

N° d'ordre : 01/2012-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE (U. S. T. H. B)

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT

EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité: Équations aux Dérivées Partielles

Par: **Abdelhafid YOUNSI**

THÈME

**EFFET D'HYPERVISCOSITÉ SUR
LES ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES DE LA TURBULENCE**

Soutenue publiquement le 13/02/2012, devant le jury composé de

Mr. A.HEMINNA	Professeur	à l'U. S. T. H. B.	Président.
Mr. D.E.TENIOU	Professeur	à l'U. S. T. H. B.	Directeur de thèse.
Mr. M. A. MOUSSAOUI	Professeur	à l'E. C. Lyon (France)	Examineur.
Mr. R.SACI	Professeur	à l'U. M. B. Boumerdès	Examineur.
Mr. M.Z.AISSAOUI	M. C. A.	à l'U. Guelma	Examineur.
Mr. R.B. ABIDALLAH	M. C. A.	à l'U. M. M. Tizi Ouzou	Examineur.

À ma mère Kheira,

À mes parents,

À ma femme,

À mes fils Mohamed et Mouatassim,

et Nouha.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Djamel Teniou** mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie le professeur **Hakima Bessaih** pour m'avoir initié aux équations de Navier-Stokes et m'avoir donné le goût de la recherche.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **Amar Heminna**, Professeur à l'U.S.T.H.B à Alger pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Messieurs **Mohand Arezki Moussaoui**, Professeur à l'école centrale de Lyon (France) et **Rachid Saci**, Professeur à l'université de M'hamed Bougara de Boumerdès qui ont bien voulu faire partie du jury.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux Messieurs **Rachid Benabidallah**, Maître de Conférence à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou et Monsieur **Mohamed Zine Aissaoui**, Maître de Conférence à l'université de Guelma.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents, mon frère Bachir et mon ami Docteur **Toufik Laadj** de l'Université Virginia Tech (U.S.A) et le Professeur **Mokhtar Kirane** de l'université de la Rochelle (France), pour leur soutien tout au long de mes études.

Effet d'hyperviscosité sur les équations de Navier Stokes de la turbulence

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude de l'effet de l'hyperviscosité sur la turbulence tridimensionnelle. Pour cela nous ajoutons aux équations de Navier-Stokes un terme de viscosité artificielle $\varepsilon(-\Delta)^l$ d'ordre supérieur à 1.

La première partie est consacrée à l'étude du comportement des solutions des équations de Navier Stokes perturbées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans une dimension $d \leq 4$, nous montrons la convergence forte des solutions du système régularisé vers celles du système conventionnel lorsque le paramètre de régularisation ε tend vers zéro. Ce résultat sera démontré pour chaque ordre $l \geq \sup((d/2), ((d+2)/4))$.

Dans la seconde partie nous établissons l'existence d'un attracteur global \mathfrak{A}_ε de dimension finie. En utilisant une version généralisée de l'inégalité de Sobolev-Lieb-Thirring, nous montrons que la présence du terme de viscosité artificielle conduit à tronquer le nombre de degrés de liberté des solutions de ces équations perturbées.

La signification de ce résultat en turbulence tridimensionnelle est discutée ainsi que quelques résultats dans ce contexte.

Ce résultat suggère que le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité constitue un modèle intéressant pour l'étude d'un écoulement turbulent tridimensionnel.

Mots-clés : Équations Navier-Stokes, Hyperviscosité, Solutions faibles, Attracteur, Turbulence.

Table des matières

Liste des figures	vi
Liste des principales notations	vii
Introduction	1
1 Rappels de quelques résultats fondamentaux	4
1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle	5
1.1.1 Espaces de Sobolev	5
1.1.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	6
1.1.3 Espaces de Sobolev des fonctions périodiques	7
1.2 Rappel sur quelques inégalités fondamentales	8
1.2.1 Lemme classique de Gronwall	10
1.2.2 Lemme uniforme de Gronwall	10
1.3 Attracteurs	12
1.4 Dimension fractale et dimension de Hausdorff	15
1.5 Notion de viscosité dans un fluide en mouvement	23
1.5.1 Nombre de Reynolds	26
1.5.2 Nombre de Grashof	28
1.5.3 La cascade de Kolmogorov	29
1.5.4 Degrés de liberté	34
2 La convergence forte du système avec hyperviscosité	36
2.1 Le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité	36

2.2	Résultat de convergence forte	42
3	Attracteurs du système de Navier-Stokes avec hyperviscosité	44
3.1	Existence de l'attracteur du système de Navier-Stokes perturbé	44
4	Écoulement turbulent	49
4.1	La turbulence	49
4.2	Modélisation de la turbulence	54
4.3	Nombres de degrés de liberté dans un écoulement turbulent	57
4.4	Étude de la dimension de l'attracteur global	57
5	Conclusion et perspectives	67
	Conclusion et perspectives	67
	Bibliographie	73

Liste des Figures

1.3.1	Attracteur étrange de Lorenz (1963).	13
1.4.1	Ensemble de Julia.	16
1.4.2	Concentration d'un scalaire passif (polluant)	19
1.4.3	Construction du triangle de Sierpiński.	22
1.4.4	Triangle de Sierpiński.	22
1.5.1	Force de viscosité agissant dans un fluide.	24
1.5.2	Quelques valeurs de la viscosité à 15 ⁰ C.	25
1.5.3	Translation simple à gauche, rotation à droite menant à du tourbillon.	32
1.5.4	6 degrés de liberté dans un repère cartésien.	35
2.1.1	Henri Navier (mathématicien et ingénieur français) (1785-1836).	38
2.1.2	Frederick Stokes (mathématicien irlandais)(1850-1929).	38
4.1.1	Un tourbillon vu par Leonardo de Vinci (1452-1519).	53
4.2.1	Modélisation des turbulences (Atmosphère).	56
5.0.1	La grande vague au large de Kanagawa (Hokusai, c. 1830).	69

Liste des principales notations

ε	Le parametre de dissipation artificielle	1
ν	La viscosité cinématique	23
$L^p(\Omega)$	Les espaces L^p	5
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω	5
V_s	Espaces de Hilbert	7
V'_s	L'espace dual de V_s	8
Re	Le nombre de Reynolds	26
G	Le nombre de Grashof	28
Δ	Le laplacien	8
$(-\Delta)^l$	l -laplacien	8
$b(.,.,.)$	Forme trilinéaire	8
$B(.,.)$	Forme bilinéaire	9
∇	Nabla	36
$\nabla \cdot$	La divergence	9
$\nabla \times$	Le rotationnel	31
S_ε	Semigroupe	45
\mathfrak{A}_ε	Attracteur	48
Tr	Opérateur trace	61
ϵ	Le taux moyen de dissipation de l'énergie	63
l_0	L'échelle de longueur typique de la circulation	57
l_ϵ	L'échelle de longueur de dissipation de Kolmogorov	57
$\dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon)$	Dimension fractale	61
$\dim_H(\mathfrak{A}_\varepsilon)$	Dimension de Hausdorff	61

Introduction

La première mise en équation du mouvement d'un fluide fut réalisée par L. Euler en 1755. Dans son célèbre mémoire intitulé «Principes généraux du mouvement des fluides », présenté en 1755 devant l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin et publié deux années plus tard, Euler s'attaque aux écoulements tridimensionnels. Il s'agit de l'un des premiers exemples d'équations aux dérivées partielles dans l'histoire des mathématiques. C'est au cours du 19-ième siècle que l'on a su modéliser un écoulement visqueux. Les équations régissant ce type d'écoulement portent le nom d'équations de Navier-Stokes. Elles résultent du principe de conservation de la masse, du principe fondamental de la dynamique et du premier principe de la thermodynamique. Le système est complété par des "lois de comportement" qui dépendent de la nature du fluide considéré.

Parmi les différents modèles d'écoulements étudiés, celui qui va nous intéresser dans ce travail est l'écoulement d'un fluides hyper visqueux. Le modèle de l'écoulement hyper-visqueux incompressible dans une région bornée de \mathbb{R}^d se réduit aux équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon (-\Delta)^l u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p &= f(x), \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \\ p(x + Le_i, t) &= p(x, t), \quad u_\varepsilon(x + Le_i, t) = u_\varepsilon(x, t) \quad i = 1, \dots, d \quad t \in (0, \infty) \\ u_\varepsilon(x, 0) &= u_{\varepsilon 0}(x), \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

où $\Omega = (0, L)^d$ et (e_1, \dots, e_d) est la base canonique de \mathbb{R}^d . Ici ε ($\varepsilon > 0$) est le paramètre de dissipation artificielle et ν ($\nu > 0$) est la viscosité cinématique du fluide, avec $l > 1$. La fonction u_ε est le champ de vecteurs vitesse, p est la pression et f est un champ de forces donné. Pour $\varepsilon = 0$, le modèle se réduit au système de Navier-Stokes [10, 11, 17, 21, 36, 50].

L'existence et l'unicité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes modifiées ont été établies par Lions [35] pour $l \geq (d+2)/4$, où d est la dimension de l'espace.

Ce type de régularisation a été proposé par Ladyzhenskaya [29] et Lions [36], qui a ajouté le terme d'hyperviscosité artificielle $(-\Delta)^{(l/2)}$, $l > 2$ aux équations de Navier-Stokes, voir par exemple [9].

L'hyperviscosité a été largement utilisée pour des simulations numériques des turbulences [1, 6] et en simulations des flux océaniques et atmosphériques (voir [33]) ou pour contrôler des équations de Navier-Stokes [47].

L'apport de notre travail est de montrer l'effet de l'hyperviscosité sur la turbulence tridimensionnelle. Dans la première partie de cette thèse, nous montrons que les solutions faibles des équations (0.0.1) convergent fortement vers les solutions correspondantes des équations de Navier-Stokes lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour chaque $d \leq 4$. Cet résultat peut s'étendre à chaque domaine Ω d'épaisseur bornée dans une direction (On dit que Ω est d'épaisseur bornée dans une direction s'il existe une direction L telle que la projection de Ω sur L soit bornée [35]).

Le résultat obtenu donne une réponse complète à plusieurs problèmes (voir par exemple J. L. Lions [35, Remarque 8.2. SecII]), sur un ouvert Ω quelconque de \mathbb{R}^d , la dimension d étant ≤ 4 . En outre, on complète, dans une certaine mesure, les travaux fondamentaux de Lions [36] (où seulement la convergence faible a été prouvée). Les résultats présentés dans cet ouvrage peuvent être vus comme une amélioration des résultats de convergence annoncée par Yuh-Roung et Sritharan [42, 43] ($l = 2$, $d = 2$ et $d = 3$) pour deux raisons: d'une part, nous considérons une dimension $d \leq 4$, d'autre part le terme de viscosité ici est d'ordre $l \geq \sup((d/2), ((d+2)/4))$.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous considérons le système (0.0.1) avec $l = 2$. C'est une perturbation du système de Navier-Stokes 3D par l'ajout d'un terme de viscosité artificielle d'ordre quatre (carré du laplacien). Nous montrons l'existence des ensembles absorbants. Ce fait implique que le système ($l = 2$) possède un attracteur global \mathfrak{A}_ε .

Enfin, nous obtenons des différentes estimations de la dimension fractale et de Hausdorff de l'attracteur global \mathfrak{A}_ε en termes de la théorie de Landau-Lifschitz du nombre de degrés de liberté de l'écoulement turbulent [17, 32, 49]. En fait, une telle estimation qui

améliore les estimations de Landau-Lifschitz a déjà été réalisée par Avrin [1], mais les termes d'hyperviscosité sont spectralement ajoutés aux équations de Navier-Stokes sans montrer la convergence forte des solutions du système perturbé ou la différentiabilité du semigroupe associé.

Ainsi, nous retrouvons l'amélioration de la puissance au cube, c'est à dire l'obtention d'une proportionnelle liée à $G^{p/2}$ pour $p < 3$, G étant le nombre de Grashof. Nous représentons alors un nouveau résultat, bien que les lecteurs familiers avec les techniques utilisées pour l'étude des attracteurs peuvent prévoir qu'un tel résultat est possible.

Cette thèse est organisée de la façon suivante.

Un premier chapitre est consacré aux outils mathématiques. Le second chapitre est consacré à la convergence forte du système de Navier-Stokes avec hyperviscosité vers la solution du système conventionnel lorsque le paramètre de régularisation ε tend vers zéro, en dimension $d \leq 4$.

Dans les chapitres 3 et 4, nous considérons le cas où $l = 2$. Nous montrons l'effet de l'hyperviscosité sur l'écoulement turbulent en $3D$. Le chapitre 3 présente la méthode de la preuve de l'existence d'un attracteur global \mathfrak{A}_ε et montre que le système ($l = 2$) possède un attracteur global compact \mathfrak{A}_ε . Ensuite, nous montrons que cet attracteur est de dimension finie.

Enfin, dans un quatrième et dernier chapitre, nous montrons que l'utilisation de ce terme de viscosité artificielle conduit à tronquer le nombre de degrés de liberté des solutions de ces équations.

La présente étude suggère que le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité est un modèle tri-dimensionnel intéressant pour l'étude de la turbulence des fluides.

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

Sommaire

1.1	Quelques outils d'analyse fonctionnelle	5
1.1.1	Espaces de Sobolev	5
1.1.2	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	6
1.1.3	Espaces de Sobolev des fonctions périodiques	7
1.2	Rappel sur quelques inégalités fondamentales	8
1.2.1	Lemme classique de Gronwall	10
1.2.2	Lemme uniforme de Gronwall	10
1.3	Attracteurs	12
1.4	Dimension fractale et dimension de Hausdorff	15
1.5	Notion de viscosité dans un fluide en mouvement	23
1.5.1	Nombre de Reynolds	26
1.5.2	Nombre de Grashof	28
1.5.3	La cascade de Kolmogorov	29
1.5.4	Degrés de liberté	34

Ce chapitre est consacré au rappel de quelques résultats fondamentaux qui seront utilisés par la suite dans le développement de ce travail.

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous n'avons pas l'intention de présenter ici la théorie des espaces de Sobolev. Nous allons simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces notions de base, (pour cette section voir [8, 36, 46, 49]).

Les notions introduites dans cette section seront utilisées dans tous les chapitres ultérieurs. Nous rappellerons au moment opportun les résultats plus élaborés sur les espaces de Sobolev dont nous aurons besoin.

1.1.1 Espaces de Sobolev

Sur Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on introduit les espaces suivants⁽¹⁾ :

1. $L^p(\Omega)$ = espace des (classes de) fonctions f mesurables telles que (p étant donné avec $1 \leq p \leq \infty$) :

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty; \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.1.1)$$

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty; \quad p = \infty, \quad (1.1.2)$$

muni de la norme (1.1.1) si $p \neq \infty$ et (1.1.2) si $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach; si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme (1.1.1) (où $p = 2$) étant donné par

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx. \quad (1.1.3)$$

2. $\mathcal{D}(\Omega)$ = espace des fonctions \mathcal{C}^∞ et à support compact dans Ω . Etant donné une suite $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ on dira que $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

⁽¹⁾Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

(i) $\exists K$ fixé tel que $K \subset\subset \Omega$, $\text{supp}\varphi_j \subset K \forall j$;

(ii) on a, $\forall \alpha$, $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ uniformément sur Ω où l'on a posé :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n. \quad (1.1.4)$$

3. $\mathcal{D}'(\Omega)$ = espace des distributions sur Ω = espace des formes $\varphi \rightarrow (f, \varphi)$ linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire, $(f, \varphi_\alpha) \rightarrow 0$ si $\varphi_\alpha \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$). On dira que $f_j \rightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $(f_j, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

4. Si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on définit $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (et cela $\forall \alpha$) par

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (1.1.5)$$

En outre l'application $f \rightarrow D^\alpha f$ de $\mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue.

1.1.1.1 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ On appelle " espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ " que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}. \quad (1.1.6)$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}; \quad 1 \leq p < \infty, \\ |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)}; \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.1.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit X un espace de Banach de norme notée $|\cdot|_X$; on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \rightarrow f(t)$ fortement mesurables de $[0, T] \rightarrow X$ (pour la mesure dt) telles que

$$\begin{aligned} |f(t)|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T |f(t)|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (p \neq \infty), \\ |f(t)|_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{t \in [0,T]} \text{ess.} |f(t)|_X. \end{aligned}$$

C'est un espace de Banach.

On désigne par $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ l'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$\mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X),$$

où, de façon générale $\mathcal{L}(Y; X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $Y \longrightarrow X$, si $Y = X$ on la note $\mathcal{L}(X)$.

1.1.3 Espaces de Sobolev des fonctions périodiques

Nous introduisons les notations et les définitions de la norme des espaces fonctionnels qui seront utilisées dans la suite de la rédaction de cette thèse. Nous désignons par $H_{per}^m(\Omega)$, l'espace de Sobolev des fonctions périodiques muni du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{|\beta| \leq m} (D^\beta u, D^\beta v)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\beta| \leq m} (\|D^\beta u\|_{L^2(\Omega)}^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rappelons qu'ici $\Omega = (0, L)^d$ et $H^{-m}(\Omega)$ dénote l'espace dual de $H_{per}^m(\Omega)$.

On désigne par $\dot{H}^m(\Omega)$ le sous espace de $H_{per}^m(\Omega)$ des fonctions de moyenne nulle

$$\dot{H}^m(\Omega) = \{u \in H_{per}^m(\Omega); \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}. \quad (1.1.8)$$

Pour $m = 0$, nous avons $\dot{H}^0(\Omega) = \dot{L}^2(\Omega)$.

- Nous introduisons les sous espaces suivants V_s , $s \in \mathbb{R}^+$ qui sont importants pour notre analyse. Nous définissons les espaces V_s comme la fermeture de

$$\mathcal{V}_{per} = \{u \in \mathcal{C}_{per}^\infty(\bar{\Omega}); \nabla \cdot u = 0, \int_{\Omega} u(x) dx = 0\} \quad (1.1.9)$$

dans les espaces $H^s(\Omega)$, où \mathcal{C}_{per}^∞ est l'espace des fonctions périodiques de classe \mathcal{C}^∞ , qui sont présentés et étudiés par R. Temam [49, Chapter III, Section 2]. Nous renvoyons le lecteur au livre de Temam pour plus de détails sur ces espaces [50].

- On désigne par V l'espace V_0 muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2(\Omega)}$ et la norme $\|u\| = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$.

- V_1 est l'espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_1 = \|u\|_{V_1}$. La norme induite par $H^1(\Omega)$ et la norme $\|\nabla u\|$ sont équivalentes dans V_1 .
- V_2 est l'espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_2 = \|u\|_{V_2}$. Dans V_2 la norme induite par $H^2(\Omega)$ est équivalente à la norme $\|\Delta u\|$.
- V_s' est l'espace dual de V_s .

Opérateur de Stokes

Dénotons par A l'opérateur de Stokes

$$Au = -\Delta u = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \text{ pour chaque } u \in D(A) = V_2. \quad (1.1.10)$$

Les valeurs propres de A sont $\{\lambda_j\}_{j=1}^{j=\infty}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et l'ensemble des vecteurs propres orthonormaux $\{w_j\}_{j=1}^{j=\infty}$ correspondant est complet dans V_0

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad w_j \in D(A), \forall j.$$

La théorie spectral permet de définir les puissances A^l de A pour $l \geq 1$,

A^l est un opérateur non borné auto-adjoint dans V_0 avec un domaine $D(A^l)$ dense dans $V_2 \subset V_0$. Nous désignons par

$$A^l u = (-\Delta)^l u \text{ pour } u \in D(A^l) = V_{2l}. \quad (1.1.11)$$

L'espace $D(A^l)$ est doté du produit scalaire et de la norme

$$(u, v)_{D(A^l)} = (A^l u, A^l v), \quad \|u\|_{D(A^l)} = \{(u, v)_{D(A^l)}\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.12)$$

1.2 Rappel sur quelques inégalités fondamentales

Définissons maintenant la forme trilinéaire $b(., ., .)$ associé au terme inertiel

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx. \quad (1.2.1)$$

la propriété de continuité de la forme trilinéaire permet de définir (utilisant le théorème de représentation de Riesz) un opérateur bilinéaire continue $B(u, v); V_2 \times V_2 \rightarrow V_2'$ défini par

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w), \quad \forall w \in V_2. \quad (1.2.2)$$

Rappelons que pour tout u qui satisfait

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.2.3)$$

nous avons

$$b(u, u, u) = 0 \text{ et } b(u, v, w) = -b(u, w, v). \quad (1.2.4)$$

Dorénavant, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, c_i dénotera une constante positive qui ne dépend que du domaine. De même, la forme trilinéaire $b(u, v, w)$ satisfait l'inégalité (voir [46, Lemma 61.1])

$$|b(u, v, u)| \leq c_1 \|u\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_1^{\frac{3}{2}} \|v\|_1 \text{ pour chaque } u, v \in V. \quad (1.2.5)$$

Nous rappelons quelques inégalités connues qui seront utiles dans la suite.

La forme trilinéaire $b(., ., .)$ est continue sur $\dot{H}^{m_1}(\Omega) \times \dot{H}^{m_2+1}(\Omega) \times \dot{H}^{m_3}(\Omega)$, $m_i \geq 0$

$$|b(u, v, w)| \leq c_2 \|u\|_{m_1} \|v\|_{m_2+1} \|w\|_{m_3}, \quad m_3 + m_2 + m_1 \geq \frac{3}{2}, \quad (1.2.6)$$

voir par exemple [30]. Inégalité d'Agmon (voir, [11])

$$\|u\|_{\infty} \leq c_3 \|u\|_1^{\frac{1}{2}} \|Au\|_1^{\frac{1}{2}} \text{ pour chaque } u \in V_2. \quad (1.2.7)$$

Inégalité de Young (cf,[8])

$$ab \leq \frac{\sigma}{p} a^p + \frac{1}{q\sigma^{\frac{q}{p}}} b^q, \quad a, b, \sigma > 0, \quad p > 1, \quad q = \frac{p}{p-1}. \quad (1.2.8)$$

Inégalité de Poincaré (cf,[8])

$$\lambda_1 \|u\|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 \text{ pour chaque } u \in V. \quad (1.2.9)$$

Inégalité de Hölder [8, 17]

$$(f \cdot g) \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad (1.2.10)$$

pour chaque $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, où $q = p/p - 1$ ($1/p + 1/q = 1$), $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Pour montrer des bornes uniformes dans différentes normes nous utilisons les deux lemmes de Gronwall.

1.2.1 Lemme classique de Gronwall

Lemme 1.2.1 Soient $0 \leq t_0 \leq t_1$, $\psi \in L^1(t_0, t_1)$, $\psi \geq 0$ p.p. et $\phi \in L^\infty(t_0, t_1)$, $\phi \geq 0$ p.p., telles que

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds, \quad (1.2.11)$$

avec K et L des constantes positives, alors

$$\phi(t) \leq K \exp[L \int_{t_0}^t \psi(s)ds], \text{ pour } t \in [t_0, t_1]. \quad (1.2.12)$$

Preuve. L'inégalité (1.2.11) est équivalente à

$$\frac{\phi(t)}{K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq 1, \quad (1.2.13)$$

multiplions (1.2.13) par $L\psi(t)$ et intégrons sur $[t_0, t_1]$, on trouve

$$\int_{t_0}^t \frac{L\psi(s)\phi(s)ds}{K + L \int_{t_0}^s \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau} ds \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds, \quad (1.2.14)$$

alors,

$$\log[K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds] - \log K \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds, \quad (1.2.15)$$

et finalement

$$K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \leq K \exp[L \int_{t_0}^t \psi(s)ds], \quad (1.2.16)$$

en utilisant (1.2.11) dans le membre de gauche de cette inégalité on trouve le résultat. ■

1.2.2 Lemme uniforme de Gronwall

Lemme 1.2.2 Soient g, h, y trois fonctions positives localement intégrables sur $(t_0, +\infty)$ tel que y' est localement intégrables sur $(t_0, +\infty)$, et qui satisfont

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h \text{ pour } t \geq t_0, \quad (1.2.17)$$

$$\int_t^{t+r} g(s) ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s) ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s) ds \leq a_3 \text{ pour } t \geq t_0, \quad (1.2.18)$$

où r, a_1, a_2, a_3 , sont des constantes positives, alors

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1), \text{ pour chaque } t \geq t_0. \quad (1.2.19)$$

Preuve. Supposons que $t_0 \leq t \leq s \leq t + r$. Nous remplaçons t par s dans (1.2.17) et nous multiplions par

$$\exp\left[-\int_t^s g(\tau)d\tau\right], \quad (1.2.20)$$

pour obtenir la relation suivante

$$\frac{d}{ds}(y(s) \exp\left[-\int_t^s g(\tau)d\tau\right]) \leq h(s) \exp\left[-\int_t^s g(\tau)d\tau\right] \leq h(s). \quad (1.2.21)$$

Intégrons entre t_1 et $t + r$

$$\begin{aligned} y(t+r) &\leq y(t_1) \exp\left[\int_{t_1}^{t+r} g(\tau)d\tau\right] + \left(\int_{t_1}^{t+r} h(s)ds\right) \exp\left[\int_t^{t+r} g(\tau)d\tau\right] \\ &\leq (y(t_1) + a_2) \exp(a_1). \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Intégrons cette inégalité, par rapport à t_1 entre t et $t + r$, nous obtenons (1.2.19). ■

Pour plus de détails, voir Temam [49, Lemma III 1.1].

1.3 Attracteurs

Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble, une courbe ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations [27, 46, 49] et qui est un constituant de base de la théorie du chaos.

Exemple 1.3.1 (*L'attracteur de Lorenz*)

L'attracteur de Lorenz, baptisé d'après son découvreur Edward Lorenz, est une structure fractale correspondant au comportement à long terme de l'oscillateur de Lorenz. Cet oscillateur est un système dynamique tridimensionnel qui engendre un comportement chaotique dans certaines conditions. L'attracteur montre comment les différentes variables du système dynamique évoluent dans le temps en une trajectoire non périodique.

L'attracteur et les équations associées ont été rendues publiques en 1963 par Edward Lorenz, qui les avait extraites d'une version simplifiée des équations de convection qui surviennent dans l'atmosphère. Il est défini comme l'ensemble des trajectoires à long terme du système dynamique de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma (y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t), \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où σ est appelé nombre de Prandtl et ρ est appelé nombre de Rayleigh. σ , ρ et β sont strictement positifs, figure 1.3.1.

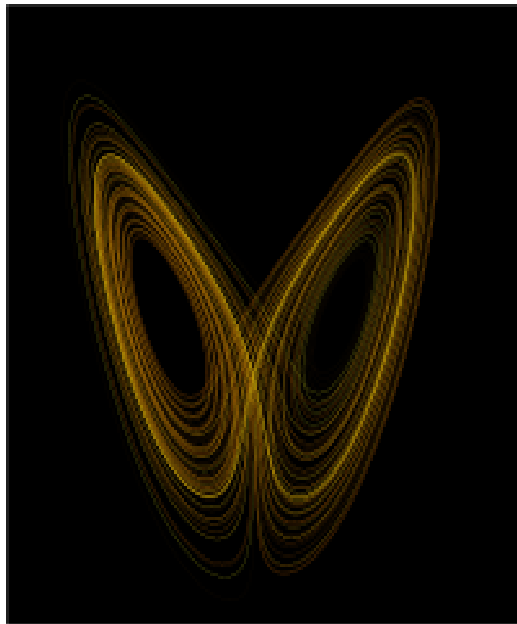


Figure 1.3.1 : Attracteur étrange de Lorenz (1963).

1.3.1 Système dynamique et théorie de base

Soit W un espace métrique et $M \subseteq W$.

1. Une application $\sigma = \sigma(u, t) \in \mathcal{L}(M)$ où $\sigma : M \times [0, \infty) \rightarrow M$ est un semigroupe sur M si elle satisfait:

- a. $\sigma(w, 0) = w$ pour chaque $w \in M$,
- b. $\sigma(\sigma(w, s), t) = \sigma(w, s + t)$ pour chaque $w \in M$ et $s, t \in \mathbb{R}^+$,
- c. L'application $\sigma : M \times [0, \infty) \rightarrow M$ est continue.

2. Un ensemble $K \subset W$ est un invariant pour σ si $\sigma(t)K = K$ pour $t \geq 0$.

3. Un ensemble borné B_a de W est un absorbant pour σ si quel que soit B borné de W , il existe $T_{(B)}$ tel que $\sigma(t)B \subset B_a, \forall t \geq T_{(B)}$.

4. Soit A et B deux ensembles de W ; A attire B , si

$$dist_W(\sigma(t)u, A) \leq \epsilon, \text{ pour chaque } t \geq T_{(B)} \text{ et } u \in B, \forall \epsilon \geq 0. \quad (1.3.2)$$

5. Un ensemble $\mathfrak{A} \subset M$ est un attracteur pour σ sur M , si

- i). \mathfrak{A} est un ensemble compact invariant de M ,
- ii). \mathfrak{A} est un ensemble absorbant (\mathfrak{A} attire tout ensemble borné de W).

Pour plus d'explications sur les systèmes dynamiques le lecteur peut se référer aux travaux de Sell [46] et Temam [49].

1.4 Dimension fractale et dimension de Hausdorff

1.4.1 Définition de la dimension fractale

Soit K un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 . Désignons par $N(\rho; K)$ le nombre minimum de disques fermés de rayon ρ nécessaire pour recouvrir K .

On définit alors la dimension fractale de K , notée D_f , par

$$D_f = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log N(\rho; K)}{\log \frac{1}{\rho}} \quad (1.4.1)$$

si cette limite existe.

Exemple 1.4.1 *Les ensembles dites de Julia $J(f)$, décrits par Gaston Julia, sont des fractales, sous-ensembles du plan complexe associés au comportement dynamique d'une fonction holomorphe f , voir figure 1.4.1.*

L'ensemble de Julia pour $z^2 - 1$ est de dimension $D_f = 1,2683$.

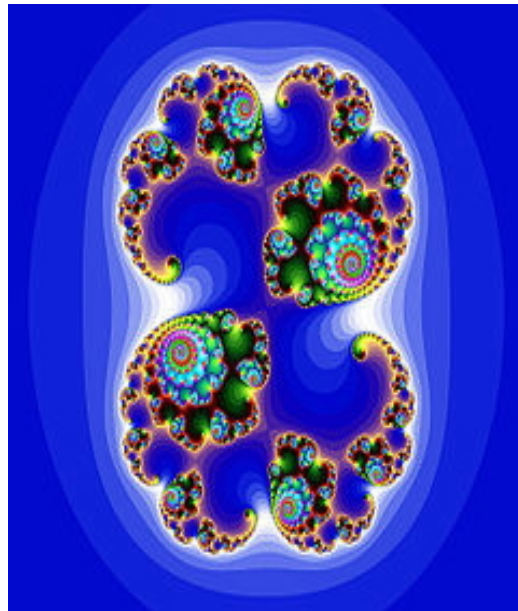


Figure 1.4.1 : Ensemble de Julia.

1.4.2 Notions équivalentes de dimensions (Différentes façons de calculer D_f)

Soit K un compact de \mathbb{R}^n . Supposons que la dimension fractale de K existe et est égale à D_f , voir par exemple le livre de Mandelbrot [38].

Désignons par $\alpha(\rho; K)$ le nombre minimum d'hypercubes de cotée ρ nécessaire pour recouvrir K . On a

$$D_f = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log \alpha(\rho; K)}{\log \frac{1}{\rho}}. \quad (1.4.2)$$

Considérons un maillage de \mathbb{R}^n par des hypercubes de cotés ρ et désignons par $\beta(\rho; K)$ le nombre d'hypercubes de ce maillage qui contiennent des points de K , on a

$$D_f = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log \beta(\rho; K)}{\log \frac{1}{\rho}}. \quad (1.4.3)$$

On appelle souvent cette quantité "**box-counting dimension**". C'est la plus utilisée, en pratique, pour évaluer D_f .

Désignons par $\gamma(\rho; K)$ le plus grand nombre de boules disjointes de rayon ρ et dont les centres appartiennent à K . On a

$$D_f = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log \gamma(\rho; K)}{\log \frac{1}{\rho}}. \quad (1.4.4)$$

Ces fractales peuvent être caractérisées par une dimension qui n'est pas un nombre entier. Les objets de dimension entière 0, 1, 2 et 3 sont, par exemple, des points (Nombres rationnels, la dimension de Hausdorff des ensembles dénombrables vaut toujours zéro. Ces ensembles ne peuvent être fractals.), des lignes (courbe de Takagi ou Blanc-manger), des surfaces (Arbre de Pythagore, certains ensembles de Julia, courbe de Hilbert) et des volumes (Extension de l'ensemble de Mandelbrot, Courbe de Hilbert étendue à trois dimensions). Pour imaginer un objet de dimension fractale entre 2 et 3 pensez par exemple à un chou-fleur.

La dimension fractale de la turbulence plus précisément ce que les mathématiciens appellent la dimension de Hausdorff de la dissipation d'énergie est très proche de trois.

Si c'était vraiment trois, la théorie proposée par Kolmogorov en 1941 serait exacte, ce qui explique le succès qu'a rencontré cette théorie dans l'élaboration de modèles empiriques pour les calculs des ingénieurs.

Le calcul de telles dimensions à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides reste un problème ouvert. Toutefois des progrès importants ont été faits ces

dernières années en utilisant des outils mathématiques empruntés à la théorie quantique des champs, appliqués à un modèle simplifié dû à l'américain Robert Kraichnan. Dans ce modèle on suppose l'écoulement turbulent connu et l'on cherche à caractériser les propriétés d'un traceur transporté par cette turbulence, comme illustré par la figure 1.4.2 d'Antonio Celani, Alain Noullez et Massimo Vergassola, représentant une concentration d'un traceur obtenue par simulation. On peut imaginer par exemple qu'il s'agit de la concentration d'un polluant lâché dans l'océan. On sait maintenant calculer les propriétés fractales de tels polluants, mais il faudra sans doute des années avant de pouvoir mener à bien une entreprise comparable pour les propriétés fractales de la turbulence elle-même. Pour plus de détails, veuillez consulter le livre de Mandelbrot [38].

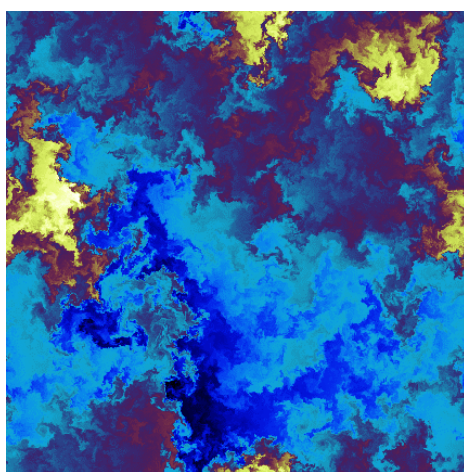


Figure 1.4.2 : Concentration d'un scalaire passif (polluant) transporté par un écoulement turbulent bi-dimensionnel du type que l'on trouve dans l'atmosphère et l'océan, simulé numériquement sur une grille (2048x2048). Le scalaire est fortement intermittent et possède des propriétés d'échelle " anormales " qui ne peuvent être prédites par l'analyse dimensionnelle. Les concentrations les plus faibles sont en bleu et les plus fortes sont en jaune⁽¹⁾.

⁽¹⁾Figure de Celani (A.), Noullez (A.) et Vergassola (M.), Observatoire de la Côte d'Azur, laboratoire G.-D. Cassini , UMR 6529 ; simulations à l'IDRIS, CNRS.

1.4.3 Définition de la Dimension de Hausdorff

Si $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, on définit le diamètre de \mathcal{U} par

$$\text{diam}(\mathcal{U}) = \{\sup |x - y| \mid x \text{ et } y \in \mathcal{U}\}. \quad (1.4.5)$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, un recouvrement ouvert de K est une famille dénombrable (ou finie) $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}_n, \dots\}$ de sous-ensembles ouverts telle que

$$K \subset \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i. \quad (1.4.6)$$

Soient s et ρ deux nombres positifs, on pose

$$h_{\rho}^s(K) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(\mathcal{U}_i))^s \right), \quad (1.4.7)$$

où l'inf est pris sur tous les recouvrements ouverts $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}_n, \dots\}$ de \mathcal{U} tels que $(\text{diam}(\mathcal{U}_i) < \rho$, pour $i = 1, 2, 3, \dots$. Cette quantité peut être infinie. On a

$$h_{\rho_1}^s(K) \leq h_{\rho_2}^s(K) \quad \text{si } \rho_1 \leq \rho_2 \quad (1.4.8)$$

c'est-à-dire avec s fixé, la fonction $\rho \rightarrow h_{\rho}^s(K)$ est décroissante (et elle est évidemment positive). Ainsi,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} h_{\rho}^s(K) \quad (1.4.9)$$

existe (elle peut être infinie). Posons

$$h^s(K) = \lim_{\rho \rightarrow 0} h_{\rho}^s(K) \in [0, \infty] \quad (1.4.10)$$

(Cette quantité est appelée mesure s -dimensionnelle de Hausdorff.).

Nous avons le résultat fondamental.

Théorème 1.4.2 *Soit K un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^N . Alors, il existe un unique nombre réel $D_H \in [0; N]$ tel que*

$$h^s(K) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_H \\ 0 & \text{si } s > D_H \end{cases} \quad (1.4.11)$$

D_H est appelé la dimension de Hausdorff de K que l'on désigne aussi $D_H(K)$.

Pour la démonstration de ce résultat et de ce qui suit, voir le livre de Falconer [14].

Si $K \subset \mathbb{R}^N$ est borné, on a toujours

$$0 \leq D_H(K) \leq D_f(K) \leq N. \quad (1.4.12)$$

Note: La dimension de Hausdorff est aussi souvent appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch, car même si elle a été introduite par le mathématicien Felix Hausdorff (1868 - 1942), le mathématicien russe Abram Besicovitch (1891 - 1970) a contribué à son étude et à son développement.

Exemple 1.4.3 *Le triangle de Sierpiński*

Le triangle de Sierpiński (voir figure 1.4.4), appelé aussi par Mandelbrot le joint de culasse de Sierpiński, est une fractale, du nom de Waclaw Sierpiński. Il peut s'obtenir à partir d'un triangle "plein", par une infinité d'itérations consistant à diviser par deux la taille du triangle puis à en juxtaposer trois exemplaires par leurs sommets pour former un nouveau triangle. À chaque itération le triangle est donc de même taille, mais "de moins en moins plein", (voir figure 1.4.3).

Le triangle de Sierpiński a une dimension fractale ou une dimension de Hausdorff égale à $\log 3 / \log 2$, égal à environ 1,585, ce qui vient du fait qu'il est la réunion de trois copies de lui-même, chacune étant réduite d'un facteur 1/2.



Figure 1.4.3 : Construction du triangle de Sierpiński.

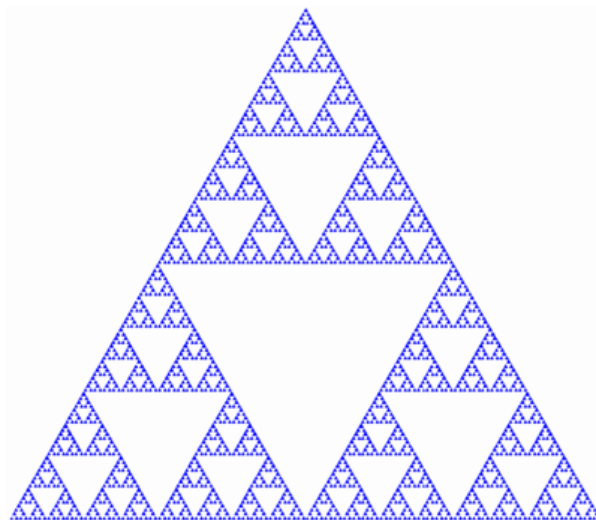


Figure 1.4.4 : Triangle de Sierpiński.

1.5 Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La viscosité est en fait une quantité tensorielle mais il est possible, dans certains cas, de l'exprimer sous la forme d'une grandeur scalaire. Plusieurs grandeurs physiques sont reliées à la viscosité.

1. Viscosité de cisaillement

La viscosité de cisaillement peut être vue comme la résistance à l'écoulement des différentes couches de fluides les unes sur les autres.

2. La viscosité dynamique

La viscosité dynamique μ (ou encore η) se mesure en pascal-seconde (Pa.s). Une façon de définir la viscosité dynamique est de considérer deux couches d'un fluide notées (H) et (B), la couche (H) étant animée d'une vitesse relative à (B) notée dV et dirigée suivant x (figure 1.5.1). Sous l'effet de la viscosité, une force F s'exerce sur la couche (H). La viscosité dynamique μ est définie par la relation entre la norme de cette force et la vitesse relative dV

$$F = \mu S \frac{dV}{dz} \quad (1.5.1)$$

S étant la surface de chaque couche, et dz l'épaisseur de fluide séparant les deux couches.

3. La viscosité cinématique

La viscosité cinématique ν s'obtient en divisant la viscosité dynamique μ par la masse volumique ρ soit

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.5.2)$$

Elle s'exprime en m^2/s . Dans le système CGS la viscosité cinématique s'exprime en Stokes (St). Un fluide est dit non-visqueux (ou parfait) si l'on peut négliger les contraintes tangentielles. Pour tous les liquides, la viscosité diminue lorsque la température augmente. Pour plus de détails voir le livre de L. Landau et E. Lifshitz [32].

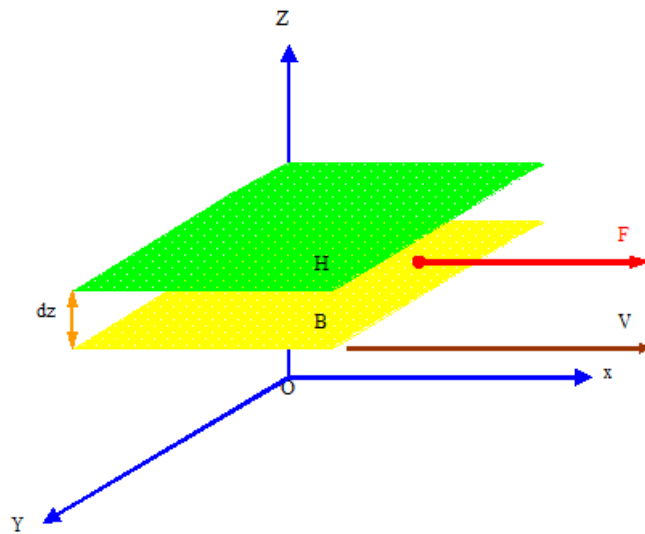


Figure 1.5.1 : Force de viscosité agissant dans un fluide.

Fluide	Viscosité
Ether	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Chloroforme	$6,5 \cdot 10^{-4}$
Benzène	$7 \cdot 10^{-4}$
Eau	$11,4 \cdot 10^{-4}$
Alcool	$13 \cdot 10^{-4}$
Mercure	$16 \cdot 10^{-4}$
Kérosène	$18,3 \cdot 10^{-4}$
Glycérine	$130 \cdot 10^{-4}$
Huile de ricin	$134 \cdot 10^{-4}$

Figure 1.5.2 : Quelques valeurs de la viscosité à 15°C .

1.5.1 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds (Re) est un nombre sans unité utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire ou turbulent). Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. On le définit de la manière suivante

$$Re = \frac{uL}{\nu} \quad (1.5.3)$$

avec u vitesse du fluide [m/s], L longueur caractéristique [m] et ν viscosité cinématique du fluide [m^2/s].

Ce nombre se définit comme le rapport entre le transport moyen du fluide, proportionnel à sa vitesse, et le frottement moyen dû à la viscosité du fluide, ce qui correspond à la partie de l'énergie cinétique qui est dissipée en chaleur sous l'effet du frottement des couches fluides entre elles, ou au contact des obstacles solides. L'ordre de grandeur du nombre de Reynolds est de 103 à 109 pour les écoulements rencontrés en aérodynamique, de 109 à 1012 pour les écoulements atmosphériques et de 1012 à 1020 pour les écoulements astrophysiques. Cet ordre de grandeur permet de classer les régimes d'écoulement. La distinction tient en particulier au fait que les écoulements faiblement turbulents présentent un petit nombre de degrés de liberté excités et leur comportement chaotique essentiellement temporel, tandis que les écoulements turbulents développés présentent un très grand nombre de degrés de liberté et un comportement chaotique, à la fois spatial et temporel. La difficulté mathématique de l'équation de Navier-Stokes provient du fait que pour les grands nombres de Reynolds, c'est-à-dire les écoulements turbulents, les termes non linéaires ne peuvent plus être négligés et donnent lieu à l'apparition d'instabilité des solutions. Ainsi, Leray, dans sa thèse (1933), interprète-t-il la turbulence d'un point de vue purement mathématique, comme la perte de la stabilité et de l'unicité des solutions linéaires de l'équation de Navier-Stokes. Cette perte intervient à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds, valeur au-delà de laquelle apparaissent simultanément plusieurs solutions turbulentes dont le comportement n'est plus alors descriptible que statistiquement, c'est à dire en moyenne. Si l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire non turbulent, son évolution est prévisible et l'information décrivant l'état du système au temps t est suffisante pour prédire l'état de celui-ci pour tout temps. Si

au temps t , on fait une erreur quant à la description de l'état du système, cette erreur reste la même au cours de l'évolution car la dynamique d'un écoulement laminaire est stable. Elle n'amplifie pas l'erreur initiale et n'est donc pas sensible aux conditions initiales. Si, par contre, l'écoulement est turbulent, il en va tout autrement. Le système devient très instable et sensible aux conditions initiales, l'erreur est amplifiée exponentiellement au cours de l'évolution et le comportement de l'écoulement n'est prévisible que pour un temps d'autant plus court que l'erreur initiale est grande.

1.5.1.1 Interprétation du nombre de Reynolds

On distingue trois principaux régimes.

Aux faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 2000), les forces de viscosité sont prépondérantes, l'accélération convective étant négligée; c'est par exemple le cas en micro fluidique. On parle d'écoulement de Stokes. L'écoulement est laminaire (des éléments de fluide voisins demeurent voisins). De plus, comme l'inertie est négligeable, l'écoulement du fluide est réversible. Cela donne lieu à des comportements surprenants: si les forces extérieures sont soudainement stoppées, le fluide s'arrête immédiatement. Qui plus est, si les forces extérieures sont inversées, le fluide repart en sens inverse: dans une célèbre expérience de G.I.Taylor, une goutte d'encre, initialement mélangée à un fluide visqueux, se reconstitue lorsque l'on inverse le mouvement.

Aux valeurs intermédiaires du Reynolds (entre 2000 et 3000 environ), les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire. Cependant, il n'est plus réversible: si l'on stoppe les forces extérieures, le fluide continue partiellement sur sa lancée.

Aux fortes valeurs du Reynolds (au-delà d'environ 3000, voire plus haut), les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient turbulent. Entre les régimes laminaires et turbulents, on parle de régime transitoire.

Dans une conduite, l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. 2300 est la valeur généralement retenue pour cette transition mais, dans des conditions soignées (paroi particulièrement lisse, stabilité de la vitesse), la transition peut se produire

pour une valeur plus élevée. On considère souvent que la transition peut se produire entre 2000 et 3000.

Deux écoulements à géométrie équivalente pour lesquels les nombres de Reynolds sont égaux sont dits semblables.

1.5.1.2 Dissipation de l'énergie

L'énergie initiale contenue dans un écoulement doit se dissiper pour se minimiser et rejoindre celle de son environnement. Pour se faire, un écoulement turbulent peut avoir recours à la diffusion de la quantité de mouvement. Néanmoins ce phénomène est lent. Un autre phénomène plus rapide va s'opérer : la dissipation par frottement grâce à la viscosité.

1.5.1.3 Rôle des tailles de tourbillons

A l'instant initial, la viscosité n'est pas prépondérante car le nombre de Reynolds est élevé (écoulement turbulent).

On remarque que si la taille caractéristique L de l'écoulement (à vitesse et viscosité constantes) diminue, le nombre de Reynolds tends vers 0 et la viscosité devient prépondérante.

1.5.2 Nombre de Grashof

Le nombre de Grashof est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité f sur les forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof (1826-1893), un physicien allemand.

Le nombre de Grashof permet de caractériser le transfert thermique dû au déplacement naturel d'un fluide. Pour f une fonction indépendante du temps appartenant à l'espace $L^2(\Omega)$, λ_1 étant la première valeur propre de l'opérateur de Stokes et ν la viscosité cinématique, le définit G en 3D, (voir [1, 17, 50]) de la manière suivante:

$$G = \frac{\|f\|_{\frac{3}{2}}}{\nu^2 \lambda_1^4}. \quad (1.5.4)$$

Le nombre de Grashof permet de caractériser le transfert thermique dû au déplacement naturel d'un fluide.

1.5.3 La cascade de Kolmogorov

La théorie de Kolmogorov (1941) est une théorie qui a contribué de façon majeure dans la compréhension de la turbulence. Elle repose sur une vision "statistique" de la turbulence. Dans cette théorie statistique les tourbillons dans l'écoulement ont une taille comprise entre les deux tailles limites suivantes: la plus grande échelle de l'écoulement l_0 (imposée par la géométrie, par exemple typiquement le diamètre d'un cylindre, le diamètre d'une cheminée, ou encore la hauteur d'une voiture) la plus petite échelle de l'écoulement l_ϵ imposée par la viscosité du fluide; cette échelle est appelée échelle de Kolmogorov, ou échelle de dissipation visqueuse

$$l_\epsilon = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.5.5)$$

où ϵ est le taux moyen de la dissipation de l'énergie dans un écoulement turbulent, voir Section 3.2.

L'échelle de Kolmogorov est l'échelle spatiale à partir de laquelle l'écoulement devient visqueux ($Re = 1$) et permet de dissiper l'énergie cinétique de l'écoulement. Elle correspond à la taille des petits tourbillons qui incarnent ce phénomène.

Il n'y a pas de tourbillons plus petits, car cette échelle est la limite de l'écoulement étudié, là où l'énergie initialement donnée au fluide se dissipe.

Ce processus est appelé cascade d'énergie: la division des grands tourbillons en tourbillons plus petits permet un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles. Ce processus est limité par l'effet de la dissipation moléculaire, qui empêche les variations de vitesse trop importantes. En pratique, ce transfert d'énergie n'est pas à sens unique, le phénomène d'appariement tourbillonnaire (en anglais backscatter) permettant le transfert ponctuel de petites structures tourbillonnaires (qui fusionnent) vers une ou des plus grosses.

Kolmogorov, en 1941, a émis l'hypothèse que cette cascade était auto-similaire : les tourbillons se divisent tous de la même manière quelle que soit leur échelle, tant qu'elle n'est ni trop petite (sinon il faut tenir compte de la viscosité) ni trop grande (les grands tourbillons dépendent de la géométrie de l'écoulement). C'est ce qu'on appelle la zone inertielle, et par des arguments d'analyse dimensionnelle, il a exprimé une loi qui caractérise l'auto-similarité de la turbulence (un peu comme une courbe fractale, quand on "zoom" sur une turbulence, on ne peut pas savoir à quelle échelle on se trouve), voir [17].

L'ordre de grandeur entre l_0 et l_ϵ est le suivant

$$\frac{l_0}{l_\epsilon} = (Re)^{\frac{3}{4}}. \quad (1.5.6)$$

La théorie de la "cascade" énergétique prédit que les tourbillons reçoivent de l'énergie des échelles plus grandes qu'eux, et la transmettent ensuite aux échelles plus petites qu'eux, et ainsi de suite jusqu'à la plus petite échelle présente dans l'écoulement, l'échelle l_ϵ .

On parle de production d'énergie lorsque les grosses structures sont générées - par un décollement par exemple - et de dissipation d'énergie lorsque les tourbillons disparaissent complètement en aval de l'obstacle. Lorsque la production d'énergie est égale à la dissipation d'énergie, on parle de turbulence "en équilibre".

Les échelles plus petites de Kolmogorov sont les plus petites échelles dans un écoulement turbulent [31] qui sont définis, par

Micro-échelles de Kolmogorov	
Échelle de longueur de Kolmogorov	$l_\epsilon = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$
Échelle de temps de Kolmogorov	$\tau_{l_\epsilon} = (\frac{\nu}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}$
Échelle des vitesses de Kolmogorov	$u_{l_\epsilon} = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}}$.

1.5.3.1 Applications

Certaines petites souffleries, (une soufflerie est une installation servant à simuler les conditions aérodynamiques d'un déplacement dans l'air), ont une grille en entrée. Cela permet de ne pas "aspirer" de gros tourbillons et de faire entrer directement des petits. Ainsi on se rapproche bien plus vite de la dimension de Kolmogorov et on obtient plus vite un écoulement laminaire, nécessaire aux observations.

La fumée recrachée d'une cigarette permet d'observer ce phénomène : les motifs dessinés par la fumée deviennent rapidement plus petits.

1.5.3.2 Tourbillon (physique)

Le tourbillon, parfois appelé vortacité (du latin vortex), est une formulation mathématique de la dynamique des fluides reliée à la quantité de vitesse angulaire ou de rotation que subit un fluide localement. Une façon simple de visualiser le tourbillon est de considérer un fluide en mouvement dans lequel on délimite un petit volume rigide. Si cette parcelle tourne par rapport à un référentiel au lieu de translater, elle tourbillonne, figure 1.5.3.

1.5.3.3 Dynamique des fluides

En dynamique des fluides, le tourbillon est le rotationnel de la vitesse du fluide. On peut également le considérer comme la circulation par unité de surface en un point dans un flux

$$\vec{rot}v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.5.7)$$

où v est le vecteur tri-dimensionnel de vitesse selon les coordonnées x , y et z et ∇ l'opérateur nabla. C'est une quantité vectorielle dont la direction est le long de l'axe de rotation du fluide.

Ainsi, pour un flux à deux dimensions quelconque (e_x et e_y), le vecteur de tourbillon se retrouve dans l'axe perpendiculaire au plan de rotation (e_z) et l'équation se réduit à

$$\vec{rot}v = \nabla \times v = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) e_z. \quad (1.5.8)$$

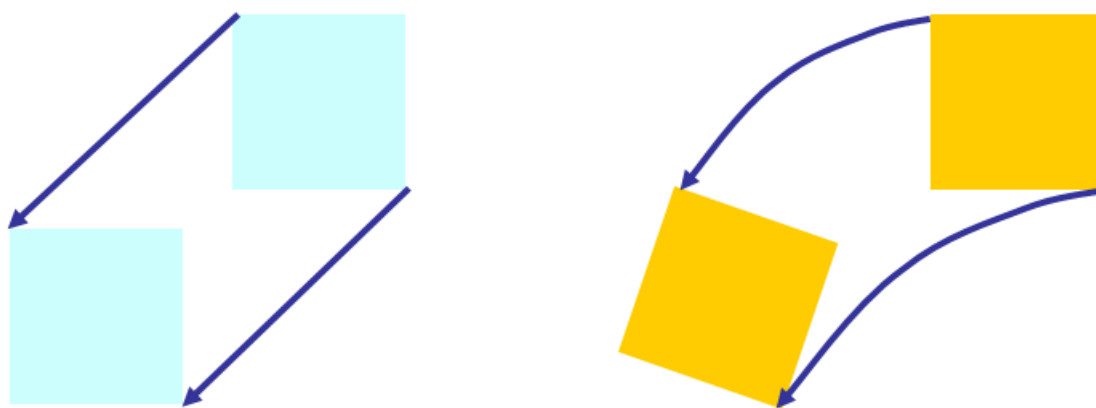


Figure 1.5.3 : Translation simple à gauche, rotation à droite menant à du tourbillon.

1.5.3.4 Météorologie et océanographie

En météorologie et en océanographie physique, le tourbillon est une propriété importante du comportement à grande échelle de l'atmosphère et de l'océan. Les deux circulations, circulation atmosphérique et circulation océanique, étant surtout horizontales, le vecteur tourbillon pour ces deux milieux est généralement vertical.

Pour l'atmosphère et l'océan, les déplacements étant horizontaux, ce paramètre est souvent appelé tourbillon vertical planétaire.

Dans l'hémisphère nord, le tourbillon est positif pour une rotation anti-horaire (cyclonique) et négative pour une rotation horaire (anti-cyclonique). C'est l'opposé dans l'hémisphère sud.

Le tourbillon en un point de l'atmosphère n'est pas conservatif en lui-même car l'épaisseur de la couche d'air peut être étirée ou compressée par le mouvement de l'air (ex. passage au-dessus d'une montagne). Cependant, le tourbillon total dans la colonne d'air est lui conservateur et on le nomme tourbillon potentiel. En effet, en général l'air subit une compression ou décompression adiabatique, l'entropie est conservée et le tourbillon total de la colonne ne changera pas. Le tourbillon potentiel devient donc une façon de suivre les mouvements verticaux dans une masse d'air avec température potentielle constante.

En météorologie, l'une des approximations est celle de l'atmosphère barotrope où il n'y a pas de variation de température dans une masse d'air. L'équation de tourbillon barotrope est donc une façon simple de prévoir le déplacement des creux et crêtes d'onde longue à une hauteur de 50 kPa. Dans les années 1950, le premier programme de prévision numérique du temps utilisa cette équation.

1.5.4 Degrés de liberté

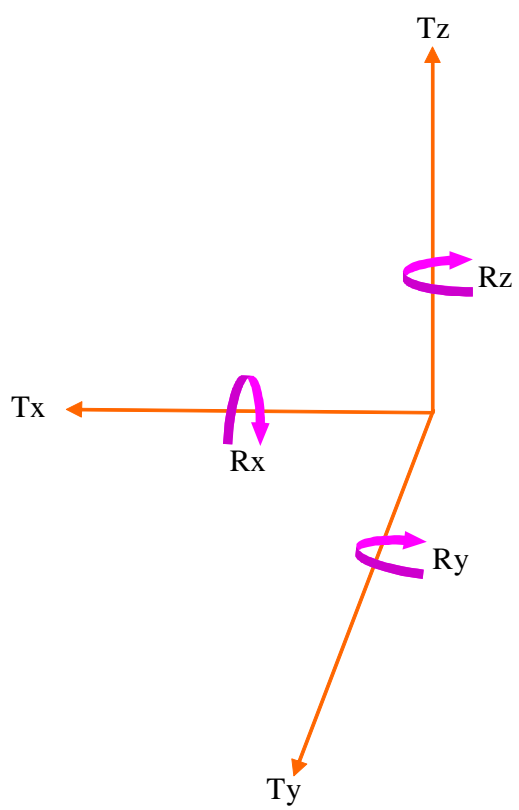
Tout solide dans l'espace possède 6 degrés de liberté voir figure 1.5.4, dont 3 translations suivant les axes X , Y , Z et 3 rotations suivant ces même axes. Une particule libre dans l'espace physique a trois degrés de liberté correspondant à trois possibles déplacements perpendiculaires. Un système composé de deux particules libres a six degrés de liberté, et un composé de N particules libres a $3N$ degrés.

Toute exigence qui diminue les degrés de liberté d'un système est appelé une contrainte holonome.

Les 6 mouvements considérés sont trois translations et trois rotations de directions indépendantes (constituant une base vectorielle).

Si on s'oriente dans l'espace à l'aide d'un repère orthonormé (O, x, y, z) les six degrés de liberté s'expriment ainsi

Degré	axe sur machine outil	mouvement pour un véhicule
Tx	Longitudinal	avance
Ty	transversal	dérive
Tz	vertical	ascension
Rx	-	roulis
Ry	-	tangage
Rz	-	lacet



Direction des degrés de liberté

Figure 1.5.4 : 6 degrés de liberté dans un repère cartésien.

Chapitre 2

La convergence forte du système avec hyperviscosité

Sommaire

2.1	Le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité	36
2.2	Résultat de convergence forte	42

2.1 Le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité

Les écoulements de fluides incompressibles sont gouvernés par les équations de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \nu \Delta + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f(x), \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u(0, x) &= u_0, \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ces équations (2.1.1), qui expriment des lois physiques de conservation, se déduisent des lois newtoniennes du mouvement. Elles relient la vitesse et la pression en chaque point de l'écoulement. Quatre fonctions inconnues doivent être déterminées : les trois composantes du vecteur vitesse et la pression. Les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires, pour lesquelles une solution analytique n'est pas connue. De plus, la théorie mathématique de ces équations est encore incomplète: si en deux dimensions d'espace (écoulement

plan) des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de solution sont connus, il n'en n'est pas de même pour trois dimensions d'espace (écoulement tridimensionnel), qui se rapproche le plus de la réalité physique [10]. Deux termes interviennent dans les équations de Navier-Stokes. Le terme de diffusion, qui est linéaire, traduit l'effet physique de la viscosité du fluide sur l'écoulement et il a pour effet de contrôler tout développement d'instabilité. Son rôle est d'autant plus important que la viscosité est plus grande. Le deuxième terme, appelé terme inertiel, est non linéaire et à l'origine des interactions qui peuvent générer des phénomènes à des échelles spatiales très différentes. Plus la vitesse de l'écoulement est grande, plus l'influence du terme inertiel dans les équations de Navier-Stokes est forte. Le comportement d'un écoulement dépend donc du rapport vitesse/viscosité. Un nombre adimensionnel, le nombre de Reynolds, permet de mesurer ce rapport. Si le nombre de Reynolds est petit, l'écoulement est régulier ou laminaire. S'il est grand – c'est à- dire supérieur à une certaine valeur, appelée Reynolds critique – l'écoulement est turbulent. Les écoulements turbulents sont les plus nombreux, aussi bien dans l'atmosphère qu'à la surface de la terre. Dans la nature, les nombres de Reynolds couramment rencontrés sont de l'ordre de plusieurs milliards. L'étude du passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent, lorsque le nombre de Reynolds augmente, a pu être faite dans certains cas en se basant sur la théorie des systèmes dynamiques (bifurcations) [21].

Dans ce chapitre, nous donnons un nouveau résultat qui assure la convergence forte des solutions du système (0.0.1) vers les solutions des équations de Navier-Stokes (2.1.1) en dimension $d \leq 4$. Ce résultat peut être prolongé à tout domaine Ω de mesure finie. Par ailleurs, nous montrons que $u_\varepsilon \in C(0, T; V_0)$.



Figure 2.1.1 : Henri Navier (mathématicien et ingénieur français) (1785-1836).



Figure 2.1.2 : Frederick Stokes (mathématicien irlandais)(1850-1929).

En utilisant les opérateurs définis au premier chapitre, nous pouvons écrire le système d'évolution modifié (0.0.1) sous la forme d'évolution

$$\begin{aligned} \frac{du_\varepsilon}{dt} + \varepsilon A^l u_\varepsilon + \nu A u_\varepsilon + B(u_\varepsilon, u_\varepsilon) &= f, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u_{\varepsilon 0}(x) &= u_{\varepsilon 0}, \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

les résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème (0.0.1) on peut les trouver dans les travaux de J. L. Lions [35] et [36, Chap.1, Remarque 6.11].

Le théorème suivant rassemble les principaux résultats de ces travaux

Théorème 2.1.1 *Pour $l \geq \frac{d+2}{4}$, d est la dimension de l'espace, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $f \in L^2(0, T; V_0')$ et $u_{\varepsilon 0} \in V_0$ donnés, il existe une unique solution faible de (0.0.1) qui satisfait*

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; V_l) \cap L^\infty(0, T; V_0), \forall T > 0.$$

Où V_l et V_0 sont les espaces définis au chapitre 1.

Notons que le système conventionnel de Navier-Stokes [21, 10, 50, 49, 46] peut être écrit sous la forme d'évolution suivant

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \nu A u + (u \cdot \nabla) u &= f, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u(0, x) &= u_0, \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Théorème 2.1.2 *Pour $d \leq 4$, pour $f \in L^2(0; T; V_0)$ et $u_0 \in V_0$ données, il existe une solution faible de (2.1.3) qui satisfait $u \in L^\infty(0; T; V_0) \cap L^2(0; T; V_1)$, pour chaque $T > 0$. Pour $d = 2$, u est unique (J. Lions [35]).*

Nous mettrons en place différentes estimations uniformes sur les solutions des équations de Navier Stokes modifiées. Ces majorations seront utilisées pour établir la convergence de ces solutions vers celles des équations de Navier Stokes.

Proposition 2.1.3 *Pour $d \leq 4$ et pour $\varepsilon > 0$ fixé, $f \in L^2(0, T; V_0)$ et $u_{\varepsilon 0} \in V_0$, la solution faible $u_\varepsilon(t)$ des équations de Navier-Stokes modifiées satisfait*

- i) u_ε est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; V_0)$,
- ii) u_ε est uniformément bornée dans $L^2(0, T; V_1)$.

Preuve. Prenant le produit scalaire de l'équation (2.1.2) avec u_ε , il vient

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|^2 + 2\nu \|\nabla u_\varepsilon\|^2 = 2(f, u_\varepsilon). \quad (2.1.4)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$. En appliquant l'inégalité de Young et le lemme de Poincaré à (2.1.4), il vient

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|^2 + \nu \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\nu\lambda_1}. \quad (2.1.5)$$

Omettant le terme $2\varepsilon \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|^2$ on a

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + \nu \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\nu\lambda_1}, \quad (2.1.6)$$

en intégrant l'inégalité ci-dessus de 0 à t , il vient

$$\|u_\varepsilon(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq \frac{1}{\nu\lambda_1} \|f\|_{L^2(0,T;V_0)}^2 + \|u_{\varepsilon 0}\|^2. \quad (2.1.7)$$

■

Nous avons besoin du lemme suivant (cf. le livre de R. Temam [50, Lemma 4.1.ChIII,Sec4])

Lemme 2.1.4 *La forme trilinéaire b est continue sur $V \times V \times V_s$ si $s \geq \frac{d}{2}$*

$$\|b(u, v, w)\| \leq c_4 \|u\| \|v\|_1 \|w\|_s. \quad (2.1.8)$$

Preuve. Pour chaque $u, v, w \in V$, par utilisation de l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| = |b(u, w, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|D_i w_j\|_{L^d(\Omega)} \|v_j\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ &\leq c_4 \|u\| \|v\|_1 \sum_{i,j=1}^d \|D_i w_j\|_{L^d(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

la deuxième inégalité provenant de l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$.

Mais $s \geq \frac{d}{2}$, implique que $H^{s-1}(\Omega)$ est inclus dans $L^q(\Omega)$ où

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s-1}{d}, q \geq d. \quad (2.1.10)$$

Si $w \in V_s$ alors $D_i w_j$ appartient à $H^{s-1}(\Omega)$ et appartient à $L^q(\Omega)$; $D_i w_j$ appartient à $L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ alors $D_i w_j \in L^d(\Omega)$ donc

$$\|D_i w_j\|_{L^d(\Omega)} \leq c_4 \|w\|_s, \quad (2.1.11)$$

par conséquent

$$\|b(u, v, w)\| \leq c_4 \|u\| \|v\|_1 \|w\|_s. \quad (2.1.12)$$

Ces estimations montrent qu'on peut prolonger par continuité la forme b de $V \times V \times V$ au $V \times V \times V_s$, à l'aide de (2.1.8). ■

Appliquant le lemme 2.1.4 à la forme trilinéaire, il vient

Lemme 2.1.5 *Soit $u_\varepsilon(t)$ une solution faible du système de Navier-Stokes modifié, alors $B(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ appartient à $L^2(0, T; V_l')$ pour chaque $l \geq \frac{d}{2}$.*

Preuve. Selon la définition de l'opérateur B et le lemme ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\langle B(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v_\varepsilon) \rangle| &= |b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v_\varepsilon)| \\ &\leq c_4 \|u_\varepsilon(t)\| \|u_\varepsilon(t)\|_1 \|v_\varepsilon\|_{V_l'}, \quad \forall v_\varepsilon \in V_l, \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

donc

$$\|B(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))\|_{V_l'} \leq c_4 \|u_\varepsilon(t)\| \|u_\varepsilon(t)\|_1 \text{ pour } 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.14)$$

■

Le lemme précédent nous permet d'énoncer le

Lemme 2.1.6 *Si $f \in L^2(0, T; V_l')$, alors, pour toute solution $u_\varepsilon(t)$ du problème (0.0.1) la dérivée temporelle $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ appartient à $L^2(0, T; V_l')$ pour chaque $l \geq \frac{d}{2}$.*

Preuve. En raison du lemme 2.1.5 $B(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ appartient à $L^2(0, T; V_l')$, puisque $f - \varepsilon A^l u_\varepsilon - \nu A u_\varepsilon$ appartient à $L^2(0, T; V_l')$, cela implique que $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ appartient à $L^2(0, T; V_l')$.

■

Il en résulte que

Lemme 2.1.7 *Pour chaque $l \geq \frac{d}{2}$, la fonction u_ε est continue de $[0, T]$ dans V_0 faible.*

Preuve. On utilise ici la théorie de l'interpolation; d'après Lions-Magenes [37, Chapitre 1], u_ε est continue de $[0, T]$ dans $[V_0, V_l']_1 = V_l'$, il vient que $u_\varepsilon(0) = u_{\varepsilon 0} \in V_0$ à un sens. Puisque $u_\varepsilon \in L^2(0, T; V_1) \cap L^\infty(0, T; V_0)$ et $\frac{du_\varepsilon}{dt} \in L^2(0, T; V_l')$, la continuité faible dans V_0 est une conséquence directe de [50, Lemma 1.4. ChIII, Sec1]. ■

Maintenant, nous démontrons la convergence forte. Il résulte de *ii*) de la proposition 2.1.3 et du lemme 2.1.6, que

$$u_{\varepsilon_n} \in \mathcal{X} = \{u_{\varepsilon_n} \in L^2(0, T; V_1), \frac{du_{\varepsilon_n}}{dt} \in L^2(0, T; V_1')\} \quad (2.1.15)$$

avec des majorations indépendantes de ε_n . Par conséquent

(i) $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; V_1)$ faiblement, et que (ii) $\frac{du_{\varepsilon_n}}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0, T; V_1')$ faiblement; Ces deux propriétés nous permettent d'établir le résultat de convergence forte.

Pour la démonstration du théorème suivant, voir Temam [50, Theorem 2.1, Chapter III].

Théorème 2.1.8 *L'injection de $\mathcal{X} = \{u \in L^2(0, T; V_1), \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V_1')\}$ dans $\mathcal{Y} = \{u \in L^2(0, T; V_0)\}$ est compacte.*

2.2 Résultat de convergence forte

En vertu de l'estimation précédente et du théorème 2.1.8 de compacité. Nous pouvons maintenant énoncer notre premier résultat.

Théorème 2.2.1 *Pour $l \geq \sup(\frac{d}{2}, \frac{d+2}{4})$ et pour chaque $d \leq 4$, la solution faible u_ε des équations de Navier-Stokes modifiées (0.0.1) donnée par le théorème 2.1.1 converge fortement dans $L^2(0, T; V_0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une solution faible u du système(2.1.3).*

Preuve. Le théorème 2.1.1 et le lemme 2.1.4 sont satisfaits pour chaque $l \geq \sup(\frac{d}{2}, \frac{d+2}{4})$. Grâce à la partie *ii*) de la proposition 2.1.3 et du lemme 2.1.6, on peut en déduire que les solutions faibles u_{ε_n} demeurent dans l'espace \mathcal{X} :

$$\mathcal{X} = \{u_{\varepsilon_n} \in L^2(0, T; V_1), \frac{du_{\varepsilon_n}}{dt} \in L^2(0, T; V_1')\}. \quad (2.2.1)$$

Par conséquent, le théorème de compacité 2.1.8 permet de prouver la convergence forte de u_{ε_n} vers u dans $L^2(0, T; V_0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.1.3.

Proposition 2.2.2 $\forall w \in L^2(0, T; V_1), \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; V_1')$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\frac{du_{\varepsilon_n}}{dt}(t), w) dt = \int_0^T (\frac{du}{dt}(t), w(t)) dt,$$

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_n}(t), \nabla w(t)) dt = \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w(t)) dt,$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T b(u_{\varepsilon_n}(t), u_{\varepsilon_n}(t), w(t)) dt = \int_0^T b(u(t), u(t), w(t)) dt.$

On souhaite établir la convergence des équations (2.1.2) lorsque $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Pour cela, prenons le produit scalaire de (2.1.2) avec une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}))$ puis intégrons par parties et utilisons la proposition 2.2.2. Ceci nous permet alors de passer à la limite quand $\varepsilon_n \rightarrow 0$; il vient

$$- \int_0^T (u, \varphi') dt + \nu \int_0^T (\nabla u, \nabla \varphi) dt + \int_0^T b(u, u, \varphi) dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle dt. \quad (2.2.2)$$

Ici le terme $\varepsilon_n \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon_n}(t), A^{\frac{1}{2}} \varphi(t)) dt$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Comme la solution faible $u_{\varepsilon_n} \in L^2(0, T; V_1)$ a une borne uniforme en ε_n , il est possible d'obtenir

$$\varepsilon_n \int_0^T |(A^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon_n}, A^{\frac{1}{2}} \varphi)| dt \leq \varepsilon_n \int_0^T |(u_{\varepsilon_n}, A^l \varphi)| dt \leq c \varepsilon_n. \quad (2.2.3)$$

Puisque $u \in L^2(0, T; V_1) \cap L^\infty(0, T; V_0)$, nous pouvons conclure que u est bien une solution faible pour les équations de Navier-Stokes classiques.

Chapitre 3

Attracteurs du système de Navier-Stokes avec hyperviscosité

Sommaire

3.1 Existence de l'attracteur du système de Navier-Stokes perturbé 44

3.1 Existence de l'attracteur du système de Navier-Stokes perturbé

Maintenant, nous considérons le système de Navier-Stokes 3D perturbé par l'ajout d'un terme de viscosité artificielle d'ordre quatre (carré du laplacien), dépendant d'un paramètre ε au système conventionnel

$$\begin{aligned} \frac{du_\varepsilon}{dt} + \varepsilon A^2 u_\varepsilon + \nu A u_\varepsilon + B(u_\varepsilon, u_\varepsilon) &= f, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), u_\varepsilon(x, 0) = u_{\varepsilon 0}(x), \text{ dans } \Omega, \\ p(x + Le_i, t) &= p(x, t), u_\varepsilon(x + Le_i, t) = u_\varepsilon(x, t) \quad i = 1, 2, 3. t \in (0, \infty), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

où $\Omega = (0, L)^3$. Dans ce chapitre, nous allons montrer que le semigroupe $S_\varepsilon(t)$ associé au problème (3.1.1) possède un attracteur global compact \mathfrak{A}_ε (Pour la théorie des attracteurs globaux voir [2], [11], [23], [27], [41], [46], [49].).

Pour $\varepsilon = 0$ l'existence des solutions faibles du problème est connue depuis les travaux fondamentaux de Jean Leray (1934) [34]. La question de l'unicité des solutions faibles n'est pas résolue en dimension 3. Ensuite, la théorie des attracteurs globaux des systèmes dynamiques de dimension infinie n'est pas applicable aux équations de Navier-Stokes en 3D.

La théorie des attracteurs des trajectoires des équations d'évolution a été développée dans les travaux de Sell et You [46], pour les équations aux dérivées partielles dont le théorème d'unicité des solutions du problème de Cauchy correspondant n'est pas encore prouvé, par exemple, pour les équations de Navier-Stokes 3D (voir, par exemple, [23, 46]). Un attracteur des trajectoires est un attracteur classique global, mais dans l'espace des solutions faibles.

Le problème de la semi-continuité supérieure des attracteurs globaux, en dimension 2 avec conditions aux limites périodiques a été étudié par Yuh-Roung et Sritharan [42]. Pour montrer que le système (0.0.1) possède une variété inertielle (voir [1, 43, 49]) on utilise la théorie introduite par Foias, Sell et Temam dans [18, 49].

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème (3.1.1) sont une conséquence du théorème 2.2.1 pour $l = 2$ et $d = 3$.

Théorème 3.1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L^2(0, T; V'_2)$ et $u_{\varepsilon 0} \in V_0$ des données, alors il existe une unique solution faible de (3.1.1) qui satisfait*

$$u_\varepsilon \in C([0, T]; V_0) \cap L^2(0, T; V_2), \forall T > 0.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution u_ε converge vers une solution faible des équations de Navier-Stokes.

Définissons l'opérateur $S_\varepsilon(t)$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(t) : V_0 &\rightarrow V_0 \\ u_{\varepsilon 0} &\mapsto u_\varepsilon(t), t > 0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

l'opérateur $\{S_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ pour $\varepsilon > 0$ fixé, défini ainsi est un semigroupe dans V_0 .

Maintenant, nous montrons que le semigroupe $S_\varepsilon(t)$ admet un ensemble attractif compact dans l'espace V_0 et l'espace V_1 , il admet un attracteur compact où pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé.

Théorème 3.1.2 Soit $f \in V_0$ une fonction indépendante du temps. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et $u_{\varepsilon 0}$ borné dans V_0 le système dynamique associé aux équations de Navier Stokes régularisées (3.1.1) admet un attracteur compact \mathfrak{A}_ε , qui attire les ensembles bornés de V_0 .

Preuve. Prenant le produit scalaire de (3.1.1) avec u_ε , il vient

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|Au_\varepsilon\|^2 + 2\nu \|\nabla u_\varepsilon\|^2 = 2(f, u_\varepsilon). \quad (3.1.3)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$. En appliquant l'inégalité de Young et le lemme de Poincaré à (3.1.3), il vient

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|Au_\varepsilon\|^2 + \nu \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\nu\lambda_1}. \quad (3.1.4)$$

Négligeant le terme $2\varepsilon \|Au_\varepsilon\|^2$ et par suite

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|^2 + \nu\lambda_1 \|u_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\nu\lambda_1}, \quad (3.1.5)$$

en intégrant l'inégalité ci-dessus de 0 à t , il vient

$$\|u_\varepsilon(t)\|^2 \leq \|u_{\varepsilon 0}\|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \rho_0^2 (1 - e^{-\nu\lambda_1 t}), \quad t > 0, \quad (3.1.6)$$

où $\rho_0 = \frac{1}{\nu\lambda_1} \|f\|$. Par conséquent, pour toute boule $B_{R_0} = \{u_{\varepsilon 0} \in V_0; \|u_{\varepsilon 0}\| \leq R_0\}$ il existe une boule $B(0, \delta_0)$ dans V_0 centrée à l'origine de rayon $\delta_0 > \rho_0$ ($R_0 > \delta_0$) telle que

$$S_\varepsilon(t)B_{R_0} \subset B_{\delta_0} \text{ pour chaque } t \geq t_0(B_{R_0}) = \frac{1}{\nu\lambda_1} \log \frac{R_0^2 - \rho_0^2}{\delta_0^2 - \rho_0^2}. \quad (3.1.7)$$

Donc, B_{δ_0} est un ensemble borné absorbant et invariant sous l'action de $S_\varepsilon(t)$.

En prenant la limite dans (3.1.6), il vient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u_\varepsilon(t)\| \leq \rho_0. \quad (3.1.8)$$

Nous intégrons (3.1.4) de t à $t+r$, nous obtenons pour tout $u_{\varepsilon 0} \in B_{R_0}$

$$\int_t^{t+r} \|u_\varepsilon\|_1^2 ds \leq \frac{1}{\nu} \left(\frac{r \|f\|^2}{\nu\lambda_1} + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \right), \quad \forall r > 0, \quad \forall t \geq t_0(B_{R_0}), \quad (3.1.9)$$

et donc grâce à (3.1.8),

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+r} \|u_\varepsilon\|_1^2 ds \leq \frac{r}{\nu^2\lambda_1} \|f\|^2 + \frac{\|f\|^2}{\nu^3\lambda_1^2}, \quad (3.1.10)$$

il en résulte que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|u_\varepsilon\|_1^2 ds \leq \frac{\|f\|^2}{\nu^2 \lambda_1}, \quad (3.1.11)$$

cela sera utilisé dans la section 4.4.

Pour montrer que le semigrroupe $S_\varepsilon(t)$ possède un ensemble borné absorbant dans V_1 , nous considérons les solutions fortes et prenons le produit scalaire de (3.1.1) avec Au_ε , il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|A^{\frac{3}{2}} u_\varepsilon\|^2 + \nu \|Au_\varepsilon\|^2 = -b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, Au_\varepsilon) + (f, Au_\varepsilon). \quad (3.1.12)$$

Appliquant l'inégalité de Young à (3.1.12), il vient

$$(f, Au_\varepsilon) \leq \|f\| \|Au_\varepsilon\| \leq \frac{\nu}{4} \|Au_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{\nu} \|f\|^2. \quad (3.1.13)$$

Grâce à l'inégalité d'Agmon (1.2.7) et l'inégalité de Young, on peut estimer le premier terme dans le second membre de (3.1.12) comme suit

$$\begin{aligned} |b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, Au_\varepsilon)| &\leq \|u_\varepsilon\|_\infty \|u_\varepsilon\|_1 \|Au_\varepsilon\| \\ &\leq c_3 \|u_\varepsilon\|_1^{\frac{3}{2}} \|Au_\varepsilon\|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|Au_\varepsilon\|^2 + c_5 \|u_\varepsilon\|_1^6. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Substituant dans (3.1.12), il en résulte que

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|_1^2 + 2\varepsilon \|A^{\frac{3}{2}} u_\varepsilon\|^2 + \nu \|Au_\varepsilon\|^2 \leq \frac{2}{\nu} \|f\|^2 + 2c_5 \|u_\varepsilon\|_1^6. \quad (3.1.15)$$

En supprimant les termes positifs associés à ε dans (3.1.15), il vient

$$\frac{d}{dt} \|u_\varepsilon\|_1^2 + \nu \|Au_\varepsilon\|^2 \leq \frac{2\|f\|^2}{\nu} + 2c_5 \|u_\varepsilon\|_1^6. \quad (3.1.16)$$

Appliquant le lemme uniforme de Gronwall à (3.1.16) avec

$$g = 2c_5 \|u_\varepsilon\|_1^4, \quad h = \frac{2\|f\|^2}{\nu}, \quad y = \|u_\varepsilon\|_1^2. \quad (3.1.17)$$

Grâce à l'inégalité d'interpolation,

$$\|u\|_{H^1}^4 \leq \|u\|_{H^2}^2 \|u\|_{L^2}^2, \quad (3.1.18)$$

nous avons

$$u_\varepsilon \in L^4(0, T; H^1(\Omega)) \quad \text{si} \quad u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.1.19)$$

D'après le théorème 3.1.1, nous avons $u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et par conséquent $u_\varepsilon \in L^4(0, T; V_1)$, posant

$$a_4 = \|u_\varepsilon\|_{L^4(0, T; V_1)}. \quad (3.1.20)$$

Grâce à (3.1.6)-(3.1.10) nous estimons les quantités a_1 , a_2 et a_3 annoncées dans le lemme uniforme de Gronwall par

$$a_1 = 2c_5 a_4, \quad a_2 = \frac{2r \|f\|^2}{\nu} \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{r \|f\|^2}{\nu^2 \lambda_1} + \frac{\|f\|^2}{\nu^3 \lambda_1^2}, \quad (3.1.21)$$

il vient

$$\|u_\varepsilon(t)\|_1^2 \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1) = R_1^2 \quad \text{pour } t \geq t_0, \quad t_0 \text{ est comme dans (3.1.7)}.$$

D'où, pour toute boule B_{R_1} , il existe une boule B_{δ_1} , dans V_1 centrée à l'origine de rayon $R_1 > \delta_1 > \rho_1$ telle que

$$S_\varepsilon(t)B_{R_1} \subset B_{\delta_1} \quad \text{pour } t \geq t_1(B_{R_0}) = t_0(B_{R_0}) + 1 + \frac{1}{\nu \lambda_1} \log \frac{R_1^2 - \rho_1^2}{\delta_1^2 - \rho_1^2}. \quad (3.1.22)$$

La boule B_{δ_1} est un ensemble absorbant et invariant par le semigrroupe $S_\varepsilon(t)$.

En outre, si B est un ensemble borné de V_0 , alors $S_\varepsilon(t)B \subset B_{\delta_1}$ pour $t \geq t_1(B, R_0)$, cela montre l'existence d'un ensemble absorbant dans V_1 . Puisque l'injection de V_1 dans V_0 est compacte, donc $S_\varepsilon(t)$ possède un ensemble borné compact dans V_0 .

En outre, les opérateurs $S_\varepsilon(t)$ sont uniformément compacts pour chaque $t \geq t_1(B, R_0)$.

$$\bigcup_{t \geq t_1} S_\varepsilon(t, 0, B_{R_0}) \quad (3.1.23)$$

est relativement compact dans V_0 .

Il sera en fait possible de construire un attracteur global compact \mathfrak{A}_ε pour les opérateurs $S_\varepsilon(t)$ pour chaque $\varepsilon > 0$, (voir par exemple, [49, Theorem I.1.1] pour plus de détails).

Il est utile de noter que l'attracteur global \mathfrak{A}_ε est contenu dans des boules absorbantes des espaces V_0 et V_1

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \bigcap_{t_1 \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq t_1} B_{\delta_1}(t)} \subset B_{\delta_0} \cap B_{\delta_1}. \quad (3.1.24)$$

■

Chapitre 4

Écoulement turbulent

Sommaire

4.1	La turbulence	49
4.2	Modélisation de la turbulence	54
4.3	Nombres de degrés de liberté dans un écoulement turbulent .	57
4.4	Étude de la dimension de l'attracteur global	57

4.1 La turbulence

La turbulence désigne l'état d'un fluide, liquide ou gaz, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. À l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier. La découverte et l'étude des turbulences est très ancienne, elle a été élaborée par Léonard de Vinci, figure 4.1.1.

Les équations qui gouvernent les mouvements des fluides, qu'ils soient turbulents ou non, ont été écrites pour la première fois par Claude Navier en 1823. Elles sont souvent appelées

équations de Navier-Stokes en raison des perfectionnements apportés ultérieurement par George Stokes. En fait il s'agit essentiellement des équations de Newton, qui relient la force et l'accélération, équations qu'il faut appliquer à chaque parcelle du fluide ce qui fut fait pour la première fois par Léonard Euler il y a trois siècles. L'apport crucial de Navier a été d'ajouter aux équations d'Euler un terme de friction entre les diverses couches de fluide proportionnel au coefficient de viscosité et aux variations de vitesse.

La turbulence est devenue une science expérimentale vers la fin du XIXe siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Nous savons que, dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers, c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si elle va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes. Reynolds put mettre en évidence des lois assez simples relatives à n'importe quel tuyau pour cette transition vers la turbulence; il introduisit un nombre, appelé depuis nombre de Reynolds, qui n'est autre que le produit du diamètre du tuyau D et de la vitesse moyenne de l'écoulement dans le tuyau V , le tout divisé par la viscosité du fluide ν (viscosité de l'air environ $0,1 \text{ cm}^2/\text{s}$, viscosité de l'eau $0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$) soit $Re = DV/\nu$. Reynolds a montré que lorsque ce nombre dépasse une certaine valeur critique, de l'ordre de quelques milliers, alors tout d'un coup, l'écoulement devient turbulent. Léonard avait déjà vu le phénomène d'allée tourbillonnaire et l'avait représenté de façon presque correcte, figure 4.1.1.

Une caractéristique très importante de ces écoulements turbulents, qui apparaît dès la transition, est leur caractère chaotique. De façon plus précise, les écoulements turbulents apparaissent comme non prédictibles. Qu'est-ce que cela veut dire, non prédictibles? Supposons que l'on connaisse de façon détaillée la configuration de l'écoulement à un instant donné. Alors, bien que cet écoulement soit régi par des équations bien déterminées, déterministes comme on dit, dans la pratique, il n'est pas possible de prédire l'évolution ultérieure pour des temps longs. Cette théorie du chaos, qui doit beaucoup à Henri Poincaré, à David Ruelle, à Edward Lorenz et à l'école russe de Kolmogorov et de ses élèves Vladimir Arnold et Yacov Sinai, a des implications très importantes en météorologie. Imaginons que, pour prévoir le temps, on mesure, à un instant donné, le vent, la pression, la température en tous les points de la planète et que l'on essaie de prédire l'évolution ultérieure du temps par un

calcul à l'ordinateur. En fait, au bout d'un temps relativement court, vous ne pourrez plus prédire de façon détaillée dans quel état se trouve l'atmosphère, et cela quelle que soit la puissance des ordinateurs. On dit que la turbulence atmosphérique est non prédictible, elle finit par être sensible au moindre éternuement ou à un battement d'aile d'un papillon " effet papillon ", comme l'a suggéré le météorologue américain E. Lorenz.

Dans un écoulement turbulent développé on trouve que la variation de la vitesse pendant un certain intervalle de temps est proportionnelle, non à la racine carrée mais à la racine cubique du temps écoulé. Cette loi en racine cubique, obtenue en fait par un argument dimensionnel lié à la conservation de l'énergie, fut prédite en 1941 par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov et a été assez largement validée par des expériences et des simulations sur l'ordinateur. En fait, dès 1922 l'anglais Lewis Fry Richardson, avait pressenti ce qui se passait en présentant sa vision de la cascade d'énergie des grandes vers les petites échelles d'un écoulement turbulent.

Un grand défi mathématique qui fait l'objet d'un des sept prix d'un montant d'un million de dollars annoncés récemment par la fondation Clay au Collège de France. Le problème est de montrer que les équations de Navier-Stokes conduisent à un problème "bien posé". Cela veut dire que si l'on connaît le mouvement du fluide à un instant initial on veut pouvoir montrer qu'il y a une solution unique à tout instant ultérieur. Notez que cette fois le problème n'est pas celui des erreurs mais de l'unicité de la solution. Ce problème a été résolu dans les années trente par Jean Leray dans le cas de deux dimensions d'espace (ce qui est pertinent en météorologie et en océanographie). Le problème est beaucoup plus difficile en dimension trois. Nous allons essayer maintenant de donner un tout petit aperçu de la difficulté, sans utiliser de formalisme mathématique. Tout d'abord il faut noter que dans un fluide qui n'est pas en mouvement uniforme, les filets fluides frottent les uns contre les autres, en raison de la viscosité, ce qui tend à ralentir leur mouvement relatif. À faible vitesse, donc à faible nombre de Reynolds (ce dernier est proportionnel à la vitesse), les effets du frottement visqueux sont très importants pour tous les tourbillons présents dans l'écoulement. Ce frottement rabote tout et l'on sait démontrer - ce n'est pas très difficile - que le problème est bien posé. En revanche, à grand nombre de Reynolds, les effets du frottement visqueux sont limités aux plus petits tourbillons et le problème est proche du

problème du fluide parfait dans lequel la viscosité est ignorée. On sait montrer que ce dernier problème est bien posé pendant un temps court mais pas au-delà. En gros, le mieux qu'on sait démontrer pour l'instant, c'est que le fluide parfait ne se comporte pas mieux qu'un mobile dont l'accélération serait proportionnelle au carré de la vitesse, hypothèse qui conduit à une augmentation catastrophique de la vitesse qui peut devenir infinie au bout d'un temps assez court. Certaines simulations numériques sur l'ordinateur suggèrent que le fluide parfait est en réalité bien plus sage, n'explose pas, et conduit de ce fait à un problème bien posé pour des temps arbitrairement longs. Il est possible aussi que le fluide parfait explose rapidement mais que l'effet du frottement visqueux empêche cette explosion. C'est précisément ce qui se passe dans la théorie de 1941 de Kolmogorov, mais pas nécessairement dans la réalité. Pour plus d'infos sur ce sujet voir le livre de Frisch [20].



Figure 4.1.1 : Un tourbillon vu par Leonardo de Vinci (1452-1519).

4.2 Modélisation de la turbulence

Les modélisations numériques peuvent être divisées en trois grandes catégories

1. L'approche statistique ou Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)
2. La simulation numérique directe ou Direct Numerical Simulation (DNS)
3. La simulation des grandes échelles ou Large Eddy Simulation (LES)

Ces deux dernières techniques concernent la simulation instationnaire en 3 dimensions.

RANS

Cette méthode repose sur la décomposition de Reynolds autour de la Moyenne de Reynolds.

DNS

La Simulation Numérique Directe (SND, ou DNS acronyme anglais de Direct Numerical Simulation) est une simulation servant à la mécanique des fluides numérique. Elle permet une approche de la turbulence où toutes les structures tourbillonnaires potentiellement présentes, sont explicitement calculées.

LES

La simulation des grandes échelles repose sur les équations de Navier-Stokes filtrées spatialement, voir [22, 44].

- Les modèles statistiques cherchent à déterminer un écoulement moyen, au sens de la moyenne statistique. On introduit alors une viscosité turbulente, dont le but est de modéliser l'action des fluctuations sur l'écoulement moyen. Ils sont très utilisés pour les problèmes industriels, dans des codes de simulation d'écoulements fluides en géométries complexes utilisant les éléments finis ou les volumes finis comme schéma de discrétisation des équations. Ils donnent de bons résultats loin des parois. Près des parois ils sont couplés avec des modèles de lois de parois ;
- Les modèles sous-mailles ou "Large Eddy Simulation" (LES) calculent le comportement des grandes échelles, en modélisant l'action des petites échelles. En effet, les grandes échelles d'un écoulement sont celles qui contrôlent, par exemple, les transferts

de chaleur, et qui contiennent l'énergie cinétique. La modélisation se fait en reformulant l'action dissipative des petites échelles sur les grandes échelles, au moyen d'une viscosité tourbillonnaire (modèle de type Smagorinsky). Des modèles plus précis, les modèles dynamiques, ont permis d'obtenir une meilleure estimation des constantes intervenant dans la modélisation de type Smagorinsky [5].

- Les schémas multi-niveaux, ou méthode Dynamic Multilevel method (DML) proposent une modélisation des petites échelles non fondée sur une modélisation de type Smagorinsky. Les premiers schémas multi-niveaux proposaient une simplification du calcul des petites échelles, tout en permettant une bonne estimation du comportement des grandes échelles. Ce type de modélisation numérique a permis d'accélérer le calcul de simulations directes. Mais, en vue d'une modélisation de type LES, il a fallu mieux retranscrire le caractère dissipatif des petites échelles lorsque la résolution était insuffisante. Cela a été réalisé, dans un premier temps, en modifiant les phases des petites échelles obtenues avec le calcul simplifié. Dans un deuxième temps, l'estimation des petites échelles a été obtenue en imposant une décroissance correcte de l'énergie cinétique contenue dans les échelles en fonction de leur taille (selon un spectre d'énergie de type Kolmogorov), afin de bien retranscrire l'action des petites échelles, qui sont modélisées, sur les grandes échelles qui sont calculées.

Les modèles LES restent pour l'instant limités à des problèmes plus simples que ceux traités avec les modèles statistiques, mais les progrès grâce aux ordinateurs et aux nouveaux modèles laissent prévoir de grands développements dans ce secteur pour les prochaines années, voir par exemple [13] ou [40].

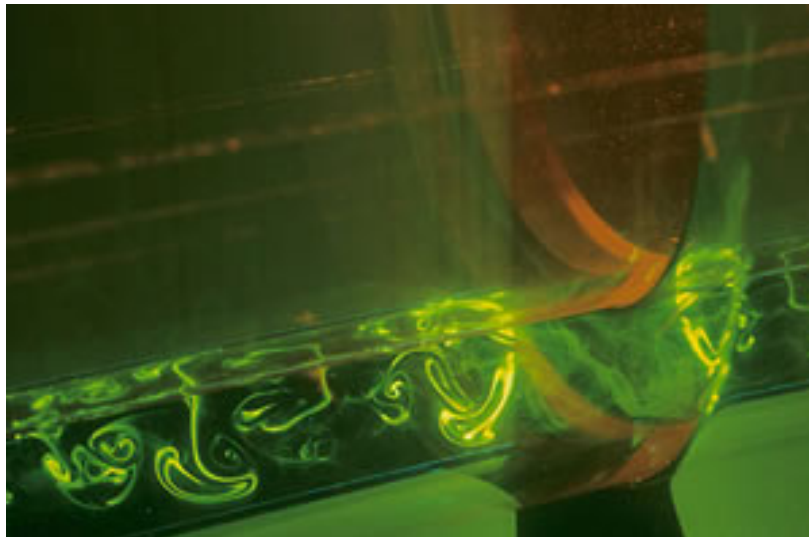


Figure 4.2.1 : Modélisation des turbulences (Atmosphère).

Dans des cuves tournantes, les chercheurs modélisent les tourbillons qui se créent dans l'atmosphère et les océans. Ils étudient ainsi comment la turbulence permet de mélanger les couches d'eau et d'air.

CNRS Photothèque - PERRIN Emmanuel.

4.3 Nombres de degrés de liberté dans un écoulement turbulent

Dans cette section, nous estimons les effets de l'hyperviscosité sur l'écoulement turbulent. Un argument de la théorie classique de la turbulence (voir, L. Landau et Lifshitz [32]) suggère qu'il ya un nombre fini de degrés de liberté dans les écoulements turbulents. Des arguments physiques heuristiques sont utilisés pour justifier cette assertion et établir une estimation de ce nombre de degrés de liberté en divisant l'échelle de longueur typique de la circulation, $l_0 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$, ou l_0 désigne aussi une longueur caractéristique macroscopique de la région occupée par le fluide comme le diamètre de Ω ou $|\Omega|^{\frac{1}{2}}$ par l'échelle de la longueur de dissipation visqueuse de Kolmogorov l_ϵ (i.e. $l_\epsilon = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$) en deux et trois dimensions, où ϵ est le taux moyen de la dissipation de l'énergie dans un écoulement turbulent (4.4.42) et en prenant la troisième puissance, dans le cas tridimensionnel, voir R. Temam [49]

$$N \sim \left(\frac{l_0}{l_\epsilon}\right)^3, \quad (4.3.1)$$

N est le nombre de degrés de libertés. Nous exprimerons nos premiers résultats sur la majoration de la dimension de l'attracteur en termes de l'échelle de Kolmogorov l_ϵ et les estimations de Landau-Lifschitz [32] du nombre de degrés de liberté dans un écoulement turbulent [17, 49]. Nous pouvons facilement observer cette compatibilité qui existe entre ces estimations et le nombre de degrés de liberté dans la turbulence (voir aussi [32]). Ces estimations sont une amélioration par rapport aux estimations trouvées dans la littérature, en ce sens que le modèle d'hyperviscosité (3.1.1) permet de mieux rapprocher les équations de Navier-Stokes.

Nous allons montrer que la dimension de l'attracteur global est proportionnelle au nombre correspondant aux degrés de liberté.

4.4 Étude de la dimension de l'attracteur global

Le principal résultat que nous voulons décrire ici concerne la dimension de l'attracteur global \mathfrak{A}_ϵ . Le fait que celle-ci soit finie montre que, passée une période transitoire, les solutions

de (3.1.1), ne dépendent que d'un nombre fini de degrés de liberté dans le langage de la physique.

Pour cela, on procède en deux étapes. Dans la première étape, nous allons démontrer la propriété de différentiabilité du semigroupe $S_\varepsilon(t)$ et dans la deuxième étape, nous allons établir des estimations de la dimension de \mathfrak{A}_ε .

Si l'on écrit l'équation (3.1.1) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) &= F(u_\varepsilon(t)), \quad t > 0 \\ u_\varepsilon(0) &= u_{\varepsilon 0}, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

pour chaque solution $u_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)u_{\varepsilon 0} \in V_0$, alors l'étude de la dimension de l'attracteur global est liée à l'équation linéarisée de (4.4.1)

$$\begin{aligned} \frac{dU_\varepsilon}{dt}(t) &= F'(S_\varepsilon(t)u_{\varepsilon 0})U_\varepsilon(t), \quad t > 0 \\ U_\varepsilon(0) &= \xi \in V_0. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Il en résulte de (3.1.1) que le flux linéarisé autour de u_ε donné par (4.4.2) est équivalent à

$$\begin{aligned} U'_\varepsilon + \varepsilon A^2 U_\varepsilon + \nu A U_\varepsilon + B(u_\varepsilon, U_\varepsilon) + B(U_\varepsilon, u_\varepsilon) &= 0, \quad \text{dans } V' \\ U_\varepsilon(0) &= \xi, \quad \text{dans } V_0. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Si u_ε est la solution du problème (3.1.1) donnée par le théorème 3.1.1, alors pour tout $\xi \in V_0$, le problème (4.4.1) possède une solution unique U_ε , qui satisfait

$$U_\varepsilon \in C([0, T]; V_0) \cap L^2(0, T; V_2) \quad \forall T > 0. \quad (4.4.4)$$

En pratique, et pour ce qui concerne l'estimation de la dimension de \mathfrak{A}_ε , il est suffisant de s'assurer que S_ε soit différentiable sur \mathfrak{A}_ε . On peut maintenant prouver la différentiabilité du semigroupe S_ε par rapport aux données initiales dans V .

Théorème 4.4.1 *Pour chaque $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$ fixé et $u_{\varepsilon 0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon$ la fonction $u_{\varepsilon 0} \rightarrow u_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)u_{\varepsilon 0}$ est Fréchet différentiable sur l'attracteur \mathfrak{A}_ε , sa différentielle est l'opérateur linéaire*

$$D(S_\varepsilon(t)u_{\varepsilon 0}) = L(t, u_{\varepsilon 0}) : \xi \in V \rightarrow U_\varepsilon(t) \in V, \quad t \in [0, T], \quad (4.4.5)$$

où $U_\varepsilon(t)$ est la solution de (4.4.3).

Preuve. Posant

$$\eta(t) = v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) - U_\varepsilon(t), \quad U_\varepsilon(0) = \xi = v_{\varepsilon 0} - u_{\varepsilon 0}. \quad (4.4.6)$$

Il est clair que η satisfait l'équation suivante

$$\eta_t + \varepsilon A^2 \eta + \nu A \eta + B(\eta, v_\varepsilon) + B(v_\varepsilon, \eta) - B(w_\varepsilon, w_\varepsilon) = 0, \quad \eta(0) = 0 \quad (4.4.7)$$

où $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u_\varepsilon$. Prenant le produit scalaire de la dernière équation avec η et comme $B(v_\varepsilon, \eta, \eta) = 0$, il vient

$$\frac{d \|\eta\|^2}{dt} + 2\varepsilon \|A\eta\|^2 + 2\nu \|\eta\|_1^2 = 2b(\eta, v_\varepsilon, \eta) - 2b(w_\varepsilon, w_\varepsilon, \eta). \quad (4.4.8)$$

Appliquant (1.2.5) au premier terme dans le second membre de (4.4.8), il vient

$$\begin{aligned} |2b(\eta, v_\varepsilon, \eta)| &\leq 2c_1 \|\eta\|^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_1^{\frac{3}{2}} \|v_\varepsilon\|_1 \\ &\leq 2c_1 R_1 \|\eta\|^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_1^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{c_1^4 R_1^4}{\nu^3} \|\eta\|^2 + \frac{3\nu}{4} \|\eta\|_1^2. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

On a grâce à l'inégalité (1.2.5),

$$\begin{aligned} 2b(w_\varepsilon, w_\varepsilon, \eta) &\leq 2c_1 \|\eta\|_1 \|w_\varepsilon\|_1^2 \\ &\leq \frac{2c_1^2}{\nu} \|w_\varepsilon\|_1^4 + \frac{\nu}{2} \|\eta\|_1^2. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

En combinant les formules (4.4.9) et (4.4.10) dans (4.4.8), il vient

$$\frac{d \|\eta\|^2}{dt} + 2\varepsilon \|A\eta\|^2 + \frac{3\nu}{4} \|\eta\|_1^2 \leq \frac{c_1^4 R_1^4}{\nu^3} \|\eta\|^2 + \frac{2c_1^2}{\nu} \|w_\varepsilon\|_1^4, \quad (4.4.11)$$

nous négligeons les termes positifs $2\varepsilon \|A\eta\|^2$ et $\frac{3\nu}{4} \|\eta\|_1^2$ dans l'équation (4.4.11), il vient

$$\frac{d \|\eta\|^2}{dt} \leq \frac{c_1^4 R_1^4}{\nu^3} \|\eta\|^2 + \frac{2c_1^2}{\nu} \|w_\varepsilon\|_1^4. \quad (4.4.12)$$

On peut donc appliquer le lemme classique de Gronwall à (4.4.12) et obtenir

$$\|\eta\|^2 \leq \frac{2c_1^2}{\nu} \int_0^t \|w_\varepsilon\|_1^4 \exp\left(\int_s^t \frac{c_1^4 R_1^4}{\nu^3} d\tau\right) ds \quad (4.4.13)$$

et par suite

$$\|\eta\|^2 \leq C_0 \int_0^t \|w_\varepsilon\|_1^4 ds, \quad C_0 = \frac{2c_1^2}{\nu} \exp\left(\frac{T c_1^4 R_1^4}{\nu^3}\right). \quad (4.4.14)$$

La fonction w_ε ,

$$w_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)v_{\varepsilon 0} - S_\varepsilon(t)u_{\varepsilon 0}$$

satisfait l'équation suivante

$$\frac{dw_\varepsilon}{dt} + \varepsilon A^2 w_\varepsilon + \nu A w_\varepsilon + B(w_\varepsilon, v_\varepsilon) + B(v_\varepsilon, w_\varepsilon) - B(w_\varepsilon, w_\varepsilon) = 0, w_\varepsilon(0) = v_{\varepsilon 0} - u_{\varepsilon 0} = w_{\varepsilon 0}. \quad (4.4.15)$$

Prenant le produit scalaire de la dernière équation avec w_ε , il vient

$$\frac{d}{dt} \|w_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|Aw_\varepsilon\|^2 + 2\nu \|w_\varepsilon\|_1^2 = 2b(w_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon). \quad (4.4.16)$$

On a grâce à l'inégalité (1.2.5) et l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} |2b(w_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)| &\leq 2c_1 \|v_\varepsilon\| \|w_\varepsilon\|_1^{\frac{3}{2}} \|w_\varepsilon\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c_1^4 R^4}{\nu^3} \|w_\varepsilon\|^2 + \frac{3\nu}{4} \|w_\varepsilon\|_1^2. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

En substituant le résultat ci-dessus dans (4.4.16), il vient

$$\frac{d}{dt} \|w_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon \|Aw_\varepsilon\|^2 + \frac{5\nu}{4} \|w_\varepsilon\|_1^2 \leq \frac{c_1^4 R^4}{\nu^3} \|w_\varepsilon\|^2. \quad (4.4.18)$$

En particulier on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \|w_\varepsilon\|^2 \leq \frac{c_1^4 R^4}{\nu^3} \|w_\varepsilon\|^2. \quad (4.4.19)$$

Le lemme classique de Gronwall appliqué à (4.4.19), permet alors d'obtenir

$$\|w_\varepsilon\|^2 \leq \|w_\varepsilon(0)\|^2 \exp\left(\frac{T c_1^4 R^4}{\nu^3}\right). \quad (4.4.20)$$

Par conséquent de (4.4.20) et (4.4.18), il vient

$$\int_0^t \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_1^2 dt \leq C_1 \|u_{\varepsilon 0} - v_{\varepsilon 0}\|^2; C_1 = \frac{4}{5\nu} T \exp\left(\frac{T c_1^4 R^4}{\nu^3}\right), \quad (4.4.21)$$

il en résulte de (4.4.14), (4.4.21) et l'inégalité de Hölder que

$$\|\eta\|^2 \leq C_0 C_1^2 \|u_{\varepsilon 0} - v_{\varepsilon 0}\|^4, \quad (4.4.22)$$

ainsi

$$\|\eta\|^2 \leq C_2 \|w_\varepsilon(0)\|^4, \text{ où } C_2 = C_0 C_1^2. \quad (4.4.23)$$

On a donc montré qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\frac{\|v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) - U_\varepsilon(t)\|^2}{\|v_{\varepsilon 0} - u_{\varepsilon 0}\|^2} \leq C_2 \|v_{\varepsilon 0} - u_{\varepsilon 0}\|_1^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|v_{\varepsilon 0} - u_{\varepsilon 0}\|_1 \rightarrow 0, \text{ dans } \mathfrak{A}_\varepsilon, \quad (4.4.24)$$

ce qui montre la Fréchet-différentiabilité du semigroupe S_ε . ■

D'après le théorème 4.4.1, le semigroupe S_ε est Fréchet différentiable sur \mathfrak{A}_ε , $\forall t > 0$.

Pour l'analyse de la dimension de l'attracteur \mathfrak{A}_ε obtenu dans la section 1.3, nous utilisons une théorie développée par R. Temam [49, chapitres V et VI];

D'après le théorème 4.4.1 on peut alors définir une application linéaire

$$L(t; u_{\varepsilon 0}) : \xi \in V_0 \rightarrow U_\varepsilon(t) \in V_0, \quad (4.4.25)$$

où U_ε est la solution de l'équation (4.4.1) et $L(t; u_{\varepsilon 0})$ la différentielle de S_ε .

Pour obtenir des estimations de la dimension de l'attracteur \mathfrak{A}_ε , nous réécrivons l'équation (4.4.3) comme suit

$$U'_\varepsilon = F'(u_\varepsilon)U_\varepsilon(t) = -\varepsilon A^2 U_\varepsilon - \nu A U_\varepsilon - B(u_\varepsilon, U_\varepsilon) - B(U_\varepsilon, u_\varepsilon). \quad (4.4.26)$$

Nous introduisons le nombre $q_m, m \in \mathbb{N}$ par

$$q_m = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_{\varepsilon 0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon} \sup_{\substack{\xi_i \in V_0 \\ |\xi_i| \leq 1 \\ i=1, \dots, m}} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr} F'(S_\varepsilon(\tau) u_{\varepsilon 0}) \circ Q_m(\tau) d\tau, \quad (4.4.27)$$

voir par exemple [11] ou [49, Section V. 3]. Tr désigne la trace de l'opérateur linéaire F' (ici de rang fini) pour chaque $m \in \mathbb{N}$ et $Q_m(\tau) = Q_m(\tau, u_{\varepsilon 0}; \xi_1, \dots, \xi_m)$ est le projecteur orthogonal dans V_0 sur l'espace engendré par $U_\varepsilon^1(\tau), \dots, U_\varepsilon^m(\tau)$ tel que

$$U_\varepsilon^j(\tau) = L(\tau, u_{\varepsilon 0}) \cdot \xi_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \geq 0, \quad (4.4.28)$$

sont m solutions de (4.4.1), correspondant à $\xi = \xi_1, \dots, \xi_m \in V_1$.

D'après le résultat général de Temam [49, Section V.3.4], s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$q_m < 0, \quad (4.4.29)$$

alors l'attracteur global est de dimension (de Hausdorff ou fractale) finie, respectivement

$$\begin{aligned} \dim_H(\mathfrak{A}_\varepsilon) &\leq m, \\ \dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon) &\leq m(1 + \max_{1 \leq j \leq m-1} \frac{(q_j)_+}{\|q_m\|}). \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Rappelons que la dimension capacitaire (ou fractale) de \mathfrak{A}_ε est la limite

$$\dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon) = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log N_\rho(\mathfrak{A}_\varepsilon)}{\log \frac{1}{\rho}}, \quad (4.4.31)$$

$N_\rho(\mathfrak{A}_\varepsilon)$ est le nombre minimal de boules de V_0 qu'il faut pour recouvrir \mathfrak{A}_ε .

Cette démarche, introduite dans [12] à propos des équations de Navier-Stokes s'est avérée efficace pour une très large classe d'équations paraboliques dissipatives, puis pour des équations hyperboliques, pour d'autres exemples voir (cf. R. Temam [49] pour une revue).

Afin d'étudier le nombre q_m donné par (4.4.27). Soit $\varphi_j(\tau)$, $j = 1, \dots, m$, $\tau \geq 0$, une base orthonormée de V_0 engendre $Q_m(\tau) V_0 = \{U_\varepsilon^1(\tau), \dots, U_\varepsilon^m(\tau)\}$: $\varphi_j(\tau) \in V_1$ pour chaque $j = 1, \dots, m$, puisque $U_\varepsilon^1(\tau), \dots, U_\varepsilon^m(\tau) \in V_1$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, voir (4.4.4), nous avons

$$\begin{aligned} Tr F'(S_\varepsilon(\tau) u_{\varepsilon 0}) \circ Q_m(\tau) &= \sum_{j=1}^m (Tr F'(u_\varepsilon(\tau)) \circ Q_m(\tau) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)) \\ &= \sum_{j=1}^m (F'(u_\varepsilon(\tau)) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)), \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

rappelons que (\cdot, \cdot) désignant le produit scalaire dans V_0 . On a grâce à (1.2.2) et (1.2.4)

$$\begin{aligned} Tr(F'(u_\varepsilon(\tau)) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)) &= \sum_{j=1}^m (-\varepsilon A^2 \varphi_j - \nu A \varphi_j - B(\varphi_j, u_\varepsilon) - B(u_\varepsilon, \varphi_j), \varphi_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (-\varepsilon \|A \varphi_j\|^2 - \nu \|A^{\frac{1}{2}} \varphi_j\|^2 - b(u_\varepsilon, \varphi_j, \varphi_j) - b(\varphi_j, u_\varepsilon, \varphi_j)) \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

donc

$$Tr(F'(u_\varepsilon(\tau)) \varphi_j(\tau), \varphi_j(\tau)) = \sum_{j=1}^m (-\varepsilon \|\varphi_j\|_2^2 - \nu \|\varphi_j\|_1^2 - b(\varphi_j, u_\varepsilon, \varphi_j)). \quad (4.4.34)$$

Nous estimons le terme non linéaire

$$\left| \sum_{j=1}^m b(\varphi_j, u, \varphi_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 \varphi_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x) \varphi_{jl} dx \right|, \quad (4.4.35)$$

comme dans [49], où pour tout $x \in \Omega$ il vient

$$\left| \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^3 \varphi_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x) \varphi_{jl} dx \right| \leq \|u\|_1 \|\rho\| \quad (4.4.36)$$

tels que

$$\|u(x)\|_1 = \left(\sum_{k,l=1}^3 \|D_i u_k(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \rho(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 (\varphi_{ji}(x))^2, \quad (4.4.37)$$

par conséquent

$$\left| \sum_{j=1}^m b(\varphi_j, u, \varphi_j) \right| \leq \int_{\Omega} \rho(x) \|u(x)\|_1 dx. \quad (4.4.38)$$

Pour la suite, nous rappelons l'inégalité de Lieb–Thirring généralisée en dimension trois, ici $m = l$, pour la démonstration voir par exemple Temam [49, Theorem A4.1].

Théorème 4.4.2 (*Inégalité de Lieb–Thirring*). *Soit φ_j , $1 \leq j \leq N$ une famille finie d'éléments de V_l , orthonormée dans $L^2(\Omega)$ et pour tout $x \in \Omega$, on pose*

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^N \|(\varphi_j(x))\|^2, \quad (4.4.39)$$

alors, il existe une constante κ , indépendante de la famille φ_j et de N tel que

$$\left(\int_{\Omega} \rho(x)^{q/q-1} dx \right)^{2l(q-1)/3} \leq \kappa \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a(\varphi_j, \varphi_j). \quad (4.4.40)$$

pour chaque $q \in \max\{(1, 3/2l), (1 + 3/2l)\}$ et κ dépend de l , p , et q .

La forme quadratique utilisé ici est

$$a(v, u) = (A^2 v, u) = (Av, Au) \quad (4.4.41)$$

qui est d'ordre 2.

Ce théorème nous permet d'inclure le terme d'hyperviscosité dans l'estimation de la dimension de l'attracteur ce qui montre bien l'effet d'hyperviscosité sur la turbulence.

Le taux moyen de dissipation de l'énergie (voir [17, 25] ou [49, VI.(3.20)]) est défini par

$$\epsilon = \lambda_1^{\frac{3}{2}} \nu \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_{\varepsilon 0} \in \mathfrak{A}_{\varepsilon}} \frac{1}{t} \int_0^t \|u_{\varepsilon}(\tau)\|_1^2 d\tau, \quad (4.4.42)$$

qui est fini grâce à (3.1.11). En utilisant (3.1.11) nous pouvons majorer le flux de dissipation de l'énergie par

$$\epsilon \leq \frac{\lambda_1^{\frac{1}{2}} \|f\|^2}{\nu}. \quad (4.4.43)$$

Afin de rendre l'estimation de la dimension plus explicite, nous pouvons estimer le flux de dissipation de l'énergie ϵ en terme du nombre de Grashof G par

$$\epsilon \leq \lambda_1^2 \nu^3 G^2. \quad (4.4.44)$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au second membre de (4.4.38), il vient

$$\int_{\Omega} \|u_{\varepsilon}(x)\|_1 \rho(x) dx \leq \|\rho(x)\|_{L^{\frac{7}{3}}(\Omega)} \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)} \quad (4.4.45)$$

puis, appliquant l'inégalité de Young avec

$$p = \frac{7}{3}, \quad q = \frac{7}{4} \text{ et } \sigma = \frac{7\varepsilon}{6\kappa}, \quad (4.4.46)$$

il vient

$$\int_{\Omega} \|u_{\varepsilon}(x)\|_1 \rho(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2\kappa} \|\rho(x)\|_{L^{\frac{7}{3}}(\Omega)}^{\frac{7}{3}} + c_6 \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}}, \quad c_6 = \frac{4}{7} \left(\frac{7\varepsilon}{6\kappa}\right)^{-\frac{3}{4}}. \quad (4.4.47)$$

Par conséquent de (4.4.47), il en résulte que

$$\begin{aligned} TrF'(u_{\varepsilon}(\tau)) \circ \tilde{Q}_m(\tau) &\leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(x)\|_1^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(\tau)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2\kappa} \|\rho(x)\|_{L^{\frac{7}{3}}(\Omega)}^{\frac{7}{3}} \\ &\quad + c_6 \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}}. \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

Grâce à l'inégalité de Lieb-Thirring (4.4.40), nous obtenons

$$TrF'(u_{\varepsilon}(\tau)) \circ \tilde{Q}_m(\tau) \leq -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(x)\|_1^2 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(\tau)\|_2^2 + c_6 \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}}. \quad (4.4.49)$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev $V_2 \subset V_1$, il vient

$$\|\varphi_j(x)\|_1 \leq c_7 \|\varphi_j(x)\|_2. \quad (4.4.50)$$

Substituons (4.4.50) dans (4.4.49), il en résulte que

$$TrF'(u_{\varepsilon}(\tau)) \circ \tilde{Q}_m(\tau) \leq -\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\varepsilon}{2c_7}\right) \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(x)\|_1^2 + c_6 \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}}. \quad (4.4.51)$$

D'où l'on tire

$$TrF'(u_{\varepsilon}(\tau)) \circ \tilde{Q}_m(\tau) \leq -c_8 \sum_{j=1}^m \|\varphi_j(x)\|_1^2 + c_6 \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}}, \quad \text{où } c_8 = \frac{\nu}{2} + \frac{\varepsilon}{2c_7}. \quad (4.4.52)$$

Notons qu'en dimension 3, $\lambda_j \geq c_9 L^{-2} j^{\frac{2}{3}}$ (voir, par exemple [49, Lemma VI 2.1]), et donc par conséquent

$$\sum_{j=1}^m \|\varphi_j(x)\|_1^2 \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_m \geq c_{10} \lambda_1 m^{\frac{5}{3}}. \quad (4.4.53)$$

On a grâce à l'inégalité de Hölder

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|_{L^{\frac{7}{4}}(\Omega)}^{\frac{7}{4}} \leq c_{11} \|A^{\frac{1}{2}}u_{\varepsilon}(x)\|^{\frac{7}{4}} \quad \text{avec } c_{11} = |\Omega|^{\frac{1}{8}}. \quad (4.4.54)$$

Par conséquent de (4.4.53) et (4.4.54), il en résulte que

$$Tr F'(u_\varepsilon(\tau)) \circ Q_m(\tau) d\tau \leq -c_8 c_{10} \lambda_1 m^{\frac{5}{3}} + c_6 c_{11} \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon(x)\|^{\frac{7}{4}}. \quad (4.4.55)$$

De plus, l'inégalité de Hölder donne

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_{\varepsilon_0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon} \frac{1}{t} \int_0^t \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon(\tau, x)\|^{\frac{7}{4}} d\tau \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{u_{\varepsilon_0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon} \frac{1}{t} \int_0^t \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon(\tau, x)\|^2 d\tau \right)^{\frac{7}{8}}. \quad (4.4.56)$$

qui est fini d'après (3.1.11). Enfin, grâce à (4.4.42), il vient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_{\varepsilon_0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon} \frac{1}{t} \int_0^t \|A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon(\tau, x)\|^{\frac{7}{4}} d\tau \leq \left(\frac{\epsilon}{\lambda_1^{\frac{3}{2}} \nu} \right)^{\frac{7}{8}}. \quad (4.4.57)$$

Pour tout $u_{\varepsilon_0} \in \mathfrak{A}_\varepsilon$, nous pouvons estimer les nombres $q_m(t)$, q_m , comme suit

$$q_m = \limsup_{t \rightarrow \infty} q_m(t) \leq -\kappa_1 m^{\frac{5}{3}} + \kappa_2, \quad (4.4.58)$$

où

$$\kappa_1 = c_8 c_{10} \lambda_1 \text{ et } \kappa_2 = c_6 c_{11} \left(\frac{\epsilon}{\lambda_1^{\frac{3}{2}} \nu} \right)^{\frac{7}{8}}. \quad (4.4.59)$$

Donc, si $m' \in \mathbb{N}$ est définie par

$$m' - 1 < \left(\frac{2\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{2c_6 c_{11}}{c_8 c_{10} \lambda_1^{\frac{37}{16}} \nu^{\frac{7}{8}}} \right)^{\frac{3}{5}} \epsilon^{\frac{21}{40}} < m', \quad (4.4.60)$$

alors $q_{m'} < 0$, grâce à (4.4.30) et [49, Section V.3.4], il vient

$$\dim_H(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq m' \text{ et } \dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq 2m'. \quad (4.4.61)$$

Posons $l_\epsilon = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$ l'échelle de la longueur de dissipation, et $l_0 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ l'échelle macroscopique, il vient

$$m' - 1 < c_{12} \left(\frac{l_0}{l_\epsilon} \right)^{\frac{21}{10}} < m' \quad (4.4.62)$$

avec

$$c_{12} = \left(\frac{2c_6 c_{11}}{c_8 c_{10} \lambda_1^{\frac{37}{16}} \nu^{\frac{7}{8}}} \right)^{\frac{3}{5}} (\nu^{\frac{63}{40}}) \lambda_1^{\frac{21}{20}}. \quad (4.4.63)$$

Par conséquent, nous avons prouvé la proposition suivante

Théorème 4.4.3 *L'attracteur global \mathfrak{A}_ε obtenu au théorème 3.1.2 pour les équations de Navier-Stokes régularisées (3.1.1) en 3D, est de dimension fractale (et donc Hausdorff) finie*

$$\dim_H(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq \dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq c_{12} \left(\frac{l_0}{l_\varepsilon}\right)^{\frac{21}{10}}. \quad (4.4.64)$$

Comme le nombre de Grashof $G = \frac{\|f\|_3}{\nu^2 \lambda_1^{\frac{3}{4}}}$ en 3D, (voir exemple [1, 17, 50]) est un majorant de $(\frac{l_0}{l_\varepsilon})^2$, l'expression des estimations ci-dessus en termes de G est plus simple. Le théorème ci-dessus devient

Proposition 4.4.4 *L'attracteur global \mathfrak{A}_ε obtenu au théorème 3.1.2 pour les équations de Navier-Stokes régularisées (3.1.1) en 3D, est de dimension fractale (et donc Hausdorff) finie*

$$\dim_H(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq \dim_F(\mathfrak{A}_\varepsilon) \leq c_{12} G^{\frac{21}{20}}. \quad (4.4.65)$$

Cet résultat améliore celui donné dans (4.4.65) à savoir $G^{\frac{21}{10}}$ au lieu à $G^{\frac{p}{2}}$ avec $p < 3$.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Ce type de régularisation a été proposé par Ladyzhenskaya [29] et Lions [36], qui ont ajouté le terme d'hyperviscosité artificielle $\varepsilon(-\Delta)^l$, $l > 1$, aux équations de Navier-Stokes.

L'existence et l'unicité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes modifiées ont été établies par Lions [35] pour $l \geq (d+2)/4$, où d est la dimension de l'espace.

L'apport de notre travail est de montrer l'effet de l'hyperviscosité sur la turbulence tridimensionnelle.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons montré que les solutions faibles des équations perturbées convergent fortement vers les solutions correspondantes des équations de Navier-Stokes lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour $d \leq 4$, théorème 2.2.1.

Cet résultat peut s'étendre à tout domaine Ω d'épaisseur bornée dans une direction.

Le résultat obtenu complète, dans une certaine mesure, les travaux fondamentaux de J. L. Lions [36] (où seulement la convergence faible a été prouvée). Les résultats présentés dans cet travail peuvent être vus comme une amélioration des résultats de convergence annoncée par Yuh-Roung et Sritharan [42, 43] ($l = 2$, $d = 2$ et $d = 3$) pour deux raisons:

- Nous considérons une dimension $d \leq 4$,
- Le terme de viscosité ici est d'ordre $l \geq \sup((d/2), ((d+2)/4))$.

La convergence forte des équations perturbées de Navier-Stokes constitue une contribution à l'étude du problème de la régularité globale des solutions des équations de Navier-Stokes, qui fait partie des sept problèmes du millénaire sélectionnés par l'Institut de mathématiques Clay.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons estimé les effets de l'hyperviscosité sur un écoulement turbulent.

Nous avons montré au Théorème 4.4.3 que le système de Navier-Stokes perturbé par un bilaplacian possède un attracteur de dimension finie. Cette dimension est majorée par $\frac{l_0}{l_\epsilon}$ avec un exposant strictement inférieur à celui de Landau-Lifschitz qui est égale à 3 ($(\frac{l_0}{l_\epsilon})^3$), aussi inférieure aux résultats obtenus par Titi [15] pour les équations Camassa-Holm en 3D, ou tout simplement NS- α modèle. Cela améliore de façon significative les bornes antérieures.

Nous avons démontré que l'hyperviscosité peut avoir des profondes répercussions sur le nombre de degrés de liberté. Les effets modificateurs sont bien compris, ce qui rend l'utilisation de l'hyperviscosité un outil efficace pour des études numériques et suggère que la régularisation des équations de Navier-Stokes 3D a un grand potentiel pour devenir un bon modèle de simulation des grandes échelles de la turbulence. Nos résultats sont comparables à ceux obtenus dans les études numériques de la turbulence (voir, Réf., [1], [15], [19], [24] et [30]).

Ainsi les résultats obtenus peuvent contribuer à d'autres voies de mathématiques, dont on mentionnera en particulier :

- Le développement de la théorie de la turbulence, comme notre travail [53] qui donne une réponse à une question posé par Averin [1].
- L'étude de la régularité des équations de Navier-Stokes [48].

Il serait intéressant de chercher des estimations pour les équations (0.0.1) dans ce contexte, en 3D et de voir comment ces estimations dépendent de l pour tout $l \geq \frac{3}{2}$.



Figure 5.0.1 : La grande vague au large de Kanagawa (Hokusai, c. 1830).

L'instabilité génère une hiérarchie de structures de plus en plus petites
illustrant la notion de cascade turbulente.

Index

Attracteur

- Système dynamique , 14
- de Lorenz, 12
- hyperviscosité, 44

Compact

- Compact, 5
- attracteur, 44, 46
- ensemble, 14
- injection, 42, 48
- relativement, 48
- théorème, 42

Convergence

- Résultat, 42
- faible, 2, 67
- forte, 3, 42
- résultats, 2, 67
- système avec hyperviscosité, 36

Dimension

- Hausdorff, 2, 20, 61
- L'ensemble de Julia, 15
- Le triangle de Sierpiński, 21
- attracteur global, 57, 65
- estimations, 61
- fractale, 2, 15, 61

- l'espace, 2, 67

Distribution, 6, 7

Espace, 5, 6

- applications linéaires continues, 7
- Sobolev, 7
- fonctions mesurables, 6
- de Banach, 5–7
- de Hilbert, 5
- de fonctions à valeurs vectorielles, 6
- des distributions, 6, 7
- s de Sobolev, 5, 6

Euler

- Euler, 1

Existence et unicité

- Existence et unicité, 39
- Les résultats, 45
- des solutions faibles, 2, 67
- théorème d'unicité, 45
- unicité, 37, 45, 51

Fonction, 5

- s à valeurs vectorielles, 6
- s mesurables, 5

Forme

- s linéaires continues, 6

-
- Fréchet différentiable, 58
 - Gronwall
 - Lemme classique, 10, 59
 - Lemme uniforme, 10, 47, 48
 - Hyperviscosité
 - artificielle, 2, 67
 - attracteur, 44
 - effet, 2, 67
 - modèle, 57
 - système, 36
 - terme, 63
 - utilisation, 68
 - Inégalité
 - Agmon, 9
 - Hölder, 40, 60, 63
 - Lieb–Thirring, 62
 - Lieb–Thirring, 64
 - Poincaré, 9, 40, 46
 - Young, 9, 40, 46, 63
 - s fondamentales, 8
 - Kolmogorov
 - Micro-échelles, 30
 - échelle, 29
 - cascade, 29
 - dimension, 30
 - longueur de dissipation, 57
 - théorie, 17, 29, 52
 - Laplacien
 - carré, 2
 - carré, 44
 - Navier-Stokes
 - hyperviscosité, 36, 44
 - incompressibles, 36
 - solutions, 37
 - système, 1
 - système conventionnel, 39
 - solution faible, 39
 - Nombre
 - Grashof, 3, 28, 63, 65
 - Prandtl, 12
 - Rayleigh, 12
 - Reynolds, 26, 27, 37
 - de degrés de liberté, 2, 57, 68
 - Norme, 5, 6
 - Opérateur
 - Stokes, 28
 - semigroupe, 14
 - Bilinéaire, 9
 - Stokes, 8
 - différentielle, 58
 - nabla, 31
 - semi-groupe, 45
 - trace, 61
 - Ouvert, 5
 - Paramètre
 - dissipation artificielle, 1
 - régularisation, 3

Pression, 1

Produit

- scalaire, 5, 7, 43, 62

Robert Kraichnan, 18

Turbulence, 49

- Modélisation, 54
- écoulement, 50, 57, 68
- effet d’hyperviscosité , 63
- propriétés fractales, 18
- simulations numériques, 2

Viscosité

- Notion, 23
- artificielle, 2
- cinématique, 1, 23
- cisaillement, 23
- dynamique, 23
- effet physique, 37
- forces, 27
- ordre, 2, 67

Bibliographie

- [1] J. Avrin, The asymptotic finite-dimensional character of a spectrally-hyperviscous model of 3-d turbulent flow, *J. Dyn. Diff. Eqns.* 20, 479-518 (2008).
- [2] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, Nauka, Moscow, English transl, 1988, North-Holland, Amsterdam (1992).
- [3] P. Bartello, O. Metais and M. Lesieur, Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* 273, 1-29 (1994).
- [4] C. Basdevant, B. Legras, R. Sadourny, M. B eland, A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability, *J. Atmos. Sci.* 38, 2305-2326 (1981).
- [5] L. C. Berselli, T. Iliescu, W. J. Layton, *Mathematics of large eddy simulation of turbulent flows.*, *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*, Springer, Berlin, Heidelberg, (2006).
- [6] V. Borue, and S. Orszag, Numerical study of three-dimensional Kolmogorov flow at high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 306, 293-323 (1996).
- [7] V. Borue, and S. Orszag, Local energy flux and subgrid-scale statistics in three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* 306, 1-31 (1998).
- [8] H. Br ezis, *Analyse fonctionnelle. Th orie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [9] M. Cannone and G. Karch, About the regularized Navier-Stokes equations, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 7, 1-28, No. 1 (2005).

-
- [10] J. Y. Chemin, Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray. Actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray, Sémin. Congr, 9, Soc. Math. France, Paris, 99-123 (2004).
- [11] P. Constantin and C. Foias, Navier-Stokes Equations, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, (1988).
- [12] P. Constantin, C. Foias et R. Temam, Attractors representing turbulent flows, *Memoirs of A.M.S.*, 53, 315 (1985).
- [13] T. Dubois, F. Jauberteau, R. Temam, Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of turbulence. Cambridge University Press, (1999).
- [14] K. Falconer, Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, Wiley, New-York (1990).
- [15] C. Foias, D. D. Holm and E. S. Titi, The three-dimensional viscous Camassa–Holm equations and their relation to the Navier–Stokes equations and turbulence theory. *J. Dyn. Diff. Eqns.* 14, 1-34 (2002).
- [16] C. Foias, O. Manley, R. Temam, and Y. Treve, Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations. *Physica D*, 9,157-188, (1983).
- [17] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, Navier-Stokes Equations and Turbulence, Cambridge University Press, New York, (2001).
- [18] C. Foias, G. R. Sell and R. Temam, Inertial manifolds, for nonlinear evolutionary equations. *J. Diff. Eqns.*, 73, 309-353 (1988).
- [19] U. Frisch, S. Kurien, R. Pandit, W. Pauls, SS. Ray, A. Wirth, Z. Zhu J, Hyperviscosity, Galerkin truncation, and bottlenecks in turbulence. *Phys Rev Lett.*;101(14):144501. Epub (2008).
- [20] U. Frisch, Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge University Press, 296 pages (1996).

-
- [21] I. Gallagher, *Autour des équations de Navier-Stokes*. Images des Mathématiques, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier.html>.
- [22] S. Ghosal, P. Moin, The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.* 118, p. 24 (1995).
- [23] J. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math Surveys and Monographs, AMS, Vol 25, (1988).
- [24] J. L. Guermond, J. T. Oden & S. Prudhomme, Mathematical perspectives on large-eddy simulation models for turbulent flows, *J. Math. Fluid Mech.*, 6, 194-248 (2004).
- [25] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS.*, 30, 301-305 (1941).
- [26] A. A. Ilyin, L. Thirring, integral inequalities and their applications to attractors of the Navier–Stokes equations. *Mat. Sbornik* 196:1, 33-66 (2005); English transl.
- [27] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Lezioni Lincei, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1991).
- [28] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, (1985).
- [29] O. A. Ladyzhenskaya, Nonstationary Navier-Stokes equations. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 25, 151-160 (1962).
- [30] A. G. Lamorgese, D. A. Caughey, S. B. Pope, Direct numerical simulation of homogeneous turbulence with hyperviscosity. *Physics of Fluids.*, 17, (1) (2005).
- [31] M. T. Landahl, & E. Mollo-Christensen. *Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics*. Cambridge, 2ed, (1992).
- [32] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* volume 6 of *Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press Ltd., (1959).

-
- [33] Bernard Legras, G. David, Dritschel, A comparison of the contour surgery and pseudo-spectral methods, *J. Comput. Phys.*, 104 (2) 287-302 (1993).
- [34] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace., *Acta Mathematica.*, 63, 193-248 (1934).
- [35] J. L. Lions, Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Bull. Soc. Math. France.*, 87, 245-273 (1959).
- [36] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).
- [37] J. L. Lions et E. Magenes *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1 et 2, Paris, Dunod, (1968).
- [38] B. Mandelbrot, *Les objets fractals : forme, hasard, et dimension*, Flammarion, (1973).
- [39] J. Peetre, Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev. *Ann. Inst. Fourier.*, 16, 279-317 (1966).
- [40] J. Piquet, *Turbulent Flows (Models and Physic)*. Springer-Verlag., (1999).
- [41] J. C. Robinson, *Infinite Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge, Cambridge University Press, (2001).
- [42] Y. R. Ou and S. S. Sritharan, Upper Semicontinuous Global Attractors for Viscous Flow, *Journal: Dynamic Systems and Applications*, 5 , 59-80 (1996).
- [43] Y. R. Ou and S. S. Sritharan, Analysis Of Regularized Navier-Stokes Equations I, *Quart. Appl. Math.*, 49, 651-685 (1991).
- [44] P. Sagaut, *Large-Eddy Simulations for Incompressible Flows: an. Introduction*. Pierre Sagaut. Berlin: Springer. 319 pp (2001).
- [45] D. Schleicher, Hausdorff dimension, its properties, and its surprises. *American Mathematical Monthly.*, 114 , 509-528 (2007).

- [46] G. Sell and Y. You, Dynamics of Evolutionary Equations, Springer-Verlag, 68, New York, (2002).
- [47] S. S. Sritharan, Deterministic and stochastic control of Navier-Stokes equation with linear, monotone, and hyperviscosities, Appl. Math. Optim., 41 (2) 255–308 (2000).
- [48] T. Tao, Global regularity for a logarithmically supercritical hyperdissipative Navier-Stokes equation, Analysis & PDE 2, 361-366 (2009).
- [49] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Mathematical Sciences Series, 68, New York, Springer-Verlag, 2nd ed. (1997).
- [50] R. Temam, Navier-Stokes Equations. North-Holland Pub. Company, Amsterdam, (1979).
- [51] M. I. Vishik, A. V. Fursikov, *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1988).
- [52] A. Younsi, Effect of hyperviscosity on the Navier-Stokes turbulence, Electron. J. Diff. Equ., 2010, (110),. 1-19 (2010).
- [53] A. Younsi, Hausdorff measure of vorticity nodal sets for the 2D hyperviscous Navier Stokes equations with general forces, <http://arxiv.org/abs/1001.2852>, Article soumis.

الخلاصة: في هذا العمل نقوم بتعديل معادلات نافير ستوكس بإضافة حد يمثل لزوجة عالية إلى النظام التقليدي. أولاً نبرهن أن حل النظام المعدل يتقارب بقوة إلى حل النظام التقليدي لما معامل التعديل يؤول إلى الصفر، من أجل كل بعد $d \geq 4$. ثم نبين أن استخدام عامل اللزوجة الاصطناعي يؤدي إلى الحد من عدد درجات الحرية من حلول هذه المعادلات. هذه النتيجة تشير إلى أن فرط اللزوجة العالية لمعادلات نافير ستوكس هو نموذج مثير للاهتمام لدراسة اضطراب السائل ثلاثي الأبعاد.

الكلمات المفتاحية: معادلات نافير ستوكس ، فرط اللزوجة، الحلول الضعيفة، بعد الجذاب

Abstract: In this paper we modified the Navier-Stokes equations by adding a higher order artificial viscosity term to the conventional system. We first show that the solution of the regularized system converges strongly to the solution of the conventional system as the regularization parameter goes to zero, for each dimension $d \leq 4$. Then we show that the use of this artificial viscosity term leads to truncated the number of degrees of freedom in the long-time behavior of the solutions to these equations. This result suggests that the hyperviscous Navier-Stokes system is an interesting model for three-dimensional fluid turbulence.

Keywords: Navier-Stokes equations, Hyperviscosity, Weak solutions, Attractor dimension, Turbulence models.

Résumé: Dans ce travail, nous avons modifié les équations de Navier-Stokes en ajoutant un terme d'ordre supérieur viscosité artificielle au système conventionnel. Nous montrons d'abord que la solution du système régularisé converge fortement vers la solution du système conventionnel comme le paramètre de régularisation tend vers zéro, en chaque dimension $d \leq 4$. Puis nous montrons que l'utilisation de ce terme de viscosité artificielle conduit à tronquée le nombre de degrés de liberté des solutions de ces équations. Cet résultat suggère que le système de Navier-Stokes avec hyperviscosité est un modèle intéressant pour la turbulence des fluides en trois dimensions.

Mots clés: Les équations de Navier-Stokes, hyperviscosité, solutions faibles, la dimension d'un attracteur, la turbulence.