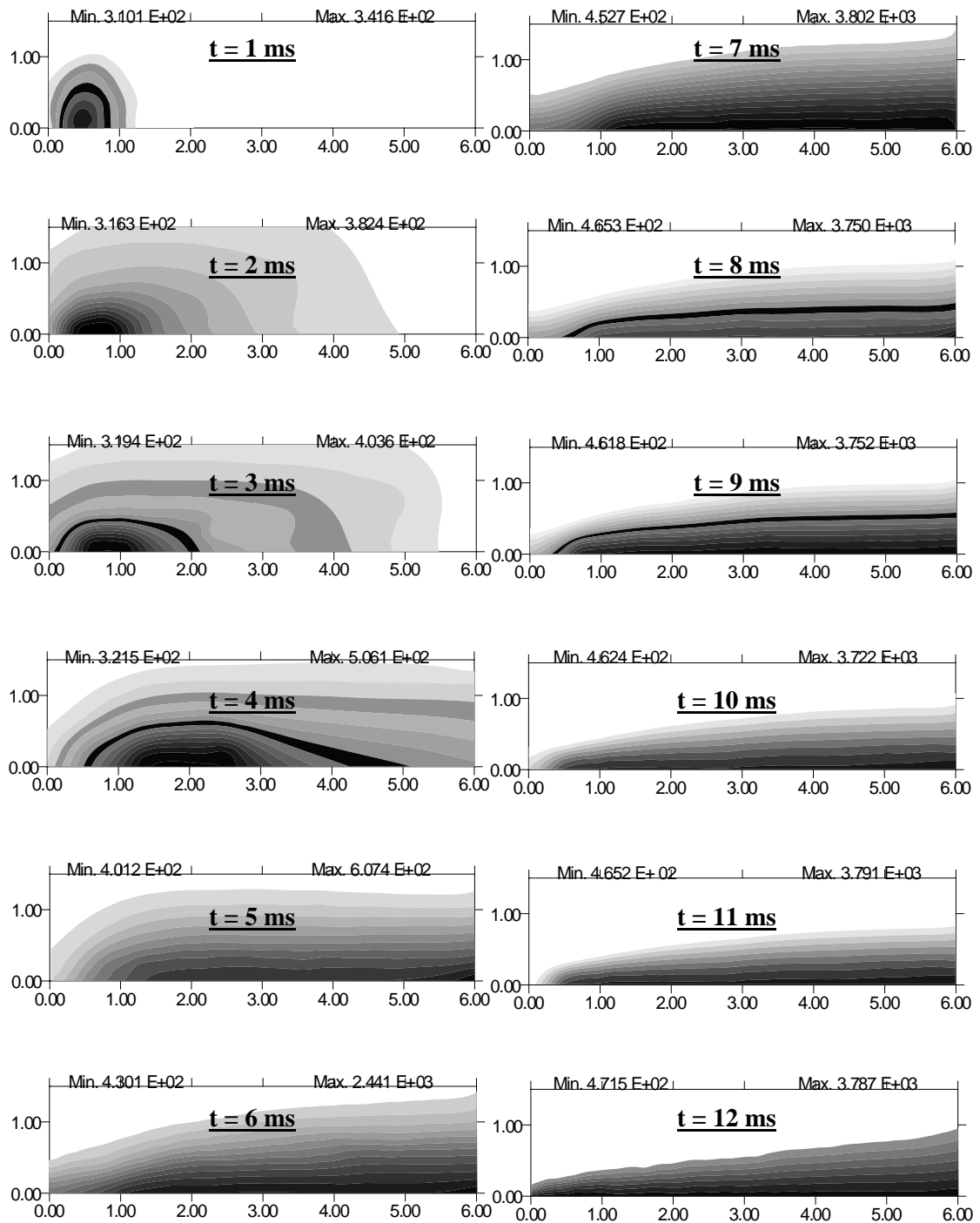
**Figure IV.1** Evolution par milliseconde du champ de la densité de surface de flamme.



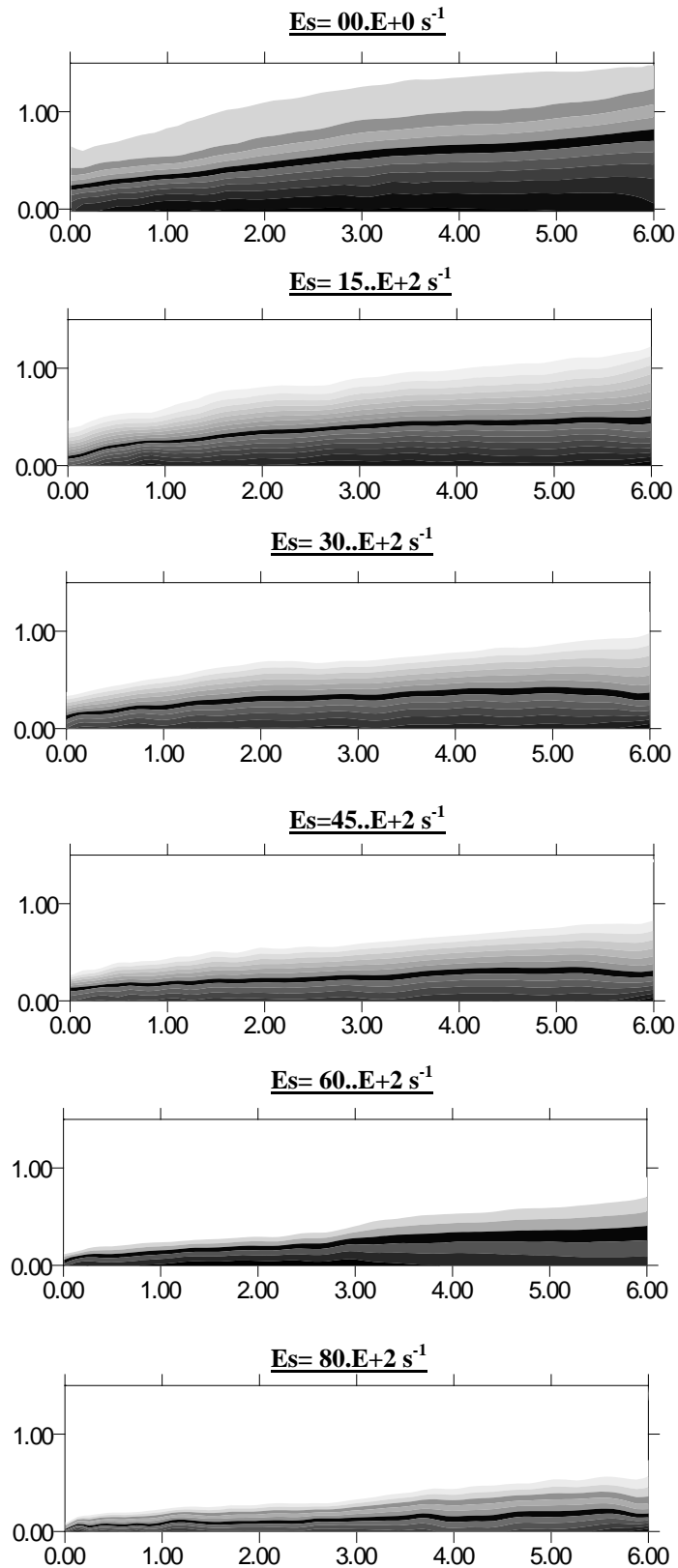
**Figure IV.2** Evolution par milliseconde du champ de température.



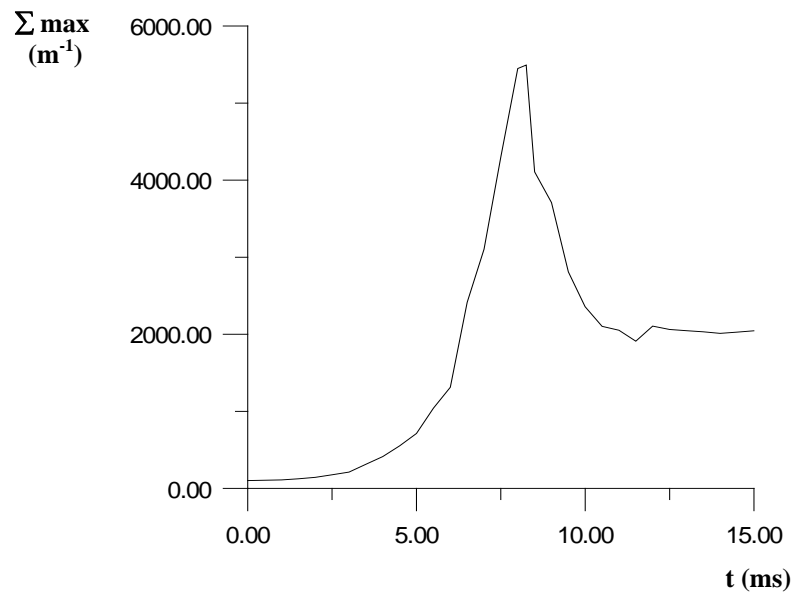
**Figure IV.3** Evolution par milliseconde du champ de la densité de surface de flamme.



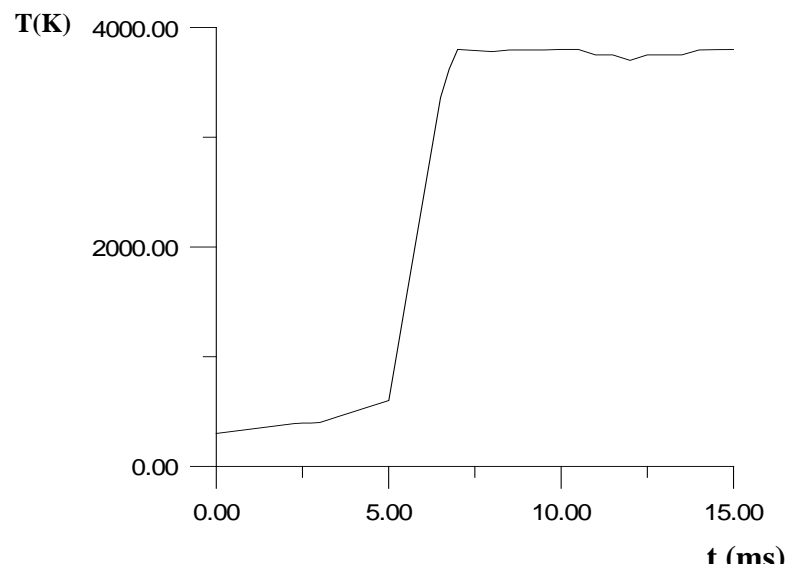
**Figure IV.4** Evolution par milliseconde du champ de température.



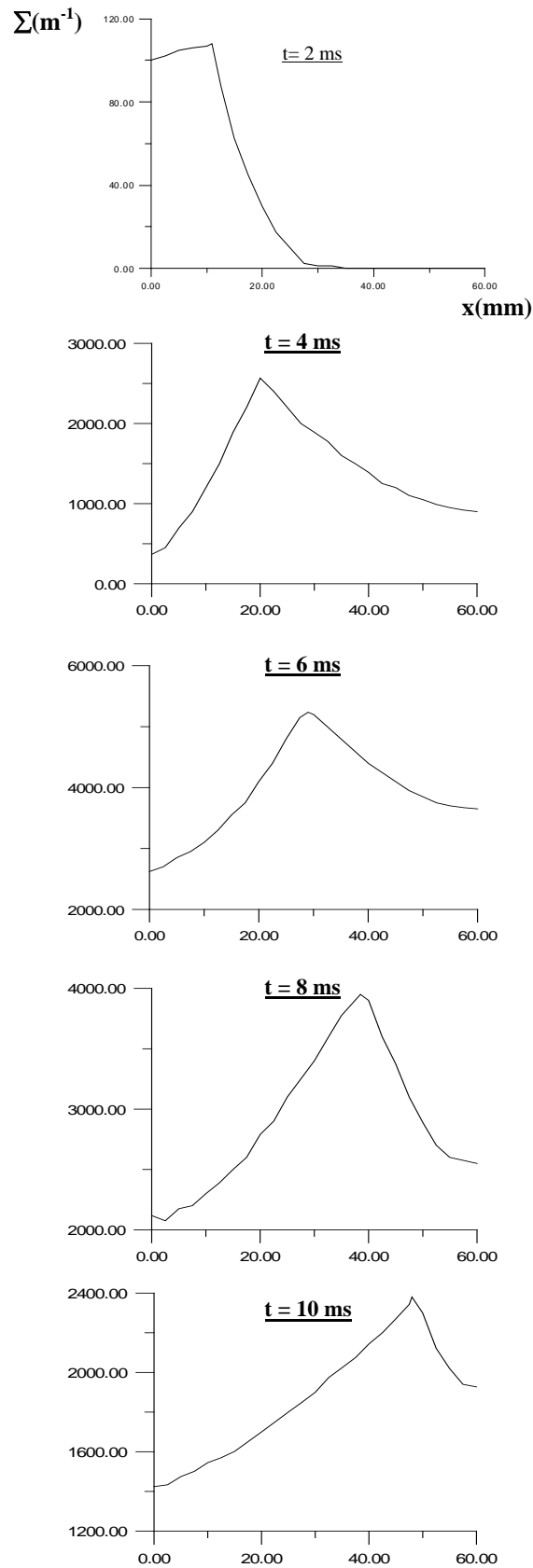
**Figure IV.5** Influence de l'étiement sur le champ de la densité de surface de flamme.



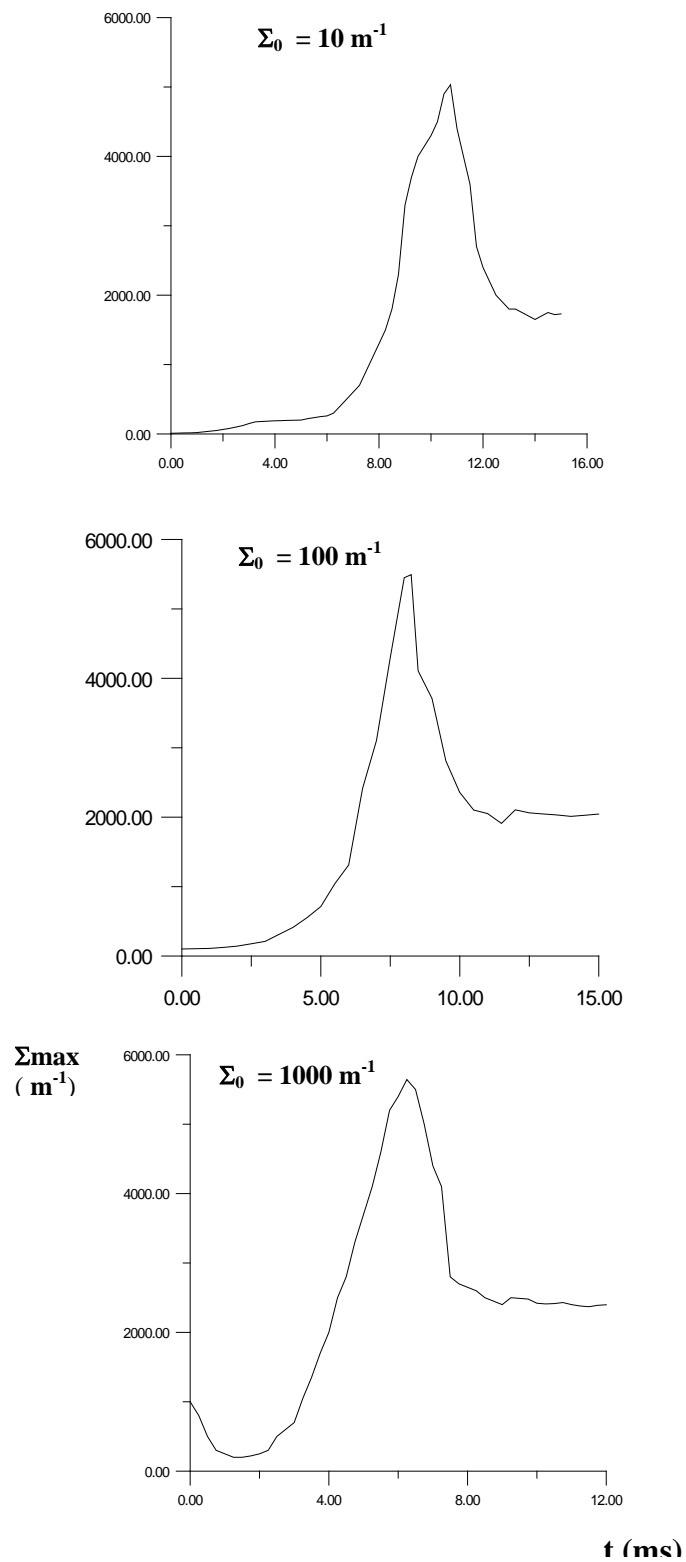
**Figure IV.6** Evolution de la densité de surface de flamme maximale au cours du temps.



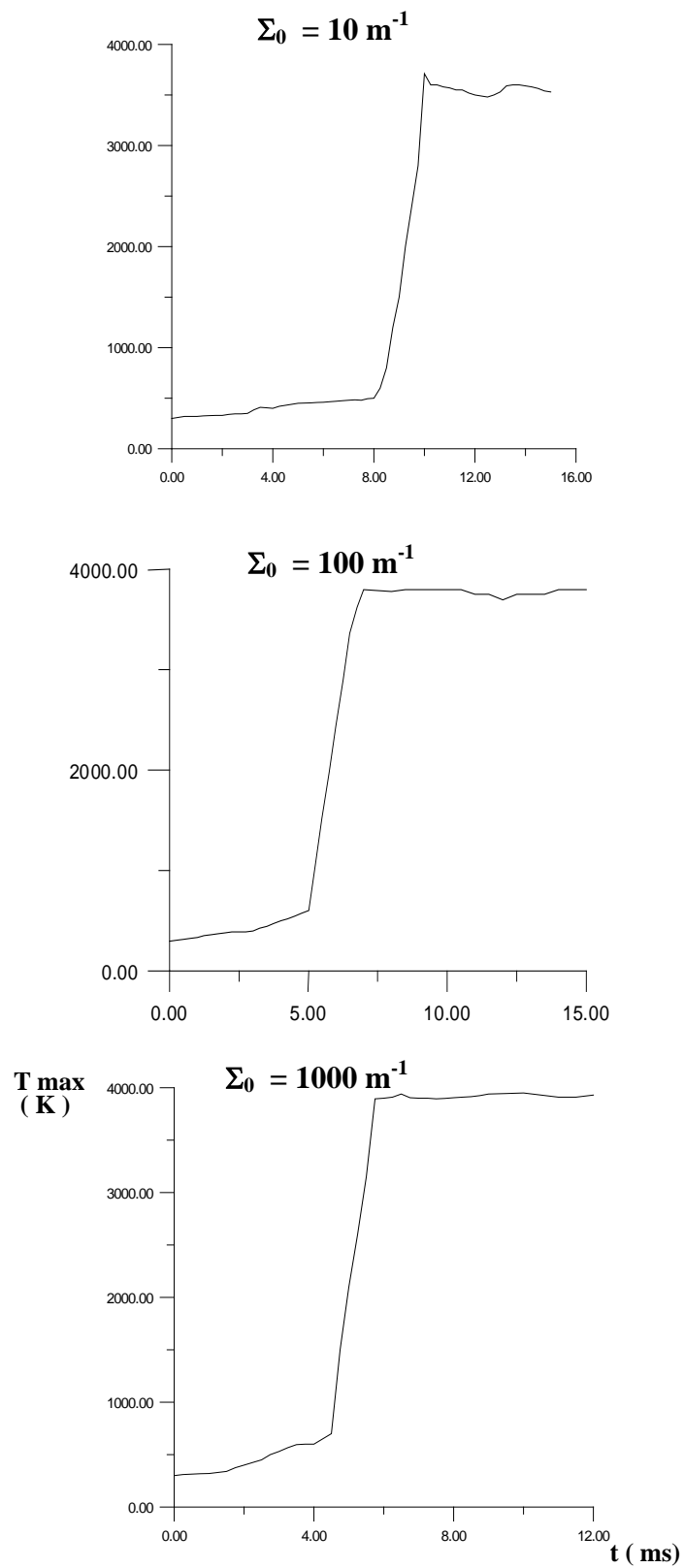
**Figure IV.7** Evolution de la température maximale au cours du temps.



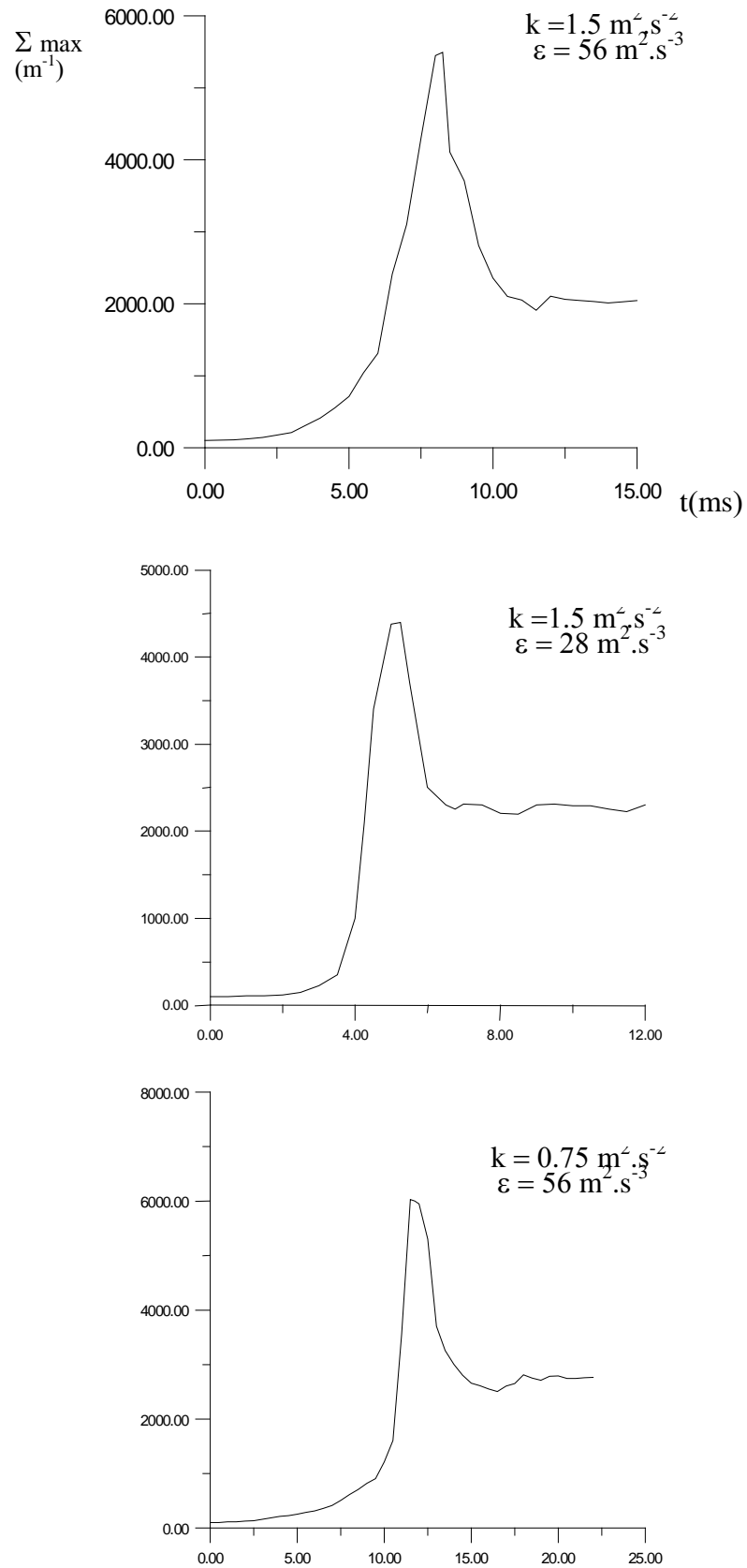
**Figure IV.8** Evolution de la densité de surface de flamme le long de l'axe de symétrie.



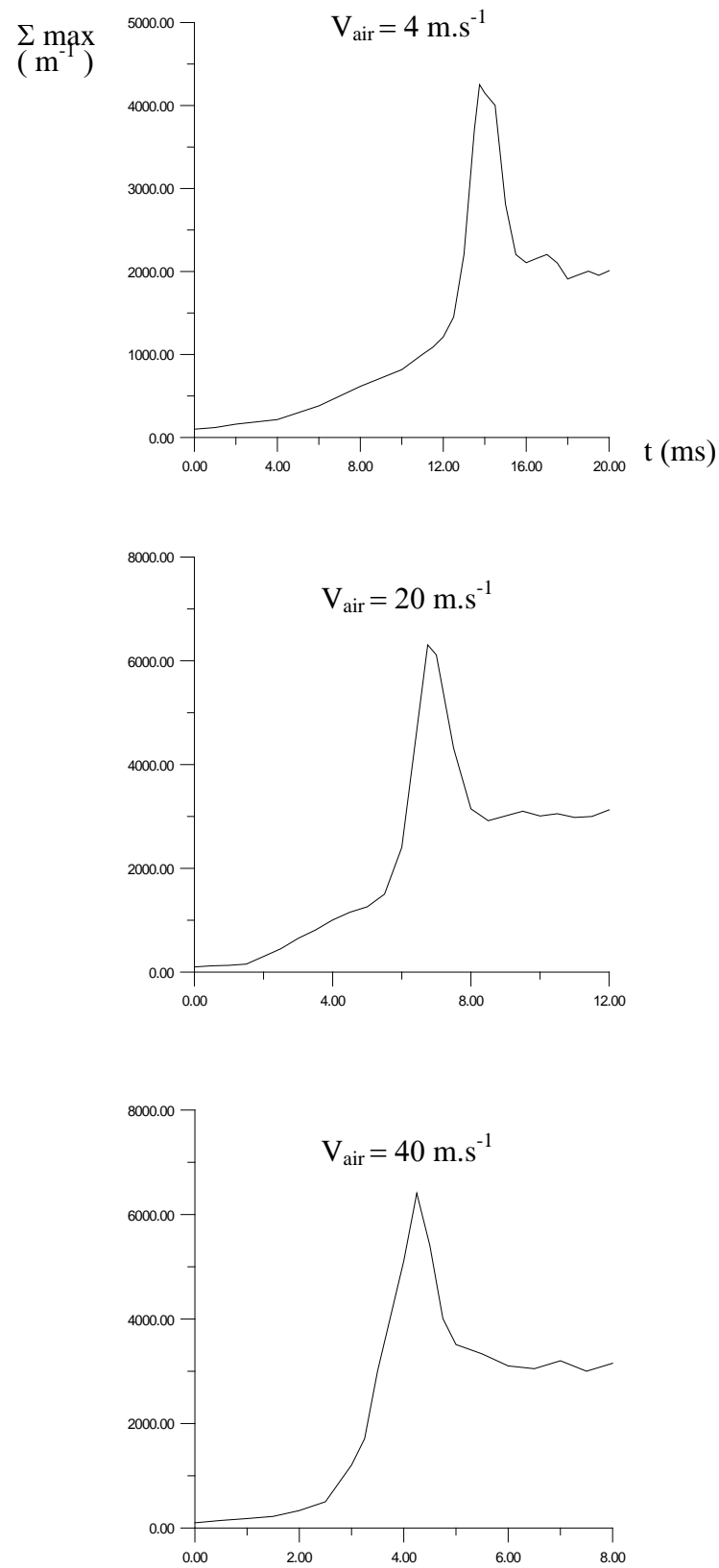
**Figure IV.9** Evolution de la densité de surface de flamme maximale au cours du temps en variant  $\Sigma_0$ .



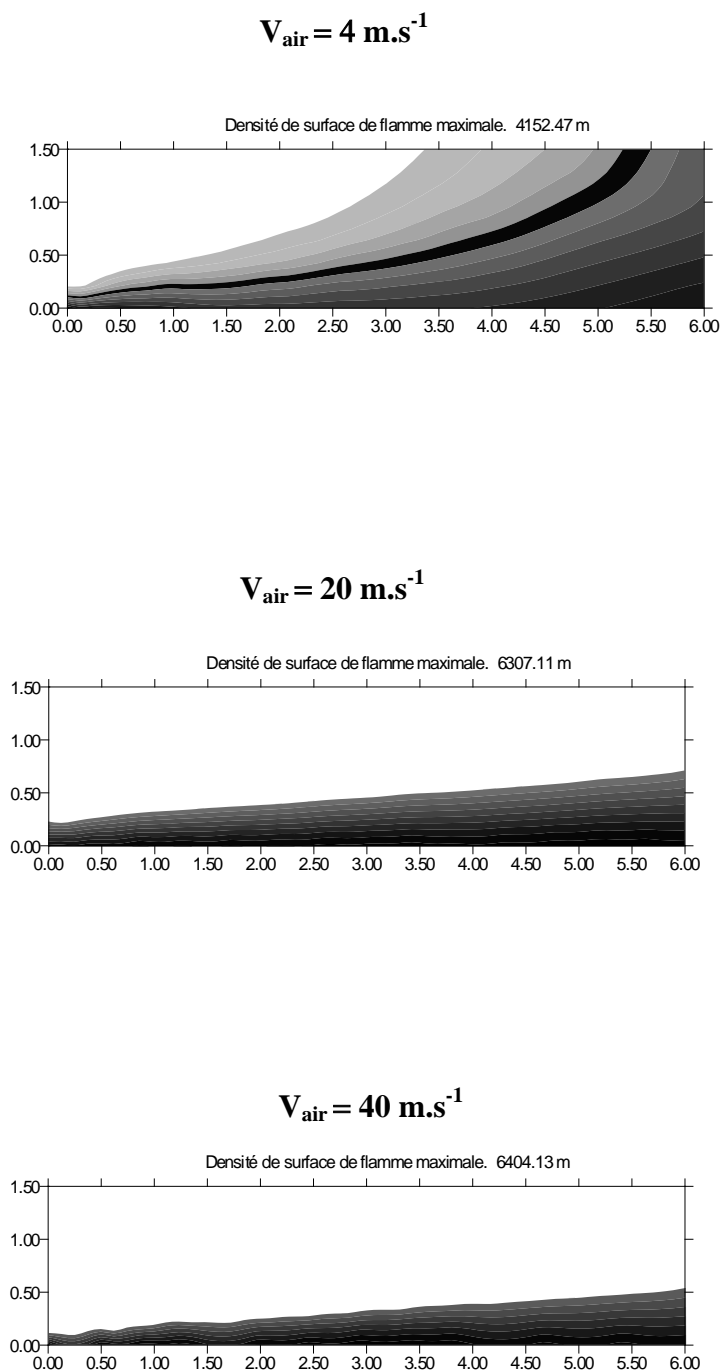
**Figure IV.10** Evolution de température maximale au cours du temps en variant  $\Sigma_0$ .



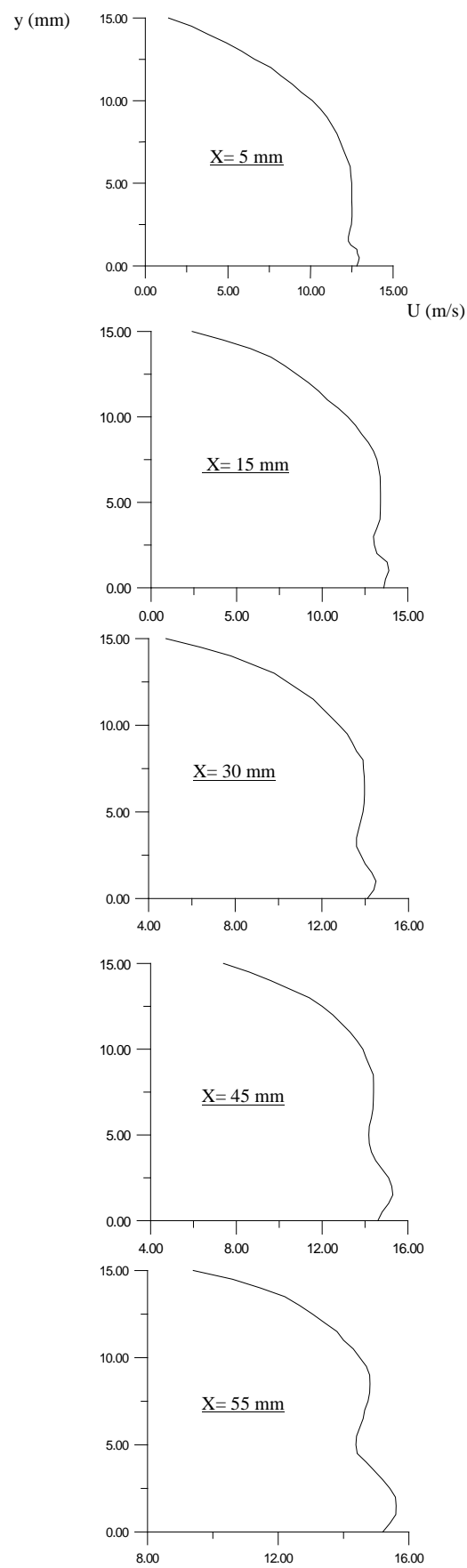
**Figure IV.11** Evolution de la densité de surface maximale au cours du temps en variant  $k$  et  $\varepsilon$  en entrée de l'écoulement d'air.



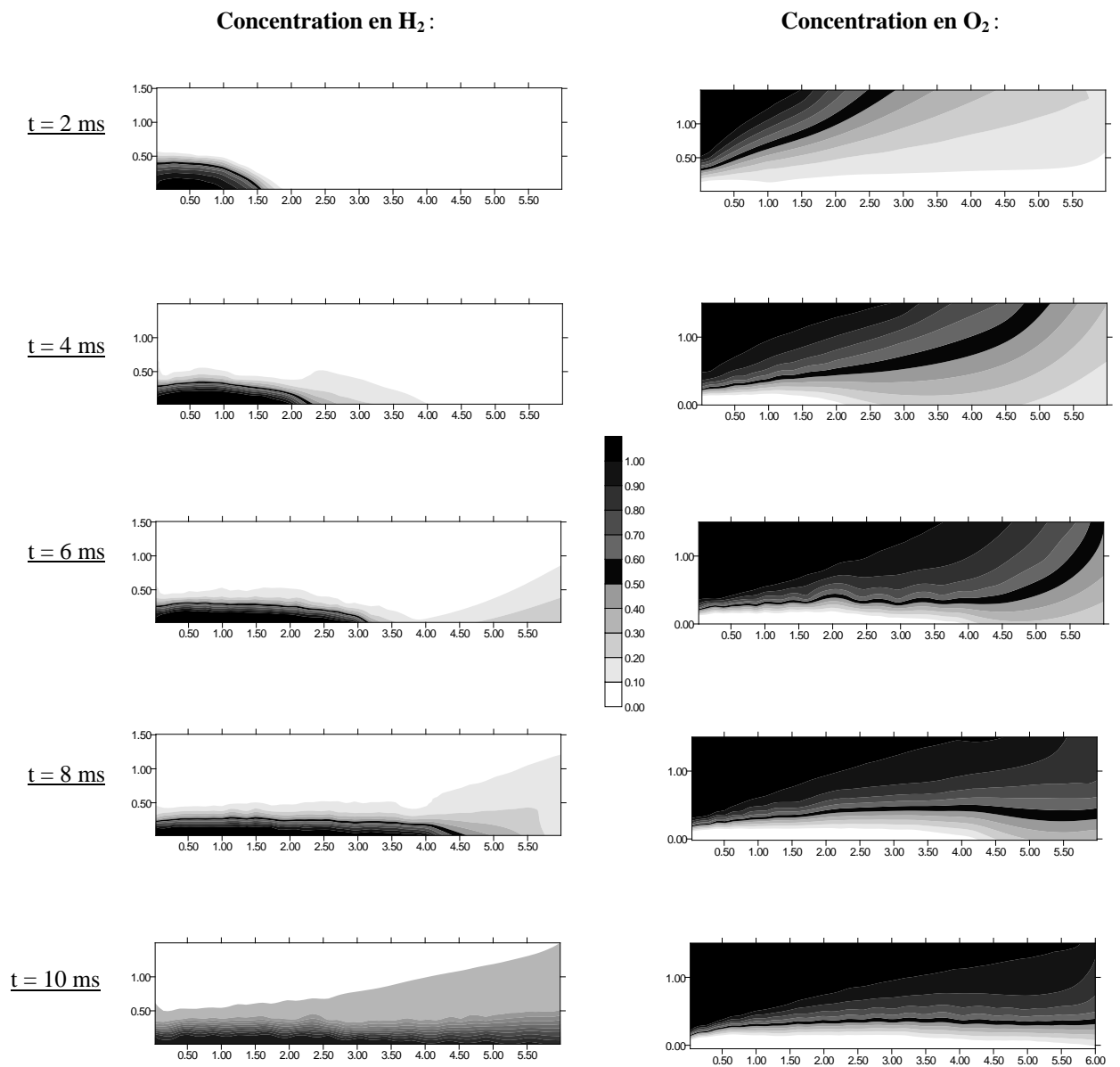
**Figure IV.12** Evolution de la densité de surface maximale au cours du temps en variant le débit d'air.



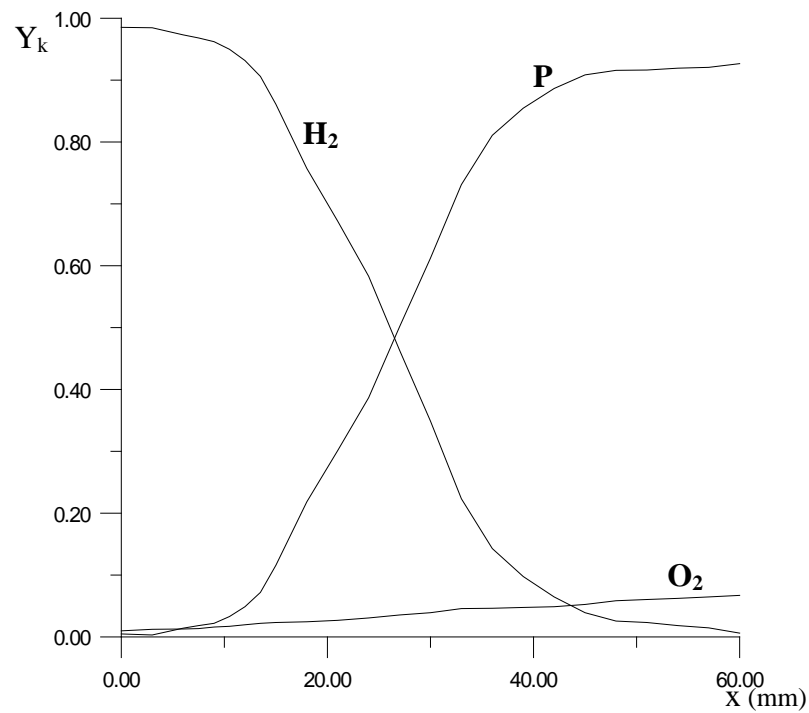
**Figure IV.13** Evolution du champ de la densité de surface de flamme en variant le débit d'air.



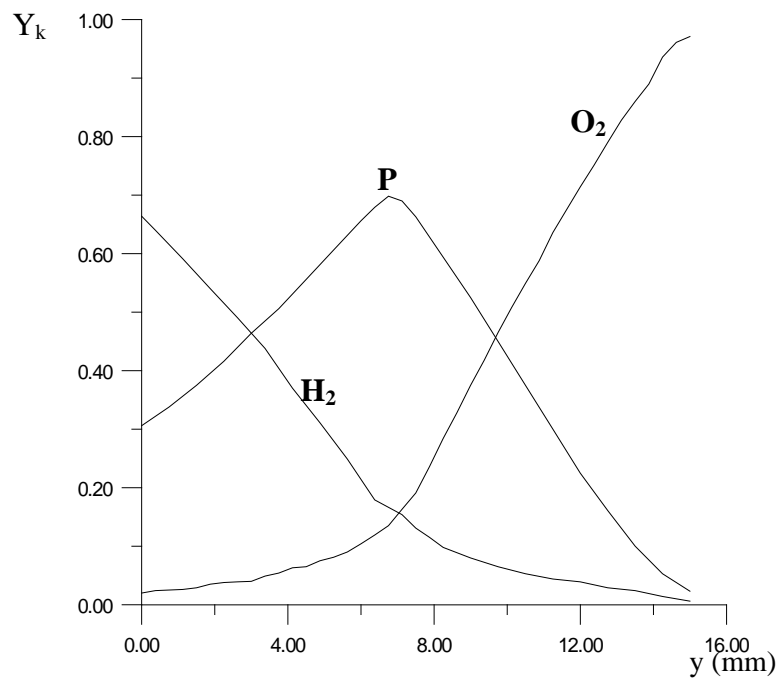
**Figure IV.14 :** Profils de vitesse axiale pour diverses abscisses.



**FigureIV.15** Evolution du champ de concentration des espèces au cours du temps.

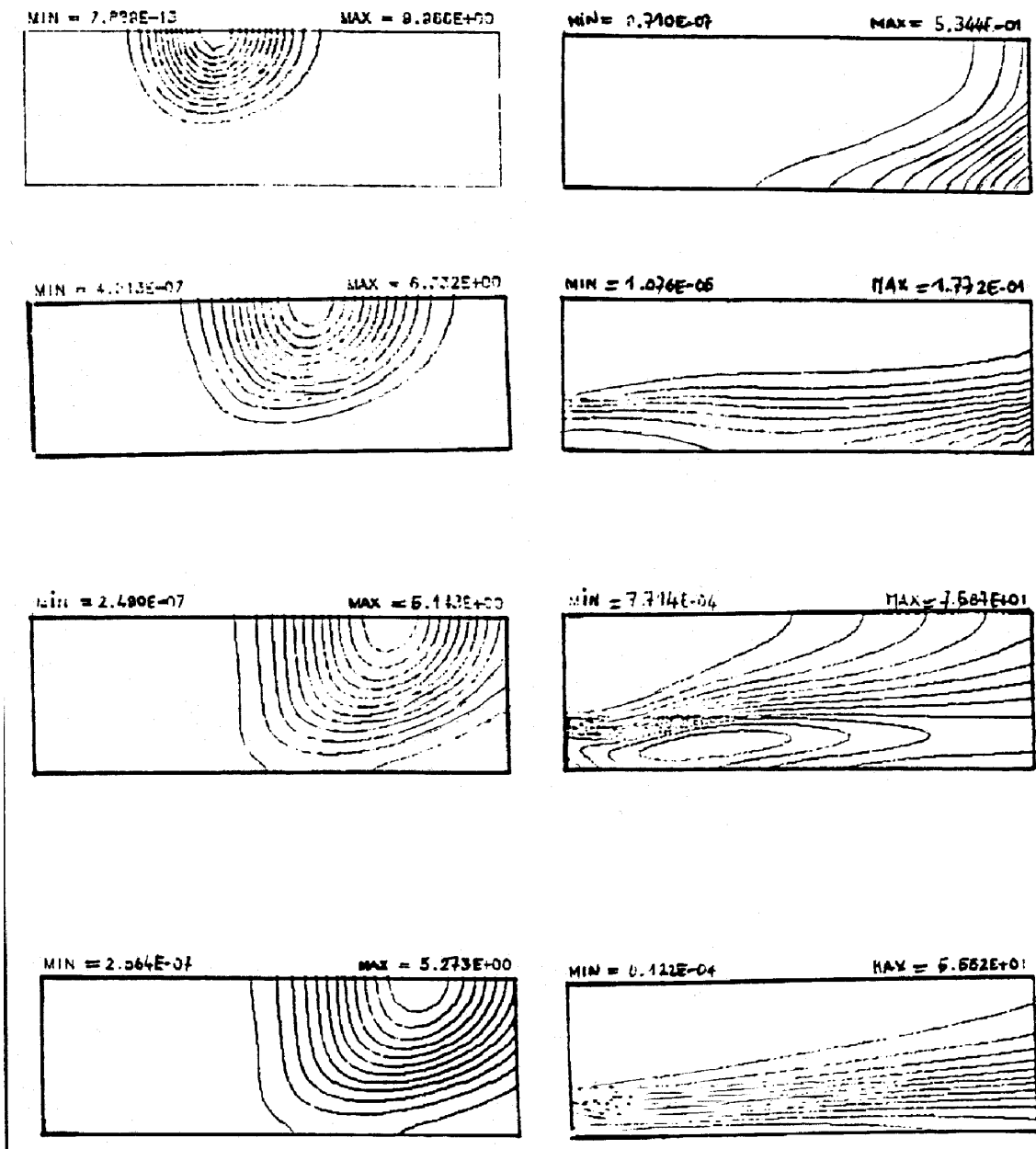


a- Profils de concentration des espèces le long de l'axe de symétrie.

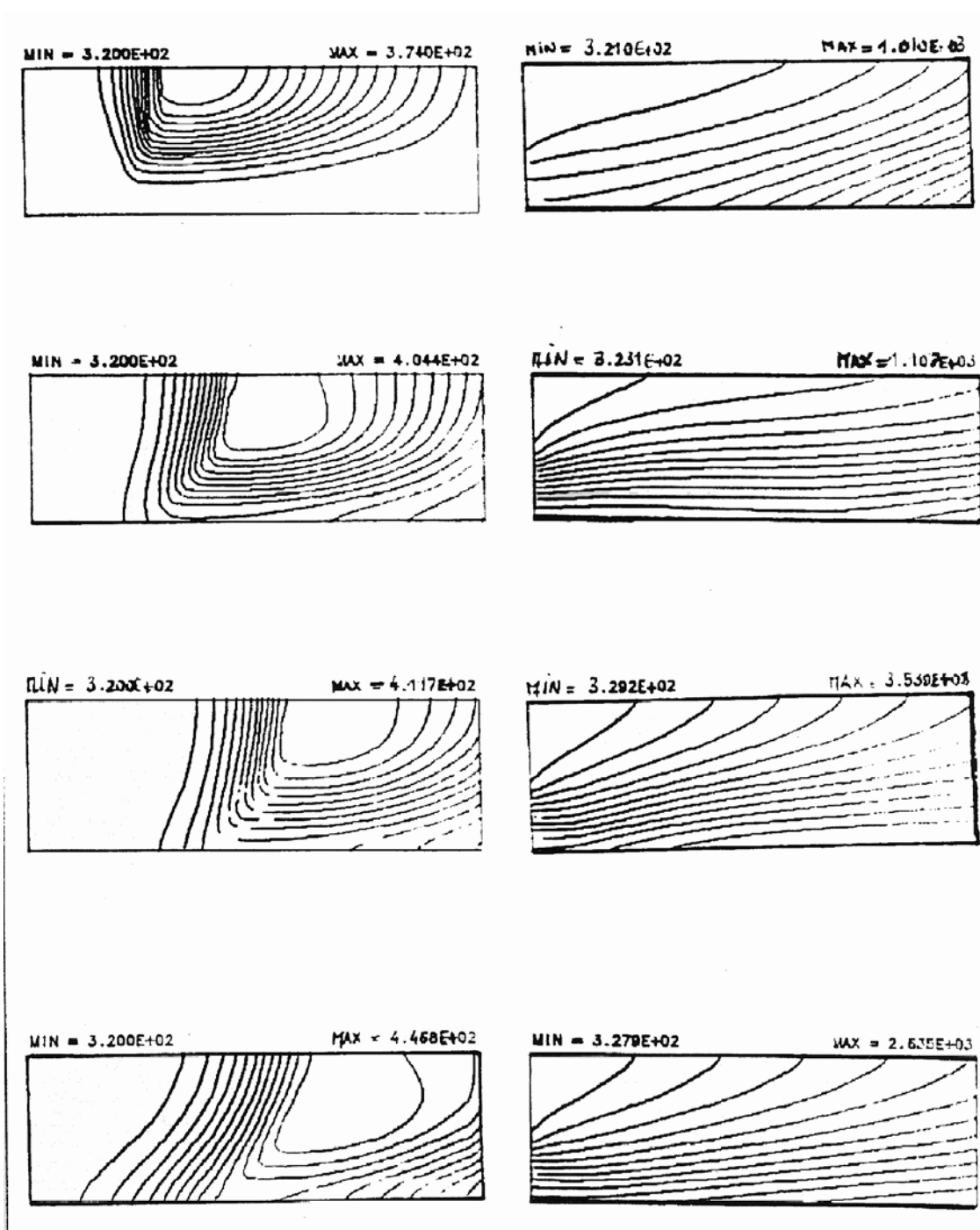


b - Profils transversaux de concentration des espèces à  $x = 20$  mm.

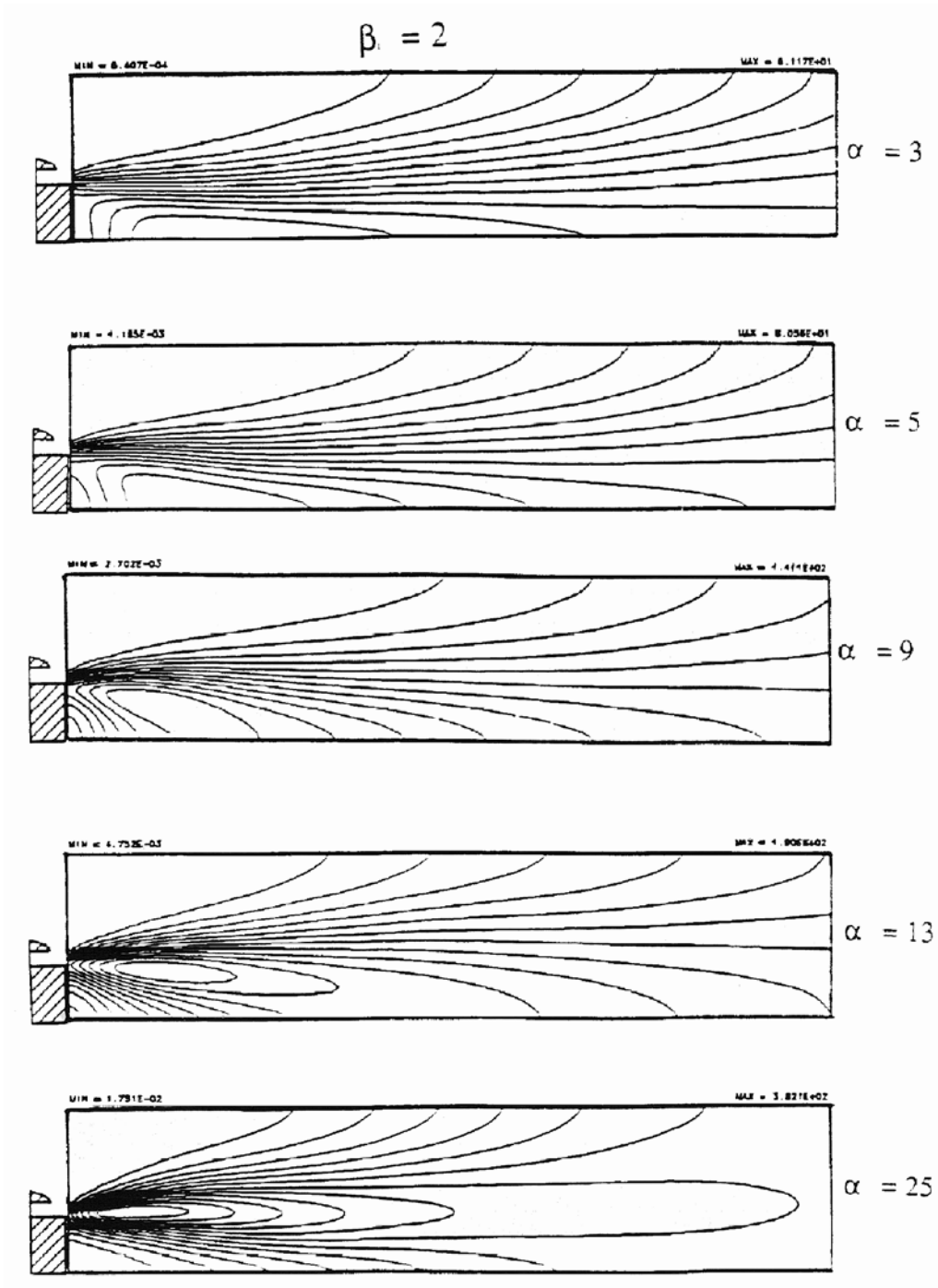
**Figure IV.16** Profils de concentration des espèces



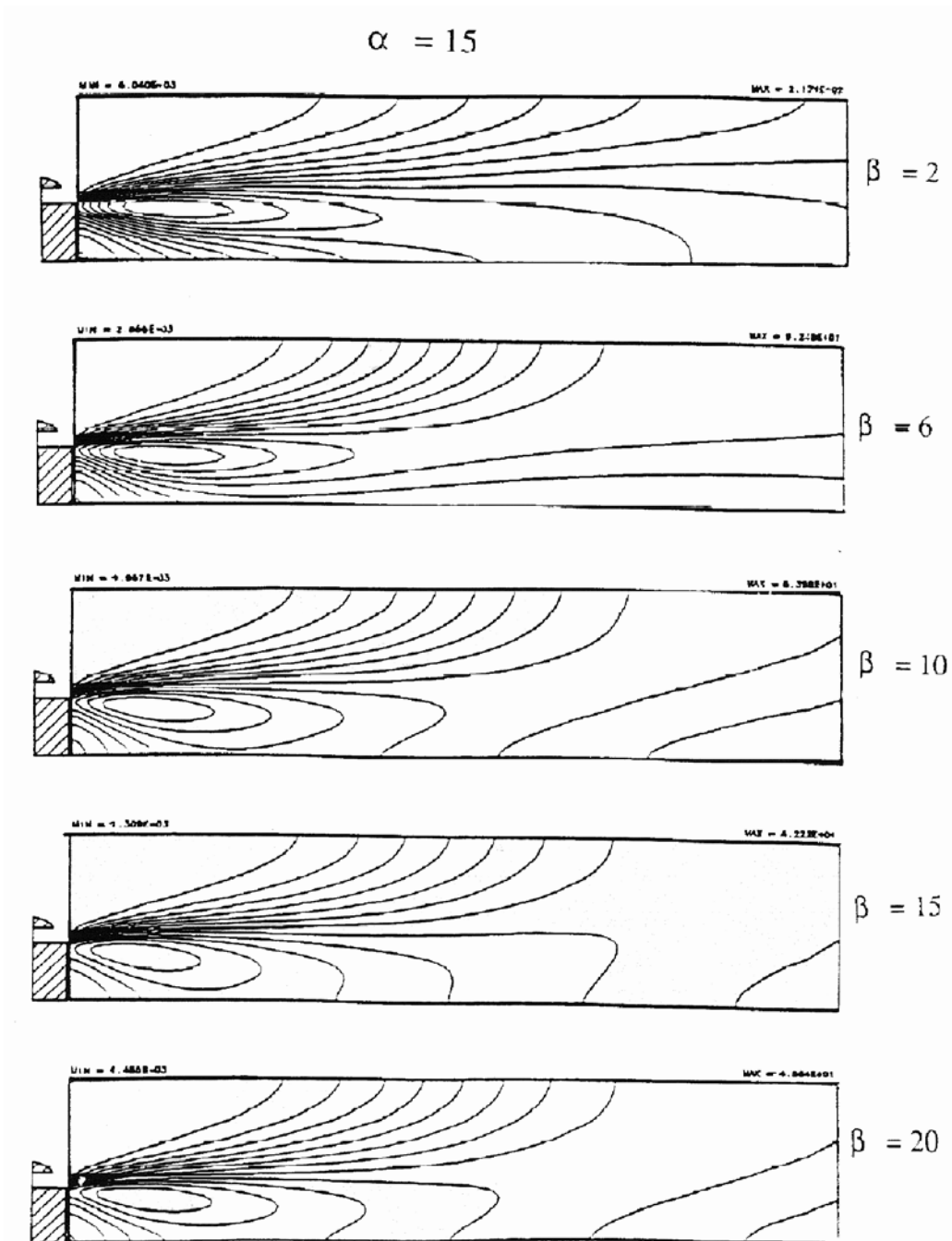
**Figure IV.17 :** Evolution du champ de densité de surface de flamme de diffusion ( une image par milliseconde ). Ref.[21]



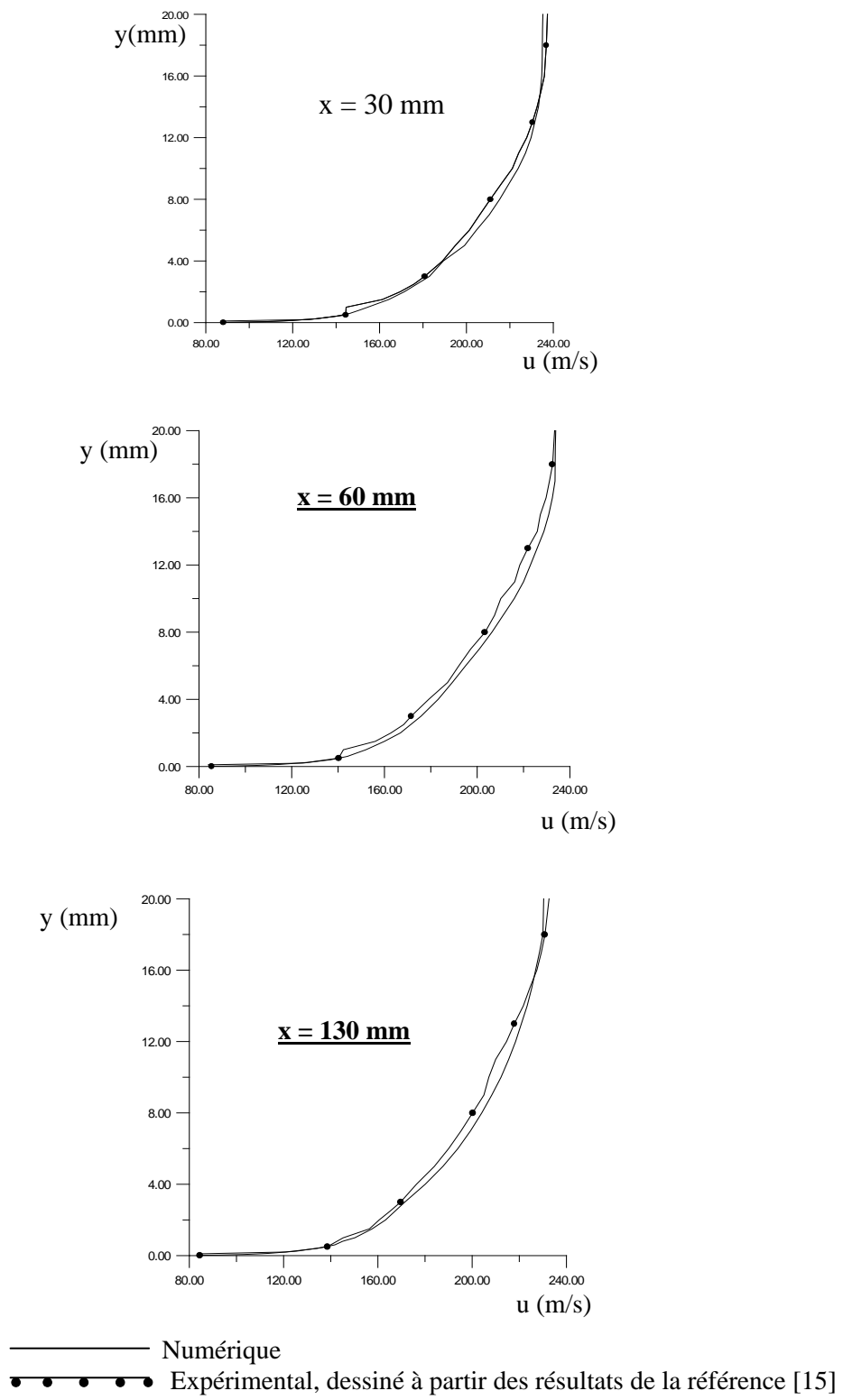
**Figure IV.18** : Evolution du champ de température. ( une image par milliseconde). Ref. [21]



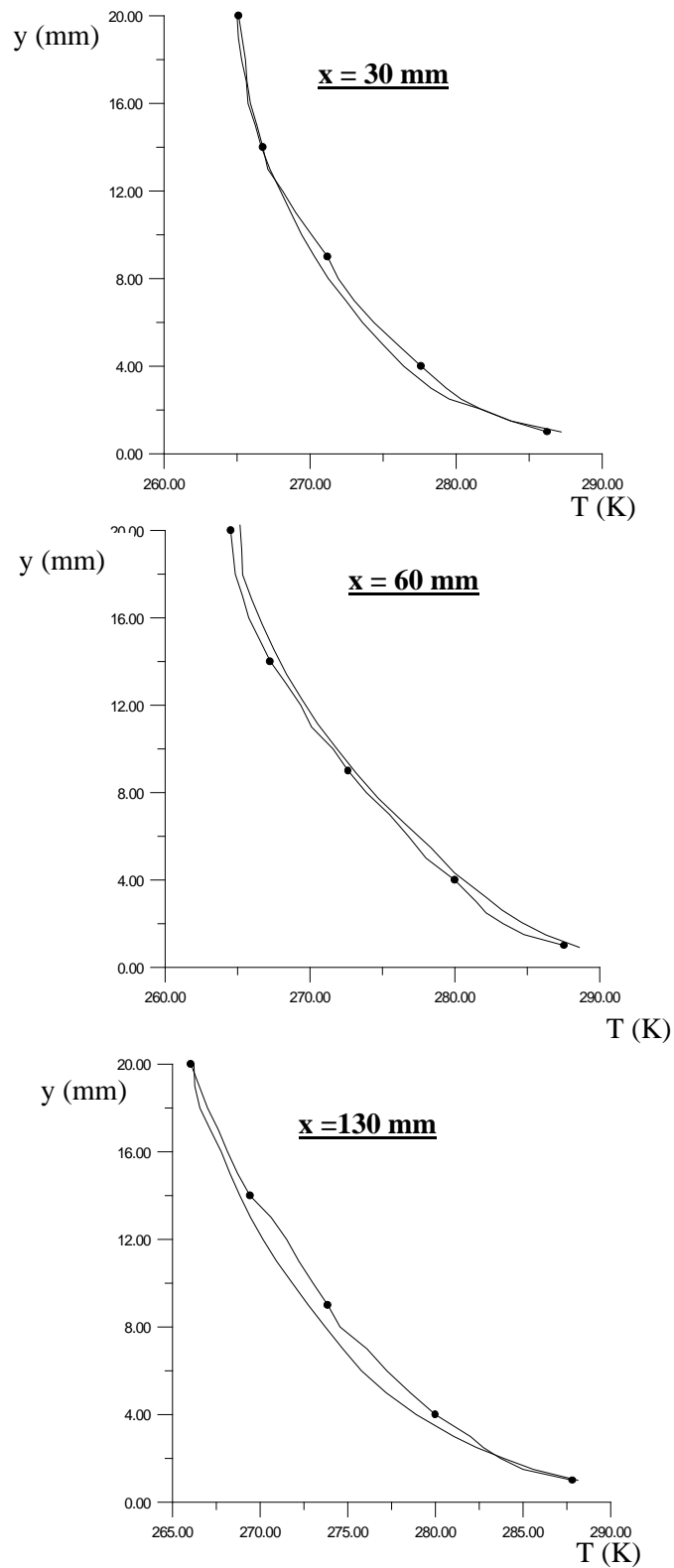
**Figure IV.19 :** Champs de densité de surface de flamme pour différentes valeurs de  $\alpha$ , avec  $\beta=2$ . Ref. [21]



**Figure IV.20 :** Champs de densité de surface de flamme pour différentes valeurs de  $\beta$ , avec  $\alpha=15$ . Ref. [21]



**Figure IV.21** Profils de vitesse axiale pour diverses abscisses



————— Numérique  
 ●—●—●—●—●—●— Experimental, dessiné à partir des résultats de la référence [15]

**Figure IV.22** Profils de température pour diverses abscisses

## Conclusion générale

La combustion turbulente se trouve dans diverses applications en pratique. Elle se trouve dans les secteurs industriels, comme dans les fours et les chaudières, et aussi dans les secteurs de transport, comme dans les automobiles et les aérospatiales. Dans ces systèmes industriels l'écoulement est turbulent et il provoque des transferts énergétiques plus intenses qu'en écoulement laminaire. La combustion turbulente présente des phénomènes complexes et leur prévision reste jusqu'à maintenant incomplète et demande plus de détails afin de comprendre le phénomène de combustion. Les nombreuses recherches qui sont en train de s'effectuer pour la compréhension des phénomènes de la combustion turbulente se basent essentiellement, d'une part sur des expériences, qui restent un moyen très efficace avec des résultats réels malheureusement ce moyen est limité pour des cas simples vu les exigences que les systèmes expérimentaux demandent, d'autre part sur l'étude numérique comme celle de notre travail.

L'allumage qui précède la combustion est un problème complexe et il complique plus la combustion par ces phénomènes transitoires. L'allumage est une phase transitoire correspondant à l'initiation de la combustion, à partir de la première apparition de poche de flamme jusqu'à son établissement. Le travail que nous avons effectué dans le cadre de cette thèse fait partie de ces problèmes de combustion et d'allumage. Le travail effectué représente une étude et modélisation numériques de la phase d'allumage d'une flamme de diffusion turbulente avec une application H<sub>2</sub>/AIR.

Dans ce travail nous avons étudié numériquement l'allumage d'une flamme de diffusion turbulente. C'est un travail qui nous a permis essentiellement de décrire les phases de développement de la flamme, à partir de sa première apparition ou poche de flamme jusqu'à sa stabilisation en une flamme de diffusion établie et par conséquent, elle permettra de déterminer à divers instants la position de la flamme, la température et la composition des gaz et l'influence des débits et de la turbulence à l'entrée sur le délai d'allumage. Ces calculs peuvent servir essentiellement à la détermination de deux types de grandeurs qui sont intéressantes en pratique : la longueur de la flamme, elle se détermine soit en fonction du maximum de température soit en fonction d'une certaine température, spécialement intéressante pour le foyer considéré ; et le domaine de stabilisation de cette flamme en

fonction des paramètres que l'on peut régler tels que la vitesse des gaz ou même la richesse globale du mélange.

L'étude présentée s'est faite sur la base du modèle de la flamme cohérente, appliqué avec un régime de flammelette, que nous avons employé et par l'intermédiaire de la densité de surface de flamme. C'est un modèle qui exprime, en premier lieu, le taux de réaction moyen en fonction de la densité de surface de flamme ensuite cette dernière est exprimée dans une équation de transport par le modèle CFM.

L'étude a donné des résultats acceptables, comparés avec un très bon accord avec d'autres résultats, par exemple avec ceux trouvés par F.Fichot, B.Delhayé, D.Veynante, S..M.Candel [20]. Ce modèle a montré de grandes capacités dans plusieurs travaux de combustion et il a donné de très bons résultats surtout pour les flammes de diffusion, il reste seulement de spécifier ses constantes qui ne sont pas malheureusement universelles.

La turbulence à l'entrée, le débit d'air et du carburant, l'étirement, la densité de surface de flamme imposée initialement et le maillage sont des points cruciaux et même décisifs de l'étude de l'allumage et les flammes. Ces points jouent un rôle très important surtout dans la description de la phase de développement initial de la flamme à partir de l'étincelle et par conséquent le temps d'allumage de la flamme. Cette phase qui demeure jusqu'à maintenant insuffisamment décrite malgré tous les travaux actuels et qui sont passés. Des extensions peuvent améliorer l'étude, par exemple chercher à exprimer la densité de surface de flamme imposée initialement par une quantité qui doit correspondre parfaitement à la durée équivalente à celle de l'étincelle ; un maillage plus fin peut aussi donner des améliorations de la durée de la phase initiale de l'allumage car, d'après F.Fichot, l'étirement est très sensible au maillage.

Nous n'avons pas pris en compte les phénomènes d'extinction, souvent présents dans la zone à fort taux d'étirement, et qui peuvent donner des changements importants. L'étude de ces phénomènes demande en réalité tout un travail particulier qui peut donner une description plus profonde de la phase initiale de l'allumage. Cette phase est d'importance immense et elle doit être étudiée séparément, ce qui constituerait un complément souhaitable pour notre étude dans les travaux à venir.

## Références bibliographiques

- [1]. **Bentebbiche (A.)**. – Modélisation d'une Combustion Turbulente par un Modèle de Flammelette : Modèle de la Flamme Cohérente. Thèse de Magister, (1991). ENP. Alger.
- [2]. **Borghi (R.), Clavin (P.), Linan (A.), Pelcé (P.), Sivashinsky (G.I.)**. – Modélisation des Phénomènes de Combustion. Edition Eyrolles, (1985).
- [3]. **Borghi (R.), Destriau (M.) et DE Soete (G.)**. – La Combustion et les Flammes. Edition Technip, (1995).
- [4]. **Borghi (R.)**. – Interaction entre Turbulence et Combustion. Technique de l'Ingénieur, A-1640-1, 17, (1997).
- [5]. **Boudier (P.), Henriot (S.), Poinsoot (T.) et Baritaud (T.)**. – A Model for Turbulent Flame Ignition and Propagation in Spark Ignition Engines. Twenty-Fourth Symposium (international) on Combustion / The Combustion Institute, pp. 503-510, (1992).
- [6]. **Bruneaux (G.), Akselvou (K.), Poinsoot (T.) and Ferziger (J.H.)**. – Flame-Wall Interaction Simulation in a Turbulent Channel Flow. Combustion and flame, 107 : 27-44, (1996).
- [7]. **Candel (S.), Veynante (D.), Lacas (F.), Maistret (E.), Darabiha (N.) and Poinsoot (T.)**. – Coherent Flamelet Model : Applications and Recent Extensions. E.M2.C Laboratory, CNRS, Ecole Centrale Paris, (1990).
- [8]. **Candel (S.)**. – Mécanique des Fluides. 2<sup>e</sup> édition, (1995).
- [9]. **Cherrared (D.)**. – Modélisation Bidimensionnelle de l'Interaction Jets de Refroidissement Ecoulement Principal Compressible. Thèse de Magister, Université USTHB. Alger, (1998).
- [10]. **Cuenot (B.) and Poinsoot (T.)**. – Asymptotic and Numerical Study of Diffusion Flames with Variable Lewis Number and Finite Rate Chemistry. Combustion and Flame, 104 : 111-137, (1996).
- [11]. **Darabiha (N.) and Poinsoot (T.)**. – Méthodes aux Différences Finies en Energétique. Cours 3<sup>ème</sup> Année d'études. Ecole Centrale Paris, (1994-1995).
- [12]. **DE Soete (G.) and Feugier (A.)**. – Aspects Physiques et Chimiques de la Combustion. Editions Technip, (1976).

- 
- [13]. **Deschamps (Y.)**. – Combustibles Gazeux. Technique de l'Ingénieur, A 1750-1,15.
- [14]. **Désidéri (J.A.), Chetverushkin (B.N.), Kuznetsov (Y.A.), Pétriaux (J.) and Stoufflet (B.)**. – Experimentation , Modelling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion. Copyright by John Wiley and Sons Ltd, (1996).
- [15]. **Dizene (R.)**.
- [16]. **Djellal (S.)**. – Etude et Modélisation de la Combustion Turbulente dans une Chambre de Combustion d'un Statoréacteur. Thèse de Magister, (2000).ENP.Alger.
- [17]. **Esposito (E.)**. – Combustion en Prémélange Gazeux. Technique de l'Ingénieur, B 8315-1,17, (1995).
- [18]. **Esposito (E.)**. – Inflammation Spontanée. Technique de l'Ingénieur, A1625-1,9, (1997).
- [19]. **Favre (A.), Kovaszny (L.S.G.), Dumas (R.), Gavigho (J.), Coantic (M.) et Brun (E.A.)**. – La Turbulence en Mécanique des Fluides. Bordas, Paris, (1976).
- [20]. **Fichot (F.), Delhaye (B.), Veynante (D.) and Candal (S.M.)**. – Strain Rate Modelling for a Flame Surface Density Equation with Application to Non-Premixed Turbulent Combustion. E.M2.C Laboratory, CNRS. Ecole Centrale Paris, (1993).
- [21]. **Fichot (F.)**. – Modélisation de l'Allumage d'une Flamme de Diffusion Turbulente. Application aux Moteurs-Fusées Cryotechniques. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, (1994).
- [22]. **Gupta (A.K.), Lilley (D.G.) and Syred (N.)**. – Swirl Flows. C. Abacus Press, (1984).
- [23]. **Hoffmann (K.A.) and Chiang (S.T.)**. – Computational Fluid Dynamics for Engineers. Engineering Education System™, Wichita, Kansas, 67208-1078, USA, (1995).
- [24]. **Joulain (P.) and Cottereau (M.J.)**. – Mesures de Température de Flamme. Revue Générale de Thermique, 35, 309-323, (1996).
- [25]. **Kenneth Kuan-yun Kuo**. – Principles of Combustion. A Wiley-intérsience Publication , John and Sons, NY, (1986).
- [26]. **Marble (F.E.) and Broadwell (J.E.)**. – The Coherent Flame Model for Chemical. Projet squid tech. Rep.TRW-9-PU. Purdue University. West Lafayette, Indiana, (1977).
- [27]. **Montazel (X.)**. – Etude Expérimentale et Modélisation de la Combustion Turbulente dans les Foyers de Statoréacteurs. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, (1994).

- [28]. **Mostaghimi (J.)**. – Computation of Heat Transfer and Fluid Flow. Univesity of Sherbrooke, Québec J1K-2R1, (1989).
- [29]. **Naji (H.) and Borghi (R.)**. – Modèles de Combustion. Ouvrage, La Combustion dans les Moteurs d'Automobile. Editions Technip, (1988).
- [30]. **Neveu (F.), Corbin (F.) and Trinite (M.)**. – Characterization of the Coupling of Aerodynamics and Combustion in a Nonpremixed Turbulent Flame. Revue Générale de Thermique. Tome 34-N° 400-4001 avril-mai – p.305-314, (1995).
- [31]. **Patankar (S.V.)**. – Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Edition McGraw Hill, (1980).
- [32]. **Perthuis (E.)**. – La Combustion Industrielle. Edition Technip, (1983).
- [33]. **Petrov (C.) and Ghoniem (A.)**. – A Uniform Strain Model of Elemental Flames in Turbulent Combustion Simulations. Combustion and Flame, 111 : 47-64, (1997).
- [34]. **Sanders (H.), Sarh (B.) and Gokalp (I.)**. – Etude Numérique des Jets Turbulents à Températures Elevée. Revue Générale de Thermique, 35, 232-242, (1996).
- [35]. **Shiestel (R.)**. – Modélisation et Simulation des Ecoulements Turbulents. Editions Hermès, Paris, (1993).
- [36]. **Stephen (R.T.)**. – An Introduction to Combustion – Concepts and Applications. Copyright by McGraw-Hill, Inc, (1996).
- [37]. **Tigglén (A.V.)**. – Oxydations et Combustions. Editions Technip, (1968).
- [38]. **Tournière (B.)**. – Simulation Numérique des flammes Turbulentes de Prémélange et de Diffusion, Application aux Foyers Aéronautiques. Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Lyon, (1995).
- [39]. **Veynante (D.), Lacas (F.) and Candel (S.M.)**. – Numerical Simulation of the Transeint Ignition Regime of Turbulent Diffusion Flame. AIAA Journal Paper 848-851, (1991).
- [40]. **Wichman (I.S.) and Vance (R.)**. – A Study of One-Dimensional Laminar Premixed Flame Annihilation. Combustion and Flame, 110 : 508-523, (1997).

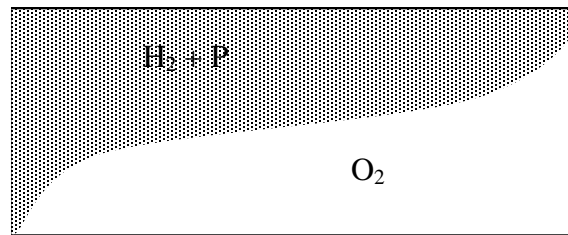
- [41]. Bray (K.N.C.), Libby (P.A.) and Moss (J.B.). – Flamelet Crossing Frequencies and Mean Reaction Rates in Premixed Turbulent Combustion Models. *Comb. Science and Tech.*, 41, 143., (1984).
- [42]. Bray (K.N.C.), Champion (M.) and Libby (P.A.). – Mean Reaction Rate in Premixed Turbulent Flames, 22<sup>nd</sup> International Symposium on Combustion pp.763, 769, (1988).
- [43]. Broadwell (J.E.), Dahm (W.) and Mungal (M.G.) – Blowout of Turbulent Diffusion Flames, 20<sup>th</sup> International Symposium on Combustion, (1984).
- [44]. Mantel (T.), and Borghi (R.). – A new Model of Premixed Wrinkled Flame Propagation based on a Scalar Dissipation Equation. ICDERS, Nagoya, Japan, (1991).
- [45]. Schlichting (H.). – Boundary-layer theory. Mc Graw-Hill. New-York, (1987).



### A1.1 Calcul du rapport d'équivalence local en diffusion

On suppose que l'oxydant est pur alors que le combustible peut être dilué dans les gaz chauds. Cette hypothèse correspond au problème considéré, et n'est donc pas généralisable.

Soit  $Y_f$  et  $Y_o$  les valeurs moyennes dans la cellule et  $Y_{f\infty}$  et  $Y_{o\infty}$  les valeurs locales, respectivement du côté combustible-gaz brûlés et oxydant, c'est à dire de part ou d'autre de la surface de flamme.



**Figure A1.1 :** Schémas de la cellule dans un cas de diffusion.

Il s'agit tout d'abord de déterminer le rapport d'équivalence local qui doit servir au calcul des flammes de diffusion. Ce rapport est défini par :

$$\phi_d = \frac{s \cdot Y_{f\infty}}{Y_{o\infty}} \quad (\text{A1.1})$$

où  $s$  est le coefficient stœchiométrique de la réaction.

On note  $M_T$  la masse totale,  $M_T = M_f + M_o + M_p$ . Il vient :

$$Y_f = \frac{M_f}{M_T}$$

$$Y_o = \frac{M_o}{M_T}$$

Les valeurs moyennes  $Y_f$  et  $Y_o$  sont déterminées par la résolution des équations de bilan moyennées.

Par hypothèse  $Y_{o\infty} = 1$ . De plus :

$$Y_{f\infty} = \frac{M_f}{M_T - M_o} \quad (\text{A1.2})$$

En effet le combustible ne se trouve que dans la partie combustible-gaz brûlés. On en déduit facilement la valeur locale de la fraction massique de combustible :

$$Y_{f\infty} = \frac{M_T \cdot Y_f}{M_T(1 - Y_0)} = \frac{Y_f}{1 - Y_0} \quad (\text{A1.3})$$

Comme  $Y_{0\infty} = 1$ , il vient :

$$\phi_d = s \cdot Y_{f\infty} = \frac{s \cdot Y_f}{1 - Y_0} \quad (\text{A1.4})$$

On peut se demander si l'expression obtenue pour la fraction massique locale de combustible ne conduit pas à des valeurs inacceptables. Pour répondre à cette question on note tout d'abord que :

$$Y_f = 1 - Y_0 - Y_p \leq 1 - Y_0$$

et par conséquent

$$\frac{s \cdot Y_f}{1 - Y_0} \leq s$$

Ainsi le rapport  $\phi_d$  est borné, même pour  $Y_0$  tendant vers 1.

Les taux de réaction volumiques par unité de surface de flamme sont alors donnés par des formules classiques :

$$V_{df} = Y_{f\infty} \left( \frac{DE_s}{2\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{\phi_d + 1}{\phi_d} \right) e^{-\omega^2}$$

$$V_{d_0} = Y_{0\infty} \left( \frac{DE_s}{2\pi} \right)^{1/2} (\phi_d + 1) e^{-\omega^2}$$

avec

$$\omega = \text{erf}^{-1} \left( \frac{\phi_d - 1}{\phi_d + 1} \right) \quad \text{et} \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Dans ces relations, D représente la diffusivité des réactifs,  $E_s$  est le taux d'étirement imposé à l'élément de flamme.



## A2.1 L'équation de la densité de surface de flamme

L'équation de la densité de surface de flamme a été établie pour la première fois, de manière empirique, par Marble et Broadwell pour les flammes de diffusion. Des approches plus rigoureuses ont ensuite été proposées par Pope, puis Candel et Poinso. C'est cette dernière approche qui est rappelée dans la section qui suit.

### A2.1.1 Equation d'évolution pour une surface matérielle

On considère une surface  $A(t)$  qui se déplace dans l'espace avec une vitesse  $w$ . Le vecteur normal à cette surface est noté  $n$ . Il existe un théorème de transport, applicable dans des conditions assez générales, qui permet d'évaluer la dérivée par rapport au temps du flux d'un vecteur  $G$  à travers la surface  $A(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} G \cdot n dA = \int_{A(t)} \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + w \cdot \nabla G - G \cdot \nabla w + G \nabla \cdot w \right] \cdot n dA \quad (\text{A2.1})$$

Si on choisit maintenant  $G = n$ , le théorème précédent conduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} dA = \int_{A(t)} \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + w \cdot \nabla n - n \cdot \nabla w + n \nabla \cdot w \right] \cdot n dA \quad (\text{A2.2})$$

Puisque  $n$  est un vecteur normé on a :

$$\frac{\partial n}{\partial t} \cdot n = 0$$

$$(w \cdot \nabla n) \cdot n = w \cdot \nabla \frac{n^2}{2} = 0$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} dA = \int_{A(t)} (-nn : \nabla w + \nabla \cdot w) dA \quad (\text{A2.3})$$

Cette équation intégrale n'est vérifiée que si pour tout élément de surface  $\delta A$  on a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\delta A} \frac{d(\delta A)}{dt} = -nn : \nabla w + \nabla \cdot w \quad (\text{A2.4})$$

Dans le cas d'une flamme, la vitesse  $w$  au front de flamme est égale à la somme de la vitesse du fluide et de la vitesse de propagation normale au front :  $w = u + S_L$ . Pour une flamme de diffusion, la vitesse de déplacement  $S_L$  peut être considérée comme nulle. On peut alors écrire une équation générale pour l'évolution d'un élément de surface de flamme  $\delta A$  dans un écoulement non-uniforme :

$$\frac{1}{\delta A} \frac{d(\delta A)}{dt} = -nn : \nabla u + \nabla \cdot u + \nabla \cdot S_L n \quad (\text{A2.5})$$

Il faut remarquer ici que l'approximation d'un front de flamme par une surface mobile n'est valable que dans certaines limites. En particulier, le rayon de courbure doit rester grand par rapport à l'épaisseur de la flamme. De plus, il ne doit y avoir ni interconnexions ni ruptures dans la surface de flamme. Chacun de ces cas est susceptible de se produire dans une flamme réelle, en cas d'extinction locale de la flamme ou de rapprochement de deux fronts.

Ces phénomènes sont à modéliser, pour modifier l'équation précédente qui est exacte dans le cas d'un front infiniment mince.

## A2.2 Equation d'évolution pour la densité de surface matérielle

Il est intéressant d'introduire une densité de surface  $\Sigma = \delta A / \delta V$  qu'on va chercher à calculer à l'aide d'une équation de bilan. Pour obtenir cette équation à partir de l'équation A2.5, on a besoin de connaître l'évolution d'un élément de volume se déplaçant avec la flamme à la vitesse  $w$ . on obtient la variation de ce volume à partir d'un théorème de transport :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \int_{A(t)} w \cdot n dA = \int_{V(t)} \nabla \cdot w dV \quad (\text{A2.6})$$

On en déduit l'expression pour  $\delta V$  :

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \nabla \cdot w \quad (\text{A2.7})$$

En combinant cette équation avec l'équation A2.5 on obtient :

$$\frac{1}{\Sigma} \frac{d(\Sigma)}{dt} = -nn : \nabla u - n \cdot \nabla S_L \quad (\text{A2.8})$$

La dérivée par rapport au temps est une dérivée totale, et on peut donc écrire :

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\partial\Sigma}{\partial t} + (\mathbf{u} + S_L \mathbf{n}) \cdot \nabla \Sigma \quad (\text{A2.9})$$

### A2.3 Equation moyenne et modélisation des différents termes

Comme pour les autres grandeurs dans l'écoulement, on est amené à décomposer  $\Sigma$  en une valeur moyenne et une autre partie fluctuante. L'équation A2.8 devient :

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\Sigma}) + \nabla \cdot (\langle S_L \mathbf{n} \rangle_s \tilde{\Sigma}) = -\nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'' \tilde{\Sigma}'' \rangle_s) - \langle \mathbf{nn} \rangle_s : \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\Sigma} - \langle \mathbf{nn} : \nabla \mathbf{u}'' - \nabla \cdot \mathbf{u}'' \rangle_s \tilde{\Sigma} + \langle S_L \nabla \cdot \mathbf{n} \rangle_s \tilde{\Sigma} \quad (\text{A2.10})$$

où la notation  $\langle \rangle_s$  désigne une moyenne sur la surface de flamme. Les trois termes du membre de gauche de l'équation représentent respectivement l'accumulation, la convection par le champ de vitesse moyenne et la propagation due à la vitesse de déplacement propre de la flamme. Le premier terme du membre de droite représente la convection par le champ de vitesse fluctuante. Par analogie avec la modélisation du tenseur de Reynolds, il est modélisé de la façon suivante :

$$\langle \mathbf{u}'' \tilde{\Sigma}'' \rangle_s = \mathbf{u}''_j \tilde{\Sigma}'' = -\frac{\mu_t}{\sigma_\Sigma} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial x_j} \quad (\text{A2.11})$$

Les deux termes suivants traduisent l'accroissement de surface de flamme sous l'effet de l'étirement imposé par le gradient de vitesse moyenne ou le gradient de vitesse fluctuante.

$$\langle \mathbf{A}_T \rangle_s = \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \langle \mathbf{nn} \rangle_s : \nabla \tilde{\mathbf{u}} = \left( \delta_{ij} - \langle \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \rangle_s \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A2.12})$$

$$\langle \mathbf{a}_T \rangle_s = \langle \nabla \mathbf{u}'' - \mathbf{nn} : \nabla \mathbf{u}'' \rangle_s = \left\langle \delta_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} \right\rangle_s \quad (\text{A2.13})$$

Le dernier terme,  $\langle S_L \nabla \cdot \mathbf{n} \rangle_s$  est un terme de courbure dont l'effet n'est pas encore dont l'effet n'est pas encore bien connu ( création ou disparition ). Ref. [21].