

N°= d'ordre: 16/2007-M/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

FACULTÉ DE PHYSIQUE

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En: PHYSIQUE

Spécialité: **Physique Théorique de la Matière et des
Hautes Energies**

par: **BEKDA AHMED**

TITRE

**Modes de vibration et simulation Monte-Carlo dans
une chaîne linéaire fortement couplée**

Soutenu le 25/06/2007, devant le jury composé de:

Mme F. CHAFA	Professeur	USTHB	Présidente
Mr N. BELDJOUDI	Maître de conférences	USTHB	Rapporteur
Mr D. BRADAI	Professeur	USTHB	Examineur
Mr A. KELLOU	Maître de conférences	USTHB	Examineur
Mr M. DJEBLI	Maître de conférences	USTHB	Examineur

Dédicace

Je dédie ce présent mémoire à toute ma famille, à tous mes amis et en particulier à mes parents et à Hamida.

Remerciements

Ce travail a été effectué au laboratoire de physique théorique de la faculté de physique de l'USTHB et au Laboratoire de Physique et Chimie Quantique (LPCQ) de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou

Je tient tout d'abord à remercier Monsieur Beldjoudi Nadir, maître de conférences à l'USTHB, pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant d'être mon directeur de thèse. Je garde le souvenir des nombreuses discussions enrichissantes que nous avons eu. Je le remercie aussi pour le regard critique et constructif qu'il a apporté tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier vivement toutes les personnes qui m'ont, de près ou de loin, aidé à mener à terme ce travail de recherche et je cite en particulier:

- Le Professeur, Mme F. CHAFA qui m'a honoré en acceptant d'être président de jury.
- Le Professeur Mr D. BRADAI pour avoir accepter de faire partie de ce jury.
- Le Maître de conférences Mr A. KELLOU qui a accepté de faire partie de ce jury.

Ma profonde reconnaissance va également au Maître de Conférences Mr M. DJEBLI qui m'a honoré par son acceptation d'être membre de ce jury, celui qui a consacré une grande partie de son temps à m'orienter et à m'aider dans la réalisation de ce présent mémoire. Je le remercie beaucoup pour son amitié et ses conseils pertinents et à qui je dois les principales orientations concernant la simulation. Je le remercie en particulier pour m'avoir introduit dans le domaine de la physique des plasmas poussiéreux "dusty plasmas". Mr Djebli a été d'un grand soutien moral dans les moments les plus difficiles de mon travail. Je remercie aussi mes collègues du laboratoire de physique théorique, étudiants et enseignants, pour leur aide et patience

Mes remerciements vont également à tous mes amis pour toute la documentation mise à ma disposition.

Je n'omet pas de remercier mes parent pour leur aide inestimable; ils m'ont procuré toutes les conditions favorable pour parfaire ce travail.

Mes remerciements les plus distingués vont également au professeur M. AMAROUCHE le directeur du laboratoire de Physique et Chimie Quantique (L.P.C.Q), de l'université

Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui m'a beaucoup aidé à mettre fin à mon problème d'hébergement ici à Alger, en m'autorisant à prendre place au sein du laboratoire cité, afin de me permettre de rédiger ce mémoire près de chez moi.

La mise en forme de ce mémoire a été réalisée sous Latex avec l'aide de Mr. Mourad Djebli.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Les systèmes fortement couplés	5
2.1	Les plasmas poussiéreux	5
2.1.1	Composition et propriétés	6
2.1.2	Plasmas naturels	6
2.1.3	Plasmas artificiels	6
2.1.4	Applications	7
2.2	La physique des plasmas poussiéreux	7
2.2.1	Formation des grains de poussière	10
2.2.2	Caractéristiques des grains	11
3	Les phénomènes non-linéaires dans les plasmas poussiéreux fortement couplés	16
3.1	Les vibrations dans les chaînes linéaires	16
3.1.1	La relation de dispersion dans les chaînes linéaires	16
3.2	Les modes de vibrations dans les plasmas poussiéreux fortement couplés .	18
3.2.1	Les modes acoustiques	18
3.2.2	Les modes de réseau	19
3.3	Etude de la relation de dispersion dans un plasma poussiéreux fortement couplé	20
3.3.1	Modèle physique	20
3.3.2	Résultats et Discussions	27
4	Les modes de vibration dans les chaînes linéaires	33
4.1	Modèle physique	33
4.1.1	Relation de dispersion	35
4.1.2	Effet d'écran	38
4.2	Simulation par la méthode de Monte-Carlo	41

4.2.1	Principe de la Méthode de Monte-Carlo	42
4.3	Résultats et discussion	51
4.4	Effet de la présence d'un gaz sur les modes de vibrations	56
4.4.1	Système entretenu	56
4.4.2	Effet de la friction sur la dispersion	57
4.4.3	Résultats et discussion	58
5	Conclusion et perspectives	62

Chapitre 1

Introduction

En 1934, Wigner a présenté une théorie décrivant le comportement des électrons dans les métaux à basse température[1]. Il a montré que ces électrons formaient un réseau régulier dû seulement à l'interaction coulombienne. L'observation expérimentale d'un tel comportement dans les solides a été rendue possible au début des années 90.

Les cristaux de Wigner se forment lorsque l'énergie potentielle d'interaction entre les particules est supérieure à l'énergie cinétique d'agitation thermique. Les premiers travaux sur les cristaux de Wigner ont été réalisés dans les suspensions colloïdales des particules dans une solution électrolytique, ils peuvent également être formés dans des pièges d'ions quand ces derniers sont refroidis à de très basses températures.

La description théorique de la cristallisation de Wigner a été faite pour des systèmes composés d'une seule espèce de particules chargées et confinées par un champ extérieur. Le comportement de tels systèmes peut être caractérisé par un paramètre de couplage Γ , ce dernier est défini comme étant le rapport entre l'énergie potentielle d'interaction et l'énergie cinétique due à l'agitation thermique des particules[2]. Les cristaux de Wigner ont été aussi observés dans les plasmas poussiéreux. De tels plasmas sont composés en plus des ions, des électrons et des particules neutres, de particules massives ayant des charges considérables. Ces dernières sont connues sous le nom de grains de poussière ou *dust*. Depuis les premières observations expérimentales des grains de poussière [3], un intérêt particulier a été porté sur la proposition des modèles physiques pour les plasmas poussiéreux *dusty plasmas*.

La présence des grains de poussière dans le plasma modifie considérablement ses caractéristiques et donne lieu à des effets et phénomènes qui n'existaient pas dans les plasmas classiques dans lesquels les grains sont totalement absents ou négligeables[4]. Les observations ont révélé l'existence de phénomènes nouveaux qui modifient le comportement du plasma[5] et qui ne peuvent pas être interprétés par l'interaction gravitationnelle. Ce

sont des phénomènes qui résultent des interactions fortes entre les grains d'une part, et entre grains et les autres espèces présentes dans le plasma d'autre part[6]. Parmi ces phénomènes, citons l'apparition de nouveaux modes de vibrations, les modes de réseau (DLW) et les modes acoustiques (DAW)[7].

Le travail réalisé dans ce mémoire est organisé comme suit:

La première partie est un rappel sur les structures fortement couplées et des notions de base de la physique des plasmas poussiéreux. Les principales caractéristiques des grains ainsi que les différentes méthodes de leur production associées à différentes applications sont résumées.

La deuxième partie est consacrée aux phénomènes non linéaires dans les plasmas poussiéreux fortement couplés et les modes de vibrations dans les chaînes linéaires. Nous avons exposé le modèle physique qui a permis la détermination de la relation de dispersion dans les plasmas. Le plasma étant un système entretenu, la présence d'autres espèces affecte le mouvement des grains. Un exemple d'étude des modes acoustiques (DAW) et des modes de réseau (DLW) dans les plasmas poussiéreux a été développé.

Dans la troisième partie, les modes de vibrations dans les chaînes linéaires unidimensionnelles fortement couplées par l'intermédiaire d'une interaction de type de Yukawa sont étudiés dans le cas d'un système qui contient des particules identiques de masse m et de charge positive Z . La simulation par la méthode de Monte-Carlo est utilisée dans le cas d'une Chaîne linéaire infinie, pour déterminer la configuration d'équilibre pour de basses températures. Les résultats obtenus par la simulation de Monte-Carlo sont appliqués pour l'étude des (DAW) et (DLW). L'étude est menée en négligeant les forces de frottement, puis en tenant compte de ces dernières, puisque l'injection de particules neutres peut être considérée comme une source de freinage pour le mouvement des particules.

Chapitre 2

Les systèmes fortement couplés

Dans les systèmes fortement couplés, les forces d'interaction sont d'origine gravitationnelle ou électrique ou, la combinaison de ces deux forces si elles sont de même ordre de grandeur. Un exemple de tels environnements: les anneaux planétaires, qui contiennent une gamme étendue de particules de différentes dimensions où, les particules les plus petites agissent l'une sur l'autre principalement par la force électrique, alors que les particules de taille plus grandes agissent entre elles par la force de gravitation[2].

Dans quelques systèmes colloïdaux l'interaction électrique entre les particules peut être si grande, qu'elle assure des positions bien ordonnées des particules, cette structure a été décrite comme étant un système cristallin. Ces systèmes sont aussi connus sous le nom de structures fortement couplées. Un exemple de ces structures, les cristaux coulombiens formés de grains de poussière[2][8].

Les cristaux coulombiens, appelés aussi cristaux de Wigner -contrairement aux cristaux ioniques où, les charges positives et les charges négatives occupent en alternance les noeuds d'un réseau périodique- sont des cristaux composés entièrement de particules chargées de mêmes espèces, et l'état d'énergie le plus bas de ces particules est obtenu quand elles se séparent autant que possible entre elles. Dans le cas où il y a présence d'un potentiel de confinement, la structure cristalline devient l'état le plus stable énergétiquement. Parmi ces structure cristalline on cite, les plasmas poussiéreux fortement couplés [2][9].

2.1 Les plasmas poussiéreux

Les Plasmas poussiéreux sont des gaz, partiellement ou totalement ionisés, pour lesquels les effets collectifs jouent un rôle très important[10].

2.1.1 Composition et propriétés

La présence de particules chargées dans le gaz confère à celui-ci des propriétés collectives. En particulier, lorsque le plasma présente un excès local de charges positives ou négatives. Ces dernières engendrent un champ électrique local pour annuler ce déséquilibre de charge. Le champ provoque un déplacement rapide des électrons, qui sont très mobiles par rapport aux ions. A cause de leur inertie, la présence de cette réponse caractérise l'effet d'écran qui opère sur une distance dites longueur de Debye. La longueur de Debye dépend de l'énergie moyenne et de la densité des électrons. La réponse à la perturbation électrique locale se manifeste aussi par des oscillations dont la fréquence est appelée fréquence du plasma. Ce phénomène peut être observé aussi dans les métaux[10][11].

2.1.2 Plasmas naturels

Les plasmas naturels, sont des structures qu'on peut trouver dans les éclairs et l'aurore boréale. Dans la haute atmosphère (ionosphère), le plasma de l'ionosphère est responsable de la réflexion des ondes radio (dont la fréquence est inférieure à la fréquence plasma de l'ionosphère). Ces plasmas naturels sont créés par les hautes températures du milieu (Soleil et étoiles) et par le rayonnement (matière interstellaire, enveloppes atmosphériques), constituant ainsi les sources d'énergie nécessaires à l'ionisation des particules[12][11].

2.1.3 Plasmas artificiels

Les propriétés particulières des milieux ionisés ont provoqué la curiosité des chercheurs qui les ont créé artificiellement, soit comme objets d'études, ou bien en vue d'une application physique. Les températures requises pour l'ionisation sont très élevées (supérieures à 10^4 °C). Divers moyens sont utilisés pour créer l'ionisation. On cite la décharge électrique dans les gaz et les lasers qui entrent en interaction avec la matière (fusion inertielle ou la gravure, par exemple). Dans le premier cas, les électrons libérés du gaz sont accélérés et ionisent des atomes par collision, créant ainsi d'autres électrons capables à leur tour d'ioniser d'autres atomes et de créer d'autres électrons. Dans le deuxième cas, l'interaction du faisceau laser avec la matière (gaz ou solide) conduit à l'ionisation, donc à la création d'électrons, qui sont accélérés dans le champ électrique du laser et deviennent à leur tour ionisants. Dans les deux modes de production, il existe également des espèces excitées et des radicaux. Compte tenu du changement de leur comportement, les plasmas sont actuellement largement utilisés dans diverses applications industrielles[12][11].

2.1.4 Applications

Les plasmas produits par laser servent couramment en soudage ou en découpage des matériaux (métal, bois, plastique, etc). Plus généralement lors de l'irradiation directe d'un matériau, le plasma formé à sa surface permet de modifier ses propriétés superficielles, telles que la dureté, la résistance à l'usure, etc, en pulvérisant une cible par irradiation laser. On peut également réaliser des dépôts de couches minces ayant des propriétés améliorées : couches supraconductrices, couches ultradures (nitrures, carbures, diamant, etc). C'est également une des voies pour réaliser la fusion thermonucléaire contrôlée par confinement de la matière sous l'impact des lasers des hautes puissances[12].

Les décharges électriques présentent une grande diversité de conception, les applications vont de l'éclairage (tubes fluorescents), sources de lumière (lampes à mercure, xénon, lasers à gaz, flash UV, etc...), jusqu'à la fusion thermonucléaire contrôlée où, cette fois, le plasma est confiné par des champs magnétiques. Les applications les plus marquantes concernent, la microélectronique et l'élaboration de couches minces. Les progrès obtenus dans les performances des ordinateurs sont liés à la miniaturisation des circuits intégrés contenus dans les composants. Cette miniaturisation n'a été possible que par l'utilisation de traitements plasma (gravure, dépôt) où, le rôle des ions est primordial. De même, des matériaux appelés métastables n'ont pu être obtenus que par l'utilisation de plasmas : il s'agit du silicium amorphe hydrogéné qui est utilisé, en particulier, dans la fabrication des cellules photovoltaïques et du carbone amorphe hydrogéné, qui est un matériau possédant des propriétés mécaniques très intéressantes. Dans le domaine de la métallurgie, l'utilisation des plasmas concerne également les couches dures et l'élaboration d'alliages[12][11].

Enfin, les techniques plasma sont aussi employées dans le traitement des pollutions de type industriel (industries chimiques...) ou domestique (automobiles...), en permettant de dissocier des molécules indésirables.

2.2 La physique des plasmas poussiéreux

Un exemple d'un milieu qui contient des impuretés, i.e. grains de poussière, est celui de l'environnement proche de la terre (2.1). La poussière est produite par les débris ou transportée par le vent solaire. La présence de cette espèce dans le plasma modifie ces propriétés et donne lieu à de nouveaux phénomènes physiques dont l'interprétation dépend des caractéristiques des impuretés. Parmi ces caractéristiques le rapport charge-masse qui est une variable dynamique, représente un degré de liberté additionnel[13]. Dans un plasma poussiéreux, les grains de poussière chargés produisent des potentiels assez particuliers qui changent de manière significative les forces de courte et de longue portée. A

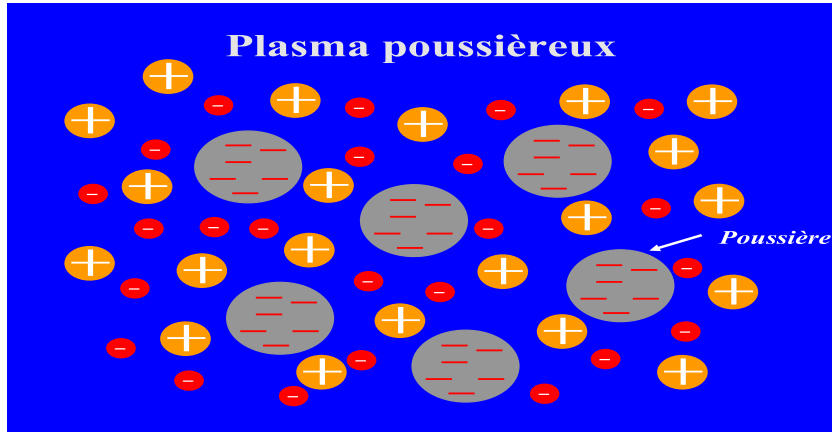


FIG. 2.1 – Exemple d'un plasma poussiéreux

cause de sa charge considérable, l'énergie potentielle d'un grain de poussière peut excéder son énergie cinétique moyenne, et provoquant un composant fortement couplé. Cette particularité, donne naissance à de nouveaux types d'oscillations dans le plasma poussiéreux. Des études théoriques et expérimentales se sont basées sur les ondes électrostatiques de basses fréquences dans les plasmas faiblement ou fortement couplés en présence des grains de poussière négativement chargés. Parmi les modes qui ont subit des changement dans leurs propriétés on trouve: les ondes acoustiques ioniques et les ondes d'ion cyclotrons électrostatiques. Tant que les grains de poussière ne participent pas à la dynamique de l'onde, seuls leurs paramètres subissent les changements, par contre lorsque la dynamique des grains de poussière est incluse dans l'analyse, de nouveaux modes de vibrations des grains de poussière apparaissent[13].

A basse température, dans les D-Région de la terre (approximativement 60 à 100 kms) qui sont connues par un peuplement de quantités substantielles de grains de poussière et d'autres débris d'origine météorique, on trouve des particules de 'fumée' provenant des météorites qui peuvent former de plus grandes particules qui sont observées en tant que nuages polaires. En outre, il y a un grand nombre de molécules et d'ions multi-hydratés capables d'attacher les électrons libres. N'importe laquelle de ces espèces peut fournir à l'électron arraché les mécanismes d'attachement au niveau de la surface responsables de l'ordre de grandeur de la charge du grain[13].

Les éléments métalliques typiques d'origine météorique présents dans l'ionosphère sont: Fe, Al, et Ni. Les sources solaires présentent les éléments métalliques des poids atomiques plus élevés comme: La, Tu, OS, Yt et le Ta. Ces espèces atomiques surgissent en raison de l'activité à hautes températures à la surface du soleil. La plupart des éléments métalliques

présents dans l'ionosphère sont oxydés facilement et forment les oxydes: FeO, AlO, TiO, etc. Ces derniers forment les agrégats qui deviennent des constituants du grain. Les particules de poussière immergées dans les plasmas, et à l'aide du rayonnement UV, tendent à rassembler de grandes quantités de charges électrostatiques et à répondre aux forces électromagnétiques en plus de toutes les autres forces agissant sur les grains neutres. Les particules de poussière chargées participent aux interactions complexes avec le plasma et provoquent un comportement complètement nouveau du plasma. Les grains de poussière dans les plasmas sont les porteurs de charge, ils ont des masses d'un ordre de grandeur très important par rapport à tous les autres composants. A cause de la fluctuation dans le temps, ils peuvent avoir des charges négatives, positives ou les deux en même temps . Ils peuvent aussi communiquer des effets non-électromagnétiques (pesanteur, frottement et pression de rayonnement) au plasma qui peut représenter de nouvelles sources d'énergie libres[13].

Pendant une longue période, l'étude des plasmas poussiéreux était principalement d'intérêt pour l'astrophysique. Certains phénomènes, comme le (Block-out) observée lors du lancement des premiers satellites, ne peuvent pas être expliqués par la dynamique classiques d'un plasma. Ceci a mené au développement et à de nombreuses applications de la théorie dynamique des grains de poussière chargés et qui sont également influencés par la pesanteur planétaire et les forces électromagnétiques dans la magnétosphère planétaire. Les études dynamiques ont été complétées dans les années 90 par l'étude des processus collectifs dans les plasmas poussiéreux. Ces derniers ont conduit à la découverte de nouveaux modes d'oscillations. Ils ont également simulé des études de laboratoire pour l'observation de plusieurs d'entre elles, y compris le mode acoustique des grains de poussière de très basses fréquences qui a été visualisé à l'oeil nu par la dispersion de la lumière laser. Le rôle de la poussière chargée dans la dispersion d'onde électromagnétique a été également étudié ainsi que son application[13].

L'un des nouveaux développements dans les plasmas poussiéreux est le phénomène de la cristallisation. Les cristaux de plasma sont de taille de l'ordre de micron, et acquièrent de grandes charges. Le plasma fortement couplé peut exister dans des conditions de fortes densités et de températures très basses, tel qu'un environnement stellaire. Ce nouveau matériau où l'on observe la transition de phase et la structure cristalline à l'oeil nu, devient un outil pour étudier des processus physiques dans la matière condensée, telle que la fonte, le recuit et les défauts de réseau. Il fournit également une grande motivation pour étudier les propriétés collectives dans un plasma fortement couplé, un secteur qui demeure en grande partie encore inconnu jusqu'ici[13].

La recherche dans ce domaine n'a pas passé en revue toutes les ondes possibles dans un

milieu de plasma poussiéreux, mais s'oriente essentiellement pour élucider le mécanisme de la génération et la propagation des ondes dans ce milieu afin de changer les notions classiques.

Dans l'industrie, les grains de poussière peuvent constituer des impuretés piégées lors de la fabrication des semi-conducteurs, générant des répercussions graves sur les propriétés et la qualité des composants. Parmi les caractéristiques qui nous permettent de distinguer les grains de poussières des ions on cite[14]:

- Les grains de poussière existent en général à de basses températures($\sim eV$).
- Ils sont différents des ions par leur taille (jusqu'au micron), leur masse (des milliers de fois supérieure à la masse du proton: $10^{-15} - 10^{-2}g$) et leur charge (jusqu'à $(10^3 - 10^6)e$).
- Le rapport charge-masse n'est plus une constante mais une variable dynamique.
- La charge peut être positive ou négative selon les conditions expérimentales qui leur ont donné naissance.
- Ils ont des formes très variées, ils peuvent même être fabriqués par l'homme.

2.2.1 Formation des grains de poussière

Les missions spatiales vers les planètes et les comètes n'ont pas montré uniquement l'existence des grains, mais leur indispensable présence dans de tels environnements. Il a été prouvé que les grains portent des charges négatives ou positives comme les ions, mais ils avaient des caractéristiques qui permettent de les différencier de ces derniers. Ainsi, on s'intéressait à l'étude de la formation des grains dans la nature et dans les laboratoires afin de réaliser des expériences et des simulations dans le but de maîtriser la physique des plasmas poussiéreux[14].

a- Formation par les phénomènes de surface

Par traitement de la surface d'un alliage de silicium on peut avoir de petites gravures irrégulières formées sur celle-ci. En présence du champ électrostatique, les parties supérieures des gravures acquièrent une charge négative et sont injectées dans le plasma. Un tel procédé est très utilisé dans l'industrie des semi-conducteurs. Cependant, la présence des grains présente un inconvénient majeur: un seul grain, s'il a la taille d'un réseau, peut détruire totalement le circuit intégré. Comme la tendance est vers la miniaturisation, l'existence de grains de faible taille peut donner les mêmes conséquences désastreuses.

b- Formation par transition de phase dans les gaz

La formation passe par trois étapes:

- 1- Par échange de charge, l'ion négatif présent dans le plasma, acquiert une charge considérable et se recombine avec les impuretés du milieu pour former une sorte d'amas avec une charge fluctuante.
- 2- Les amas se combinent, la fluctuation de charge permet de tels processus.
- 3- Les amas atteignant une charge négative suffisante, la force repulsive empêche de nouvelles combinaisons et l'équilibre est réalisé. Ainsi, on obtient un grain avec une forme, taille et charge bien définies.

c- Grains de poussière naturels

Les grains de poussières sont partout présents dans tous les environnements de plasmas de l'espace, à l'exception de la partie interne du soleil. Ils peuvent être constitués de carbone, de silicate, de fer, etc, ou un mélange de tous les éléments. Ils peuvent aussi être issues des micro météorites ou des substance produites par la pollution due à l'homme.

2.2.2 Caractéristiques des grains

La formation des grains de poussière est toujours suivie par des interactions entre eux-même et le plasma. En raison de leurs masse considérable, l'interaction gravitationnelle a un effet sur eux. Comme la charge atteint des valeurs considérables, les interactions électrostatiques deviennent prépondérantes. De tels effets donnent des propriétés remarquables aux plasmas poussiéreux[14].

a- Longueur de Debye

En présence de particules chargées, le plasma possède une caractéristique très importante, c'est l'effet d'écran (Fig.2.2). Ceci se résume de la manière suivante: toute particule chargée possède son propre potentiel électrostatique, la présence d'autres particules chargées a pour effet d'annuler ce champ au delà d'une distance critique dite longueur de Debye. Cet effet persiste lorsque le plasma contient des grains de poussière.

Soit une particule dans un plasma, elle attire les particules de signe opposé qui forment autour d'elle un nuage de charge. Dans le cas d'un effet d'écran parfait(absence d'agitation thermique) le champ à l'extérieur du nuage est nul. Lorsque la température des particules est prise en compte, les particules à la limite de la sphère de Debye, sphère dont le rayon est égal à la longueur de Debye, possèdent suffisamment d'énergie pour s'échapper à l'attraction coulombienne.

La détermination de la longueur de Debye d'un plasma poussiéreux se fait en utilisant l'équation de Poisson[15] [16]:

$$\nabla^2\phi = 4\pi (en_e - en_i - qn) \quad (2.1)$$

où n_e , n_i , n sont respectivement, densité des électrons, des ions et des grains, $q = Ze$, $Z < 0$ ($Z > 0$) est la charge du grain et ϕ le potentiel électrostatique.

Comme la densité des grains est partout la même dans le milieu plasma, alors,

$$qn = q_on_o = en_{eo} - en_{io} \quad (2.2)$$

L'indice 'o' désigne les paramètres à l'équilibre.

Pour un équilibre thermique local, les densités des électrons et des ions sont données par:

$$n_e = n_{eo} \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) \quad (2.3)$$

$$n_i = n_{io} \exp\left(-\frac{e\phi}{T_i}\right) \quad (2.4)$$

T_e , T_i étant les températures électronique et ionique.

Pour des distances r mesurées par rapport aux positions des grains et lorsque $r \gg \lambda_D$ on a: $\frac{e\phi}{T_e} \ll 1$ et $\frac{e\phi}{T_i} \ll 1$, λ_D étant la longueur de Debye. A partir de l'équation de Poisson on obtient

$$\nabla^2\phi = 4\pi \left(\frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \right) \phi = 4\pi \frac{1}{\lambda_D^2} \phi \quad (2.5)$$

ou $\lambda_{Dj} = \left[\frac{T_j}{4\pi n_{jo} e^2} \right]^{1/2}$ représente la longueur de Debye de l'espèce j ($j = i$ (ion) , e (électron)) .

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De}\lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}} \quad (2.6)$$

La longueur de Debye représente la distance à partir de laquelle le potentiel électrostatique $\phi = \phi_o \exp(-r/\lambda_D)$ décroît très rapidement. L'expression de λ_D a été obtenue en supposant implicitement que la charge des grains de poussière est constante. Dans le cas contraire, la fluctuation de la charge est prise en compte, un terme de correction doit

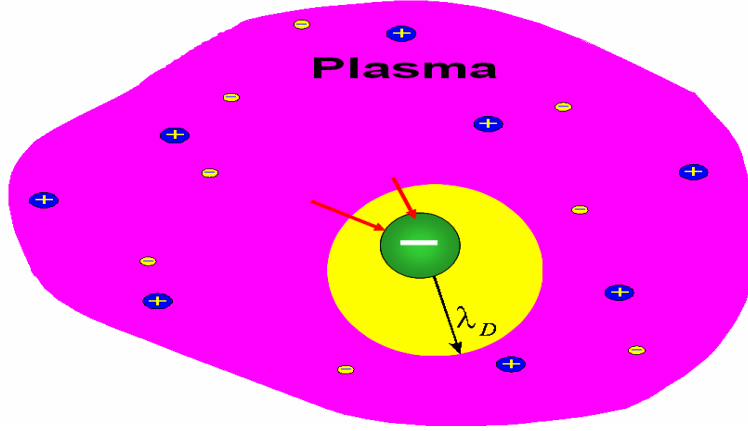


FIG. 2.2 – Représentation de la longueur de Debye

donc être ajouté[15]. La longueur de Debye devient:

$$\lambda_{Dc} = \frac{\lambda_{De}\lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2 + \lambda_{Dc}^2}} \quad (2.7)$$

où λ_{Dc} est le terme de correction dû à la fluctuation de charge:

$$\lambda_{Dc} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2} 4\pi n_o r_o} \quad (2.8)$$

avec

$$\nu_1 = \frac{r_o}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\omega_{pe}}{\lambda_{De}} \exp\left(\frac{eq_o}{T_e r_o}\right) + \frac{\omega_{pi}}{\lambda_{Di}} \left(1 - \frac{eq_o}{T_i r_o}\right) \right] \quad (2.9)$$

$$\nu_2 = \frac{r_o}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\omega_{pe}}{\lambda_{De}} \exp\left(\frac{eq_o}{T_e r_o}\right) + \frac{\omega_{pi}}{\lambda_{Di}} \right] \quad (2.10)$$

où ω_j est la fréquence plasma de l'espèce j et r_o le rayon du grain supposé de forme sphérique.

Cette contribution peut être négligée lorsque le rayon du grain est faible ($\sim \mu m$).

Afin de réaliser des expériences avec plus de précision sur la taille, la densité et les structures spatiales des grains de poussière dans les plasmas, les laboratoires des plasmas poussiéreux disposent d'une instrumentation de mesure (Fig.2.3), plus appropriée et efficace.

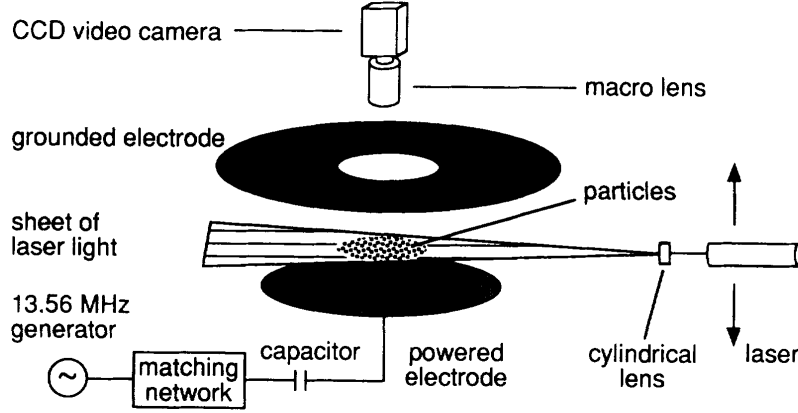


FIG. 2.3 – *Instrumentation de mesure de la taille, de la densité et des structures spatiales des grains de poussière*[17]

b- Espace inter-grain

Nous considérons un plasma poussiéreux à plusieurs éléments, composé d'électrons, d'ions positifs et des grains de poussière chargés extrêmement massifs dans un fond neutre, Le rayon r du grain de poussière est habituellement beaucoup plus petit que λ_D (longueur de Debye des plasmas poussiéreux). Quand l'espacement inter-grain est beaucoup plus petit que λ_D , les particules de poussière chargées sont traitées en tant que particules massives semblables. Dans le cas où $d \leq \lambda_D$, les particules de poussière sont considérés en tant que particules massives, l'effet des particules voisines étant plus prépondérant. Pour les grains de poussière dans un plasma où, $d > \lambda_D$ les particules de poussière sont complètement isolées de leurs voisines[13].

• Paramètre de couplage coulombien

Les grains de poussière chargés peuvent être faiblement ou fortement couplés, le paramètre qui permet la distinction entre les deux est le paramètre de couplage coulombien:

$$\Gamma_d = \frac{Q_d^2}{dT_d} \cdot \exp(-d/\lambda_D) \quad (2.11)$$

Avec

$d = (3/4\pi n_{d0})$: l'inter-distance,

n_{d0} : la densité initiale de la poussière.

Q_d : la charge de la poussière .

T_d : l'énergie thermique de la poussière.

Quand $\Gamma_d \gg 1$ les grains de poussière sont fortement couplés et cette condition est réalisée dans plusieurs plasmas poussiéreux de laboratoire, tels que les cristaux de plasma. D'autre part si $\Gamma_d \ll 1$ le plasma est dit faiblement couplé; dans ce cas, la relation de dispersion des ondes n'est pas affectée par la corrélation spatiale des grains [13][16][18][19].

La nature de l'interaction entre les grains de poussière dépend de trois paramètres essentiels[14]:

- 1- Le rayon du grain r_o .
- 2- La distance entre les grains, liée à leur densité: $d \sim n^{-1/3}$
- 3- La longueur de Debye.

Chapitre 3

Les phénomènes non-linéaires dans les plasmas poussiéreux fortement couplés

La description mathématique des plasmas poussiéreux est un problème très complexe, en particulier lorsque des effets non-linéaires sont présents. La non-linéarité est liée au fait que le rapport charge-masse est une variable dynamique. Habituellement, on utilise un modèle basé sur un rapport constant. Ceci est correct lorsque l'échelle du temps des phénomènes oscillatoires est beaucoup plus courte que celle du temps caractéristique de la fluctuation. D'autre part, en présence des électrons secondaires dans le plasma, le potentiel extérieur peut avoir différentes valeurs à l'équilibre. Une des conséquences de cet effet, des grains de poussière de différentes charges sont présents dans le milieu plasma. Les grains se heurtent et se condensent pour former des particules de taille plus grande. Outre cet effet, pendant les déplacements sous l'effet des gradients de densité ou de température, un aspect aléatoire de la fluctuation de la charge est constaté. Cet effet est la conséquence directe de la nature discrète des porteurs de charge. [20].

3.1 Les vibrations dans les chaînes linéaires

Les vibrations dans les chaînes linéaires sont le résultat des faibles perturbations dans le réseau. Ces dernières engendrent un mouvement des atomes autour de leur positions d'équilibres. Le type et la nature des ondes générées par un tel mouvement, dépendent de la géométrie considérée[21][22][23].

3.1.1 La relation de dispersion dans les chaînes linéaires

Considérons une chaîne linéaire constituée d'une infinité de particules identiques de masse m séparées à l'équilibre par une distance a . Une perturbation longitudinale dans

ce réseau modifie la position de la particule de rang n dans la chaîne. Les interactions entre ces particules sont modélisées par une force de rappel, limitée en premier lieu aux premiers proches voisins[24].

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule n donne :

$$m \frac{d^2 U_n}{dt^2} = K(U_{n+1} - U_n) - K(U_n - U_{n-1}) = K(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \quad (3.1)$$

Dans le cas où la chaîne est illimitée, une onde progressive sinusoïdale se propage dans le milieu. Lorsque les forces de frottement sont négligeables, toutes les particules ont la même amplitude de vibration A :

$$U_n = A \cdot \cos(kna - \omega t) \ll a$$

$$\omega = 2H \cdot \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$

avec:

$$H = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

On écrit:

$$-m\omega^2 = -2K \cos(1 - \cos(ka))$$

La fonction $\omega(k)$ n'étant pas linéaire, il y a dispersion. La pulsation maximale du mode qui se propage est $\omega_m = 2H$, elle correspond à $k = \frac{\pi}{a}$.

Le terme $\omega/k = (2H \sin(ka/2))/k$ représente la vitesse de phase; elle tend vers aH si k tend vers 0 et tend vers $2aH/\pi$ quand k tend vers $\frac{\pi}{a}$

La vitesse de groupe $\frac{d\omega}{dk} = aH \cos(ka/2)$ tend vers aH si k tend vers 0 et tend vers 0 quand k tend vers π/a

Dans le cas des grandes longueurs d'onde, il n'y a plus de dispersion, $\omega(k)$ est linéaire, de même pour $k = \pi/a$, la propagation n'a pas lieu.

Pour une chaîne limitée, l'équation de propagation est identique à celle du cas précédent, mais les conditions aux limites imposent la présence d'ondes stationnaires. Les atomes N et $-N$, d'une chaîne $2N + 1$ atomes, restent immobiles [24].

3.2 Les modes de vibrations dans les plasmas poussiéreux fortement couplés

La manifestation physique du couplage fort dans les plasmas poussiéreux est l'apparition d'un ordre dans le système. Cet ordre est le résultat de la forte interaction entre les particules. L'ampleur de cet ordre dans les plasmas poussiéreux est régit par le paramètre de couplage coulombien [13] :

$$\Gamma_d = \frac{Q_d^2}{dT_d} \exp(-d/\lambda_D) \quad (3.2)$$

où $d = (3/4\pi n)^{1/3}$ est la distance entre particules, T est la température du plasma, λ_D est la longueur de Debye et Q est la charge[13].

Pour $\Gamma \ll 1$, le couplage est faible et les approximations d'un plasma idéal sont maintenues. Dans de tels cas l'onde n'est pas influencée par les corrélations entre les particules, à l'exception dans le cas de faibles collisions.

Lorsque Γ dépasse Γ_c , valeur critique du paramètre de couplage, l'arrangement des chaînes de particules devient plus grand et le système subit une solidification. On peut dire alors qu'une structure cristalline ordonnée supporte les vibrations du réseau plasma.

En général lorsque le plasma subit une perturbation, les modes électrostatiques non linéaires sont produits. Une des causes de cette perturbation est un déséquilibre dans le plasma initialement neutre, générant un champ électrique local qui tend à restaurer l'équilibre donnant lieu aux oscillations. Ces dernières sont appelées modes électrostatiques[13]. En présence des grains de poussière dont les fréquences caractéristiques sont très petites, les modes des plasmas froids vérifient la relation:

$$\sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - ku_{\alpha})^2} = 1 \quad (3.3)$$

La sommation s'étend sur toutes les espèces présentes dont la vitesse est u_{α} .

Parmi les modes supportés par les structures fortement couplées de grains de poussière, on trouve les modes acoustiques et les modes de réseau.

3.2.1 Les modes acoustiques

Les ondes acoustiques des grains de poussière (DAW) ont été mises en évidence par Rao *et al* (1990) dans des plasmas poussiéreux constitués des ions et des grains de poussière de charges négatives [13][25][18].

Dans le cas correspondant à la situation: $C_{sd} \ll k/\omega \ll C_{si}$, C_{sd} et C_{si} sont les vitesses de phase des grains de poussière et des ions. La relation de dispersion s'écrit:

$$\frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 C_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 C_{si}^2} = 1 \quad (3.4)$$

la vitesse de phase du mode acoustique des grains de poussière est:

$$C_{da} = \lambda_D \omega_{pd} \quad (3.5)$$

3.2.2 Les modes de réseau

Des récentes recherches ont montré l'apparition des ondes de réseau longitudinales et transversales dans les systèmes de plasmas poussiéreux fortement couplés analogues à celles des structures solides. En utilisant l'expression appropriée du potentiel d'interaction des particules de poussière, la théorie linéaire et non-linéaire des ondes longitudinales a été développée. En considérant les interactions avec les proches voisins, dans une chaîne linéaire unidimensionnelle équidistante où règne un potentiel de type Debye HucKel[13][26][15]:

$$U_{ij} = \frac{q_{di}q_{dj}}{|r_i - r_j|} \exp\left(-\frac{|r_i - r_j|}{\lambda_D}\right) \quad (3.6)$$

où q_{di}, q_{dj} et r_{ij} sont les charges et les positions des grains de poussière.

Dans le cas d'un mouvement longitudinal unidimensionnel et dans un arrangement horizontal leurs oscillations sont gouvernées par l'équation du mouvement[13].

$$m_d \left(\frac{\partial^2 X_j}{\partial t^2} + \nu_{dn} \frac{\partial X_j}{\partial t} \right) = - \sum_i \frac{\partial U_{ij}}{\partial X} \quad (3.7)$$

m_d : masse de grain de poussière.

ν_{dn} : coefficient de friction

Dans le cas des interactions avec les premiers proches voisins; $i = j - 1$ et $i = j + 1$, le second membre de l'équation devient:

$$q_{d0} \left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)_{x=a} \times (2\delta X_j - \delta x_{j-1} - \delta x_{j+1}) \quad (3.8)$$

$a = |x_j - x_{j-1}| = |x_{j+1} - x_j|$: la distance entre deux grains de poussière successifs à l'équilibre.

Avec une charge constante q_{d0} , le champ électrique est donné par:

$$E(x) = \frac{q_{d0}}{x^2} \left(1 + \frac{x}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) \quad (3.9)$$

En supposant des solutions de la forme :

$$\delta x_j = \delta x_0 \exp[-i(\omega t - jka)] \quad (3.10)$$

A partir des équations 3.7 et 3.9, la relation de dispersion des ondes de réseau est:

$$\omega^2 + i\omega\nu_{dn} = \frac{2q_{d0}^2}{m_d a^3} \left(1 + \frac{a}{\lambda_D} + \frac{a^2}{2\lambda_D^2}\right) \exp\left(-\frac{a}{\lambda_D}\right) \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (3.11)$$

3.3 Etude de la relation de dispersion dans un plasma poussiéreux fortement couplé

Dans cette étude, une nouvelle relation de dispersion est obtenue pour les ondes de compression dans un réseau de Bravais unidimensionnel. Dans les limites asymptotiques de cette relation on déduit, la relation de dispersions pour les ondes acoustique (DAW) et la relation de dispersion pour les ondes de réseau (DLW).

3.3.1 Modèle physique

Considérons un plasma poussiéreux froids, constitué de particules équidistantes dans un réseau unidimensionnel infini avec un espacement inter-particules Δ et agissant l'une sur l'autre par l'intermédiaire du potentiel de Coulomb (ou de Yukawa). x_j représente la position d'équilibre de la j^{ieme} particule de poussière dans un réseau unidimensionnel, ε_j est son déplacement linéaire et q et m sont la charge et la masse du grain de poussière. Aussi, on a le coefficient de friction ν qui représente les frottements. Comme les grains de poussière sont supposé froids, les x_j sont des positions stationnaires indépendantes du temps. .

Afin d'obtenir une relation de dispersion plus générale pour les ondes de compression, dans l'équation linéaire du mouvement du grain de poussière, il a été pris en considération la contributions du champ électrique de tous les autres grains de poussière.

Le paramètre $K = \Delta/\lambda_D$ (λ_D est la longueur de Debye dans le plasma) joue un rôle très

important dans la détermination de la nature des ondes dans les expériences des cristaux de plasmas.

• **Equation du mouvement**

Dans le cas d'une chaîne linéaire de grains de poussière, l'équation linéaire du mouvement est:

$$\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}$$

$$q\vec{E} + \nu'\vec{V} = m \vec{\gamma}$$

Avec:

- qE : force électrique
- E : champ électrique
- q : charge de la particule
- $\nu'V$: force de frottement

$$V = \frac{dx_j}{dt} \quad ; \quad et \quad ; \quad \gamma = \frac{d^2x_j}{dt^2}$$

l'expression des déplacements est:

$$x_j = x_{j_0} + \varepsilon_j(t)$$

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = 0 + \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} \quad ; \quad et \quad ; \quad \frac{dx_j}{dt} = 0 + \frac{d\varepsilon_j}{dt}$$

Par conséquent on obtient:

$$m \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} = qE - \nu' \frac{d\varepsilon_j}{dt} \quad ; \quad \implies \quad : \quad \frac{\nu'}{m} \frac{d\varepsilon_j}{dt} + \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} = \frac{q}{m} E(x,t)$$

En posant:

$$\nu = \frac{\nu'}{m}$$

d'où l'équation du mouvement:

$$m \frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} + \nu \frac{d\varepsilon_j}{dt} = \frac{q}{m} E(x,t) \tag{3.12}$$

• **Equation du champ électrique**

Dans un système de particules unidimensionnel et infini, le champ électrique lié à une particule simple chargée, située à la position x' est donné par[27] :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(x - x') \exp(-|x - x'|/\lambda_D) \quad (3.13)$$

Où σ est la charge surfacique et $\text{sign}(x) = \pm 1$ si l'argument est positif ou négatif et égale à zéro si l'argument est zéro.

Dans un équilibre stable unidimensionnel, les particules de grains de poussières sont équidistantes avec l'espacement a , la position d'équilibre de la j^{ieme} particule est $x_j = j\Delta$, les valeurs de j varient entre $-\infty$ et $+\infty$ pour éviter les effets de limites. Le champ électrique à la position de la j^{ieme} particule due à la j^{ieme} particule est calculé comme suit:

On écrit:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{Charge totale}}{\text{Surface totale}} \\ \implies \sigma &= \frac{qn}{s} \end{aligned}$$

Avec:

q : charge de la particule

n : nombre de particules

s : surface occupée par toutes les particules

$$\sigma = \frac{qn_0V}{s}$$

On a aussi:

$$\Delta = \frac{V}{s}$$

Avec:

n_0 : densité moyenne du nombre de particules

V : volume occupé

$$\sigma = qn_0\Delta$$

$$x = x_j + \epsilon_j = j\Delta + \epsilon_j$$

$$x' = x_{j'} + \epsilon_{j'} = j'\Delta + \epsilon_{j'}$$

Le champ électrique dans les plasmas poussiéreux fortement couplés s'écrit alors:

$$E_{jj'} = \frac{qn_0a}{2\varepsilon_0} \text{sign}((j-j')a + \varepsilon_j - \varepsilon_{j'}) \exp\left(-\frac{|(j-j')\Delta| + \varepsilon_j - \varepsilon_{j'}}{\lambda_D}\right) \quad (3.14)$$

• Relations de dispersion

En remplaçant la somme $E_{jj'}$ de toutes les particules représentées par j' dans l'équation de mouvement et en linéarisant nous obtenons:

$$\frac{d^2\varepsilon_j}{dt^2} + \nu\frac{d\varepsilon_j}{dt} = \frac{\omega_{pd}^2 K}{2} \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j'}) \exp(-K|j-j'|) \quad (3.15)$$

Avec:

$$K = \frac{\Delta}{\lambda_D}$$

$\omega_{pd} = (q^2 n_0 / m \varepsilon_0)^{1/2}$ = fréquence de coupure dans les plasmas poussiéreux.

Nous avons donc un système d'équations différentielles couplées dont on peut écrire la solution sous la forme: $\varepsilon_j = \varepsilon_{j_0} \exp(ikj\Delta - i\omega t)$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle(3.15), on obtient:

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{\omega_{pd}^2 K}{2} \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} (1 - \exp(ik(j'-j)\Delta) \exp(-K|j-j'|)) \quad (3.16)$$

Soit:

$$\sum_{j=0}^{\infty} S^j = (1 - S)^{-1}. \text{ Si } |S| < 1$$

qui est la somme d'une suite géométrique de raison S

En normalisant comme suit:

$$(\omega, \nu) / \omega_{pd} \rightarrow (\omega, \nu)$$

$$k\Delta \rightarrow k$$

On aura :

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\sum_{j'=-\infty}^{\infty} (1 - \exp(ik(j'-j))) \exp(-K|j-j'|) \right]$$

Nous obtenons la relation de dispersion pour les ondes de compression (DCW)[28] :

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\frac{2}{1 - \exp(-K)} - \left(\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} + \frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} \right) \right] \quad (3.17)$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques:

$$\frac{1}{1 - \exp(-K)} = \sum_j^{\infty} \exp(-K)^j$$

$$\frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} = \sum_j^{\infty} \exp(-K + ik)^j$$

$$\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} = \sum_j^{\infty} \exp(-K - ik)^j$$

On peut écrire :

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (2 - \exp(ikj) - \exp(-ikj)) \exp(-jK) \right]$$

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} 4 \left(\sin^2 \left(\frac{kj}{2} \right) \right) \exp(-jK) \right]$$

L'équation (3.17) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\omega(\omega + i\nu) = 2K \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-jK) \sin^2 \left(\frac{jk}{2} \right) \quad (3.18)$$

Aux limites $K \ll 1$ et $k \ll 1$ la relation de dispersion (3.18) peut avoir une écriture sous une autre forme en faisant les développements limités pour des valeurs de K et k infiniment petites:

$$\exp(-K + ik) \approx 1 + (-K + ik) = 1 - K + ik$$

$$\exp(-K - ik) \approx 1 + (-K - ik) = 1 - K - ik$$

$$\exp(-K) \approx 1 + (-K) = 1 - K$$

Il s'ensuit:

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\frac{2}{1 - (1 - K)} - \frac{1}{1 - (1 - K + ik)} - \frac{1}{1 - (1 - K - ik)} \right]$$

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\frac{2}{K} - \frac{1}{(K - ik)} - \frac{1}{(K + ik)} \right]$$

$$\omega(\omega + i\nu) = 1 - \frac{K}{2} \left[\frac{1}{(K - ik)} + \frac{1}{(K + ik)} \right]$$

$$\begin{aligned}\omega(\omega + i\nu) &= 1 - \frac{K}{2} \left[\frac{K + ik + K - ik}{K^2 + k^2} \right] \\ \omega(\omega + i\nu) &= 1 - \frac{K}{2} \left[\frac{2K}{K^2 + k^2} \right] = 1 - \frac{K^2}{K^2 + k^2}\end{aligned}$$

D'où:

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{k^2}{k^2 + K^2} \quad (3.19)$$

Ce qui décrit la relation de dispersion des ondes acoustiques (DAW).

D'autres part, si $K \ll 1$ de sorte que $\exp(-K) \ll 1$ et en considérant uniquement les interactions avec les premiers proches voisins, l'équation (3.18) s'écrit sous la forme de la relation de dispersion des ondes de réseau (DLW)[28].

$$\omega(\omega + i\nu) = 2K \exp(-K) \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right) \quad (3.20)$$

En négligeant temporairement l'atténuation, c'est-à-dire $\nu = 0$:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{K^2 + k^2}$$

on obtient la relation de dispersion des ondes acoustiques (DAW)[28]:

$$\omega_{DAW} = k (K^2 + k^2)^{1/2} \quad (3.21)$$

et celle des ondes du réseau (DLW)[28]:

$$\omega^2 = 2K \exp(-K) \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right)$$

$$\omega_{DLW} = \sqrt{2} K^{1/2} \exp \left(\frac{-K}{2} \right) \sin \left(\frac{k}{2} \right) \quad (3.22)$$

Continuellement en absence de l'effet des frottements, la relation de dispersion (3.18) peut s'écrire sur une autre forme:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{K}{2} \left[\frac{2}{1 - \exp(-K)} - \left(\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} + \frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} \right) \right] \\ \omega^2 &= \frac{K}{2} \left[2 \exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \left(\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} + \frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= K \exp(K) \left[\frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{K}{2} \left(\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} + \frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} \right) \right] \\
\omega^2 &= K \exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{K}{2} \left[\frac{1 - \exp(-K) \exp(ik) + 1 - \exp(-K) \exp(-ik)}{(1 - \exp(-K) \exp(ik))(1 - \exp(-K) \exp(-ik))} \right] \\
\omega^2 &= K \exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{K}{2} \left[\frac{2(1 - \exp(-K) \cos(k))}{1 + \exp(-2K) - \exp(-K) 2 \left(\frac{\exp(ik) + \exp(-ik)}{2} \right)} \right] \\
\omega^2 &= K \exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{K}{2} \left[\frac{2(1 - \exp(-K) \cos(k))}{1 + \exp(-2K) - 2 \cos(k) \exp(-K)} \right] \\
\omega^2 &= K \left[\exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \left(\frac{\exp(2K)(1 - \exp(K) \cos(k))}{\exp(2K) + 1 - 2 \cos(k) \exp(-K)} \right) \right] \\
\omega^2 &= K \left[\exp(K) \frac{1}{\exp(K) - 1} - \left(\frac{\exp(K)(\exp(K) - \cos(k))}{\exp(2K) + 1 - 2 \cos(k) \exp(-K)} \right) \right] \\
\omega^2 &= K \exp(K) \left[\frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{\exp(K) - \cos(k)}{\exp(2K) + \sin^2(k) + \cos^2(k) - 2 \cos(k) \exp(-K)} \right] \\
\omega^2 &= K \exp(K) \left[\frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{(\exp(K) - \cos(k))}{(\exp(K) - \cos(k))^2 + \sin^2(k)} \right]
\end{aligned}$$

d'où la relation de dispersion des ondes de compression (DCW):

$$\omega_{DCW} = K^{1/2} \exp(K/2) \left[\frac{1}{\exp(K) - 1} - \frac{(\exp(K) - \cos(k))}{(\exp(K) - \cos(k))^2 + \sin^2(k)} \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

3.3.2 Résultats et Discussions

Dans les figures (Fig.3.1), (Fig.3.2), (Fig.3.3) et (Fig.3.4), sont interprétées les variations des relations de dispersion (3.21), (3.22) et (3.23) pour $K = (0.2, 1, 2 \text{ et } 3)$ et $\nu = 0$

Comme il a été déjà discuté ci-dessus, la relation de dispersion pour les (DAW) peut être déduite analytiquement de la relation de dispersion pour les (DCW) dans les limites $K \ll 1$ et $k \ll 1$. Ceci est confirmé par la (Fig.3.1) où, les deux branches sont indiscernables l'une de l'autre, et même pour des valeurs assez élevées de k .

Remarquablement, même à une valeur assez grande de K ($K = 1, 2, 3$) et $k < 1$, la figure (Fig.3.2) prouve que la relation de dispersion des (DCW) suit les mêmes variations que celle des (DAW). Aux limites de la première zone de Brillouin $k = \pi^8$ (vitesse de groupe est nulle), la relation de dispersion des (DCW) s'écarte de celle des (DAW) et se comporte d'avantage comme celle des (DLW).

Quand $K = 2$ (Fig.3.3), dans le régime des ondes courtes, la relation de dispersion des (DCW) quitte de manière particulière la relation des (DAW) et elle se rapproche beaucoup plus de la relation des (DLW).

Quand $K = 3$ (Fig.3.4), les relations de dispersion des (DCW) et des (DLW), sont très étroites et sont indiscernables pour des valeurs très élevées de K [28].

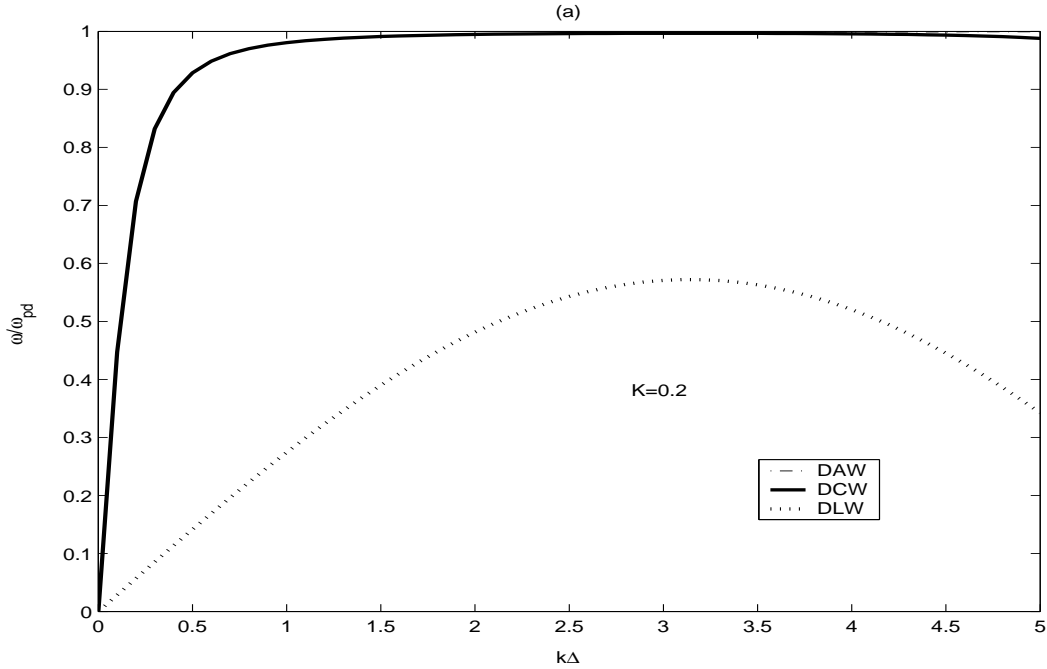


FIG. 3.1 – Relation de dispersion pour $\nu = 0$ et $K = 0.2$ [28]

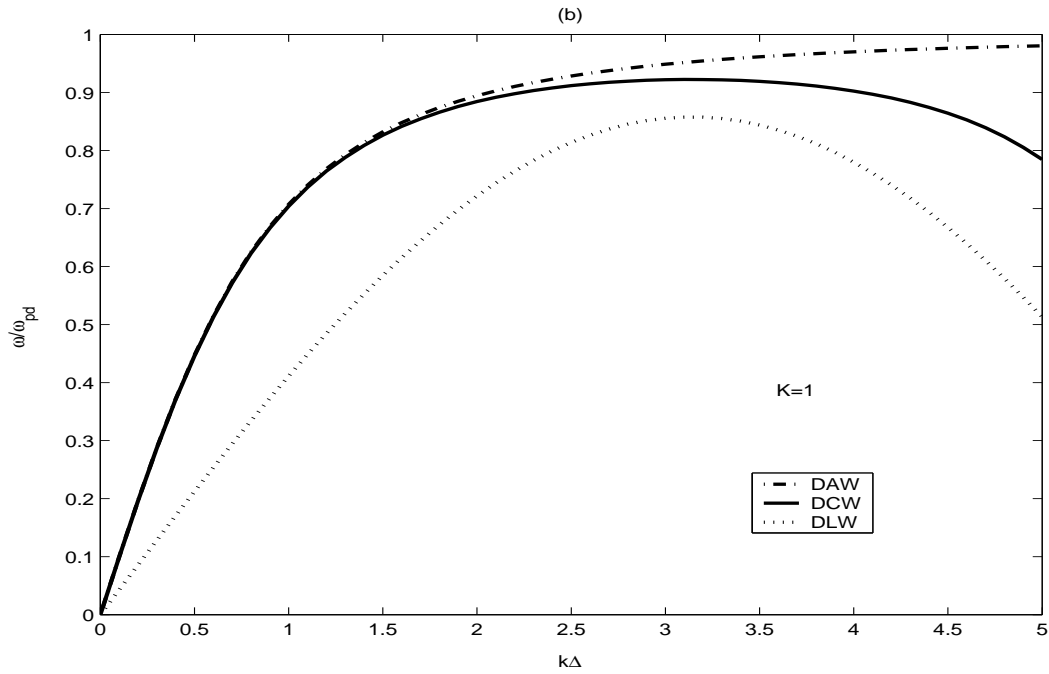


FIG. 3.2 – Relation de dispersion pour $\nu = 0$ et $K = 1$ [28]

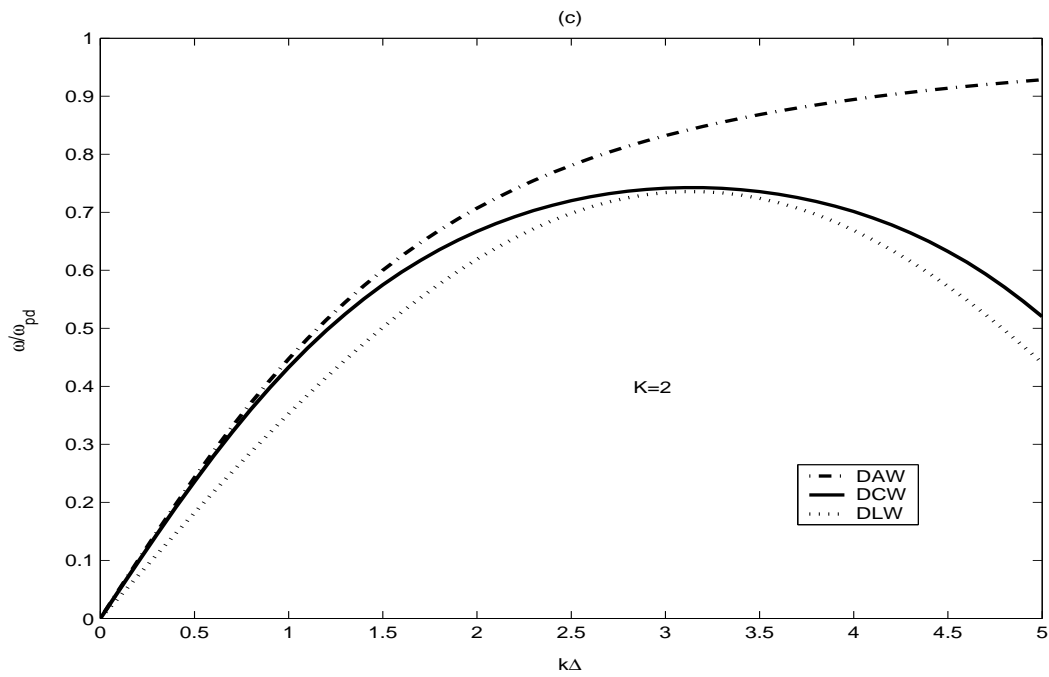


FIG. 3.3 – Relation de dispersion pour $\nu = 0$ et $K = 2$ [28]

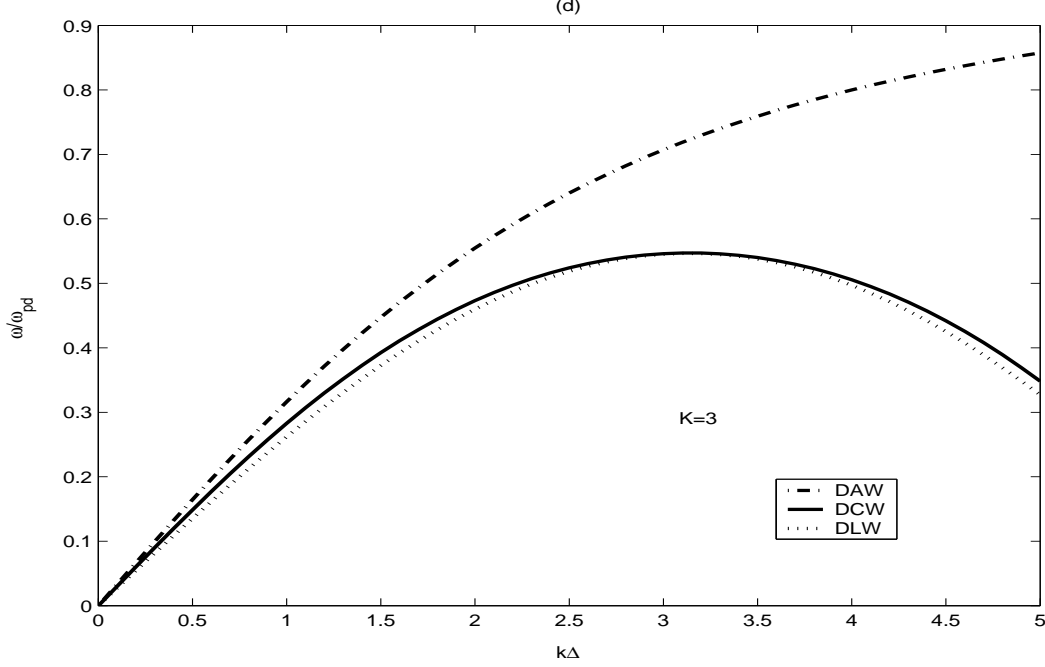


FIG. 3.4 – Relation de dispersion pour $\nu = 0$ et $K = 3$ [28]

En reconstituant maintenant l'effet de l'atténuation (frottements), et en supposant que ω est réelle et k , représentant la structure spatiale du mode résultant, est complexe. Les parties réelle et imaginaire de $k = k_r + ik_i$ peuvent être obtenues en écrivant la relation de dispersion (3.18) de la forme $k = f(\omega)$

DAW:

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{k^2}{k^2 + K^2}$$

d'où:

$$k_{DAW} = K \left(\frac{\omega(\omega + i\nu)}{1 - \omega(\omega + i\nu)} \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

DLW:

$$\omega(\omega + i\nu) = 2K \exp(-K) \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right)$$

d'où:

$$k_{DLW} = 2 \arcsin \left(\frac{\omega(\omega + i\nu)}{2K \exp(-K)} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

DCW:

$$\omega(\omega + i\nu) = \frac{K}{2} \left[\frac{2}{1 - \exp(-K)} - \left(\frac{1}{1 - \exp(-K + ik)} + \frac{1}{1 - \exp(-K - ik)} \right) \right]$$

On pose:

$$Z = \omega(\omega + i\nu)$$

$$Y = \exp(-K)$$

$$X = \exp(-ik)$$

$$2Z = \left[\frac{2}{1-Y} - \left(\frac{1}{1-YX} + \frac{1}{1-\frac{Y}{X}} \right) \right]$$

Avec:

$$A = 2Z - (2/(1-Z))$$

$$-(A+1)YX^2 + (A+2+AY^2)X - (A+1)Y = 0$$

qui est une équation différentielle du deuxième ordre de variable X . Ses solutions sont de la forme :

$$X_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 - 1}$$

Avec:

$$B = \frac{A(1+Y^2) + 2}{2(A+1)Y} = \frac{Y(1+Y) - (1+Y^2)(1-Y)}{Y(1+Y) - 2Y(1-Y)Z}$$

D'où[28]:

$$k_{DCW}(\omega) = i \ln(B \pm \sqrt{B^2 - 1}) + 2\pi n \quad (3.26)$$

$2\pi n$ est du à la périodicité

n : est un nombre entier

Dans les figures (Fig.3.5) et (Fig.3.6), sont montrées les variations de k_r et k_i en fonction de ω , pour différentes valeurs de K et ν .

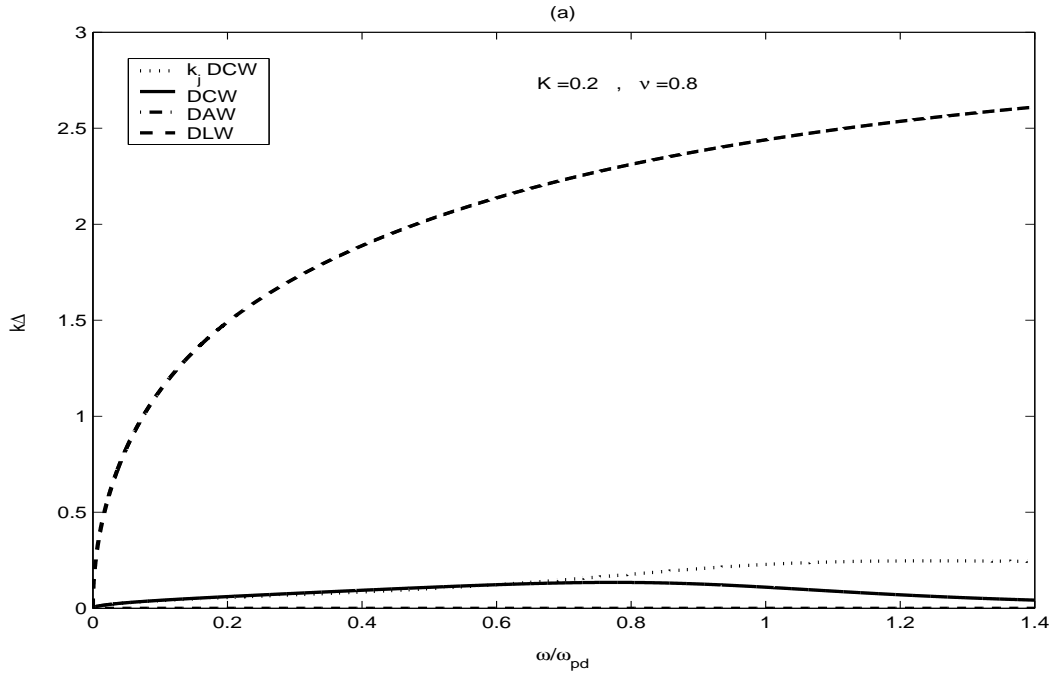


FIG. 3.5 – $k_r(\omega)$ et $k_j(\omega)$ pour (DCW) et $k_r(\omega)$ pour (DAW, DLW) à $\nu = 0.8$ et $K = 0.2$ [28]

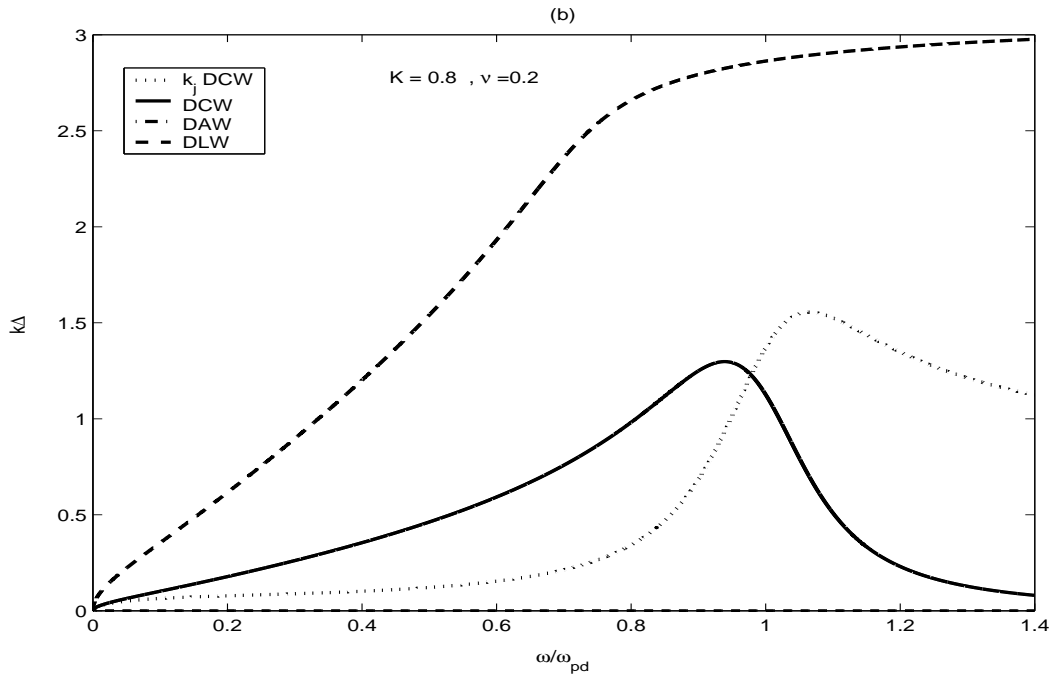


FIG. 3.6 – $k_r(\omega)$ et $k_j(\omega)$ pour (DCW) et $k_r(\omega)$ pour (DAW, DLW) à $\nu = 0.2$ et $K = 0.8$ [28]

Dans la (Fig.3.5) ν varie de 0.7 à 1.2 et K de 0.15 à 0.61. Avec ces paramètres, les variations de la relation de dispersion des (DCW) sont indiscernables de celles des (DAW).

Dans la (Fig.3.6) où ν varie de 0.1 à 0.3 et $K \approx 0.8$. Les variations de la relation de dispersion des (DCW) est beaucoup plus proche de celles des (DAW).

Dans cette étude, pour des valeurs arbitraires de K , une nouvelle relation linéaire de dispersion est obtenue, décrivant les ondes de compression longitudinales dans un cristal de plasma poussiéreux unidimensionnel. Dans les limites asymptotiques de cette relation de dispersion, la relation de dispersion des ondes acoustiques et la relation de dispersion des ondes de réseau sont déterminées.

Le paramètre K joue un rôle très important dans le contrôle de la nature des ondes excitées dans une expérience donnée.

Si $K \ll 1$ l'onde de compression (DCW) est indiscernable de l'onde acoustique (DAW)

Quand $K \ll 2$ et une atténuation faible, l'onde de compression se rapproche et devient par la suite de même allure que l'onde de réseau, et cela se confirme quand les valeurs de K augmentent[28].

Chapitre 4

Les modes de vibration dans les chaînes linéaires

L'état d'équilibre et les modes de vibration des chaînes linéaires fortement couplées dépendent essentiellement de la nature de l'interaction. Deux particules chargées interagissent entre elles par le biais de l'interaction coulombienne ($\sim \frac{1}{r}$). Cependant, en présence de différentes espèces dans le plasma, le potentiel entre les particules se trouve modifié et décroît à cause de l'effet d'écran. Ces systèmes peuvent être modélisés par un potentiel de type Yukawa.

4.1 Modèle physique

Considérons une chaîne linéaire formée de N particules identiques de masse m et de charge positive Ze . Cet ensemble forme un réseau unidimensionnel équidistant infini d'inter-distance Δ . Les particules agissent l'une sur l'autre par l'intermédiaire du potentiel de Yukawa. Le champ électrique E qui agit sur une seule particule est dû à un nombre limité de proches voisins. Le modèle théorique utilisé par Otani *et al.*, prend en considération l'effet de toutes les particules et la sommation s'étend jusqu'à l'infini [28].

Une particule i de position à l'équilibre x_i , a pour équation du mouvement[29]:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \nu \frac{dx_i}{dt} = \frac{qE}{m}(x_i, t) \quad (4.1)$$

Le terme d'ordre 1 par rapport à t , représente la force de frottement caractérisée par le coefficient de friction ν .

Une faible perturbation du champ électrostatique E engendre un déplacement ε_i le long de l'axe ox tel que $\varepsilon_i \ll x_i$ [30]. Pour exprimer le champ électrostatique E agissant sur

la particule i , on considère une forme sphérique des grains de poussière. Le potentiel de Yukawa en un point situé à une distance x par rapport à une position de référence, est donné par [31] [32] [33]:

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon x} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) \quad (4.2)$$

λ_D : est la longueur de Debye qui prend en compte l'effet d'écran

x : étant la position d'un point par rapport à la position de référence

Q : étant la charge de toutes les particules

Le champ électrique déduit de cette expression s'écrit:

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\lambda_D} \right) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) \quad (4.3)$$

La résultante des forces appliquées sur une particule i de position x_i sur l'axe X (Fig.4.1) par l'ensemble des autres particules de position x_l est donnée par:

$$F(x) = \sum_{l \neq i} \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|x_i - x_l|^2} + \frac{1}{|x_i - x_l|\lambda_D} \right) \exp\left(-\frac{|x_i - x_l|}{\lambda_D}\right) \quad (4.4)$$

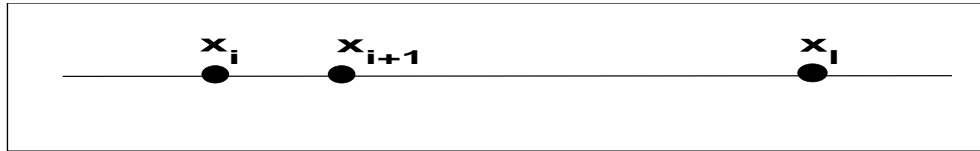


FIG. 4.1 – Chaîne linéaire à N particules

En négligeant l'effet des frottements ($\nu = 0$), l'équation du mouvement prend la forme simple suivante:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{qE}{m}(x_i, t) \quad (4.5)$$

En utilisant l'expression(4.4) de la force, cette équation prendra la forme suivante:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{q^2}{m4\pi\varepsilon} \sum_{l \neq i} \left(\frac{1}{|x_i - x_l|^2} + \frac{1}{|x_i - x_l|\lambda_D} \right) \exp \left(-\frac{|x_i - x_l|}{\lambda_D} \right) \text{sign}(|x_i - x_l|)$$

Avec:

$$\text{sign}(|x_i - x_l|) = +1 \text{ si } (x_i - x_l) > 0$$

$$\text{sign}(|x_i - x_l|) = -1 \text{ si } (x_i - x_l) < 0$$

Dans le but de chercher des solutions générales, on procède aux normalisation suivantes:

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0} \text{ et } \tilde{t} = \omega_0 t$$

$x_0 = \left(\frac{q^2}{\omega_0^2 m 4\pi\varepsilon} \right)^{1/3}$ et ω_0 définit une fréquence caractéristique du mode de vibration considéré.

Dans la suite, la notation \sim est abandonnée et l'équation du mouvement s'écrit donc

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{q^2}{\omega_0^2 x_0 m 4\pi\varepsilon} \sum_{l \neq i} \left(\frac{1}{x_0^2 |x_i - x_l|^2} + \frac{1}{x_0 |x_i - x_l|\lambda_D} \right) \exp \left(-\frac{x_0 |x_i - x_l|}{\lambda_D} \right) \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{l \neq i} \left(\frac{1}{|x_i - x_l|^2} + \frac{x_0}{|x_i - x_l|\lambda_D} \right) \exp \left(-\frac{x_0 |x_i - x_l|}{\lambda_D} \right)$$

En posant $K = \frac{x_0}{\lambda_D} = \frac{\Delta}{\lambda_D}$

On obtient l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{l \neq i} \left(\frac{1 + K|x_i - x_l|}{|x_i - x_l|^2} \right) \exp(-K|x_i - x_l|) \quad (4.7)$$

pour laquelle on cherche des solutions sous forme d'onde progressive [28]

$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \exp[j(k\Delta - \omega t)]$, avec $x_i = \Delta i + \varepsilon_i$, tel que: $\varepsilon_i \ll \Delta$, $\varepsilon_i, \varepsilon_m \ll 1$

4.1.1 Relation de dispersion

Pour trouver la fréquence ω en fonction du nombre d'onde k on procède par récurrence. En premier lieu, la particule de rang i interagissant avec les premiers proches voisins, c-a-d, les particules de rang $i - 1$ et $i + 1$.

On écrit:

$$|x_i - x_{i-1}| = |i + \varepsilon_i - (i - 1) + \varepsilon_{i-1}| \approx 1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$$

$$|x_{i+1} - x_i| = |(i + 1)\varepsilon_{i+1} - (i) + \varepsilon_i| \approx 1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$$

L'équation du mouvement est réécrite sous la forme:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{l \neq i} \frac{1 + K(1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{(1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2} \exp(-K(1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i))$$

$$- \left(\frac{1 + K(1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{(1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2} \exp(-K(1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})) \right)$$

Sachant que $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow (1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ et en linearisant par rapport à ε

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \exp(-K) \{ [1 + K(1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)] [1 + 2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)] [1 - K(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)]$$

$$- [1 + K(1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] [1 + 2(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] [1 - K(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] \}$$

D'où:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 2 \exp(-K) (1 + K) \{ (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \} \quad (4.8)$$

D'autre part:

$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \varepsilon_0 \exp(j(i+1)\Delta k) - \exp(jk\Delta i) \exp(-j\omega t)$$

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_0 \exp(j(i\Delta)k) - \exp(j(i-1)\Delta k) \exp(-j\omega t)$$

La relation de dispersion pour les ondes de réseau(DLW) dans le cas des interactions avec les premiers proches voisins[34] est alors obtenue:

$$\omega^2 = 2 \exp(-K) (1 + K) 4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta}{2} \right) \quad (4.9)$$

En tenant compte des seconds proches voisins, on obtient:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \exp(-K) [1 + K(1 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)] [1 + 2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)] [1 - K(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)]$$

$$- \exp(-K) [1 + K(1 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] [1 + 2(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] [1 - K(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})]$$

$$+ \exp(-K) [1 + K(1 + \varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1})] [1 + 2(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1})] [1 - K(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1})]$$

$$- \exp(-K) [1 + K(1 + \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2})] [1 + 2(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2})] [1 - K(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2})]$$

$$+ \exp(-2K) [1 + K(2 + \varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)] [2 + 2(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)] [1 - K(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)]$$

$$- \exp(-2K) [1 + K(2 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-2})] [2 + 2(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-2})] [1 - K(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-2})]$$

$$= \exp(-K) (2 + 2K) [(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})]$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(-K)(2 + 2K) [(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}) - (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2})] \\
& + \exp(-2K)(2 + 2K) [(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}) - (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2})]
\end{aligned}$$

Finalement la relation de dispersion s'écrit:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 2(1 + K)(\exp(-K) + \exp(-2K))[\varepsilon_{i+2} + \varepsilon_{i-2} - \varepsilon_i] \quad (4.10)$$

Cette dernière équation permet d'aboutir à la relation de dispersion des ondes de réseau

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= 2(1 + K)(\exp(-K) + \exp(-2K))[2 - (\exp(2jk\Delta) + \exp(-2jk\Delta))] \\
\omega^2 &= 2(1 + K)(\exp(-K) + \exp(-2K))(2 - 2 \cos(2k\Delta)) \\
\omega^2 &= 2(1 + K)(\exp(-K) + \exp(-2K))2(1 - \cos(2k\Delta)) \\
\omega_{DLW}^2 &= 2(1 + K)(\exp(-K) + \exp(-2K))4 \sin^2(k\Delta) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

• Cas limites

Pour obtenir la relation de dispersion dans le cas d'une chaîne linéaire formée de $N + 1$ particules, on procède par récurrence à partir des résultats obtenus (4.9) et (4.11). La relation de dispersion dans ce cas est alors:

$$\omega^2 = 2(1 + K) \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-iK) 4 \sin^2 \left(\frac{ik\Delta}{2} \right) \quad (4.12)$$

$$\omega^2 = 2(1 + K) \sum_{i=1}^{\infty} \{ (2 - \exp(ijK) - \exp(-ijK)) \exp(-jK) \}$$

Comme:

$$\sum_{j=0}^{\infty} S^j = \frac{1}{1 - S}, \quad \text{si } |S| < 1 \quad (4.13)$$

On peut écrire:

$$\begin{aligned}
\sum_j^{\infty} \exp(-K)^j &= \frac{1}{1 - \exp(-K)} \\
\sum_j^{\infty} \exp(-K + jk)^j &= \frac{1}{1 - \exp(-K + jk)}
\end{aligned}$$

$$\sum_j^{\infty} \exp(-K - jk)^j = \frac{1}{1 - \exp(-K - jk)}$$

d'où:

$$\omega^2 = 2(1 + K) \left[\frac{2}{1 - \exp(-K)} - \frac{1}{1 - \exp(-K + jk)} - \frac{1}{1 - \exp(-K - jk)} \right] \quad (4.14)$$

Pour $K \ll 1$ et $k \ll 1$, les développements limités suivants

$$\exp(-K + jk) \approx 1 - K + ik$$

$$\exp(-K - jk) \approx 1 - K - ik$$

$$\exp(-K) \approx 1 - K$$

conduisent à la relation de dispersion:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2(1 + K) \left[\frac{2}{1 - (1 - K)} - \frac{1}{1 - (1 - K + jk)} - \frac{1}{1 - (1 - K - jk)} \right] \\ \omega^2 &= 2(1 + K) \left[\frac{2}{K} - \frac{1}{(K - jk)} - \frac{1}{(K + jk)} \right] \\ \omega_{DAW}^2 &= 4(1 + K) \left[\frac{k^2}{K(K^2 + k^2)} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

C'est la relation de dispersion pour les ondes acoustiques(DAW)

4.1.2 Effet d'écran

Nous avons considéré le cas où les particules qui constituent la chaîne linéaire sont des grains de poussière. Cette situation présente un intérêt particulier, les grains étant de taille considérable peuvent être observés directement à l'oeil nu. On peut aussi réaliser des mesures directes par des caméras Charged Coupled Device (CCD). Ainsi, on se donne un moyen expérimental pour l'étude directe des chaînes linéaires. D'autre part, les processus de charge jouent un rôle important pour déterminer la charge à l'équilibre, qui peut être positive ou négative. Ce résultat dépend du plasma de base dans lequel sont immergés les grains de poussière.

Une charge positive Ze (ou négative) placée dans un plasma, par interaction coulombienne, attire les électrons (ions) et repousse les ions positifs (électrons). Le potentiel $Q \approx \frac{Ze}{r}$ se trouve atténué au delà de la longueur λ_D .

A l'équilibre thermodynamique, la fonction de distribution dans l'espace des phases d'une espèce[15] d'un plasma est:

$$f(x,\theta) = n_0 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} + \frac{q_j Q}{k_b T}\right) \quad (4.16)$$

La densité des particules:

$$n = \int f dv = n_j = n_{j0} \exp\left(\frac{q_j Q}{k_B T}\right) \quad (4.17)$$

A partir de l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r) \quad (4.18)$$

Où, la densité de charge $\rho(r) = \sum_j q_j n_j(r)$, et la sommation s'étend à toutes les espèces présentes

Dans le cas d'une symétrie sphérique:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr^2} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{2n_{j0} e^2}{\varepsilon_0 k_B T \phi}$$

On obtient:

$$\phi = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

D'où:

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2n_{j0} Z^2 e^2} \right)^{1/2}$$

Les particules entrent en collisions uniquement avec celles qui sont à l'intérieur de la sphère de Debye. Pour un ordre de grandeur $\Delta \sim n^{-1/3} \sim 3.10^{-7} m$, on trouve $\lambda_d \sim 10^{-5} m$

En présence des grains de poussière, le calcul de λ_D se fait comme suit:

- $\frac{1}{\lambda_D} = \sum_j \frac{1}{\lambda_{dj}^2}$, j représente les espèces légères (ions, électrons)
- $C_s = \lambda_D \cdot \omega_p$, avec $\omega_p^2 = \sum \omega_{ps}^2$. (Fréquence plasma globale)

Pour un milieu plasma constitué uniquement des grains de poussière:

$$\begin{aligned} \lambda_d &= \left(\frac{kT}{4\pi n_0 (Ze)^2} \right)^{1/2} \\ &= 7.43 \cdot 10^2 \left(\frac{T}{n} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

T est donnée en (eV), n en (cm^{-3}) et λ_d en (cm)

Dans le cas où l'effet collectif joue un rôle important, r_0 est le rayon du grain

$$r_0 \ll \Delta \ll \lambda_D \quad (4.19)$$

Avec:

$$n_d = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}d^3}$$

λ_D prend l'expression:

$$\lambda_D = 7.43.10^2 \left(\frac{Td^{-3}}{Z^2} \right)^{1/2}$$

En utilisant les paramètres des travaux expérimentaux de B. Liu et J. Goree[35]:

- $d = 0.72, 0.8, 1.25$ mm
- $T \sim 0.013$ (0.02 eV)
- $r_0 \sim 0.8$ μ m
- $Z \sim 7000$ (7600 \rightarrow 10^4)

$$\lambda_D \sim 7.43.10^2 \left[\frac{0.02.10^{-3}}{(7000)^2} \right]^{1/2} \sim 0.8.10^{-5}.cm$$

Cette dernière valeur de λ_D ne vérifie pas la condition (4.19). Ce résultat montre que l'effet d'écran n'est pas du à la présence des grains mais plutôt aux ions et aux électrons.

Pour corriger cette valeur de λ_D , on utilise la relation:

$$\frac{1}{\lambda_D} = \frac{1}{\lambda_{Di}} + \frac{1}{\lambda_{De}}$$

comme: $\lambda_{Di} \sim \lambda_{De}$, on obtient:

$$\frac{1}{\lambda_{Di}} = 7.43.10^2 \left(\frac{Te}{ne} \right)^{1/2}$$

en tenant compte des valeurs expérimentales des paramètres suivants donnés dans travaux de Khrapak[34]:

- $ne = 5.10^8 cm^{-3}$
- $Te = 0.17(ev) \rightarrow 4(ev)$
- $T_i/T_e = 0.05 \rightarrow 1$

on trouve: $\lambda_{de} = 7cm$

La densité des ions est calculée à partir de la condition de quasi-neutralité, qui s'écrit dans le cas où $Z_d > 0$:

$$n_i + Z_d n_d = n_e$$

A faible pression, la densité des grains de poussière dans les plasmas est toujours très inférieure à celle des électrons et des ions, ce qui se traduit par l'approximation $n_i \sim n_e$ et donc

$$\lambda_D = 7.43.10^2 \left[\frac{4}{5.10^8} \right]^{1/2} = 0.6mm$$

Cette valeur calculée de λ_D est du même ordre de grandeur que celle donnée par les résultats expérimentaux[36] ($\lambda_D = 0.8mm$). L'effet d'écran qui corrobore les données expérimentales est assuré par les particules (ions et électrons) qui entoure chaque grains de poussière de la chaîne linéaire, ce qui confirme la contribution prédominante des particules légères dans cet effet

Le modèle théorique utilisé ne permet pas le calcul du facteur $K = \frac{\Delta}{\lambda_D}$. L'inter-distance Δ doit être déterminée de façon exacte en précisant les conditions physiques auxquelles correspondent λ_D et ν . On cherche à simuler une chaîne infinie numériquement par la méthode de Mont-Carlo.

L'un des problèmes auxquels s'intéressent la simulation par la méthode de Monte-Carlo est de chercher le nombre de particules impliquées dans l'interaction. En réalité même avec cette méthode, on ne peut pas prendre un nombre infini de particules, la chaîne infinie est simulée à travers la condition de périodicité du système[37]

4.2 Simulation par la méthode de Monte-Carlo

Les derniers développements technologiques réalisés en moyens de calculs électroniques ont permis de faire appel de plus en plus aux simulations numériques. Une simulation a pour but de reproduire une expérience réelle ou bien celle qui n'a pas eu lieu. La méthode de Monte-Carlo est l'une des méthodes de simulation utilisée dans les structures fortement couplées.

Bdenov *et al.*, ont déterminé la configuration d'équilibre d'un système fortement couplé à deux dimensions en présence d'un potentiel de confinement parabolique. Ils ont montré en 1994 que la structure présente des états d'équilibre sous forme de couches. Le nombre de particules dans chaque couche dépend du nombre total de particules et de la portée du potentiel de confinement[38][19]. Ce résultat a été confirmé expérimentalement en 2005 par Wolter *et al.*, La même méthode a été aussi utilisée pour déterminer la configuration d'équilibre d'un système quasi-unidimensionnel où le rôle de l'interaction a été étudié[39][40][41]. Cette configuration a permis l'étude des modes optiques dans de tels systèmes

4.2.1 Principe de la Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode statistique qui se base sur le concept d'expériences aléatoires, elle s'applique pour des systèmes en équilibre thermodynamique. L'état d'équilibre est unique quelque soit le nombre de répétitions de l'expérience. Cependant, le choix initial intervient dans la convergence et le temps de calcul. Le principe de la méthode est de résoudre les problèmes par la voie des grandeurs probabilistes, telle que l'espérance mathématique. Cette méthode a une large utilisation dans divers domaines scientifiques, technologiques, économiques, ayant un aspect aléatoire[42].

• La méthode de Monte-Carlo avec algorithme de Metropolis

La méthode de Monte-Carlo avec algorithme de Metropolis a été introduite en physique par Metropolis et coll en 1953. Elle porte ce nom parce qu'elle est basée sur l'utilisation de nombres aléatoires. Cette méthode permet l'estimation des moyennes de grandeurs physiques données par la formulation de Gibbs de la mécanique statistique sous forme d'intégrales multidimensionnelles. La technique de Monte Carlo est en effet particulièrement adaptée au calcul des intégrales de dimension supérieure à dix. Les premières simulations furent réalisées dans l'ensemble canonique (N , V et T constants), puis la technique fut étendue aux autres ensembles statistiques en générant une séquence aléatoire d'états accessibles (chaîne de Markov) dans l'espace des configurations du système. L'échantillonnage se fait en privilégiant les régions où le facteur de Boltzmann ($\exp(-U/k_B T)$), c'est-à-dire la densité de probabilité de l'ensemble canonique dans cet espace, est la plus élevée. La probabilité d'une configuration particulière d'énergie potentielle U_i est alors proportionnelle à ($\exp(-U_i/k_B T)$), autrement dit l'acceptation d'une configuration de la chaîne de Markov est pondérée par une fréquence proportionnelle au facteur de Boltzmann. Une propriété d'équilibre est alors obtenue comme une moyenne simple sur les configurations acceptées. Cette exploration de l'espace des configurations, en suivant l'algorithme de Metropolis, constitue le premier cas d'échantillonnage selon le poids statistique. La méthode de Monte Carlo avec algorithme de Metropolis est encore largement utilisée de nos jours, parce qu'elle représente un moyen simple et relativement efficace d'obtenir des moyennes de grandeurs physiques dans un ensemble statistique. Il est important de noter que ces moyennes sont obtenues malgré l'incapacité de connaître explicitement la densité de probabilité normalisée de l'ensemble considéré. La méthode de MC est en général limitée au calcul des propriétés statiques puisque seule la partie configurationnelle de l'espace des phases est explorée et que le temps n'est pas une variable explicite. Les propriétés dynamiques sont inaccessibles et devront être obtenues par une autre technique, qui est la Dynamique Moléculaire[43].

Historique

La méthode de Monte-Carlo fut développée par Von Neumann, Ulam et Metropolis à la fin de la seconde guerre mondiale, pour l'étude de la diffusion des neutrons dans un matériau fissile. Ils réalisèrent la simulation du mouvement dans un liquide de disques pleins dans un plan par la méthode de MC. Ils proposèrent ce qui porte désormais le nom de MC Metropolis et qui est devenu la base des simulations MC des systèmes de particules en interaction. D'autres pionniers, Alder et Wainwright, posèrent les bases de la Dynamique Moléculaire (DM) actuelle en réalisant une simulation de sphères dures. Le résultat marquant est la convergence rapide vers les valeurs qui caractérisent l'état d'équilibre. Ce qui a surpris les théoriciens de l'époque c'est le fait qu'un aussi petit nombre de degrés de liberté (100 sphères) permet de modéliser les propriétés macroscopiques complexes d'un système. Wood et Jacobson réalisèrent une simulation MC sur le modèle utilisé par Alder et Wainwright, ils ont obtenu les mêmes résultats, montrant ainsi l'équivalence des deux méthodes[42] [43] .

Ces simulations se basent sur une description moléculaire en termes de positions et quantités de mouvement d'un ensemble de particules qui constituent le système. L'Hamiltonien H du système s'écrit comme la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle U de l'ensemble des coordonnées de position r_i et des quantités de mouvement p_i de chaque particule i [43]

$$H(r^N, p^N) = E_c(p^N) + U(r^N) \quad (4.20)$$

Si l'énergie cinétique a une expression bien établie, l'énergie potentielle qui décrit les interactions inter-atomiques est en général mal connue et constitue de ce fait l'outil de modélisation pour simuler les propriétés physiques des systèmes en interaction. On peut soit prendre un potentiel simple, afin de réaliser une investigation théorique, soit chercher un potentiel empirique plus réaliste pour modéliser les interactions du système réel. Les calculs sont réalisés sur un nombre fini de molécules et afin d'éviter des effets de surface, on adopte en général des conditions aux limites périodiques (dites de Born-Von Kármán) qui permettent de simuler un système infini[43].

Considérons un système composé de N particules classiques occupant un volume V constant et en équilibre avec un thermostat à la température T . Dans cet ensemble canonique, la densité de probabilité dans l'espace des phases est:

$$\rho_{NVT} = \exp(-\beta H) \text{ avec } \beta = 1/K_B T \quad (4.21)$$

La valeur moyenne à l'équilibre d'une grandeur physique A peut s'écrire à l'aide d'une moyenne calculée par la densité de probabilité ρ_{NVT} :

$$\langle A \rangle_{NVT} = \int A \frac{\exp(-\beta H)}{Q} d^N p d^N r \quad (4.22)$$

Le dénominateur Q est la fonction de partition de l'ensemble canonique :

$$Q(NVT) \equiv \int \dots \int \exp[-\beta H(r^N, p^N)] dr^N \quad (4.23)$$

Généralement, les propriétés physiques ne dépendent pas explicitement des quantités de mouvement et l'on peut réécrire la valeur moyenne à l'équilibre, en séparant les intégrales sur les positions des intégrales sur les quantités de mouvement et ainsi éliminer les termes cinétiques :

$$\langle A(r^N) \rangle_{NVT} = \int \dots \int \exp A(r^N) \frac{\exp[-\beta U(r^N)]}{Z} dr^N \quad (4.24)$$

où la fonction de partition Z est appelée intégrale de configuration, car elle s'obtient dans l'espace des configurations (positions) de dimension $3N$:

$$Z = \int \dots \int \exp[-\beta U(r^N)] dr^N \quad (4.25)$$

La méthode de MC est une technique numérique qui permet notamment d'évaluer des intégrales multidimensionnelles du type(4.25).

a- Méthode de Metropolis

Dans la pratique, il n'est pas possible de déterminer directement la fonction de partition de l'ensemble canonique où l'intégrale de configuration d'un système de N particules, mais on peut calculer la moyenne canonique d'une grandeur physique $A(r^N)$ [43]

$$\langle A(r^N) \rangle_{NVT} = \int \dots \int A(r^N) \frac{\exp(-\beta U(r^N))}{Z} dr^N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho((r^N)_i) A((r^N)_i) \quad (4.26)$$

Avec:

$$\frac{\exp(-\beta U(r^N))}{Z} = \rho_{NVT}(r^N)$$

Chaque configuration i fait référence à un état accessible de l'espace des configurations. C'est une moyenne calculée par la densité de probabilité de l'espace des configurations (à $3N$ degrés de liberté) de l'ensemble canonique. L'utilisation de la méthode MC avec

échantillonnage permet l'estimation de cette intégrale:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A((r^N)i) \quad (4.27)$$

Pour générer les différentes positions relatives à une configuration i du système, on s'intéresse uniquement aux états i distribués suivant la densité de probabilité non uniforme ρ_{NVT} . Les configurations successives ne suivent pas une évolution dans le temps, elles constituent une chaîne de Markov (un nouvel état ne dépend explicitement que de l'état précédent et appartient à un ensemble fini d'états appelé espace d'état: $1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, n$). L'ordre dans lequel ces états se succèdent n'a aucune importance. Cependant, l'objectif est de choisir le chemin de calcul par un nombre minimum d'itérations pour obtenir la convergence (état le plus probable)[43].

Pour un système à N particules, la valeur moyenne $\langle A \rangle$ est calculée en construisant une matrice de transition Π de très grande dimension, stochastique et ergodique. Une chaîne de Markov irréductible ou ergodique est une chaîne dans laquelle chaque état peut éventuellement être atteint à partir d'un autre état quelconque. On ne connaît pas les éléments de la matrice de transition, mais la distribution limite de la chaîne de Markov ρ est connue[43].

$$\rho_i = \rho_{NVT}((r^N)i) = \frac{\exp[-\beta U((r^N)i)]}{Z} \quad (4.28)$$

De chaque point i de l'espace des configurations r_i^N , il est possible de déterminer les propriétés de la matrice Π . On génère à l'aide de Π une chaîne de Markov dont les points appartiennent à l'ensemble canonique.

On cherche à présent de déterminer les propriétés de la matrice Π

1) La matrice de transition Π qui donne les probabilités de transition d'une configuration i vers une configuration j .

$$\Pi_{ij} = r^N i \rightarrow r^N j$$

est une matrice stochastique de probabilité:

$$\sum_j \Pi_{ij} = 1$$

. 2) La matrice de transition doit préserver l'équilibre lorsqu'il est établi. La chaîne de Markov doit être ergodique.

Le nombre de déplacements acceptés de l'état i vers l'état j , est exactement égal au

nombre de déplacements de l'état j vers l'états i . Le choix de Metropolis consiste à prendre un algorithme qui assure l'équiprobabilité des deux transitions ($i \rightarrow j, j \rightarrow i$)

La procédure est la suivante:

- 1^{iere} étape: réaliser un essai de déplacement aléatoire pour passer d'un état i à un état j , noter α_{ij} l'élément de la matrice stochastique correspondante
- 2^{ieme} étape: décider si l'on accepte ou pas le déplacement $i \rightarrow j$. Avec la probabilité P_{ij}

tel que:

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij} P_{ij} \quad (4.29)$$

On choisit la matrice $\vec{\alpha}$ symétrique

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (4.30)$$

On peut réécrire:

$$\rho_i \alpha_{ij} P_{ij} = \rho_j \alpha_{ji} P_{ji}$$

$$\frac{P_{ij}}{P_{ji}} = \frac{\rho_j}{\rho_i} = \frac{\exp(-\beta U_j)/Z}{\exp(-\beta U_i)/Z} = \exp[-\beta(U_j - U_i)] = \exp(-\beta \Delta U_{ij}) \quad (4.31)$$

qui est indépendante de Z .

Il y a plusieurs choix possibles pour les P_{ij} satisfaisant cette condition. Comme la condition $P_{ij} \in [0,1]$, le choix de Metropolis est le suivant:

Si: $\rho_j < \rho_i$, $P_{ij} = \frac{\rho_j}{\rho_i}$ et $P_{ji} = 1$

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij} \frac{\rho_j}{\rho_i} \text{ et } \Pi_{ji} = \alpha_{ji} = \alpha_{ij} \quad (4.32)$$

Si: $\rho_j \geq \rho_i$, $P_{ij} = 1$ et $P_{ji} = \frac{\rho_i}{\rho_j}$

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ et } \Pi_{ji} = \alpha_{ji} \frac{\rho_i}{\rho_j} \quad (4.33)$$

$$P_{ii} = 1$$

$$\sum_j \Pi_{ij} = \Pi_{ii} + \sum_{j \neq i} \Pi_{ij} = 1$$

$$P_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} \Pi_{ij}$$

le système peut rester dans un même état i .

Vérifions que le choix de Metropolis (4.32) et (4.33) vérifie la condition de microréversibilité $\rho_i \pi_{ij} = \rho_j \pi_{ji}$.

1^{ier} cas:

• $\rho_j > \rho_i$

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij}, \rho_i \Pi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij}$$

• $\rho_i < \rho_j$

$$\Pi_{ji} = \alpha_{ji} \frac{\rho_i}{\rho_j}, \rho_j \Pi_{ji} = \rho_i \alpha_{ij}$$

et donc:

$$\rho_i \Pi_{ij} = \rho_j \Pi_{ji} \tag{4.34}$$

2^{ime} cas:

• $\rho_i > \rho_j$

$$\Pi_{ji} = \alpha_{ji}, \rho_j \Pi_{ji} = \rho_j \alpha_{ji}$$

• $\rho_j < \rho_i$

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij} \frac{\rho_j}{\rho_i}, \rho_j \Pi_{ij} = \rho_j \alpha_{ji}$$

soit:

$$\rho_i \Pi_{ij} = \rho_j \Pi_{ji} \tag{4.35}$$

3^{ime} cas:

• $\rho_j = \rho_i$

$$\Pi_{ij} = \alpha_{ij}, \rho_i \Pi_{ij} = \rho_i \alpha_{ji}$$

• $\rho_i = \rho_j$

$$\Pi_{ji} = \alpha_{ji}, \rho_j \Pi_{ji} = \rho_i \alpha_{ji}$$

soit:

$$\rho_i \Pi_{ij} = \rho_j \Pi_{ji} \tag{4.36}$$

La symétrie de la matrice $\vec{\alpha}$ vérifie bien la condition de microréversibilité. Ce qui offre un choix multiple des déplacement de i vers j [43]

b- Algorithme de Metropolis

Pour optimiser le nombre de déplacements de l'état i (ancien) vers l'état j (nouveau), Metropolis a proposé l'algorithme suivant:

Lorsque $U_j(\text{nouveau}) > U_j(\text{ancien})$, pour décider d'accepter ou de refuser la nouvelle configuration on calcule:

$$P_{ij} = \frac{\rho_j}{\rho_i} = \exp[-\beta(U_j - U_i)] \quad (4.37)$$

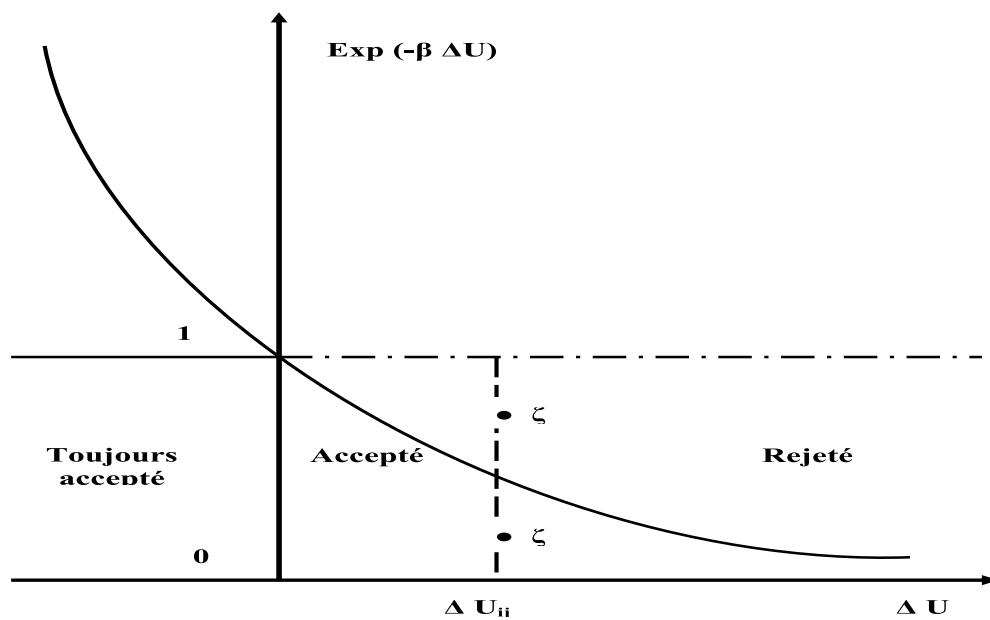


FIG. 4.2 – Principe de base de la méthode Metropolis [43]

Une configuration donnée (4.2) est définie par un ensemble de coordonnées de position (r^i aléatoire) pour l'ensemble de particules $i = 1, \dots, N$

En se donnant un déplacement aléatoire généré par un nombre aléatoire donné tel que:

$$\delta_{old} = (1 - 2\xi)\delta \quad (4.38)$$

où δ est un déplacement identique pour toutes les particules. ξ est un nombre aléatoire variant de 0 à 1 suivant une distribution uniforme. L'écriture (4.38) assure un déplacement pour chaque particule appartenant au domaine $[-\delta, +\delta]$.

Les nouvelles coordonnées des particules sont donc calculées à partir de la formule:

$$r_{new}^i = r_{old}^i + (1 + 2\xi)\delta \quad (4.39)$$

L'efficacité de la méthode lors de la programmation, dépend essentiellement du choix du générateur des nombres aléatoires.

Une fois la nouvelle configuration calculée, deux possibilités se présentent:

1. $U(r_{new}^i) < U(r_{old}^i)$ le déplacement est accepté et la nouvelle configuration devient l'ancienne
2. $U(r_{new}^i) > U(r_{old}^i)$ on se donne un nombre aléatoire R . Si $\exp(-\beta|\Delta U|) < R$ ($\Delta U = |U_{new} - U_{old}|$), la nouvelle configuration est acceptée, sinon on maintient l'ancienne et on calcule une nouvelle. Le procédé est réitéré jusqu'à atteindre le minimum d'énergie.

La figure (Fig.4.3) illustre l'organigramme de l'algorithme de Metropolis utilisé pour la recherche de la configuration d'équilibre d'un système unidimensionnel à N particules identiques[43].

Dans un solide, les atomes vibrent autour de leurs positions d'équilibre. Les configurations successives décrivent alors les mouvements réels des atomes en fonction du temps. La méthode de MC permet de retrouver les différentes positions des atomes par rapport à leurs positions d'équilibre dans la configuration de la chaîne de Markov, mais générées dans un ordre différent. Les états successifs ne sont pas corrélés temporairement. L'ordre dans lequel on obtient les états de la chaîne de Markov n'a aucune signification physique.

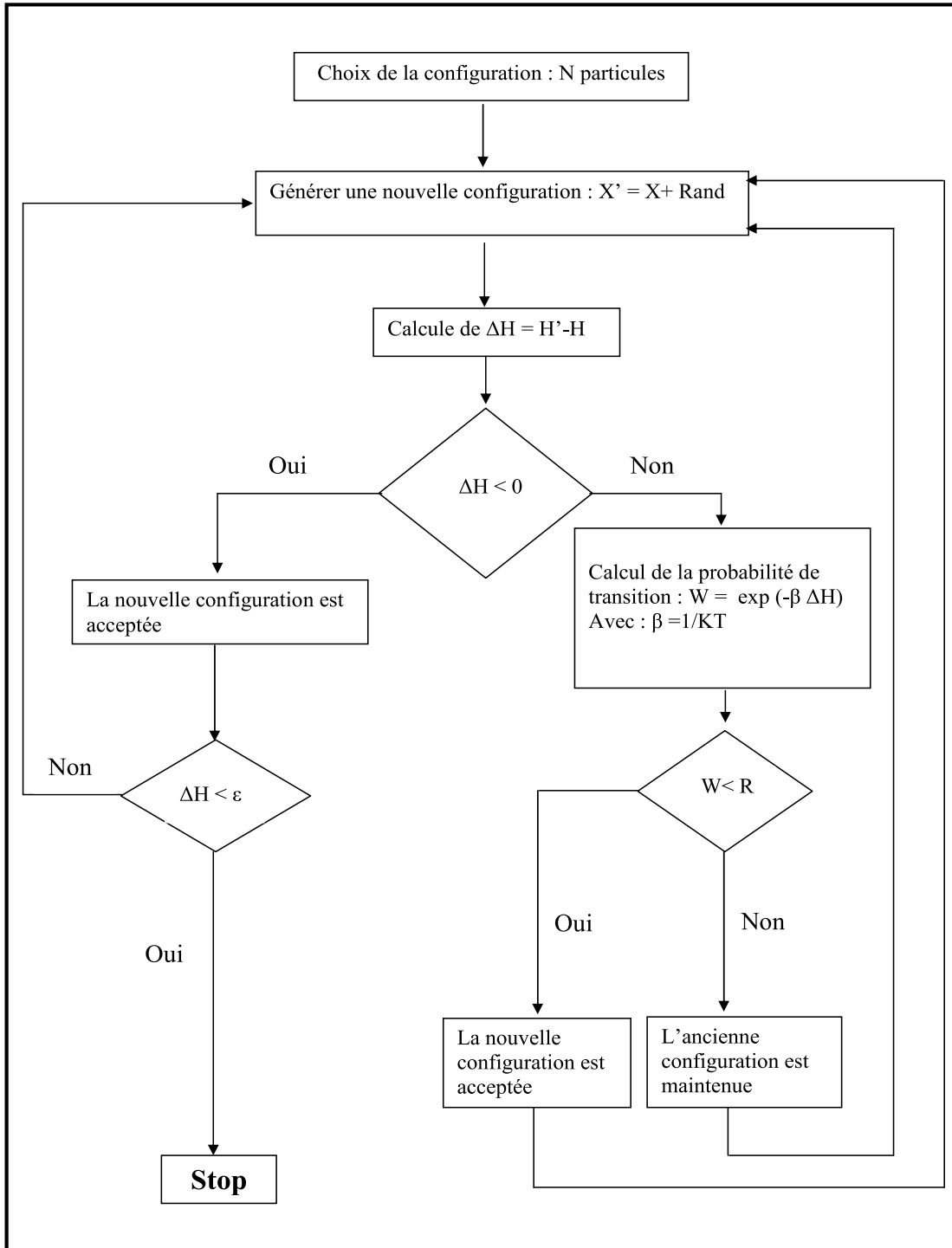


FIG. 4.3 – Organigramme de la méthode de Monte-Carlo

4.3 Résultats et discussion

Nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo pour déterminer les configurations d'équilibre à basse température. En utilisant le programme du générateur des nombres aléatoires, des positions aléatoires sont attribuées à un nombre limité de particules dans une partie de la chaîne, qui constituent les configurations de base (Fig.4.4(a)). On se limite à cette partie car ces configurations se répètent de façon périodique. Afin d'éviter les états métastables, la technique d'annihilation est utilisée[39]. Les particules sont chauffées jusqu'à une certaine température puis refroidies jusqu'à la température souhaitée. Le choix de la longueur de la cellule dépend directement du nombre de particules. Cette caractéristique a rendu la tâche difficile pour atteindre l'équilibre. Sachant que la longueur de la cellule de base $L = N\Delta$, notre problème consiste à déterminer Δ . Ce qui constitue une difficulté supplémentaire en terme de programmation. Pour remédier à cette difficulté, une boucle additive faisant varier la longueur est incorporé dans le programme. Cette approche a permis de trouver le résultat recherché au détriment d'un temps de calcul très long. Le critère d'arrêt du code numérique correspond à des configurations d'équilibre pour lesquelles l'énergie totale du système est minimale (Fig.4.4(b)), comme le montre la figure (Fig.4.5). En faisant varier le nombre de particules N (de 2 à 30) dans la cellule de simulation, la variation de l'inter distance en fonction de N est alors obtenue (TAB.4.1) et (Fig.4.6)[44].

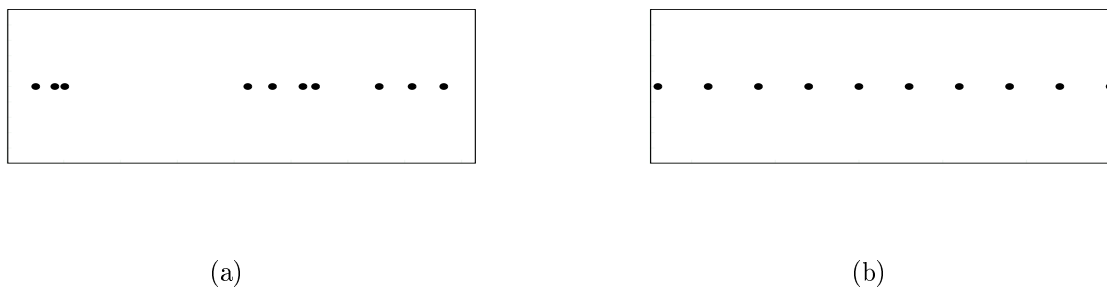


FIG. 4.4 – Configuration aléatoire, avant simulation MC (a) et configuration d'équilibre obtenue après simulation MC (b)

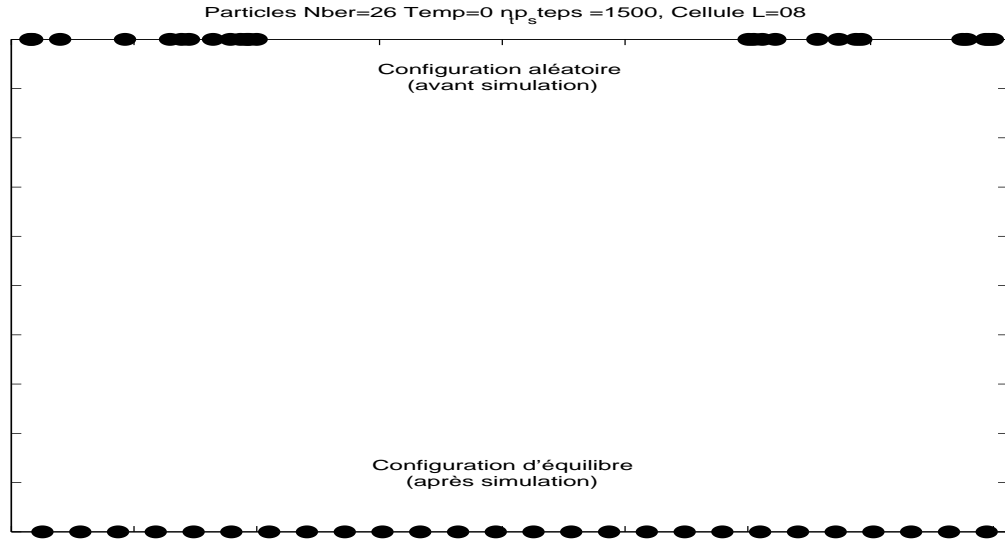


FIG. 4.5 – Configurations aléatoire et d'équilibre obtenues avec la méthode de Monte-Carlo

longueur de la cellule(mm)	Itérations	Nombre de particules	Inter distance(mm)
04	500	02	0.675
04	500	04	0.250
04	500	06	0.175
04	500	08	0.125
04	500	10	0.100
04	500	12	0.085
04	500	14	0.070
04	500	16	0.060
06	1000	18	0.053
06	1500	20	0.045
06	1500	22	0.040
06	1500	24	0.035
08	1500	26	0.033
08	1500	28	0.030
08	1500	30	0.030
08	2000	32	0.030

TAB. 4.1 – Valeurs de l'inter-distance normalisée Δ pour un nombre N dans la cellule.

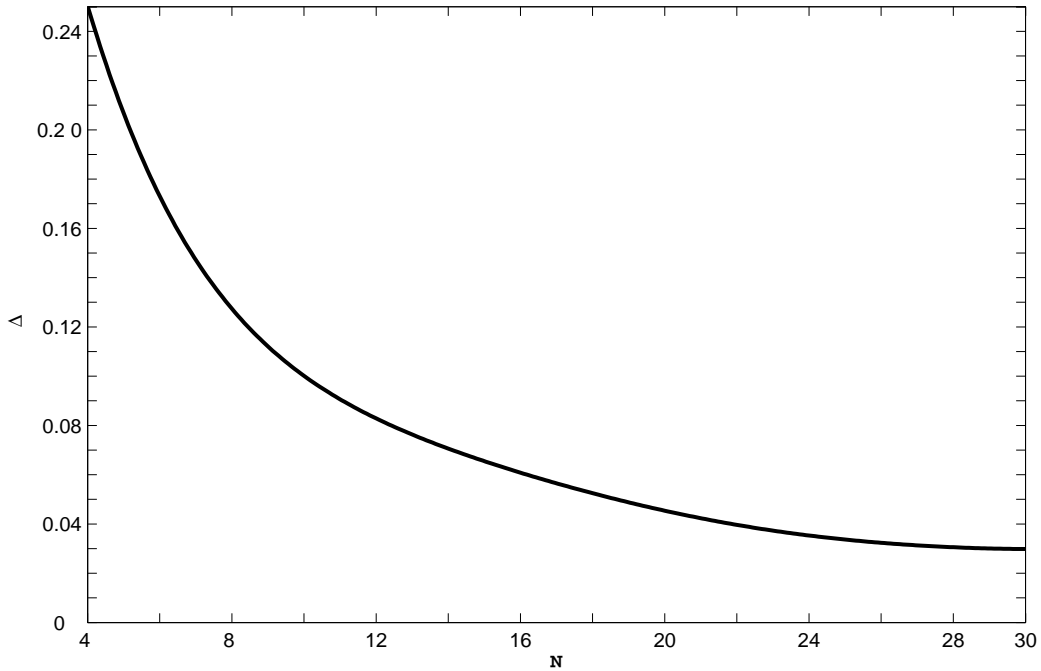


FIG. 4.6 – Variation de l'inter-distance normalisée Δ en fonction du nombre de particules N

La figure (Fig.4.6) représente la variation de l'inter-distance normalisée Δ en fonction du nombre de particule N dans la cellule de base. Dans l'ensemble, la courbe reproduit un résultat bien connu d'une chaîne linéaire. La variation de Δ suit une loi en $1/N$. Cependant dans ce travail on s'intéresse au nombre de particules ayant une contribution significative pour le type d'interaction choisi. Lorsque le nombre de particules est petit, Δ subit une variation importante, par conséquent le nombre des proches voisins pris en considération doit être plus important. Lorsque N atteint une valeur critique $N_c = 28$, l'inter-distance tend vers une valeur limite. Au delà de N_c , la contribution des autres particules n'a aucun effet. Ce résultat dépend essentiellement de la modélisation de l'interaction entre particules[37].

Notre résultat obtenu par simulation de Monte-Carlo confirme cette valeur de N_c utilisée dans l'expérience réalisée par Liu *et al* (Fig4.7). en étudiant les modes optiques transversaux dans une chaîne linéaire avec un potentiel d'interaction de type Yukawa[36].

Le paramètre $K = \Delta/\lambda_D$ est obtenu à partir de la valeur de λ_D calculée et les valeurs de Δ représentées dans le tableau(Tab.4.2)

La connaissance de l'inter-distance et du paramètre de l'effet d'écran, nous ont permis d'étudier la relation de dispersion.

Les courbes de dispersion des deux modes (DAW) et (DLW) sont tracés pour quatre valeurs de N (Fig.4.8(a))(Fig.4.8(b)). Ces variations montrent que le mode (DAW) subit des variations plus importantes lorsque N augmente jusqu'à atteindre une valeur limite pour une valeur critique de N . Ce mode résulte d'un gradient de pression du milieu plasma. Lorsque la portée de l'interaction atteint sa limite (distance de coupure), la contribution de toutes les particules n'a aucun effet sur le profil des variations de ω . Quant aux modes (DLW), il est le résultat des effets collectifs des particules en interaction et qui sont le siège de l'effet d'écran. Le nombre de particules dans la cellule de base n'affecte pas le profil de ω . En effet la figure (Fig.4.8(a)) montre que ω atteint une valeur asymptotique au voisinage de $k = 0.5$. Néanmoins la valeur maximale dépend du nombre de particules pour $N < N_c$

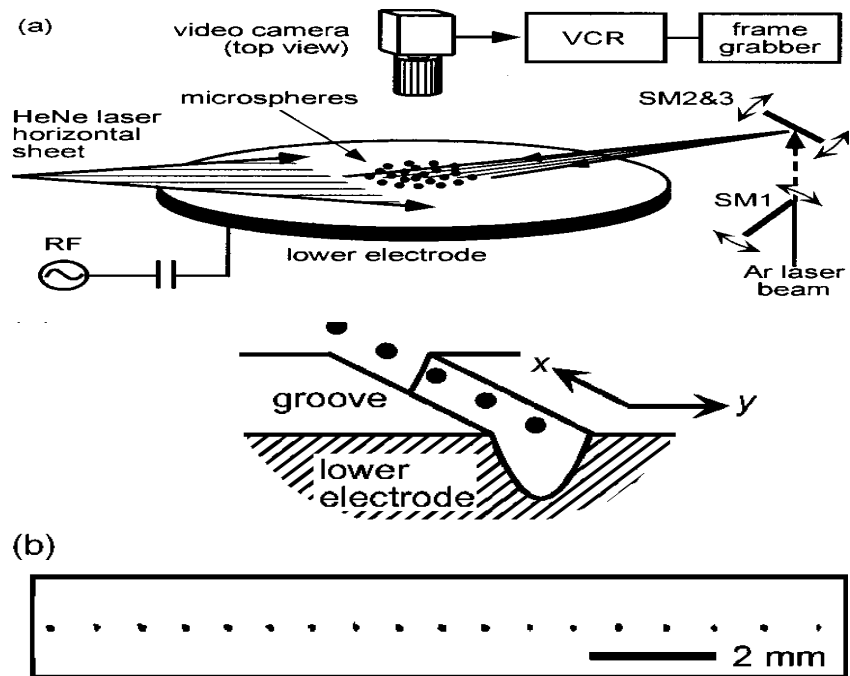
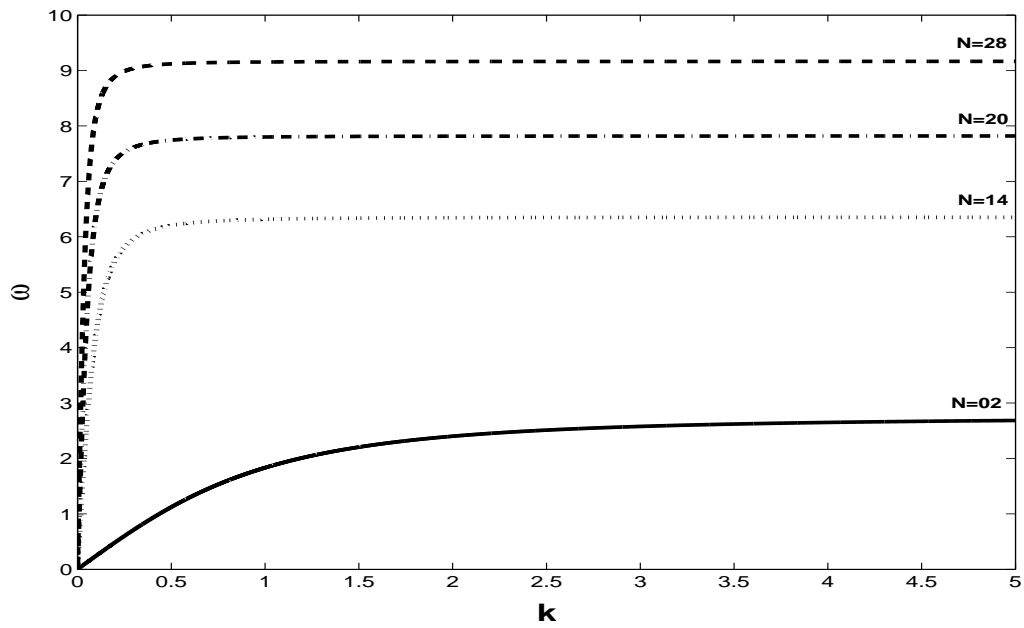
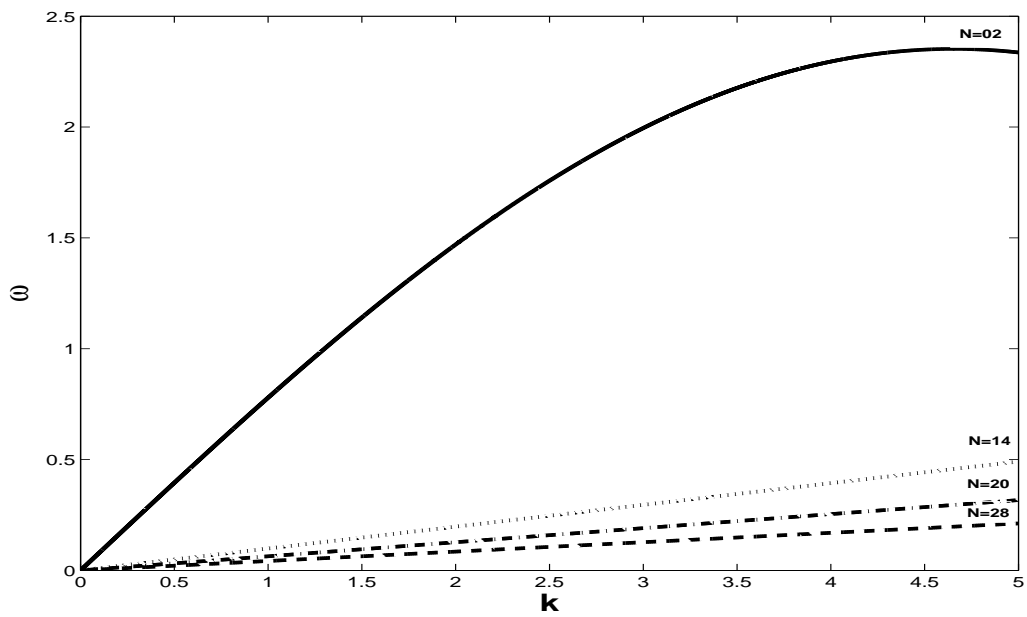


FIG. 4.7 – *Expérience de Liu*



(a)



(b)

FIG. 4.8 – Variation de la relation de dispersions $\omega = f(k)$ des DAW (a) et DLW (b), pour $N=02, 14, 20$ et 28

Nombre de particules(N)	Inter- distance (Δ mm)	Paramètre $K = \frac{\Delta}{\lambda_D}$
02	0.675	1.120
04	0.250	0.410
06	0.175	0.290
08	0.125	0.200
10	0.100	0.160
12	0.085	0.140
14	0.070	0.110
16	0.060	0.100
18	0.053	0.080
20	0.045	0.070
22	0.040	0.060
24	0.035	0.058
26	0.033	0.055
28	0.030	0.050
30	0.030	0.050
32	0.030	0.050

TABLE 4.2 – Valeurs numériques du paramètre K

4.4 Effet de la présence d'un gaz sur les modes de vibrations

4.4.1 Système entretenu

Un plasma poussiéreux est un système entretenu dont l'existence dépend d'un apport permanent de particules chargées ou neutres. Par leur inertie, les grains de poussière attachent des charges à leurs surfaces. On peut aussi observer des charges libres. Lorsque les courants qui arrivent au niveau de la surface sont égaux à ceux qui quittent cette dernière, on a un équilibre de charge qui s'établit. Cette situation est réalisée, en injectant de façon permanente des particules neutres ou chargées pour compenser les pertes. En présence d'un gaz autour de chaque grain de poussière, les mouvements oscillatoires subissent un freinage qui dépend des caractéristiques du gaz. La longueur caractéristique de cet amortissement est $\sim c/\nu$, où ν est la fréquence de cette force de friction (amortissement)[45].

4.4.2 Effet de la friction sur la dispersion

Pour un système conservatif, les racines de l'équation de dispersion $L(\omega, k) = 0$ n'ont pas une partie imaginaire. Par contre pour les systèmes non conservatifs, lors des oscillations il y a dissipation de l'énergie. Dans le cas d'une chaîne linéaire formée de grains de poussière, les pertes d'énergie peuvent être causées par un flux de particules, un gradient de température ou un gradient de charge.

Nous avons considéré la situation où le temps caractéristique de la fluctuation de la charge est très petit par rapport au temps caractéristique des modes de vibration. La charge de chaque grain est prise constante, égale à une valeur moyenne. La présence des particules autour de chaque grain affecte son mouvement oscillatoire. En prenant en considération cet effet dans l'équation de mouvement, un terme proportionnel à ν est ajouté.

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \nu \frac{dx_i}{dt} = \frac{q}{m}(x_i, t) \quad (4.40)$$

L'équation (4.40) s'écrit avec un potentiel de Yukawa:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \nu \frac{dx_i}{dt} = \sum_{l \neq i} \left(\frac{1 + K|x_i - x_l|}{|x_i - x_l|^2} \right) \exp(-K|x_i - x_l|) \quad (4.41)$$

en écrivant $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et suivant les mêmes étapes de calcul dans le cas $\nu = 0$, l'expression de la relation de dispersion pour les ondes de réseaux (DLW) est alors obtenue:

$$\omega(\omega + j\nu) = 2 \exp(-K)(1 + K)4 \sin^2 \left(\frac{k\Delta}{2} \right) \quad (4.42)$$

dans ce cas, le vecteur d'onde a une partie réelle et une partie imaginaire $k = k_r + jk_i$

$$k_{DLW} = 2 \arcsin \left(\frac{\omega(\omega + j\nu)}{8 \exp(-K)(1 + K)} \right)^{1/2} \quad (4.43)$$

Pour les ondes acoustiques (DAW), la relation de dispersion en présence du terme de friction, est calculée à partir de l'équation (4.15)

$$\omega(\omega + j\nu) = 4(1 + K) \left[\frac{k^2}{K(K^2 + k^2)} \right] \quad (4.44)$$

$$k^2 4(1 + K) = \omega(\omega + i\nu)(K(K^2 + k^2))$$

$$k^2 = \frac{\omega(\omega + j\nu)K^3}{4(1 + K) - K\omega(\omega + j\nu)}$$

$$k_{DAW} = \left[\frac{\omega(\omega + j\nu)K^3}{4(1 + K) - K\omega(\omega + j\nu)} \right]^{1/2} \quad (4.45)$$

• **Valeur numérique de ν**

Dans les chambres à décharge, la fréquence de friction s'exprime en fonction de la pression P du gaz dans lequel les grains sont immergés, elle est donnée par:

$$\nu = \frac{C_v P}{a\rho} \quad (4.46)$$

Où:

- C_v : chaleur spécifique(a la température ambiante 300 K).
- a : rayon du grain en (micro-mètre).
- P : pression du gaz (en Torr).
- ρ : masse volumique des grains en($g.cm^{-3}$).
- m_d : masse du grain (en g).

En introduisant la masse volumique $\rho = m/V$ et le volume de grains $V = 4\pi a^3/3$ dans (4.46), on obtient:

$$\nu = \frac{4\pi C_v P a^2}{3m}$$

A partir des données expérimentales des travaux de O.S. Vaulina[46][47], on prend:

- $C_v(\text{neon})= 600(J.K^{-1})$.
- $C_v(\text{argon})= 820(J.K^{-1})$.
- Taille des grains (rayon): 1 – 30 (micro-mètre).
- Pression du gaz:1 – 100 Pa, avec ($1Pa = 7,5006.10^{-3}$ Torr).
- Densités ne ni: $10^7 - 10^{10} cm^{-3}$.
- Température electrons:1 – 5 eV.
- Température ions et neutres: 0.03 eV.
- $m_d = 1.6 \times 10^{-12}g$.

On obtient :

$$\nu = 1,178.10^4 s^{-1}$$

4.4.3 Résultats et discussion

En présence de friction , il est plus facile d'étudier la relation de dispersion $k = f(\omega)$. Les parties réelle et imaginaire peuvent être obtenues directement à partir des relations

(4.43) et (4.45). Les courbes de dispersion sont tracées en remplaçant la valeur de ν déjà calculée ($\nu = 1,178.10^4 s^{-1}$).

Les variations des parties réelles et imaginaires de k sont représentées par les figures (Fig.4.9), (Fig.4.10), (Fig.4.11) et (Fig.4.12). Ces variations montrent que le mode (DAW) disparaît lorsque le nombre de particules est supérieur à 2 à cause d'un amortissement important de ce mode. Pour le mode (DLW), valeur palier de la partie imaginaire de k (facteur d'atténuation) diminue avec le nombre de particules N comme le montre la figure(Fig.4.13). Le mode (DLW) ne s'amortie pas totalement, il résiste à la friction grâce à son aspect d'origine collectif.

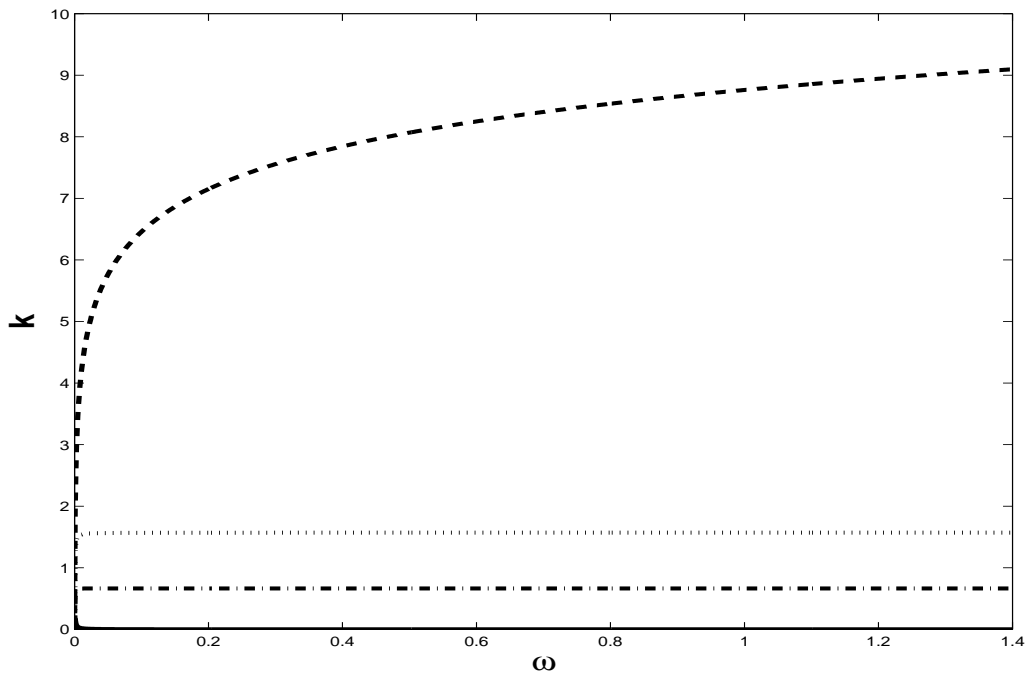


FIG. 4.9 – Variation de la relation de dispersion, $k=f(\omega)$ (---) k_i (DLW), (. . . .) k_r (DLW), (- . . . -) k_i (DAW) et (—) k_r (DAW) pour $N=02$

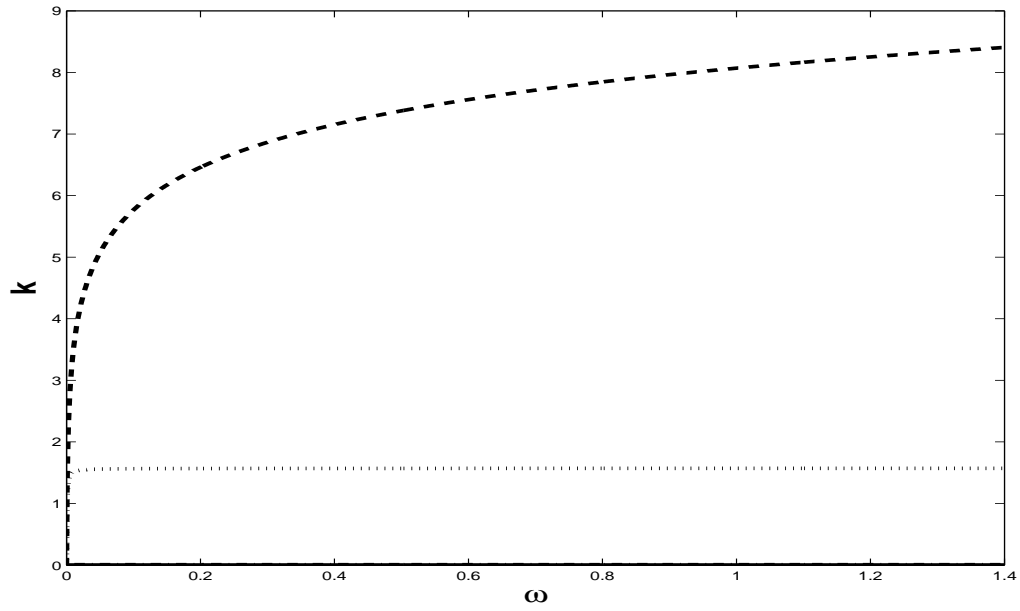


FIG. 4.10 – Variation de la relation de dispersion, $k=f(\omega)$ (---) ki (DLW), (. . . .) kr (DLW), (-. .-. .) ki (DAW) et (—) kr (DAW) pour $N=14$

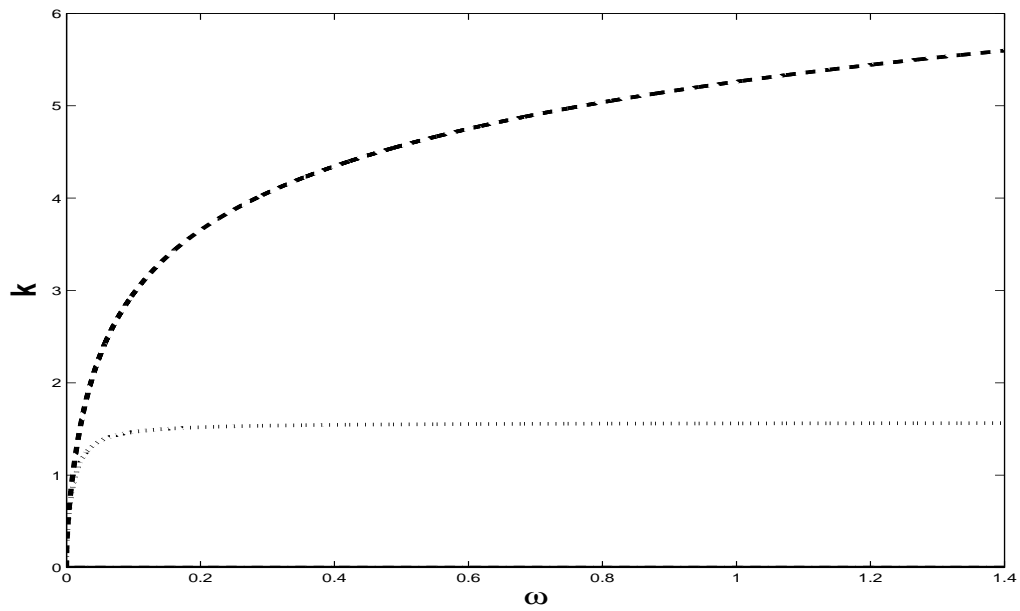


FIG. 4.11 – Variation de la relation de dispersion, $k=f(\omega)$ (---) ki (DLW), (. . . .) kr (DLW), (-. .-. .) ki (DAW) et (—) kr (DAW) pour $N=20$

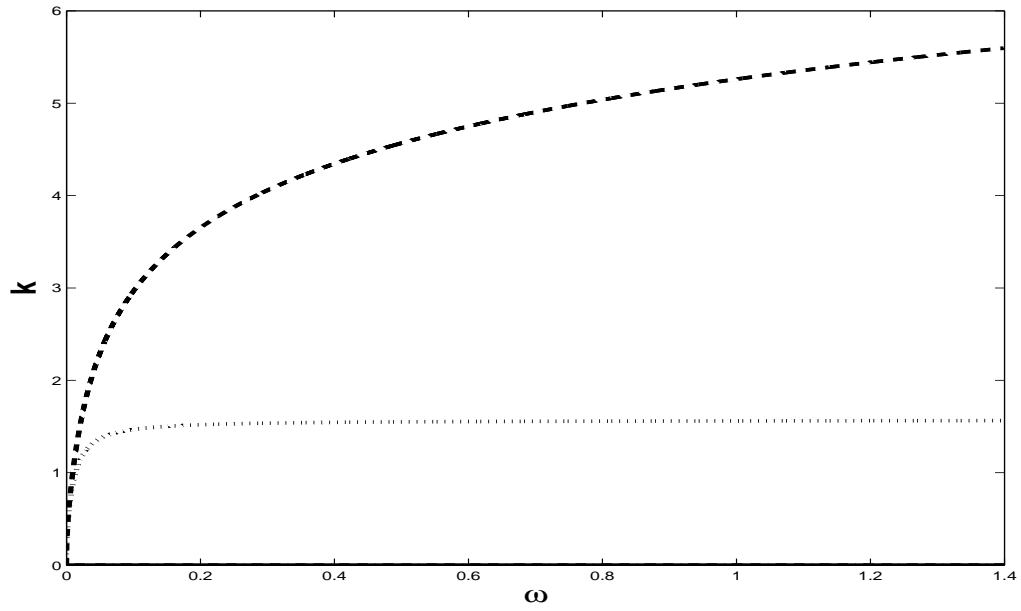


FIG. 4.12 – Variation de la relation de dispersion, $k=f(\omega)$ (---) k_i (DLW), (. . . .) k_r (DLW), (- . - . -) k_i (DAW) et (—) k_r (DAW) pour $N=28$

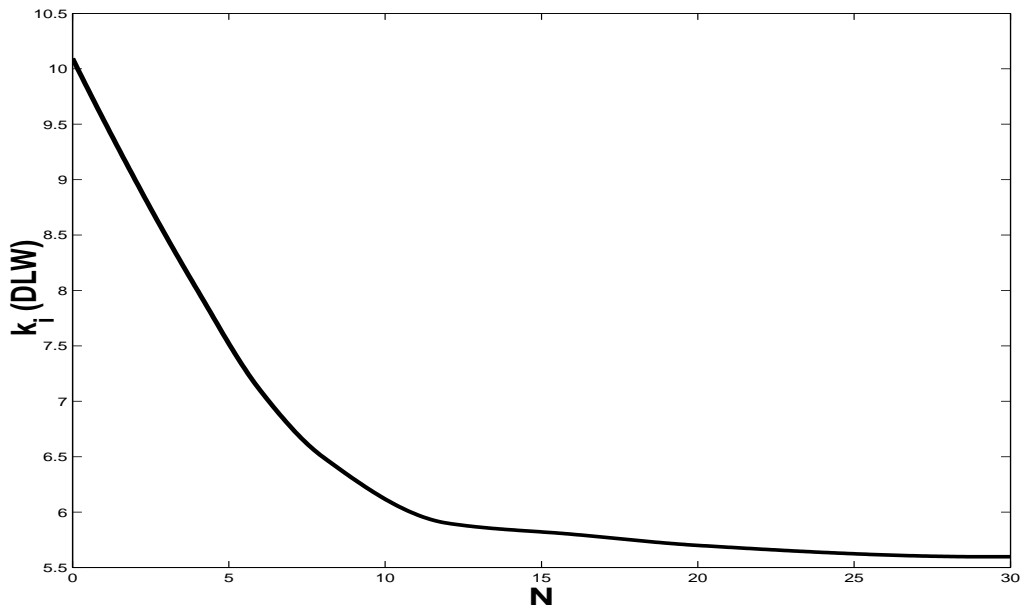


FIG. 4.13 – Variation de k_i (DLW) en fonction de N

Conclusion et perspectives

Dans le cadre de ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude d'une chaîne linéaire formée de particules chargées et identiques. Ces dernières sont susceptibles de porter des charges considérables, positives ou négatives, qui assure une forte interaction et donc une structure fortement couplée. En présence de grains de poussière, un gaz de particules chargées est nécessaire pour entretenir le plasma. De ce fait, nous avons modélisé le potentiel d'interaction par un potentiel de type Yukawa. L'effet d'écran est ainsi pris en considération.

Notre première tâche consistée à déterminer la configuration d'équilibre caractérisée par l'inter-distance entre les particules. Nous avons pour cela, utilisé la méthode de Monte-Carlo qui se base sur l'algorithme de Metropolis. Comme notre chaîne est infinie, nous l'avons simulée en faisant appel aux conditions aux limites. Une cellule de base est choisie pour être reproduite périodiquement. Ainsi appliquée, la méthode de Monte-Carlo abouti à des états métastables. les état métastables, qui caractérisent un équilibre local, ont été contournés par la technique d'annihilation. Le système est chauffé progressivement puis refroidi jusqu'à la température requise. Une telle méthode augmente le temps de calcul mais assure, après un certain nombre d'itérations, la convergence vers l'équilibre global. La convergence à lieu lorsque le minimum d'énergie est atteint.

Nous avons montré que l'inter-distance de la configuration d'équilibre dépend essentiellement du nombre de particules dans la cellule de base ainsi que de sa longueur. Le potentiel agissant sur une particule résulte alors, de la contribution d'un nombre fini de particules dans la cellule. Nous avons trouvé que ce nombre correspond à $N = 28$. Ce résultat a été déjà utilisée sans justification dans des travaux expérimentaux.

En se basant sur ces résultats, l'étude des modes DAW (dust acoustic wave) et de DLW (dust lattice wave) a été réalisée pour une chaîne linéaire fortement couplée, périodique et formée de grains de poussière de charge positive. Nous avons tracés les relations de dispersion en fonction du nombre d'onde pour différentes valeurs du nombre de parti-

cule dans la cellule de base. On a remarqué que le mode DLW subit les variations les plus importantes dans le profil lorsque le nombre de particules varie, quand au mode DAW, le profil dans l'ensemble est le même, c'est la valeur limite qui change. Ces résultats s'expliquent par la nature des modes. Le mode acoustique résulte d'un gradient de pression du milieu plasma, par contre le mode de réseau est la conséquence des effets collectif des particules en interaction. D'ailleurs on a remarqué que l'écart est très grand entre $N=2$ et $N > 2$. En prenant uniquement les deux premiers proches voisins dans l'interaction, l'erreur commise dans le calcul du potentiel est très importante. Un autre résultat remarquable, l'existence des modes DLW pour $N > 2$, il n'est possible que si $k > 0.5$.

Compte tenu du fait que le plasma poussiéreux est un système entretenu, l'injection d'autres particules se manifeste par une force de friction sur chaque grain de poussière. Le cas où cet effet est dû à la présence d'un gaz sous pression dans une chambre à décharge a été traité. En prenant en considération cet effet, l'investigation a montré que le mode (DAW) disparaît lorsque le nombre de particules est supérieur à 2. Ceci est dû à l'amortissement important du mouvement de chaque particule autour de sa position d'équilibre. Par contre, l'amplitude du mode DLW diminue lorsque le nombre de particules augmente, le mode (DLW) ne s'amortie pas totalement, il résiste à la friction grâce à son aspect d'origine collectif.

Dans ce travail la méthode de Monte-Carlo nous permis d'étudier des phénomènes physiques qui ne dépendent explicitement du temps. Lorsque la fluctuation de la charge est prise en compte, le temps est une variable caractéristique. Le problème peut être résolu par la Dynamique Moléculaire. D'autre part le potentiel de Yukawa n'est pas le seul potentiel possible pour modéliser les structures fortement couplées. On peut penser à d'autre types de potentiel qui correspondent à certaines situation physiques réelles.

Bibliographie

- [1] E. Wigner, Phys. Rev. **46** (1934).
- [2] J. Vasut, *Numerical Modeling of Strongly-Coupled Dusty Plasmas Systems*, PhD thesis, 2001.
- [3] A. Simon and W. B. Thompson, editors, *Advances in Plasma Physics*, volume 4, 1971, M. S. Sodha and S. Guha P.219.
- [4] P. Pavlov, editor, *25th EPS Conference on contr. Fusion and Plasmas Phys. Praha*, volume 22C, 1998.
- [5] R. Annou and V. Tripathi, Physics Lett. A **5**, 2813 (1997).
- [6] J. R. Bhatt and B. P. Pandey, Phys. Rev. E **50**, 4 (1994).
- [7] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson, and N. D'angelo, Phys. Plasmas **5**, 1607 (1998).
- [8] V. E. Fortov, A. V.Ivlev, S. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfell, Phys. Reports **421,1-103** (2005).
- [9] P. Kaw, Phys. Plas. **8** (2001).
- [10] J. L. Delacroix and A. Bers, *Physique des plasmas 1*, Inter Editions - CNRS Edition, 1994.
- [11] 2006, Encarta, Encyclopédie Scientifique.
- [12] P. M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*, 2004.
- [13] G. Ganguli, R. Merlino, and A. Sen, (2000), Physics and Astronomy, The University of Iowa, Iowa City, IA 52242, USA.
- [14] M. Djebli, *Expansion des plasmas poussiéreux en géométrie sphérique*, PhD thesis, 2004.
- [15] P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasmas Physics*, IOP Publishing, 2002.
- [16] W. A., S. Chair, and C. Beattie, *Numerical Simulation of Ion Waves in Dusty Plasmas*, PhD thesis, 2001.
- [17] B. Liu, K. Avinash, and J. Goree, Phys. Lett. **91, Num 25** (2003).
- [18] A. Piel et al., J. Phys. B **36**, 533 (2003).

- [19] H. Thomson, G. E. Morfil, and V. Demmel, Phys. Rev. Lett **73,5** (1994).
- [20] P. Institute of Fundamental Technological Research Polish Academy of Sciences, Warsaw, editor, *Non-Linear Phenomina in Dusty Plasmas*, 1999, A. J. Turski and B. Atamaniuk and E. Turska.
- [21] F. Melando, Phys. Plas **3** (1996).
- [22] A. Homann, A. Melzer, S. Peters, and A. Piel, Phys. Rev. **56** (1997).
- [23] A. V. Ivlev and G. Morfill, Phys. Rev. e **63** (2000).
- [24] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics, 7th ed.(Wiley, new York)*, 1996.
- [25] X. Liang et al., Phys. Plas. **8** (2001).
- [26] B. Farokhi, P. Shukla, N. Tsintsadze, and D. Tskhakaya, Physics Lett. A **264**, 318 (1999).
- [27] F. S. Kuo, Chinese Journal of Physics **38** (2000).
- [28] N. Otani, A. Bhattacharjee, and X. Wang, Phys. Plasmas **6** (1999).
- [29] R. A. Quinn and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **88** (2002).
- [30] H. C. Lee and D. Y. Chen, Phys.Rev.E **56** (1997).
- [31] L. Giovanni, Physics of Plasmas **6** (1999).
- [32] S. Nunomura, J. Goree, X. W. S. Hu, and A. Bhattacharjee, Phys.RevE **65**, **066402** (2002).
- [33] Y. K. Khodataev, S. A. Khrapak, A. P. Nefedov, and O. F. Petrov, Phys.Rev.E **57** (1998).
- [34] S. Khrapak et al., Physics of Plasmas **10** (2003).
- [35] B. Liu and J. Goree, Phy.Rev **71**, **46410** (2005).
- [36] K. B. Liu and J. Goree, Phy. Lett **91,255003** (2005).
- [37] A. Bekda, M. Djebli, and N. Beldjoudi, Submitted to Plasma Science and Technologie (2007).
- [38] V. Bedanov and F. Peeters, Phys. Rev. B **49** (1994).
- [39] G. Piacente, F. peeters, and J. Betoures, Phys. Rev. E **70** (2004).
- [40] G. Piacente, F. Schweigert, J. Betoures, and F. Peeters, Phys. Rev. B **69** (2004).
- [41] A. Kiel, editor, *Diagnostics ans Simulation of Dusty Plasmas*, 2006, Kiel 12-15, Germany.
- [42] C. R. A. Catlow, R. A. van Santen, and B. Smit, *Computer Modelling of Microporous Materials*, 2004.
- [43] M. Hayoun, *La Méthode de Monte Carlo Metroplois*, École Simulation Numérique en Matière Condensée, Jussieu, Paris, 2002.
- [44] *CNPA 2006*, 2006, Congr  national de la Physique et ces Application.

- [45] C. Ticos, A. Dyson, P. Smith, and P. Shukla, *Plas. Phys. Contr. Fusion* **46** (2004).
- [46] O. S. Vaulina, A. A. S. O. F. Petrov, B. W. James, and V. E. Fortov, *New Journal of Physics* **5**, 2 (2003).
- [47] P. Epstein, *Phys. Plas.* **23** (1924).