

N° d'ordre : 01/2013-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIENE »

FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MAGISTER

EN - PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : AMIRI Djamel

Sujet

*Effet des caractéristiques rhéologiques d'un fluide  
sur l'écoulement dans une sténose*

Soutenu publiquement, le 11/12/2013 , devant le jury composé de :

Mr- M. SAIGHI, Professeur à L'USTHB.

Président

Mr- M. MAHFOUD, Professeur à L'USTHB.

Directeur de Mémoire

Mme- A. MATAOUI, Professeur à L'USTHB.

Examineur

Mr- A. GHEZAL, Maître de Conférences/A, à L'USTHB.

Examineur

# *Dédicace*

*Ce travail est l'aboutissement d'une longue  
aventure universitaire, je le dédie à mes  
parents qui m'ont toujours épaulé dans mes  
projets et mes rêves et qui se sont toujours  
inquiétés de mon sort.*

*Je le dédie également à mes frères et mes*

*sœurs,*

*à toute ma famille,*

*à mes amis.*

# REMERCIEMENTS

*Cette recherche a été réalisée au laboratoire de rhéologie, faculté des sciences physiques, université des sciences et technologie Houari Boumediene, sous la direction de Monsieur le professeur MAHFOUD Mohamed. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, m'avoir encadré et soutenu dans mon travail, sans lequel cette recherche n'aurait pu être réalisée. Je lui dois plus que des remerciements de circonstance, pour sa patience, sa disponibilité et sa gentillesse.*

*J'exprime mes remerciements à Monsieur SAIGHI.M, professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de notre jury. Je le prie de bien vouloir respectueusement croire à mes sincères et profondes reconnaissances.*

*Je remercie tout particulièrement Monsieur BENHADIDE SALAH pour ses aides et ses conseils avisés et sa collaboration tout au long du travail.*

*Je tiens également à remercier Madame MATAOUI.A, et Monsieur GHEZAL.A, qui m'ont fait l'honneur d'avoir accepté de juger ce travail et participer à notre jury.*

*Sans oublier mes très chers amis Berkache Kamel, Kadi Hocine et YESSAD Billel pour toute l'aide qu'ils ont fournie et pour leur soutien et leur sympathie.*

# Sommaire

## Nomenclature

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Généralités et concepts rhéologiques</b>	<b>4</b>
Introduction	4
I. Problématique biophysique.....	5
II. Approches physiques et hypothèses.....	7
III. Caractéristiques et paramètres rhéologiques.....	9
III.1. Contrainte de cisaillement.....	9
III.2. Déformation de cisaillement.....	10
III.3. Vitesse de cisaillement.....	11
III.4. La viscosité.....	11
IV. Viscosimétrie .....	12
<b>Chapitre 2 : Etude analytique et procédés numériques</b>	<b>19</b>
I. Etude analytique.....	20
I.1. Ecoulement dans une conduite cylindrique de section uniforme.....	20
I.1.1. Longueur d'établissement.....	20
I.1.2. Profil de vitesses.....	20
I.1.3. Le Facteur de frottement et contrainte pariétale.....	24
I.2. Ecoulement à travers une sténose.....	25
I.2.1. Modèle de la sténose.....	25
I.2.2. Profils des vitesses : solution analytique.....	26
I.2.3. Chute de pression et contrainte pariétale.....	32
I.2.4. Pertes de charges .....	34
II. Etude numérique.....	35
II.1. Les équations de Navier stocks.....	35
II.2. Approximation de Prandtl (Navier-Stokes Réduit).....	35
II.3. Equation de Von Kármán et méthode de Thwaites.....	35
<b>Chapitre 3 : Montage expérimental et techniques de mesure.....</b>	<b>45</b>
I. Le dispositif expérimental (boucle hydrauliques).....	46
II. Les veines de mesure.....	48
III. Les fluides tests.....	51
IV. Techniques de mesure.....	51

IV.1. Mesure de la viscosité.....	51
IV.2. Mesure des débits.....	53
IV.3. Mesure des pertes de charge.....	54
IV.4. Mesure des vitesses.....	55
<b>Chapitre 4 : Résultats et discussion.....</b>	<b>62</b>
I .Variation centrale de la vitesse axiale.....	63
I.1.Evolution expérimentale de la vitesse axiale.....	63
I.2. Evolution théorique de la vitesse axiale.....	65
II. Contrainte de cisaillement pariétale.....	70
II.1.Contrainte pariétale théorique.....	70
II. 2. Contrainte pariétale et modèle numérique (Modèle du rayon fictif).....	79
II.2.1. Contrainte pariétale et paramètres physiologiques.....	83
II.2. 2.Contrainte de cisaillement pariétale numérique en fonction de la viscosité.....	84
II.2.3. Contrainte de cisaillement pariétale en fonction du degré de contraction.....	85
III. Pertes de charges globales.....	88
III.1. Conduites de sections uniformes.....	88
III.2. conduites sténosée.....	90
Conclusion.....	93
Conclusion générale. ....	95
Références bibliographiques .....	97

# Nomenclature

## Symboles romains

<i>Symboles</i>	<i>Description</i>	<i>Unité</i>
$A_0$	Section non contracté a l'entrée de la sténose	$m^2$
$A_1$	Section contracté au centre de la sténose	$m^2$
$A$	Constant du nombre d'Euler	---
$D$	Diamètre de la conduite uniforme	$m$
$dx, dy, dz$ et $dr$	Variation élémentaire suivant x, y, z et r respectivement	$m$
$du, dv, dw$	Variation élémentaire des composantes de la vitesse suivant x, y, z	$m.s^{-1}$
$dl$	Elément de longueur dans la conduite uniforme	$m$
$ds$	Elément de surface	$m^2$
$d\tau$	Variation élémentaire de la contrainte du cisaillement	Pa
$dp$	Variation de la pression	Pa
$e$	Entrefer du rhéomètre rotatif	$m$
$Eu$	Nombre d'Euler	---
$f$	Facteur de frottements de Fanning	---
$F$	Force	N
$g$	Gravité	$m.s^{-2}$
$H$	Facteur de forme de Thwaites	---
$h, h', h_1, h_2$	Hauteurs	$m$
$K$	Constante d'étalonnage du rhéomètre capillaire et rotatif	Pa
$k$	Le paramètre de Thwaites	---
$L', l, l',$	Longueur de la sténose, de la conduite uniforme et du tube capillaire respectivement	$m$
$L$	Longueur de la sténose en unité du rayon d'entrée	---
$Le$	Longueur d'établissement	$m$
$Lp$	La distance entre deux prises de pression	$m$
$p$	Pression instantanée	Pa
$Q_v$	Débit volumique du fluide	$m^3.s^{-1}$
$R_0, R_1, , ,$	Rayon à l'entrée et au centre de la sténose respectivement	$m$
$R_a, R_b$	Rayon extérieure et intérieure du rhéomètre rotatif respectivement	$m$
$r$	Rayon de la sténose	$m$
$r_1'$	Rayon fictif au centre de la sténose	$m$
$r_s$	Rayon de séparation dans la zone de recirculation	---
$R_c$	Rayon du tube capillaire	$m$
$R$	Rayon de la sténose en unité de $R_0$	---
$Re$	Nombre de Reynolds	---
$S$	Facteur de forme de Thwaites	---
$s$	Surface latérale du cylindre intérieure du rhéomètre	$m^2$
$t$	Temps d'écoulement	s
$\vec{u}$	Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
$u,$	Composante du vecteur vitesse suivant z	$m.s^{-1}$
$u_c, u_0, u_1$	Vitesse axiale et vitesses axiales locales au centre de la conduite	$m.s^{-1}$
$U_m, \bar{U}_0$	Vitesse moyenne ou débitante	$m.s^{-1}$
$U$	Composante axiale et transversale du vecteur vitesse en unité de $\bar{U}_0$	---
$U_c$	Vitesses axiales au centre de la conduite en unité de $\bar{U}_0$	---
$v$	Composante du vecteur vitesse suivant y	$m.s^{-1}$

$w$	Composante du vecteur vitesse suivant $x$	m.s-1
$W$	Vitesse angulaire	rad.s <sup>-1</sup>
$V$	Composante transversale du vecteur vitesse en unité de $\bar{U}_0$	---
$Y$	Variable transversale en unité de $R_0$	---
$Z$	Variable longitudinale en unité de $R_0$	---
$Z_0'$	La demi-longueur de la sténose	m
$Z_0$	La demi-longueur de la sténose en unité de $R_0$	m

## Symboles grecs

$\alpha$	Angle	rad
$\beta$	Paramètre de Young et Morgan	---
$\gamma$	Déformation	---
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement	s <sup>-1</sup>
$\delta'$	Hauteur de la sténose	m
$\delta$	Hauteur de la sténose en unité de $R_0$	m
$\delta^*$	L'épaisseur du déplacement	m
$\hat{\delta}$	L'épaisseur de la couche limite	m
$\varepsilon$	Variation élémentaire de la longueur	m
$\xi$	Degré de contraction	---
$\eta$	Viscosité dynamique apparente	Pa.s
$\lambda$	Paramètre de forme de Thwaites	---
$\nu$	Viscosité cinématique	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
$\rho$	Masse volumique du fluide	Kg.m <sup>-3</sup>
$\bar{\tau}$	Contrainte de cisaillement	Pa
$\bar{\tau}_p$	Contrainte de cisaillement pariétale	Pa
$\bar{\tau}_{p0}$	Contrainte de cisaillement pariétale de poiseuille	Pa
$\tau_p, \tau_{p1}, \tau_{p2}$	Contrainte de cisaillement pariétale en unité de $\bar{\tau}_{p0}$	---
$\Omega$	Angle de rotation	rad
$\Delta P, \Delta p$	Chute de pression totale et régulière	Pa

# Introduction générale

Les maladies cardiovasculaires représentent actuellement une des premières causes de mortalité dans le monde, un constat qui trouve ses raisons dans l'augmentation constante des facteurs de risque dans les populations (hypertension artérielle, diabète, tabagisme, obésité, hypercholestérolémie). Si l'on se réfère aux données des rapports hospitaliers, le constat est alarmant. La morbidité liée aux maladies cardiovasculaires a triplé en 20 ans. Par ailleurs, au-delà de 65 ans, 71% des causes de morbidité sont liées aux maladies cardiovasculaires. Un autre fait marquant concerne l'hypertension artérielle qui représente à elle seule, 25% des consultations de médecine générale des adultes entre 45 et 74 ans (40% des plus de 75 ans).

Par conséquent, et compte tenu du vieillissement croissant des populations, à l'horizon de 2020, c'est une progression de plus de 20% de la pathologie vasculaire qui est attendue, principalement à cause de la chronicisation de la maladie. La maladie cardiovasculaire se développant sur plusieurs décennies, il est donc primordial de porter un grand intérêt à la prise en charge précoce de ces maladies notamment en lien avec l'obésité et le diabète.

La rhéologie pariétale intervient de manière majeure dans les phénomènes observables en circulation artérielle. Cependant, la nature hydrodynamique des écoulements reste principalement dépendante du comportement rhéologique du fluide sanguin. C'est la viscosité du fluide qui va contrôler la nature des profils de vitesse correspondant à un écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite de section circulaire. S'il est bien admis que le caractère non newtonien du fluide peut être omis dans ces écoulements, son caractère visqueux reste particulièrement important et il va conditionner non seulement les pertes de charge lors de l'écoulement mais aussi la valeur des contraintes qu'exerce le fluide sur les parois du vaisseau. Or on sait, depuis quelques années, le rôle de ces contraintes sur les cellules pariétales en contact avec le sang. Elles sont capables de générer un certain nombre de substances biologiques qui peuvent avoir un effet sur l'état de contraction des vaisseaux, ou sur les capacités d'adhésion des éléments circulants sur la paroi. Or la production de ces facteurs est dépendante de l'état de

contrainte qui s'exerce sur ces cellules, et l'on voit l'intérêt que l'on peut avoir à les déterminer [1]. Ces contraintes sont calculables à partir du moment où est connue la vitesse de cisaillement à la paroi et la viscosité associée.

Ce problème a l'air simple en apparence, puisqu'il est possible de mesurer la répartition des vitesses dans l'écoulement. On peut ainsi évaluer ces contraintes dans le cas où les vaisseaux ont des géométries simples, à partir de la mesure de la vitesse sur l'axe du vaisseau, et en mesurant la viscosité sanguine. En prenant éventuellement en compte le comportement newtonien, on aboutit ainsi au calcul de la contrainte de cisaillement pariétale et aux pertes de charges. Celles-ci peuvent être reliées à des modifications pathologiques du comportement rhéologique du sang, mais ses valeurs sont aussi dépendantes de la fréquence cardiaque et plus particulièrement des caractéristiques géométriques du vaisseau [2-6].

En effet le système artériel est constitué d'un réseau complexe comportant des coudes, des embranchements mais aussi, dans des situations pathologiques, des rétrécissements (sténoses) ou des dilatations du conduit (anévrismes). Dans ces différentes situations, les écoulements présentent des morphologies complexes qui peuvent inclure des zones de recirculation pour des vitesses de cisaillement anormalement basses, ou anormalement élevées.

L'objectif de cette étude est de montrer l'effet de l'inertie d'un fluide visqueux newtonien sur l'écoulement en présence d'une sténose, et en particulier sur l'évolution de la contrainte de cisaillement pariétale, ainsi que ses effets sur les pertes de charges générées au niveau de la sténose.

La détermination de la valeur de la contrainte de cisaillement pariétale le long de la sténose est effectuée par deux procédés, le premier utilise la relation théorique de Morgan et Young [7], le second est basé sur les travaux analytiques de Thwaites [8], adapté en modèle numérique par Jasan (modèle du rayon fictif) [9]. Les résultats de ces méthodes concernent les sténoses de formes sinusoïdale et conique, avec différents degrés de contraction ; en utilisant deux fluides tests, l'eau distillée et les données physiologiques du sang.

Les deux méthodes exigent la connaissance du profil de la vitesse axiale, qui est déterminé expérimentalement par la méthode LDV (Vélocimétrie laser à effet Doppler). Les mesures ont porté aussi sur les pertes de charges relevées lors de l'écoulement du glucose (à forte viscosité) dans différents types de conduites, et elles ont été comparées à celles de l'eau.

Dans le premier chapitre, nous avons abordé la problématique biophysique de la sténose, suivi des définitions des différents paramètres rhéologiques qui interviennent dans ce genre de configuration, ainsi que les principaux viscosimètres utilisés pour leur détermination.

Dans le second chapitre, nous avons présenté les travaux analytiques et numériques développés pour l'étude de l'écoulement du sang dans les artères sténosées.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation de l'installation expérimentale et les techniques de mesure employées.

Enfin, on présentera dans le chapitre 4 les résultats de l'étude dynamique locale et globale concernant les profils de vitesse expérimentaux et théoriques, la contrainte de cisaillement pariétale issue des deux méthodes employées, ainsi les pertes de charges totales générées.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale qui synthétise les principaux résultats obtenus, et les perspectives nécessaires qu'il faut apporter à ce travail.

# Chapitre 1

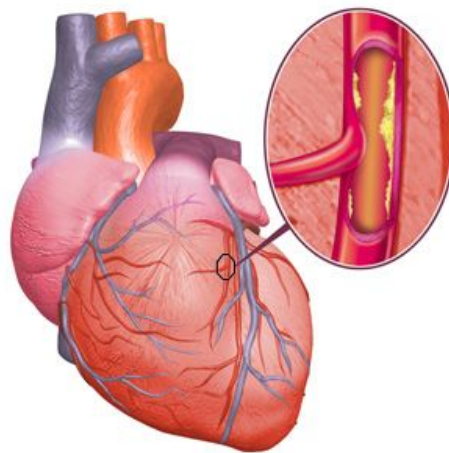
## Généralités et Concepts rhéologiques

Depuis une vingtaine d'années, la médecine cardiovasculaire dispose d'un nouveau système de prothèse issue de la bioingénierie pour le cas pathologique des rétrécissements artériels. Cette cardiopathie naît de la diminution plus ou moins importante de la circulation sanguine en un ou plusieurs points de l'arbre artériel. Ce rétrécissement localisé (sténose) entraîne souvent une diminution de la quantité d'oxygène contenue dans le sang (hypoxémie) au niveau des tissus des muscles cardiaques qui se trouvent en aval.

La rhéologie intervient dans les écoulements sanguins et a comme objectif de suivre les effets des caractéristiques du fluide circulant dans les artères (cisaillement, déformation, viscosité....) ainsi que leurs comportements au niveau des rétrécissements. Dans ce chapitre nous allons d'abord poser le problème de la sténose et les raisons de son développement, suivi des définitions des grandeurs rhéologiques qui seront utilisées par la suite. Une partie viscosimétrique est introduite afin de montrer les différentes manières de mesurer la viscosité.

## I. Problématique biophysique

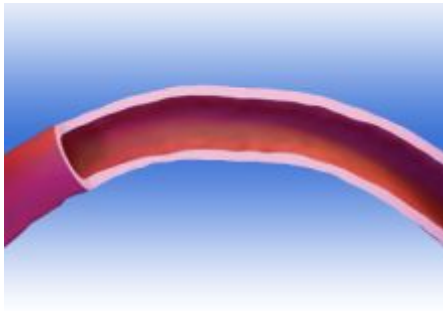
L'étude de l'écoulement sanguin dans les artères sténosées est très importante en raison du fait que la cause et le développement de nombreuses maladies artérielles menant à la défaillance du système cardio-vasculaire sont, dans une large mesure, liés aux caractéristiques de l'écoulement du sang. Parmi les diverses maladies artérielles, le développement de l'artériosclérose dans les vaisseaux sanguins est assez fréquent qui peut être attribué à l'accumulation de lipides dans la paroi artérielle [10]. Les artères sont rétrécies par le développement des plaques d'athérome qui sont accumulées sur la paroi interne de l'artère, ce qui entraîne la formation des sténoses [11]. Lorsqu'une lésion est développée dans une artère, l'une des séries des conséquences est l'augmentation de la résistance à l'écoulement qui réduit la quantité du sang dirigé vers le lit vasculaire, particulièrement fourni par l'artère [12]. Ainsi, la présence d'une sténose peut conduire à des troubles circulatoires graves. La coronaropathie est la forme la plus courante de maladie cardiaque au monde. Si quelqu'un est atteint de coronaropathie, cela signifie que ces artères coronaires, les vaisseaux qui alimentent son cœur en sang, sont **rétrécis** ou **obstrués**. La quantité du sang envoyée à son cœur peut être insuffisante. Le rétrécissement des artères est dû à l'accumulation d'une substance cireuse, appelée **plaque d'athérome**, sur la paroi interne des vaisseaux. La plaque est constituée d'une accumulation de lipides et de cholestérol circulant dans le sang. Les lipides et le cholestérol proviennent généralement de l'alimentation et s'accumulent progressivement sur les parois internes des artères (figure 1.1)



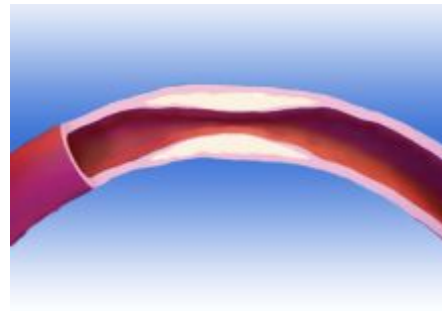
*Figure 1.1 : Le cœur humain et le grossissement d'une artère sténosée.*

Une artère saine est élastique, lisse à l'intérieur, et doit être capable de fournir suffisamment de sang au cœur (figure 1.2).

Une artère malade est rigide et rétrécie en raison de l'accumulation de plaque d'athérome. Cette accumulation de plaque constitue un véritable danger car elle est susceptible de bloquer les artères. On appelle **sténose** le rétrécissement ou l'obstruction d'une artère (figure 1.3).



**Figure 1.2** : Artère saine



**Figure 1.3** : Artère malade (sténosée)

Une artère sténosée ressemble à un tuyau bouché. Une artère coronaire bouchée est un phénomène préoccupant car les artères sont les seuls vaisseaux capables d'alimenter le cœur en oxygène. Le rétrécissement ou l'obstruction d'une artère s'accompagne d'une diminution de l'apport sanguin et de l'apport en oxygène pour les muscles cardiaques. Or, notre cœur nécessite un volume d'oxygène et une quantité de nutriments suffisants pour fonctionner correctement (Minéraux alimentaires, Vitamines et Acides aminés etc ...). L'accumulation de plaque dans les artères peut s'effectuer au fil des ans. La coronaropathie est une maladie progressive. Le terme athérosclérose désigne le processus d'accumulation progressive de plaque sur la paroi interne des artères. Si ce processus persiste, on peut ressentir certains symptômes tels que des douleurs thoraciques, un souffle court et un engourdissement des bras et des épaules. Une coronaropathie peut également être à l'origine d'une crise cardiaque.

## II. Approches physiques et hypothèses

Plusieurs études théoriques relatives à la circulation sanguine dans les artères sténosées ont été réalisées [13-19] dans le but de modéliser la constriction artérielle. Le rétrécissement vasculaire entraîne l'apparition d'une contrainte de cisaillement pariétale [20] assez importante au niveau de la constriction. L'expression de cette contrainte au centre de la sténose, qui est fonction du débit de l'écoulement, fait appel à plusieurs approches analytique, numériques et semi-empiriques [21-24]. La principale hypothèse qui a accompagné ces études est que le sang se comporte comme un fluide newtonien [13,14] quand il s'écoule à travers les grandes artères à haut débit. Aux faibles taux de cisaillement et à travers des artères étroites le sang présente un comportement non newtonien à cause de la suspension de cellules dans le plasma en particulier dans l'état pathologique [25-28]. Pour une taille moyenne d'artère le nombre de Reynolds varie généralement de 100 à 1000 [21], de sorte que l'écoulement sanguin dans la circulation humaine n'est pas turbulent [29]. Nous allons donc supposer que l'écoulement à travers la sténose est laminaire, et que les équations de couche limite laminaire s'appliquent. Nous supposons également que l'artère est rigide et peut être modélisée comme un tube cylindrique rigide avec des parois lisses [19]. Les sténoses réelles ont une forme géométrique irrégulière, mais une sténose axisymétrique lisse et rigide est seulement une approche physique [23]. Le choix du modèle géométrique sinusoïdal est justifié par la forme réelle de la sténose (voir figure 2.3), contrairement à la géométrie conique régulière utilisée par certains en littérature. Nous supposons également que l'écoulement à travers l'artère et à travers la sténose est permanent, même si l'écoulement est, en réalité, pulsatile. En tout cas, la contrainte de cisaillement maximale dans la sténose devrait se produire lorsque l'écoulement artériel atteint son maximum. En amont et très loin de la sténose l'écoulement sanguin établi est supposé de type Poiseuille (profil de vitesse parabolique dans une conduite cylindrique uniforme).

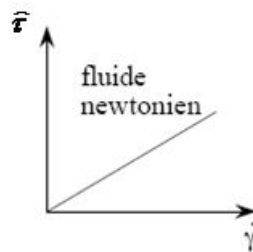
En résumé les hypothèses de travail sont les suivantes :

- Le sang se comporte comme un fluide newtonien
- L'écoulement à travers la sténose est laminaire
- L'écoulement est stationnaire

- Le sang est un fluide incompressible.
- En amont et très loin de la sténose l'écoulement sanguin est de type Poiseuille.
- L'artère est rigide et peut être modélisée comme un tube cylindrique rigide avec des parois lisses.
- La sténose est de forme sinusoïdale.

### ■ Les fluides newtoniens

Intuitivement, il est clair que la valeur de la contrainte de cisaillement va en général croître avec la vitesse de cisaillement, cependant le rapport entre ces deux grandeurs va dépendre des propriétés des fluides considérés. Le rapport entre la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est appelé coefficient de viscosité ; noté  $\eta$ . On pourrait croire que ce coefficient suffit à caractériser les propriétés d'écoulement des échantillons, à une température donnée. C'est vrai dans le cas des fluides newtoniens pour lesquels il y a proportionnalité entre contrainte et vitesse de cisaillement, si bien que la viscosité est indépendante du cisaillement (voir figure 2.4). Mais ce n'est plus vrai dans le cas des fluides non newtoniens, pour lesquels la relation de proportionnalité n'est plus vérifiée, et qui présentent un comportement en écoulement beaucoup plus riche et complexe.



**Figure 1.4 :** Contrainte de cisaillement en fonction de vitesse de cisaillement pour un fluide newtonien.

On s'intéressera dans notre étude aux seuls fluides (réels) newtoniens, et plus particulièrement aux liquides. Les fluides newtoniens reposent sur les hypothèses suivantes :

- Les **propriétés** du fluide sont **identiques** pour tous les observateurs, quels que soient les systèmes d'axes qui les décrivent.
- Le fluide est **entièrement dénué d'élasticité** (il n'a donc aucune "mémoire" du passé).

- Le fluide est **homogène** (les propriétés du fluides sont les mêmes dans tous le fluide).
- Le fluide est **isotrope** (il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Les contraintes sont des **fonctions linéaires** des taux de déformation.

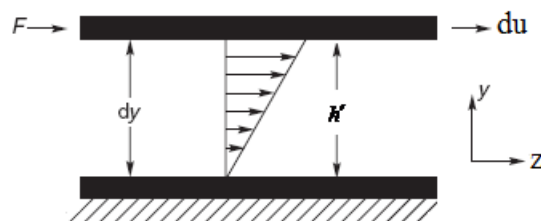
Seuls les gaz et les liquides ayant une structure chimique suffisamment simple vérifient ce schéma. Encore faut-il que les taux de déformation ne soient pas trop importants. On négligera donc tous les modèles élastiques, plastiques, pseudo plastiques, dilatants, thixotropiques ou rhéopéxiqes.

### III. Caractéristiques et paramètres rhéologiques

#### III.1. Contrainte de cisaillement

Le mouvement laminaire est l'un des régimes utilisé en rhéologie pour caractériser les rapports entre la contrainte appliquée et le taux de déformation du matériau cisailé.

Afin d'obtenir un mouvement laminaire, supposant que l'échantillon à étudier est enfermé entre deux plans solides parallèles. Comme on souhaite étudier les propriétés volumiques d'un fluide, les deux plans doivent être distants d'une longueur bien plus grande que la taille des unités élémentaires constitutives du fluide (molécules ou agrégats de molécules).



**Figure 1.5 :** Cisaillement simple.

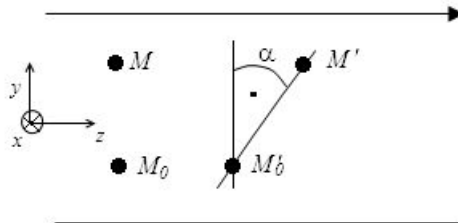
Considérons le cas où les contraintes sont appliquées par l'intermédiaire d'un plan animé d'une certaine vitesse et d'un plan parallèle fixe distants de  $h'$  comme indiqué sur la figure (1.5). Les contrainte ne dépendent que de  $y$  par symétrie. De plus, seule existe la contrainte de cisaillement  $\tau$  tel que :

$$\bar{\tau} = \frac{F}{S} \quad (1.1)$$

C'est cette configuration de cisaillement simple que nous utiliserons par la suite.

### III.2. Déformation de cisaillement

Sous l'action des contraintes, un matériau va se déformer. On considère l'écoulement de cisaillement laminaire de la figure (1.4)



**Figure 1.6 :** Déformation.

Si un élément matériel est localisé au point  $M_0$  de coordonnées  $(z, y, x)$ , il sera localisé au point  $M'_0$  de coordonnées  $(z + \varepsilon, y, x)$  à l'instant  $t$  puisque la vitesse du fluide est parallèle à l'axe des  $z$  (voir le schéma de la figure 1.6). Le déplacement  $z$  dépend seulement de  $y$ . L'élément matériel situé au point  $M$  de coordonnées  $(z, y + dy, x)$ , sera localisé au point  $M'$  de coordonnées  $(z + \varepsilon + (d\varepsilon/dy)dy, y + dy, x)$  à l'instant  $t$ .

On appelle déformation, la variation du déplacement lorsqu'on passe d'une couche à une couche infiniment voisine :

$$\gamma = \frac{d\varepsilon}{dy} = \tan \alpha \quad (1.2)$$

C'est cette variation qui caractérise un mouvement de cisaillement pour lequel les différentes couches ont des déplacements relatifs les uns par rapport aux autres.

### III.3. Vitesse de cisaillement

La vitesse de déformation est définie par :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (1.3)$$

Car la composante suivant  $z$  de la vitesse est  $u = d\varepsilon/dt$ . On voit que la vitesse de déformation est égale au taux de cisaillement. Dans le cas particulier du cisaillement simple, le taux de cisaillement n'a qu'une seule composante suivant  $z$  où  $\dot{\gamma} = du/dy$ .

### III.4. La Viscosité

La viscosité est un phénomène physique important et intéressant en mécanique des fluides. En 1713, Newton signalait le rôle de la viscosité en hydrodynamique et donnait l'expression analytique fondée sur une hypothèse, laquelle a été généralisée ensuite par Lamé : « *A température et à pression données, il y a proportionnalité de la tension visqueuse à la vitesse de déformation pure, suivant une même direction* ». Ce phénomène est une caractéristique de la matière, quel qu'en soit l'état physique : gazeux, liquide ou à la limite solide, sans oublier tous les états polyphasiques. Elle intervient fréquemment dans les équations de la mécanique des fluides. Elle traduit, en bref, la résistance d'un fluide à l'écoulement. Tous les liquides, par exemple, sont doués de viscosité et cette propriété modifie l'allure des phénomènes : la viscosité ralentit le mouvement du liquide au voisinage des parois.

Quant au gradient de vitesse  $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$ , il est une mesure de la vitesse à laquelle les différentes couches se déplacent les unes par rapport aux autres. Ainsi, la viscosité du liquide est :

$$\eta = \frac{dF/ds}{\partial u/\partial y} = \frac{\text{pression d'entraînement}}{\text{gradient de vitesse}} = \frac{\text{effort de cisaillement}}{\text{taux de cisaillement}} \quad (1.4)$$

Le terme de cisaillement traduit bien l'analogie formelle qui existe entre frottement liquide et frottement mécanique.

Il est commode pour étudier la rhéologie des liquides (en général) de porter sur un graphique les valeurs de  $\hat{\tau}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ . Sur un tel graphique la viscosité apparente est égale à la pente de la tangente à la courbe obtenue, encore appelée courbe rhéologique ou rhéogramme. Un fluide newtonien ne possède qu'une seule caractéristique rhéologique, la viscosité. Dans les mêmes conditions de température et de pression, ce rapport est constant quel que soit le gradient de vitesse. La courbe caractéristique est une droite passant par l'origine. La véritable définition de la viscosité implique l'existence de ce qu'on appelle l'écoulement laminaire (ou mieux écoulement lamellaire) dans lequel le mouvement ou mieux le glissement d'une couche du liquide sur l'autre s'effectue sans transfert de matière d'une couche à l'autre, la viscosité étant définie comme le frottement entre ces couches. Il y a une certaine vitesse maximum, dite vitesse critique, dont la valeur dépend d'un certains

nombres de facteurs (vitesse, viscosité, densité, forme du récipient), au-delà de laquelle le mouvement relatif d'une couche de liquide ne peut pas se faire sans qu'il y ait transfert de matière de l'une à l'autre : au-delà de cette vitesse se trouve l'écoulement turbulent. Les molécules ou les particules plus grandes passent alors d'une couche à l'autre et le phénomène absorbe une quantité d'énergie considérable. Il en résulte en définitive qu'une quantité d'énergie beaucoup plus grande que dans le cas d'un écoulement laminaire est nécessaire pour maintenir cet écoulement turbulent. L'augmentation de l'énergie nécessaire se reflète par l'existence d'un effort de cisaillement apparent beaucoup plus grand, c'est à dire que la valeur calculée de la viscosité  $\eta$  sera beaucoup plus élevée en écoulement turbulent qu'en écoulement lamellaire.

### **III.4.1.Applications médicales**

Par définition l'hématocrite représente le pourcentage de volume de globule rouge par rapport au volume total du sang dans le vaisseau. Normalement celui-ci est de 45% à 50%. Cependant ce taux d'hématocrite intervient dans de nombreux aspect de l'écoulement sanguin, notamment dans la viscosité du sang et sa conductivité.

#### **a) Viscosité du sang**

Par définition le sang, contrairement au plasma sanguin, est considéré dans la majeure partie des cas, comme un fluide non newtonien. C'est-à-dire que sa viscosité n'est pas constante en fonction de la vitesse de l'écoulement. Cependant nous allons voir qu'il existe des cas où le sang peut avoir une viscosité constante.

#### **b) Viscosité du sang en fonction de la température**

Entre 23 et 37°C la viscosité apparente du sang ne change pas avec la température quand le gradient de vitesse est élevé (supérieur à 80 cm/s), mais augmente quand celui-ci est faible (inférieur à 1 cm/s). Aussi quand la température diminue, la viscosité du sang croît. Elle est multipliée par 2.5 lorsque la température passe de 37°C à 0°C. Il en résulte évidemment une circulation plus difficile, ce qui explique pourquoi l'extrémité de nos doigts se refroidissent en premier lieu en cas de chute de la température entraînant une vasoconstriction.

### **c) Viscosité du sang en fonction de l'hématocrite**

La mesure de la viscosité absolue avec un viscosimètre est assez difficile à réaliser. Aussi il est plus commode de parler de viscosité relative qui représente le rapport de la viscosité du sang à celle de l'eau à la même température. Heureusement, bien que l'eau change beaucoup de viscosité avec la température (la viscosité augmente de deux fois et demi entre 37°C et 0°C), les changements de viscosité de nombreux fluides aqueux, comme le sang, sont presque les mêmes que ceux de l'eau. Il en résulte que la viscosité relative change très peu avec les modifications de la température. La viscosité relative du sang est située entre 3 et 4 pour un taux d'hématocrite normal de 45% à 50%. En fonction de la vitesse de cisaillement, c'est-à-dire lorsque l'on place l'échantillon de sang dans un viscosimètre de couette, la viscosité du sang varie. Trois comportements sont observés:

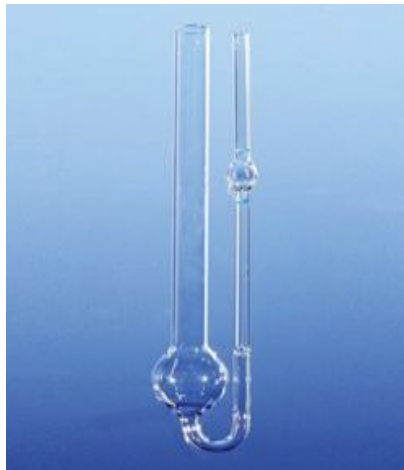
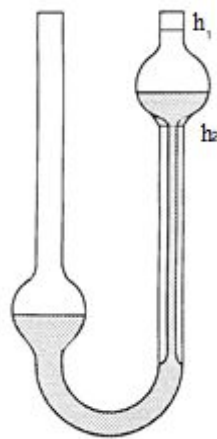
1. Lorsque la vitesse de cisaillement est faible, les globules rouges sont associés en réseaux de rouleaux. La viscosité élevée est gouvernée par certains facteurs plasmatiques, fibrinogènes et globulines notamment, mais aussi par certains facteurs membranaires comme la charge électrique par exemple. Le sang se comporte comme un fluide viscoélastique. Dans ce cas, la contrainte est trop faible pour dissocier complètement le réseau formé par les rouleaux de globules rouges.
2. Lorsque la vitesse de cisaillement est élevée, les globules rouges sont dispersés, s'orientent dans l'écoulement et peuvent se déformer. La viscosité basse est principalement influencée par les propriétés mécaniques individuelles du globule rouge, notamment par sa déformabilité. Le sang se comporte comme un fluide élastothixotrope.
3. Lorsque la vitesse de cisaillement est modérée, la viscosité est essentiellement gouvernée par des phénomènes complexes d'équilibre entre les deux mécanismes compétitifs de l'agrégation et la désagrégation des rouleaux. Le sang se comporte comme un fluide newtonien : les rouleaux de globules rouges sont entièrement dissociés et les globules rouges s'orientent dans le sens de l'écoulement.

## IV. Viscosimétrie

Dans ce paragraphe, nous allons présenter brièvement les principaux types de viscosimètre utilisés pour caractériser les fluides newtoniens. La mesure de la viscosité se fait avec deux catégories d'appareils : les viscosimètres absolus fondés sur la définition même de la viscosité dynamique ou sur les conséquences de cette définition (loi d'écoulement de Poiseuille dans un tube capillaire, chute d'une bille dans un liquide) et les viscosimètres empiriques, d'un emploi plus simple, dans lesquels on compare les temps d'écoulement dans un appareil de caractéristiques données. La viscosité dynamique variant très rapidement en fonction de la température, il faut, pour toute détermination sérieuse, prévoir une enceinte thermostatée permettant le réglage de la température, ainsi qu'une mesure précise de cette dernière.

### IV.1. Les viscosimètres capillaires

Simple et précis, ils ont malheureusement des capacités limitées puisqu'ils ne peuvent être utilisés qu'avec des liquides newtoniens. On mesure le temps d'écoulement d'un volume fixe compris entre deux repères  $h_1$  et  $h_2$  (figure 1.7).



*Figure 1.7 : Viscosimètre capillaire*

Le principe de fonctionnement est fondé sur la loi de Poiseuille de sorte que la viscosité dynamique est proportionnelle à la durée de l'écoulement  $t$  :

$$\eta = k \cdot \rho \cdot t \quad (1.5)$$

Où :  $K$  : est la constante d'étalonnage de l'appareil

$\rho$ : la masse volumique du fluide

Si on ne connaît pas la constante  $k$  (fournie généralement par le constructeur), on la détermine préalablement à l'aide de l'eau

En effet, la loi de Poiseuille s'écrit :

$$Q_v = \frac{4\pi R_c^4}{8\eta} \left( \rho g + \frac{\Delta p}{l'} \right) \quad (1.6)$$

Où  $Q_v$  est le débit volumique,  $R_c$  le rayon intérieur du capillaire,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $\rho$  la masse volumique,  $\Delta p$  la différence de pression appliquée aux extrémités du tube de longueur  $l'$  .

L'application de différences de pression  $\Delta p$  différentes permet de vérifier le comportement newtonien du liquide. Le graphe  $Q_v = f(\Delta p)$  est alors une droite.

Dans certains cas, la viscosité est mesurée sous le seul effet de la pesanteur ( $\Delta p = 0$ ) et elle se déduit par la relation :

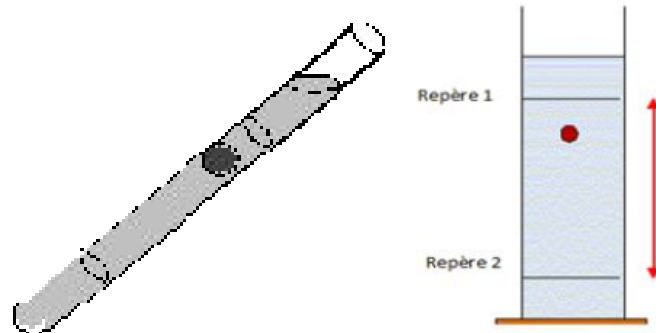
$$Q_v = \frac{4\pi R_c^4}{8\eta} \rho g \quad (1.7)$$

Ce qui est bien conforme à l'équation (1.5).

Dans les viscosimètres de type Ostwald utilisés pour de faibles viscosités, seule la gravité met le fluide en mouvement. D'autres viscosimètres utilisent une différence de pression  $\Delta p$  motrice ce qui permet de mesurer des viscosités dans la gamme  $10^{-2}$ Pa.s à  $10^7$ Pa.s. Ils nécessitent cependant des corrections dites effet de sortie d'énergie cinétique (Hagenbach).

## IV.2 .Viscosimètre à chute de bille ou viscosimètre d'Hoepler

Une bille sphérique tombe lentement dans un tube bien calibré renfermant le liquide visqueux (figure1.8).



*Figure 1.8 : Viscosimètre à chute de bille.*

On mesure la durée  $t$  que met la bille pour parcourir une certaine distance. On montre que la viscosité dynamique  $\eta$  est proportionnelle à la durée  $t$  :

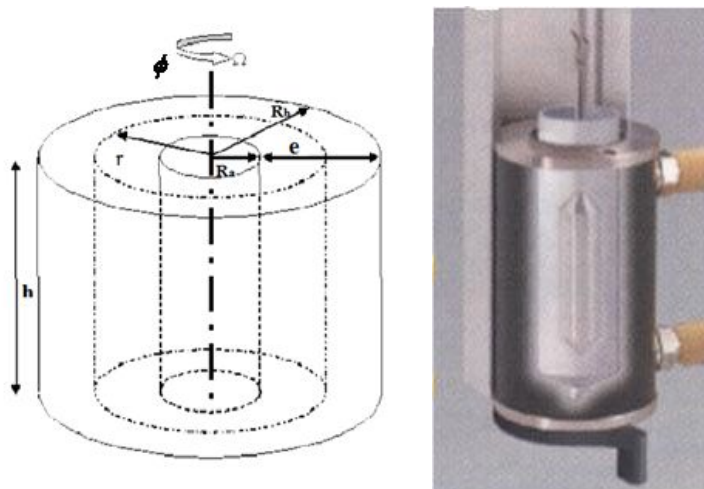
$$\eta = K \cdot t \quad (1.8)$$

Où  $k$  est une constante d'étalonnage.

## IV.3. Les rhéomètres rotatifs

C'est la famille de rhéomètres les plus utilisés. Ils sont fortement automatisés dans leur fonctionnement : électronique de commande et de contrôle, mesures automatisées, acquisition des données.

Le fluide est placé entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_a$  et  $R_b$  (figure1.9). Le cisaillement a donc lieu entre une surface solide fixe (le stator) et une autre en rotation (le rotor). Peu importe le cylindre jouant le rôle de rotor, mais il est important que l'entrefer  $e = R_a - R_b$  soit faible.



*Figure 1.9 : Géométries cylindriques coaxiales*

Trois grandeurs sont directement mesurables

- Le couple moteur  $\phi$  (mesuré ou imposé) qui entraîne le rotor. Il est relié à la contrainte  $\hat{\tau}$
- L'angle de rotation  $\Omega$  (par rapport à une position de départ). Il est relié à la déformation  $\gamma$ .
- La vitesse angulaire (mesurée ou imposée) =  $d\Omega / dt$ . Elle est liée à la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ .

On peut exprimer les grandeurs mécaniques en fonction des grandeurs rhéologiques si on se place dans l'hypothèse d'un entrefer étroit.  $\hat{\tau} = \frac{F}{s}$  ou  $F = \frac{\phi}{r}$  et  $s = 2 \pi h r$  ; d'où

$$\hat{\tau} = \frac{\phi}{2 \pi h r^2} \quad (1.9)$$

Avec  $r$  qui représente la distance à l'axe.

Nous obtenons donc une relation qui relie la contrainte au couple via des paramètres géométriques de l'appareil.

La relation qui lie la vitesse angulaire à la vitesse de cisaillement est la suivante :

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dr} = r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.10)$$

En intégrant cette relation et on pose :

Pour  $r = R_a$ ,  $w = \Omega$

Pour  $r = R_b$ ,  $w = 0$

$$\dot{\gamma} = \frac{R_a \Omega}{R_a - R_b} \quad (1.11)$$

Par définition la viscosité s'exprime comme suit

$$\eta = \frac{\hat{\tau}}{\dot{\gamma}} = \frac{\phi}{2 \pi h r^3} \frac{dr}{d\Omega}$$

Il faut donc intégrer cette relation entre  $R_a$  et  $R_b$  pour remonter à la forme générale de la viscosité

$$\eta = \frac{\phi}{4 \pi h \Omega} \frac{R_b^2 - R_a^2}{R_b^2 R_a^2} \quad (1.11)$$

En résumé, La viscosité est donc une grandeur physique qui exprime la capacité d'un corps à s'opposer au cisaillement. Mais on parle surtout de la viscosité en parlant d'un fluide. On dira alors qu'elle exprime la résistance d'un liquide à l'écoulement uniforme et sans turbulence. La connaissance de la viscosité est capitale. Si elle peut être négligée à très basses vitesses, sa présence se fait remarquer d'autant plus à des vitesses conséquentes. Que ce soit pour construire l'aile d'un avion, dimensionner les tubes d'écoulement d'une centrale hydraulique ou encore d'obtenir une huile particulière, ainsi que pour comprendre la circulation sanguine.

Il serait faux de croire que tout a été dit sur la viscosité, les chercheurs aujourd'hui encore se penchent sur un aspect prometteur : la superfluidité. Les travaux de Kapitsa [30] montrent en effet que, au-dessous de 2,17 °K, l'hélium (He) liquide est susceptible de s'écouler sans viscosité apparente à travers des pores microscopiques. L'intérêt de ce phénomène réside dans les courants permanents ; on peut lancer un écoulement dans un anneau poreux et mesurer sa vitesse ; à température constante, aucun ralentissement n'est observable. Plus qu'une simple caractéristique, la viscosité est véritablement un phénomène physique intéressant et important.

# Chapitre 2

## Etude analytique et procédés numériques

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux grandes parties, la première est une étude analytique, tandis que la seconde est consacrée à la méthode numérique.

L'étude analytique concerne l'écoulement du fluide newtonien pour deux types de conduites, l'une est uniforme, l'autre est sténosée. Les formulations des vitesses, des pertes de charge et de celles de la contrainte pariétale sont présentées dans le cas d'un écoulement stationnaire et laminaire.

La deuxième partie sera consacrée aux rappels sur les lois qui gouvernent le mouvement d'un fluide newtonien dans une conduite cylindrique, en partant des équations non linéaire de Navier-Stokes, et qui nécessitent pas mal d'approximations pour les rendre commode à manipuler. Parmi toutes ces approches, nous allons nous intéresser à la seule équation appelée équation de Van Karman sur laquelle une méthode est développée, nommée méthode de Thwaites. Cette dernière permet de remonter à la contrainte de cisaillement pariétale par un schéma numérique.

# I. Etude analytique

## I.1. Ecoulements dans une conduite cylindrique uniforme

La vitesse et la perte de charge sont deux grandeurs physiques essentielles qui interviennent dans l'écoulement visqueux stationnaire à travers une conduite. Le caractère visqueux conduit à l'apparition d'un gradient de vitesse, ceci augmente le frottement entre les couches fluides, et en particulier au voisinage de la paroi. C'est pour cela que ce caractère rhéologique va intervenir dans les relations théoriques qui vont suivre.

### I.1.1 La longueur d'établissement (ou d'entrée)

Le fluide provient d'un réservoir dans lequel sa vitesse est supposée uniforme. Lorsque le fluide pénètre dans la conduite, sa vitesse varie dans le sens de l'écoulement principal pour atteindre une valeur stationnaire au bout d'une certaine distance appelée "**longueur d'entrée**" de la conduite, et le profil de la vitesse devient parabolique. Et en termes d'énergie mécanique c'est la longueur de la conduite nécessaire au-delà de laquelle la pression diminue linéairement avec la distance.

La longueur d'entrée d'un écoulement laminaire stationnaire dépend du diamètre de la conduite utilisée et des propriétés rhéologiques du fluide test. Pour un fluide newtonien en régime laminaire, on peut citer la relation donnée par Boussinesq et Nikuradse :

$$Le = 0.065 D Re \quad (2.1)$$

où  $D$  et  $Re$  sont respectivement le diamètre de la conduite uniforme et le nombre de  $Re$ .

### I.1.2. Profil de vitesse en écoulement laminaire

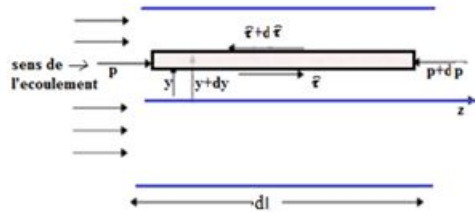
On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide purement visqueux indépendant du temps (non thixotrope), non élastique, incompressible, homogène, isotrope et isotherme.

Nous supposons également que l'écoulement est laminaire, à cisaillement simple, et adhérent à la paroi.

#### a) Relation de Rabinowitsch

Soit un écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique supposée infiniment longue, les forces extérieures s'exerçant sur le fluide sont :

- Les forces de frottement visqueux (forces de cisaillement) dues au transfert radial de quantité de mouvement à l'échelle moléculaire, ces forces exercent des contraintes parallèles à l'écoulement.
- Les forces de pesanteur.
- Les forces de pression s'exerçant aux extrémités.



**Figure 2.1 :** Représentation de l'écoulement dans une conduite cylindrique

En régime établi, et par suite de la conservation du profil de vitesse, la résultante des forces est nulle, donc l'équilibre entre les forces de pression et des forces visqueuses sur un élément de volume (figure 2.1) donne :

$$(\tau 2\pi y)_y dz - (\tau 2\pi y)_{y+dy} dz + [p_z - p_{z+dz}] 2\pi y dy = 0$$

$$\text{On obtient} \quad -dz d(y\tau) - dp y dy = 0 \quad (2.2)$$

$dz$  : variation suivant l'axe  $z$ .

$dy$  : variation élémentaire suivant  $y$ .

$\tau$  : La contrainte de cisaillement.

$dp$  : variation de pression.

qui s'écrit encore :

$$\frac{d}{dy} (y\tau) = -y \frac{dp}{dz} \quad (2.3)$$

L'intégration de cette relation est immédiate, on obtient :

$$y\tau = - \int y \frac{dp}{dz} dy \quad (2.4)$$

d'où

$$\tau = - \frac{dp}{dz} \frac{y}{2} + \frac{\text{constante}}{y} \quad (2.5)$$

Comme  $\tau$  n'est pas infini à  $y=0$ , donc la constante est nulle, et on obtient alors :

$$\tau = - \frac{y}{2} \frac{dp}{dz} \quad (2.6)$$

A la paroi, c'est à dire pour  $y=R_0$ , la relation (2.6) devient :

$$\hat{\tau}_{p0} = - \frac{R_0}{2} \frac{dp}{dz} \quad (2.7)$$

qui est la contrainte pariétale.

De (2.6) et (2.7), on obtient le rapport :

$$\frac{\hat{\tau}}{\hat{\tau}_{p0}} = \frac{y}{R_0} \quad (2.8)$$

D'autre part, le débit volumique de l'écoulement qui traverse la conduite horizontale est donné par:

$$Q_v = \int_0^{R_0} 2\pi y u(y) dy \quad (2.9)$$

où  $u$  est la vitesse axiale du fluide.

Donc l'intégration par partie permet d'écrire:

$$Q_v = \pi y^2 u(y) \Big|_0^{R_0} - \pi \int_0^{R_0} y^2 du(y) = -\pi \int_0^{R_0} y^2 du(y) \quad (2.10)$$

Nous savons que l'équation constitutive générale du fluide qui lie la contrainte de cisaillement à la vitesse de cisaillement est donnée par l'équation :

$$\dot{\gamma} = -\frac{du}{dy} = f(\hat{\tau}), \text{ donc } du = -f(\hat{\tau}) dy \quad (2.11)$$

On peut alors écrire l'équation (2.10) sous la forme suivante :

$$Q_v = \pi \int_0^{R_0} y^2 f(\hat{\tau}) dy \quad (2.12)$$

A l'aide de l'équation (2.8), nous faisons un changement de variable approprié et nous aboutirons à la relation de Rabinowitsch :

$$\frac{Q_v}{\pi R_0^3} = \frac{1}{\hat{\tau}_{p0}^3} \int_0^{\hat{\tau}_{p0}} \hat{\tau}^2 f(\hat{\tau}) d\hat{\tau} \quad (2.13)$$

Cette relation n'est valable qu'en régime laminaire, elle donne la relation entre le débit volumique (ou la vitesse moyenne) et la contrainte pariétale en conduite uniforme.

La loi du comportement d'un fluide newtonien est donnée par :

$$f(\hat{\tau}) = \frac{\hat{\tau}}{\eta} \quad (2.14)$$

Et la relation de Rabinowitsch (2.13) donne :

$$\frac{Q_v}{\pi R_0^3} = \frac{\widehat{\tau}_{P0}}{4\eta} \quad (2.15)$$

Et si on remplace  $\widehat{\tau}_{P0}$  par sa formule donnée en (2.7), on obtient la fameuse relation de Hagen Poiseuille pour une conduite de diamètre D :

$$Q_v = \frac{\pi D^4}{128 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (2.16)$$

où  $dp/dz = \Delta p/l$

Alors que le taux de cisaillement moyen à la paroi est défini par :

$$\dot{\gamma} = \frac{\widehat{\tau}_{P0}}{\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{Q_v}{\pi R_0^3} 4\eta = \frac{8U_m}{D} \quad (2.17)$$

où  $U_m$  est la vitesse moyenne

### b) Vitesses caractéristiques

Dans un écoulement de type Poiseuille, on définit deux vitesses caractéristiques : la vitesse moyenne sur une section donnée de la conduite et la vitesse maximale au centre de la conduite, ces deux grandeurs dépendent du comportement rhéologique du fluide.

A partir de (2.8) et du (2.11), on peut écrire :

$$dy = \frac{R_0}{\widehat{\tau}_{P0}} d\widehat{\tau} \quad \text{et} \quad \int_0^{R_0} du = - \int_0^{R_0} f(\widehat{\tau}) dy = - \int_0^{\widehat{\tau}_{P0}} f(\widehat{\tau}) \frac{R_0}{\widehat{\tau}_{P0}} d\widehat{\tau}$$

On exprime la vitesse maximale dans une conduite cylindrique en fonction de la loi rhéologique du fluide comme suit :

$$u_C = u_{\max} = \frac{D}{2\widehat{\tau}_{P0}} \int_0^{\widehat{\tau}_{P0}} f(\widehat{\tau}) d\widehat{\tau} \quad (2.18)$$

et pour un fluide newtonien

$$u_C = \frac{\widehat{\tau}_{P0} D}{4\eta} \quad (2.19)$$

A partir de la formule de Rabinowitsch, nous pouvons définir la vitesse moyenne dans une section :

$$U_m = \frac{D}{2\widehat{\tau}_{P0}^3} \int_0^{\widehat{\tau}_{P0}} \widehat{\tau}^2 f(\widehat{\tau}) d\widehat{\tau}$$

En comportement newtonien

$$U_m = \frac{\widehat{\tau}_{p0} D}{8\eta} \quad (2.20)$$

### I.1.3. Le facteur de frottements et la contrainte pariétale

Le facteur de frottements est défini par :

$$f = \frac{\text{Contrainte à la paroi}}{\text{Contrainte inertielle}}$$

C'est-à-dire :

$$f = \frac{\widehat{\tau}_{p0}}{\rho U_m^2 / 2} \quad (2.21)$$

Si on exprime  $\widehat{\tau}_{p0}$  en fonction de  $\Delta p$  (relation 2.16), on trouve :

$$f = \frac{D \Delta p}{2 \rho l U_m^2} \quad (2.22)$$

Dans le cas où le fluide est newtonien on peut remplacer  $\Delta p$  par la relation (2.6), et la formule de  $f$  devient :

$$f = \frac{16}{\frac{\rho U_m D}{\eta}} = \frac{16}{Re} \quad (2.23)$$

#### • Transition laminaire-turbulent

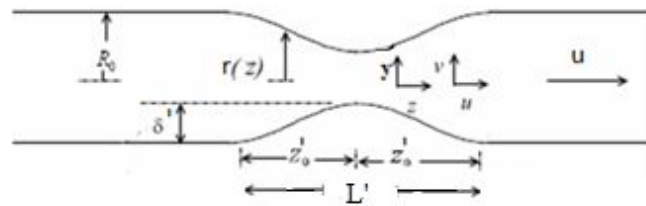
Dans une conduite cylindrique circulaire lisse, l'écoulement en régime stationnaire est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 2100. Au-delà d'une valeur de 5000 l'écoulement est essentiellement turbulent. Par suite, lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 2 100 et 5 000, le transfert de quantité de mouvement se fait à la fois par dissipation d'énergie visqueuse et d'énergie cinétique et l'écoulement est dit intermédiaire ou de transition.

## I.2. Ecoulements à travers une sténose

### I.2.1. Modèle de la sténose

Le modèle utilisé dans cette étude était d'abord proposé par Young [10], et se rapproche d'une sténose (une contraction axisymétrique) dans un tube long, droit, lisse et rigide.

La figure (2.2) illustre la géométrie de la sténose ainsi que le système des coordonnées cylindriques utilisé pour décrire le problème. Certaines variables dimensionnelles sont désignées par la notation minuscule pour les différencier des variables adimensionnelles correspondantes. La coordonnée et la vitesse axiales sont respectivement  $z$  et  $u$ , et ils sont considérés comme positives dans le sens aval avec  $u_c$  considéré comme la vitesse au centre de la conduite. La coordonnée radiale  $y$  et la vitesse  $v$  sont positives lorsqu'elles sont dirigées vers l'extérieur de la ligne centrale. Le rayon local du tube axisymétrique est  $r(z)$  et  $R_0$  est le rayon des sections non contractées en amont et en aval de la sténose. La demi-longueur de la sténose et sa hauteur maximale sont désignées respectivement par les paramètres  $z'_0$  et  $\delta'$ .



**Figure 2.2 :** Dimensions et système de coordonnées pour une sténose axisymétrique

La forme de la sténose axisymétrique est décrite par une fonction cosinus. Sa fonction représentative s'écrit sous la forme suivante :

$$R = 1 - \frac{\delta'}{2R_0} \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot z}{z'_0} \right) \quad \text{pour} \quad -z'_0 \leq z \leq z'_0 \quad (2.24)$$

$R_0$  : Rayon de la conduite loin de la sténose

$R = r / R_0$  : Rayon de la conduite au niveau de la sténose

$\delta'$  : Épaisseur maximale de la sténose

$2z'_0 = L'$  : Longueur de la sténose

### I.2.2. Profils des vitesses - solution analytique

Dans ce qui suit, les modèles théoriques pour la sténose proposés pour la vitesse, la contrainte de cisaillement et les pertes de charges sont issues des travaux analytiques initiés par Forrester et Young en 1970[31], ces travaux sont améliorés par Morgan et Young en 1974[7].

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide newtonien, sont l'équation de continuité et celles de Navier-Stokes. Il est commode d'écrire ces équations sous la forme adimensionnelle au moyen de la transformation de variables suivante:

$$Y = \frac{y}{R_0}, \quad Z = \frac{z}{R_0}, \quad R = \frac{y}{R_0}, \quad U = \frac{u}{\bar{U}_0}, \quad V = \frac{v}{\bar{U}_0}, \quad P = \frac{P}{\rho \bar{U}_0^2}, \quad U_c = \frac{u_c}{\bar{U}_0}$$

où  $P$  et  $\rho$  sont respectivement la pression et la masse volumique du fluide, et  $\bar{U}_0$  est la vitesse moyenne dans la conduite non sténosée.

L'équation de continuité peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{V}{Y} = 0 \quad (2.25)$$

De même, les équations de Navier-Stokes sont :

dans le sens axial :

$$U \frac{\partial U}{\partial Z} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (2.26)$$

dans le sens transversal :

$$U \frac{\partial V}{\partial Z} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (2.27)$$

où  $\text{Re}$  représente le nombre de Reynolds qui vaut.  $2\rho R_0 \bar{U}_0 / \eta$

et  $\eta$  est la viscosité du fluide.

Une forme intégrale de (2.26) est obtenue par intégration sur la section droite de la conduite soit :

$$\frac{\partial}{\partial Z} \int_0^R Y U^2 dY = -\int_0^R Y \frac{\partial p}{\partial z} dY + \frac{2}{\text{Re}} \left[ R \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_R + \int_0^R Y \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} dY \right] \quad (2.28)$$

Avec la condition aux limites de non glissement à la paroi, qui est  $U = V = 0$  à la paroi.

De la même manière, une équation intégrale de l'énergie est obtenue en multipliant d'abord (2.27) par  $YU$  avec l'intégration ultérieure sur la section droite de la conduite :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} \int_0^R YU^3 dY = - \int_0^R YU \frac{\partial P}{\partial Z} dY + \frac{2}{\text{Re}} \left[ - \int_0^R Y \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 dY + \int_0^R YU \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} dY \right] \quad (2.29)$$

Au cours de cette procédure, trois hypothèses simplificatrices sont formulées:

(1) : Les termes dus à la composante visqueuse de la contrainte normale dans la direction axiale  $(\partial^2 U / \partial Z^2)$  sont négligeables. Cette hypothèse a été largement utilisée dans l'analyse des écoulements non uniformes.

(2) : La vitesse axiale est exprimable sous la forme d'un polynôme adéquat (qui sera développé par la suite).

(3): Les termes à gradient de pression dans (2.27) et (2.28) peuvent être éliminés en utilisant l'approximation :

$$\int_0^R Y \frac{\partial P}{\partial Z} dY \cong R^2 \int_0^R YU \frac{\partial P}{\partial Z} dY \quad (2.30)$$

En se basant sur les hypothèses (1) et (3) les équations intégrales de la quantité de mouvement et d'énergie peuvent être combinées pour obtenir une seule équation en termes de vitesse axiale:

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial Z} \int_0^R YU^3 dY - \frac{\partial}{\partial Z} \int_0^R YU^2 dY = - \frac{2}{\text{Re}} \left[ R^2 \int_0^R Y \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 dY + R \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_R \right] \quad (2.30.a)$$

Cinq conditions aux limites pour le profil des vitesses peuvent être imposées pour l'écoulement dans une conduite axisymétrique :

$$\begin{aligned} (1) \quad U &= U_c && \text{pour } Y = 0 \\ (2) \quad U &= 0 && \text{pour } Y = R \\ (3) \quad \frac{\partial U}{\partial Y} &= 0 && \text{pour } Y = 0 \\ (4) \quad \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} &= 0 && \text{pour } Y = 0 \\ (5) \quad \int_0^R YU dY &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.30.b)$$

La première représente la définition de la vitesse axiale, et le second est la condition de non glissement à la paroi. La troisième condition est dérivée d'un bilan des forces exercées sur un élément cylindrique dont l'axe est celui de la conduite. Si la pression et

les forces d'inertie doivent être finies quand le rayon de l'élément tend vers zéro, la force visqueuse, qui est proportionnelle à  $Y$ , doit tendre vers zéro. La quatrième condition peut être obtenue en éliminant la pression entre les équations (2.26) et (2.27) et en considérant l'équation obtenue quand  $Y$  tend vers zéro. La dernière pose la condition que le débit  $Q_v$  à travers n'importe quelle section droite, doit être le même pour tout fluide incompressible.

Il est prévu que l'écoulement à travers un tube convergent-divergent exige deux conditions nécessaires sur le profil des vitesses. Au nombre de Reynolds élevé, le profil doit permettre à une région mince, près de la paroi, un cisaillement élevé dans la section convergente, similaire à celle rencontrée dans les problèmes de couche limite, avec un profil relativement plat au col. Parfois, Le profil doit épouser la forme de celui d'un jet central avec un faible cisaillement associé à une recirculation près de la paroi dans la section divergente. Il sera montré qu'un polynôme du quatrième degré incarne la flexibilité impliquée par les précédentes conditions, mais ne pourra pas satisfaire l'exigence de cisaillement élevé dans la section convergente sans contorsion anormale de la partie intérieure du profil. Cette difficulté est résolue par la construction d'un deuxième profil, dénommé le profil plat, ce qui permet au cisaillement à proximité de la paroi de devenir arbitrairement grand, tout en maintenant un cœur plat de l'écoulement. L'hypothèse générale concernant le polynôme de degré 4 qui représente le profil des vitesses est :

$$\frac{U}{U_c} = A + B\frac{Y}{R} + C\left(\frac{Y}{R}\right)^2 + D\left(\frac{Y}{R}\right)^3 + E\left(\frac{Y}{R}\right)^4 \quad (2.31)$$

et les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont évalués à partir des cinq conditions aux limites (2.30b). Le calcul définitif donne la relation suivante :

$$U = R^{-2} \left[ R^2 U_c + 2(3 - 2R^2 U_c) \left(\frac{Y}{R}\right)^2 - 3(2 - R^2 U_c) \left(\frac{Y}{R}\right)^4 \right] \quad (2.32)$$

Ainsi, le profil est déterminé à partir d'un paramètre libre, qui est la vitesse au centre  $U_c$ . Notons que  $R^2 U_c = 2$  dans (2.32) produit un profil parabolique correspondant au profil de Poiseuille, pour une conduite de section uniforme, soit :

$$U = 2 \left[ 1 - \left(\frac{Y}{R}\right)^2 \right] \quad (2.33)$$

Et puisque la contrainte pariétale  $\tau_p$  est proportionnelle à  $(\partial U/\partial Y)_R$ , (2.32) implique que :

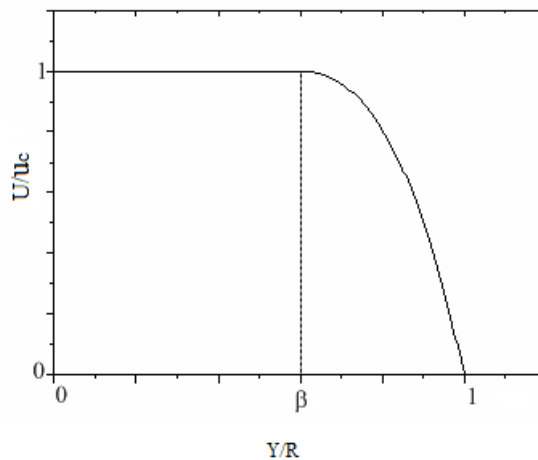
$$\tau_p \propto \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_R = R^{-3}(-12 + 4R^2U) \quad (2.34)$$

Ainsi,  $U_C$  doit être nettement inférieur à sa valeur dans le profil parabolique pour produire les grandes valeurs de la contrainte de cisaillement prévu dans la section convergente. Puisque les tentatives d'utiliser le profil polynomial de degré quatre ont été infructueuses, un "profil plat" a été introduit. Comme il est illustré sur la figure (2.3), ce profil est exprimé sous la forme :

$$U = \begin{cases} U_C & 0 \leq \frac{Y}{R} \leq \beta \\ a + b \left( \frac{Y}{R} \right)^2 + c \left( \frac{Y}{R} \right)^4 & \beta \leq \frac{Y}{R} \leq 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

où a, b et c sont des coefficients à déterminer, et  $\beta$  est la valeur de  $(Y/R)$  à la jonction qui sépare les deux parties, plane et polynomiale du profil des vitesses.

Notons que tel qu'il est défini, ce profil vérifie automatiquement la première, la troisième et la quatrième condition aux limites concernant la vitesse. La figure (2.3) illustre également qu'une couche mince de cisaillement peut être établie si  $\beta$  est proche de l'unité.



**Figure 2.3:** Profil des vitesses "plat"

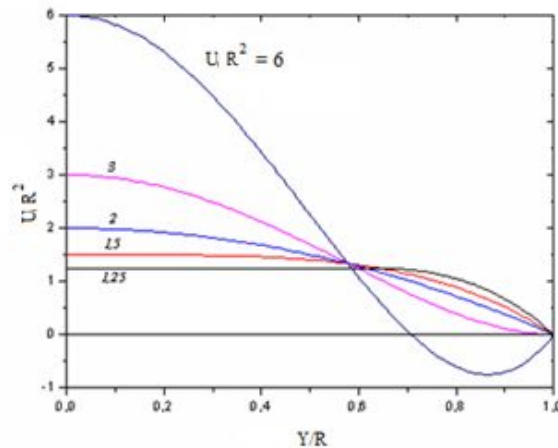
Les coefficients a, b et c sont évalués à partir de la condition de non glissement (adhérence à la paroi), et avec les deux conditions de compatibilité  $U = U_c$  et  $\frac{\partial U}{\partial Y} = 0$

pour  $\frac{Y}{R} = \beta$ , et le profil des vitesses (2.40) devient :

$$U = \begin{cases} U_c & 0 \leq \frac{Y}{R} \leq \beta \\ \frac{U_c}{(1-\beta^2)^2} \left[ 1 - 2\beta^2 + 2\beta^2 \left( \frac{Y}{R} \right)^2 - \left( \frac{Y}{R} \right)^4 \right] & \beta \leq \frac{Y}{R} \leq 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

Avec  $\beta = \sqrt{\frac{3}{R^2 U_c} - 2}$  d'après la cinquième condition aux limites.

On note que  $R^2 U_c = 3/2$ , à  $\beta = 0$  et pour cette condition le profil plat (2.35) devient identique au profil polynomial (2.32). Ainsi, le profil polynomial sera utilisé pour décrire approximativement l'écoulement pour  $R^2 U_c \geq 3/2$  couvrant la gamme à partir d'une parabole aplatie pour une configuration de jet central. Au-dessous de  $R^2 U_c = 3/2$ , le profil plat est utilisé pour décrire approximativement le cœur central plat et la couche de cisaillement fort près de la paroi. La transition en amont et en aval entre les différents profils est fournie automatiquement par la solution de  $U_c$ . La figure (2.4) montre l'évolution du profil des vitesses des faibles valeurs aux fortes valeurs de  $R^2 U_c$ .



**Figure 2.4:** Evolution du profil des vitesses en fonction du paramètre  $UR^2$

Maintenant, il suffit de remplacer dans l'équation (2.30a) :

$$\frac{dU_c}{dZ} = \frac{\left\{ -R^{-3} \left( \frac{dR}{dZ} \right) \left[ 0,0286 \cdot (R^2 U_c)^3 - 0,133 \cdot (R^2 U_c)^2 + 0,257 \cdot (R^2 U_c) - 0,34 \right] + \frac{4U_c}{\text{Re}} \Gamma \right\}}{0,0429 \cdot (R^2 U_c)^2 - 0,004 \cdot (R^2 U_c) - 0,029} \quad (2.37)$$

où

$$\Gamma = \begin{cases} 2 - R^2 U_c & R^2 U_c \geq \frac{3}{2} \\ \frac{R^2 U_c (1 - 1/3 R^2 U_c)}{3(R^2 U_c - 1)} & R^2 U_c < \frac{3}{2} \end{cases}$$

La première condition aux limites nécessaire pour résoudre l'équation (2.37) vient de l'hypothèse de l'écoulement Poiseuille ; loin en amont de la sténose :  $z = -\infty$ ;  $R = 1$  et  $U = 2$

La relation (2.37) est une équation différentielle du premier ordre, non linéaire, qui n'admet pas une solution analytique et sera résolu numériquement.

### I.2.3. Chute de pression et contrainte pariétale.

À partir de la vitesse axiale  $U_c$ , obtenue de l'équation (2.37), on peut calculer et déterminer les caractéristiques du débit volumique. Les profils de vitesse sont obtenus directement après substitution dans les relations (2.32) ou (2.36).

Le gradient de pression moyenne est obtenu numériquement à partir de l'équation :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial Z} \right)_{\text{moy}} = \frac{\int_0^R Y (\partial P / \partial Z) dY}{\int_0^R Y dY} = 2R^{-2} \int_0^R Y \frac{\partial P}{\partial Z} dY \quad (2.38)$$

Et l'intégration numérique donne la répartition de la pression axiale. La contrainte pariétale peut être exprimée par :

$$\tau_p = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_r \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \quad (2.39)$$

La contrainte pariétale adimensionnelle est définie par :

$$\tau_p = \frac{\widehat{\tau}_p}{\widehat{\tau}_{p0}} \quad (2.40)$$

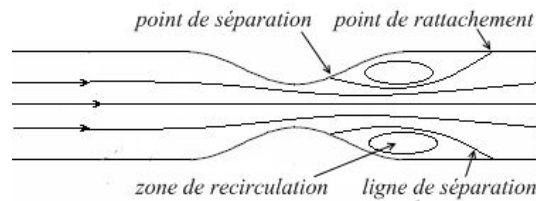
Où  $\widehat{\tau}_{p0}$  est la contrainte de cisaillement due à l'écoulement de Poiseuille dans la conduite sans sténose. Ainsi, en termes de variables adimensionnelles

$$\tau_p = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_R \left[ 1 + \left( \frac{dR}{dZ} \right)^2 \right] \quad (2.41)$$

Et par l'utilisation de (2.32) et (2.36) le cisaillement à la paroi est exprimé en fonction de la vitesse axiale  $U_C$  par :

$$\tau_p = \begin{cases} R^{-3} (3 - R^2 U_C) \left[ 1 + \left( \frac{dR}{dZ} \right)^2 \right] & R^2 U_C \geq \frac{3}{2} \\ \frac{U_C R^{-1}}{1 - \beta^2} \left[ 1 + \left( \frac{dR}{dZ} \right)^2 \right] & R^2 U_C < \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2.42)$$

Aux points de la paroi interne, où  $\tau_p = 0$ , se produisent la séparation et le rattachement de l'écoulement avec ses zones de recirculation, comme l'illustre la figure (2.5)



**Figure 2.5:** Les zones de recirculation pour une sténose axisymétrique

Sur la base de l'analyse précédente, le cisaillement est nul à la paroi pour :

$$R^2 U_C = 3 \quad (2.43)$$

Lorsque  $R^2 U_C > 3$ ,  $\tau_p$  est négatif, ceci indique le retour d'écoulement et délimite clairement la zone de recirculation de l'écoulement. Comme il n'y a aucun flux entrant ou sortant de la zone de recirculation, la continuité exige que :

$$\int_0^{r_s} Y U dY = \frac{1}{2} \quad (2.44)$$

Où  $r_s$  est la coordonnée radiale de la ligne de courant qui sépare la zone de recirculation et l'écoulement central. L'équation (2.32) peut être combinée avec l'équation (2.44) pour obtenir l'expression implicite, ci-dessous, de la ligne de séparation :

$$R^2 U_c = \frac{1 - r_s^4 (3 - 2r_s^2)}{r_s^2 (1 - r_s^2)^2} \quad (2.45)$$

Cette analyse analytique montre bien les difficultés spécifiques à la forme géométrique de la conduite.

#### I.2.4. Pertes de charge : nombre d'Euler

Les frottements internes du fluide dus à sa viscosité et les frottements externes dus à la rugosité des parois de la conduite provoquent une dissipation d'énergie. Cette perte d'énergie se traduit par une perte de charge, et dépend de l'intensité des forces mises en jeu, de la nature de l'écoulement, du comportement du fluide et la géométrie de la conduite. On peut aisément démontrer à partir d'une analyse dimensionnelle que la chute de pression par rapport à l'inertie (Nombre d'Euler) à travers une contraction ayant la forme spécifiée au paragraphe I.2.1 Peut s'écrire sous la forme :

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho U_m^2} = f \left( \frac{\Delta l}{R_0}, \frac{A_0}{A_1}, \frac{Z'_0}{R_0}, Re \right) \quad (2.46)$$

$2Z'_0$ : Longueur de la sténose

$\Delta l$ : Distance entre les deux prises de pression

$A_0$ : Section droite non sténosée

$A_1$ : Section au centre de la sténose

Pour des nombres de Reynolds très petits et des contractions moyennes, la distribution de vitesse en chaque section est approximativement parabolique. En se basant sur ces conditions, Young (1968) [10] a obtenu une solution pour la chute de pression à travers une contraction ayant la géométrie utilisée dans la présente étude.

Pour ce cas, la chute de pression adimensionnelle est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds.

On peut montrer, par l'analyse dimensionnelle, que cette chute de pression dépend de la géométrie et elle peut être écrite sous la forme :

où 
$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho U_m^2} = \frac{A}{Re} \quad (2.47)$$

où  $A$  est une constante.

Pour les écoulements dans lesquels les effets visqueux sont dominants, c'est-à-dire, pour des nombres de Reynolds très petits, la constante  $A$  est une fonction de la géométrie de la contraction.

Pour les écoulements à forts débits, la dépression est due aux effets visqueux et à la turbulence, et la relation (2.51) s'écrit :

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho U_m^2} = \frac{A}{Re} + \frac{B}{2} \left[ \frac{A_0}{A_1} - 1 \right] \quad (2.48)$$

## II. Etude numérique

### II.1. Les équations de Navier-Stokes

La mécanique des fluides est basée sur les principes de conservation de la masse, de la quantité du mouvement, et d'énergie appliqués sur une particule de fluide.

La conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.49)$$

La conservation de la quantité du mouvement pour un fluide newtonien donne l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} \quad (2.50)$$

où :

$\vec{u}$  : Le vecteur vitesse

$\vec{g}$  : L'accélération due à la gravité.

Dans le cas d'un fluide incompressible l'équation (2.49) se réduit à :

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = 0 \quad (2.51)$$

## II.2.Approximation de Prandtl

L'approximation de Prandtl définit les équations de conservation dans le cadre de l'approximation de couche limite. Elle consiste en une simplification des équations de Navier-Stokes, à l'aide de certaines hypothèses supplémentaires :

- L'écoulement est incompressible
- L'écoulement bidimensionnel
- L'écoulement quasi-stationnaire
- Le gradient de pression est négligeable dans la direction transverse
- Approximation de couche limite :  $\hat{\delta} \ll R_0$

où  $\hat{\delta}$  est l'épaisseur de la couche limite,  $R_0$  le diamètre de la conduite.

A l'aide de remarques judicieuses sur les ordres de grandeur des différents termes des équations de conservation (Schlichting) [32], nous pouvons simplifier le système d'équations de Navier-Stokes et écrire dans le système de coordonnées  $(z, y)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dz} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.53)$$

### ■ Définition d'épaisseurs caractéristiques

Nous introduisons ici la définition de trois différentes épaisseurs auxquelles nous nous référerons régulièrement au cours de cette étude

-  $\hat{\delta}$  : l'épaisseur de couche limite. C'est la région pariétale où les termes visqueux sont du même ordre de grandeur que les termes d'inertie.

$\delta^*$  : L'épaisseur de déplacement, qui est définie par :

$$\delta^* = \int_0^{\hat{\delta}} \left( 1 - \frac{u}{u_c} \right) dy \quad (2.54)$$

Puisque nous considérons un écoulement stationnaire appliqué à un fluide incompressible, alors  $Q_v$  est constant.

$\theta$  : L'épaisseur de quantité de mouvement, qui est définie par :

$$\theta = \int_0^{\hat{\delta}} \frac{u}{u_c} \left( 1 - \frac{u}{u_c} \right) dy \quad (2.55)$$

D'autre part, nous définissons le facteur de forme H, le rapport entre l'épaisseur de déplacement et de quantité de mouvement :  $H = \frac{\delta^*}{\theta}$

Les méthodes de résolution sont celles des solutions affines et sont basées sur l'hypothèse de profils auto-similaires (profil ayant la même forme quelle que soit la section, après une normalisation appropriée).

Cependant, le profil de vitesse dans la conduite étant assez arbitraire, rien ne garantit que celui-ci soit auto-similaire. Nous allons donc privilégier des méthodes de résolution approchée de type intégrale. En effet, celles-ci ne nécessitent pas une connaissance précise du profil de vitesse pour déterminer les grandeurs caractéristiques telles que l'épaisseur de déplacement  $\delta^*$  et l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\theta$ .

### **II.3. L'équation de Van kàrmàn et méthode de « Thwaites »**

C'est cette approche que nous allons suivre dans le reste de cette étude, et par conséquent elle est la base de tous les calculs analytiques qui vont suivre.

#### **II.3.1. Hypothèses et modèle géométrique**

La contrainte de cisaillement maximale dans la sténose devrait se produire lorsque l'écoulement artériel atteint son maximum. En amont et très loin de la sténose l'écoulement sanguin est de type de Poiseuille à quelque distance de l'origine de l'artère, l'écoulement qui entre dans la sténose peut être supposé développé à partir d'un point de stagnation de liquide situé à une certaine distance en amont. La variation de profil de vitesse passe de forme parabolique de Poiseuille à une forme plus aplatie au col [21, 22,29]. Toutes les hypothèses physiques de ce modèle ont été traitées précédemment dans le paragraphe II du chapitre 1.

#### **II.3.2. Equation intégrale de la quantité de mouvement**

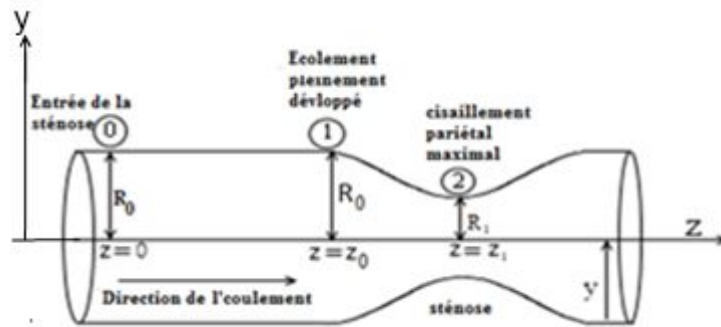
Dans le système de coordonnées cylindriques (z, y), et pour des raisons de simplification, on ramène l'origine à l'entrée de la conduite (figure 2.6). En négligeant les variations angulaires, les équations du mouvement de l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible selon (White, 1991) [33] :

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y v) + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.56)$$

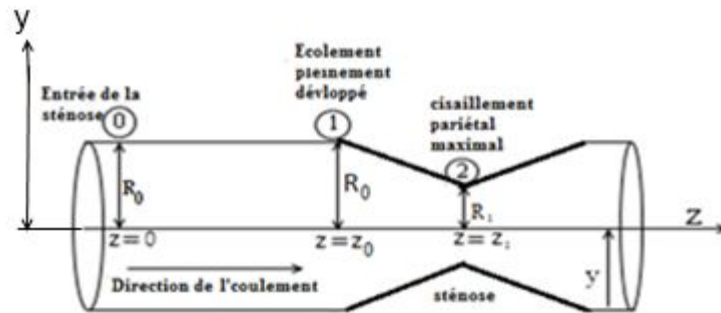
$$v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.57)$$

$u$  et  $v$  sont les composantes axiales et radiales de la vitesse du fluide. Dans la région de l'écoulement de Poiseuille (point 1 de la figure 2.6), les effets de la viscosité pénètrent dans tout le diamètre de l'artère alors que dans la sténose un profil de vitesse aplati correspond à une couche limite qui est mince en comparaison avec le diamètre de l'artère (figure.2.8). Nous supposons que dans les deux cas, la vitesse au centre de la sténose en dehors de la couche limite est régie par l'équation de Bernoulli.

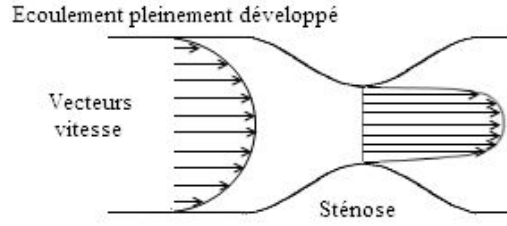
$$\frac{dp}{dz} = -\rho u_c \frac{du_c}{dz} \quad (2.58)$$



**Figure 2.6:** Schéma de la conduite sténosée de forme sinusoïdale en coordonnées cylindriques ( $z, y$ ).



**Figure 2.7:** Schéma de la conduite sténosée de forme conique [16] en coordonnées cylindriques ( $z, y$ ).



**Figure 2.8:** Représentation schématique des profils de vitesse en amont et au centre de la sténose.

En amont de la sténose l'écoulement est de type Poiseuille, avec un profil parabolique. Le profil d'écoulement au col a une forme plus aplatie, avec un fort cisaillement à la paroi. Avec les hypothèses de la couche limite habituelle on néglige le terme  $\partial^2 u / \partial z^2$  par rapport au terme  $\partial^2 u / \partial y^2$  dans l'équation (2.57). En substituant l'équation (2.58) dans l'équation (2.57), puis en multipliant l'équation (2.56) par  $(u_c - u)$ , en soustrayant le résultat de l'équation (2.57), et intégrant l'équation résultante de  $y = 0$  à  $y = R_0$ , où  $R_0$  est le rayon de la conduite au point  $z = 0$ , on obtient :

$$[u_c u - uv]_0^{R_0} + \int_0^{R_0} (u_c - u)(v/y) dy - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{R_0} (u^2 - u_c u) dy + \frac{du_c}{dz} \int_0^{R_0} (u_c - u) dy = -\frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^{R_0} \quad (2.59)$$

Des équations semblables sont obtenues au point 1 et 2, où les bornes supérieures dans les intégrales seront  $R_1$  et  $R_2$ .

On rappelle les expressions des quantités  $\theta$  et  $\delta^*$  [32] définies précédemment :

$$\theta = \int_0^{R_0} \frac{u}{u_c} \left(1 - \frac{u}{u_c}\right) dy \quad (2.60)$$

$$\delta^* = \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{u}{u_c}\right) dy \quad (2.61)$$

Qui représentent successivement l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur de déplacement dans un plan à deux dimensions et en coordonnées cylindriques [33].

A l'entrée (point 0), en introduisant les définitions (2.60) et (2.61) dans l'équation (2.59) et en fixant  $v = 0$  à  $y = 0$  et  $u = u_0$  à  $y = R_0$  et  $\bar{\tau}_p = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}$  en  $y = 0$

on obtient :

$$u_0 \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) \frac{v}{y} dy + \frac{\partial}{\partial z} (u_0^2 \theta_0) + u_0 \frac{du_0}{dz} \delta_0^* = \frac{\hat{\tau}_p}{\rho} \quad (2.62a)$$

Le premier terme de côté gauche tend vers zéro si l'on intègre par parties et en généralisant l'équation en tout point z on obtient la relation :

$$\frac{d}{dz} (u_c \theta_0) + u_c \frac{du_c}{dz} \delta_0^* = \frac{\hat{\tau}_p}{\rho} \quad (2.62b)$$

En introduisant le facteur de forme  $H = \delta^* / \theta$ , on obtient la relation intégrale de la quantité de mouvement dite de **VanKàrmàn** :

$$\frac{d\theta}{dz} + (2 + H) \frac{\theta}{u_c} \frac{du_c}{dz} = \frac{\hat{\tau}_p}{\rho u_c^2} \quad (2.63)$$

Cette relation pour le système à coordonnées cylindriques est identique à celle obtenue pour le cas du plan bidimensionnel (coordonnées cartésiennes).

### **II.3.3. Méthode de 'Thwaites' pour les écoulements cylindriques**

La méthode semi-empirique de Thwaites [16] est une méthode de résolution des équations de couches limites laminaires. Elle dérive de la formulation intégrale des équations de couche limite dites de VanKàrmàn. Cette méthode aboutit à une équation simple permettant de calculer l'épaisseur de la quantité de mouvement. A partir de celle-ci, il est alors possible de calculer les autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement tel que la contrainte de cisaillement pariétale  $\hat{\tau}_p$  et l'épaisseur du déplacement  $\delta^*$ . L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le calcul de ces dernières n'exige rien d'autre que les rayons géométriques et les vitesses axiales de l'écoulement.

#### **II.3.3.1. Principe de la méthode**

Thwaites (1949) [8] a développé une méthode de corrélation des paramètres pour la résolution de l'équation intégrale de la quantité de mouvement (2.63) pour une précision de l'ordre 3% (White, 1991) [33]. La technique a été initialement développée pour résoudre les problèmes « plan » à deux dimensions, mais, comme indiqué ci-dessus,

l'équation intégrale de la quantité de mouvement pour des problèmes à symétrie cylindrique est identique si les mêmes définitions de  $\theta$  et  $\delta^*$  sont utilisées [32,34].

Prenons l'équation de **VanKàrmàn** (2.63) : 
$$\frac{d\theta}{dz} + (2 + H) \frac{\theta}{u_c} \frac{du_c}{dz} = \frac{\hat{\tau}_p}{\rho u_c^2}$$

En multipliant par le nombre de Reynolds lié à l'épaisseur de quantité de mouvement  $Re = \frac{u_c \theta}{\nu}$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

L'équation devient :

$$\underbrace{\frac{u_c \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dz}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_c}{dz}}_S (2 + H) = \frac{\hat{\tau}_p \theta}{\rho \nu u_c} \quad (2.64)$$

Thwaites a introduit un paramètre de forme  $\lambda$  et un facteur de forme S :

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_c}{dz} \quad (2.65)$$

et 
$$S = \frac{\hat{\tau}_p \theta}{\rho \nu u_c} \quad (2.66)$$

L'équation (2.64) devient : 
$$S - \lambda(2 + H) = \frac{u_c \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2} \frac{u_c}{\nu} \frac{d\theta^2}{dz} \quad (2.67)$$

Dans le modèle le plus simple, les deux facteurs de forme S et H sont supposés ne dépendre que du paramètre de forme  $\lambda$  (hypothèse de quasi-similarité). Des valeurs tabulées de S et H sont fournies dans la littérature (Blevins [35]) et en posant :

$$F(\lambda) = \frac{u_c}{\nu} \frac{d\theta^2}{dz} \quad (2.68)$$

L'équation (2.67) devient : 
$$2[S - \lambda(2 + H)] = F(\lambda) \quad (2.69)$$

Par ailleurs Thwaites a montré, à partir des valeurs de S et de H, que F( $\lambda$ ) avait une évolution approximativement linéaire qui pouvait être approchée par l'équation suivante :

$$F(\lambda) = 0.45 - 6.0\lambda \quad (2.70)$$

$$\lambda < -0.09 \quad (2.71)$$

La dernière équation peut être réécrite littéralement :

$$\frac{u_c}{\nu} \frac{d\theta^2}{dz} = 0.45 - 6.0 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_c}{dz} \quad (2.72)$$

Cette équation se simplifie en la multipliant par  $v u_c^5$

$$u_c^6 \frac{d\theta^2}{dz} + 6 u_c^5 \frac{du_c}{dz} \theta^2 = 0.45 v u_c^5 \quad (2.73)$$

Cette équation est équivalente à :

$$u_c^6 \frac{d\theta^2}{dz} + \frac{du_c^6}{dz} \theta^2 = 0.45 v u_c^5$$

Le premier terme à gauche est équivalent à :

$$\frac{d}{dz}(u_c^6 \theta^2) = 0.45 v u_c^5$$

Cette équation s'intègre suivant  $z$

$$\int_0^z \frac{d}{dz} (u_c^6 \theta^2) dz = \int_0^z 0.45 v u_c^5 dz$$

Dans notre problème  $z = 0$  est équivalent au point  $z = z_0$ , et dans cette zone de forte accélération, la couche limite est négligeable et nous avons  $\theta = 0$ .

Nous obtenons alors une expression simple permettant de calculer l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta^2(z) = \frac{0.45v}{u_c^6} \int_0^z u_c^5(z) dz \quad (2.74)$$

Et enfin l'épaisseur dynamique  $\theta$  donnée par l'équation. (2.60) peut être approchée par la méthode de Thwaites à tout point  $z$  mesuré à partir d'un point d'entrée par :

$$\theta^2 = \frac{0.45\eta}{\rho u_c^6} \int_0^z u_c^5 dz, \quad (2.75)$$

En utilisant  $\theta$  on obtient le paramètre  $\lambda$  défini précédemment

$$\lambda = \frac{\rho \theta^2}{\eta} \frac{du_c}{dz} \quad (2.76)$$

Les fonctions de corrélations du cisaillement  $S$  et de forme  $H$  proposées par White (1991) sont :

$$S(\lambda) \approx (\lambda + 0.09)^{0.62} \quad (2.77)$$

$$H(\lambda) \approx 2.0 + 4.14k - 83.5k^2 + 854k^3 - 3337k^4 + 4576k^5 \quad (2.78)$$

où  $k = 0.25 - \lambda$ .

Finalement, la contrainte de cisaillement à la paroi et l'épaisseur de déplacement sont calculées par :

$$\bar{\tau}_p = \frac{\eta u_c}{\theta} S(\lambda) \quad (2.79)$$

$$\delta^* = \theta H(\lambda) \quad (2.80)$$

Le gradient de la vitesse axiale est nul au centre de la sténose, de sorte que la contrainte de cisaillement maximale à la paroi se produira juste avant la gorge, là où l'écoulement s'accélère encore. Cette observation est en accord avec les résultats rapportés en CFD (mécanique des fluides numérique) [24,36].

### **II.3.3.2. Le procédé numérique**

En utilisons l'équation de Thwaites (2.75), l'épaisseur de quantité du mouvement au col est :

$$\theta_1^2 = \frac{0.45\eta}{\rho u_1^6} \int_{z=0}^{z=z_1} u_c^5 dz \quad (2.81)$$

où  $z = 0$ , est le point d'entrée O, et  $z = z_1$  et le point 1 dans les figures (2.6) et (2.7). Cette intégrale peut être coupée en deux parties

$$\theta_1^2 = \frac{0.45\eta}{\rho u_1^6} \left( \int_{z=0}^{z=z_0} u_c^5 dz + \int_{z=z_0}^{z=z_1} u_c^5 dz \right) \quad (2.82)$$

où  $u_0 = u_c(z=0) = u_c(z=z_0)$

La première intégrale de cette équation est déduite de l'équation (2.75).

$$\int_{z=0}^{z=z_0} u_c^5 dz = \frac{\rho \theta_0^2 u_0^6}{0.45\eta} \quad (2.83)$$

Ainsi l'équation. (2.82) devient :

$$\theta_1^2 = \theta_0^2 \left( \frac{u_0}{u_1} \right)^6 + \frac{0.45\eta}{\rho u_1^6} \int_{z=z_0}^{z=z_1} u_c^5 dz \quad (2.84)$$

où  $u_1 = u_c(z=z_1)$

En amont de la sténose, l'écoulement est de type Poiseuille avec un profil de vitesse parabolique, d'où l'épaisseur de la quantité du mouvement est égale à  $\theta_0 = 2R_0/15$  à partir de l'équation (2.60). L'intégrale de l'équation. (2.84) peut être calculée numériquement à condition que la distribution de vitesse à travers la sténose soit connue.

Dans cette étude le profil de vitesse axiale est déterminé expérimentalement, contrairement à la variation linéaire choisie en littérature [9].

La vitesse axiale au point 1 ;  $u_0$ , est la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille, soit le double de la vitesse moyenne. Le nombre de Reynolds en amont, est lié au taux du débit volumétrique  $Q_v$  par :

$$Re = \frac{2\rho Q_v}{\pi R_0 \eta} \quad (2.85)$$

Tandis que

$$u_0 = \frac{Re \cdot \eta}{R_0 \rho} \quad (2.86)$$

Une première estimation de la vitesse axiale au col (centre de la sténose) est qu'elle est équivalente à la vitesse moyenne, car le profil est aplati (**écoulement bouchon**) d'après la partie analytique (paragraphe II.3.2) et figure (2.8).

De la conservation du débit volumique entre les points 1 et 2 :

$$u_1 = \frac{u_0 R_0^2}{2R_1^2} \quad (2.87)$$

Cette estimation peut être considérablement améliorée par l'utilisation de l'épaisseur de déplacement. Des équations (2.76) et (2.78),  $H(\lambda) = 2.61$  au centre de la conduite car  $\lambda = 0$  et l'épaisseur du déplacement devient  $\delta_1^* = 2.61 \theta_1$  par l'équation. (2.80).

Ainsi, le profil de vitesse aplati est une approximation raisonnable sur le rayon  $R'_1$  [9]

$$R'_1 = R_1 - \delta_1^*$$

Qui devrait être utilisé dans l'équation (2.87) à la place de  $R_1$ .

$R'_1$  est le rayon **fictif** (non géométrique) pour lequel le profil de vitesse est carrément aplati et ceci en soustrayant l'épaisseur de la couche limite du rayon géométrique réel  $R_1$

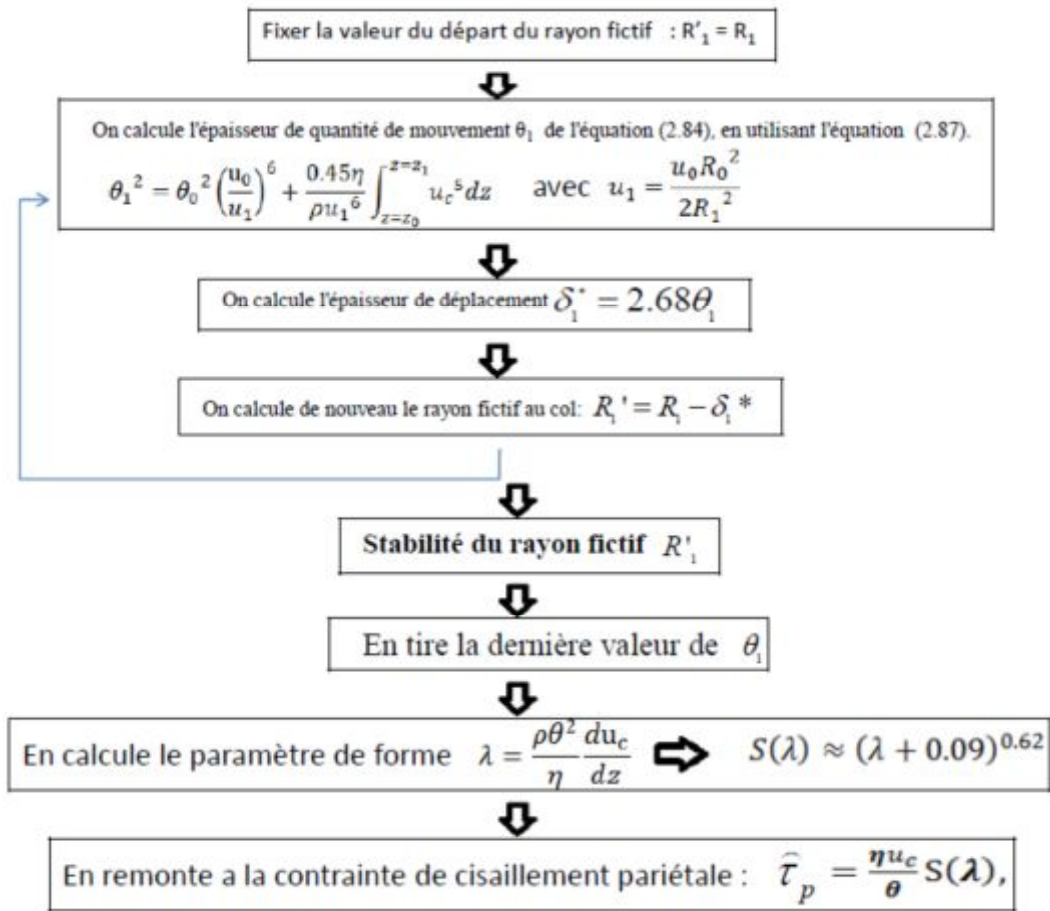
Un schéma itératif peut être développé pour remonter au rayon fictif  $R'_1$ , les étapes de ce schéma sont les suivantes [9] :

- (1) – On fixe d'abord la valeur de départ du rayon fictif  $R'_1$  au rayon géométrique réel de la sténose.  $R'_1 = R_1$
- (2) – On calcule l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta_1$  de l'équation (2.84), en utilisant l'équation (2.87).
- (3) On calcule l'épaisseur de déplacement  $\delta_1^* = 2.61 \theta_1$
- (4) On calcule de nouveau le rayon fictif au col.  $R'_1 = R_1 - \delta_1^*$
- (5) On répète l'étape 2 jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de changement dans le rayon fictif (stabilité de la valeur de  $R'_1$ ).

Un programme numérique est développé au profit de ce schéma en langage « **Fortran** » afin de converger vers une valeur bien déterminée du rayon fictif  $R'_1$  (figure 2.9)

Pour les débits faibles ou modérés (nombre de Reynolds inférieur à 10) il est nécessaire d'introduire une sous relaxation dans l'étape 4 afin d'éviter le signe moins du rayon fictif.

Une fois le rayon  $R'_1$  est déterminé par stabilité,  $\theta_1$  est devenu connu. On injecte la dérivée du profil de vitesse imposé dans l'équation (2.76). Les Equations (2.77) et (2.79) nous permettent de remonter à la contrainte de cisaillement pariétale recherché figure (2.9).



**Figure 2.9:** Organigramme de résolution.

# Chapitre 3

## Montage expérimental et techniques de mesure

Ce chapitre est dédié à la description du dispositif expérimental installé, aux techniques de mesure mises en œuvre et à la description des veines de mesure utilisées. Le dispositif expérimental a été mis au point au niveau de notre laboratoire et conçu pour faire des mesures de la vitesse dans différentes sections de la conduite et à différentes positions axiales. Et également pour des mesures de la perte de charges globale.

## **I. Le dispositif expérimental (Boucle hydraulique)**

Afin de réaliser un circuit hydraulique fermé, le dispositif expérimental est constitué essentiellement d'un banc hydrodynamique, permettant d'assurer un écoulement le plus stable en termes de vibration externe et perturbation interne. Ce dispositif est schématisé en figure (3.1) et composé de :

(1) : La veine d'essai interchangeable, qui est une conduite cylindrique horizontale en verre, de longueur égale à 2m. Elle est instrumentée en prises de pression pour l'évaluation des pertes de charge.

(2) : Un bac amont d'alimentation en plastique de 50 litres environ et placé juste avant la veine d'essai servant à la tranquillisation du fluide.

(3) : Un bac en aval de la veine d'essai en plastique et qui peut contenir jusqu'à 80 litres du fluide test.

(4) : un groupe motopompe avec variateur de vitesses de puissance 5,5 KW, afin d'assurer l'écoulement du fluide test.

(5) : Un échangeur de chaleur pour ajuster la température du fluide test.

(6) : Un circuit de dérivation (bypass) permettant de contrôler le débit avec précision dans la veine principale.

(7) : Un débitmètre à turbine avec un affichage digital, d'une plage de mesure comprise entre 200 et 10000 mL/min.

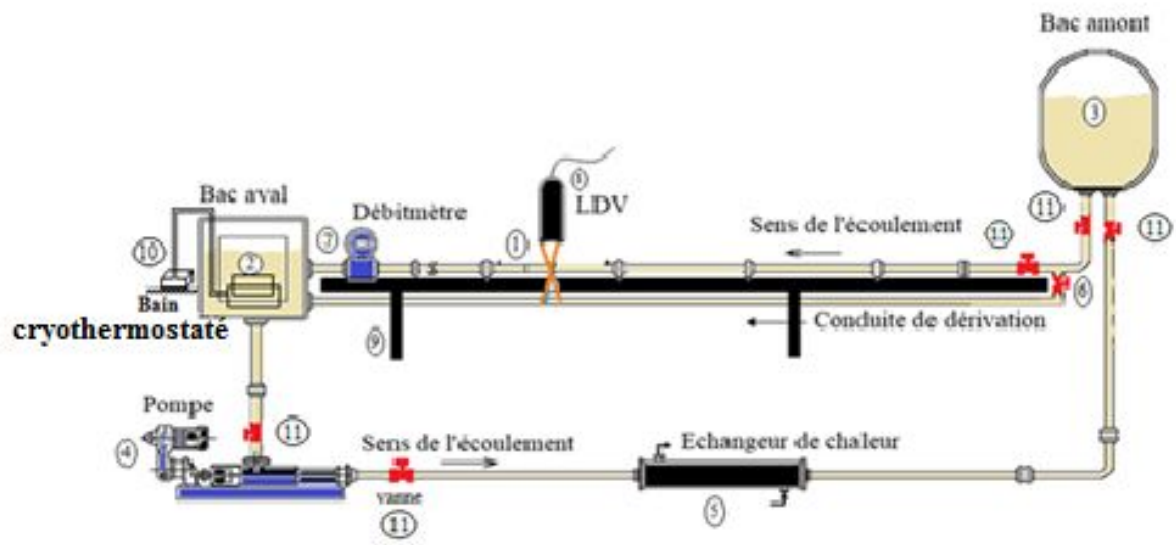
(8) : Sonde liée à la chaîne de mesure par vélocimétrie Laser à effet Doppler pour mesurer la vitesse en un point fixe de la conduite, elle est successible de se déplacer dans le sens longitudinal de la veine de mesure.

(9) : Un berceau assurant l'alignement des divers éléments.

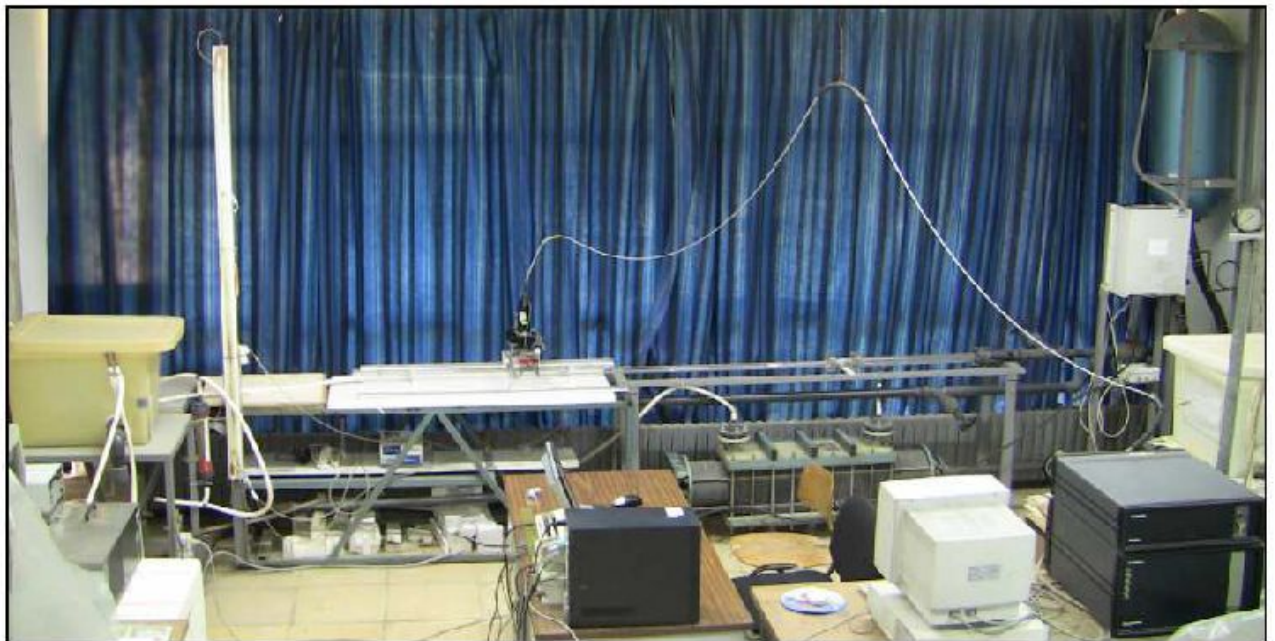
(10) : Un Bain cryothermostaté d'un volume de 5L, suppléant l'échangeur de chaleur (5) en cas de besoin pour fixer la température du fluide. Ce bain est capable d'imposer des températures de l'ordre de  $-20^{\circ}$  à  $150^{\circ}\text{C}$  (figure 3.3).

(11) : Vannes manuelles de fermeture.

Le fonctionnement optimal de l'installation nécessite environ 130 litres de fluide test.



*Figure 3.1 : Schéma du Banc hydrodynamique.*



*Figure 3.2 : Vue réelle du Banc hydrodynamique.*



*Figure 3.3 : Bain Cryothermostaté.*

## **II. Les veines de mesure**

Nous avons utilisé plusieurs types de veines pour deux diamètres internes différents :  $D = 15.65\text{mm}$  et  $D = 9.75\text{mm}$ . Le premier type représente la conduite cylindrique de section uniforme et les autres celles contenant une sténose. Les différentes conduites utilisées sont remplies d'un fluide coloré et photographiés pour accentuer la netteté des images et elles sont représentées sur la figure (3.4).



Les conduites de diamètres  $D = 9,75\text{mm}$

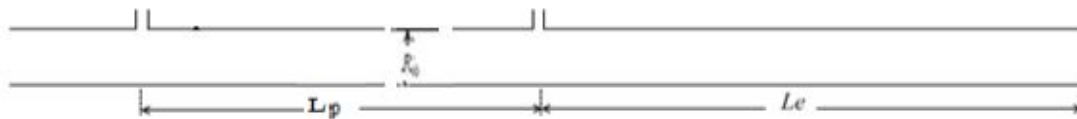


Les conduites de diamètres  $D = 15,65\text{mm}$

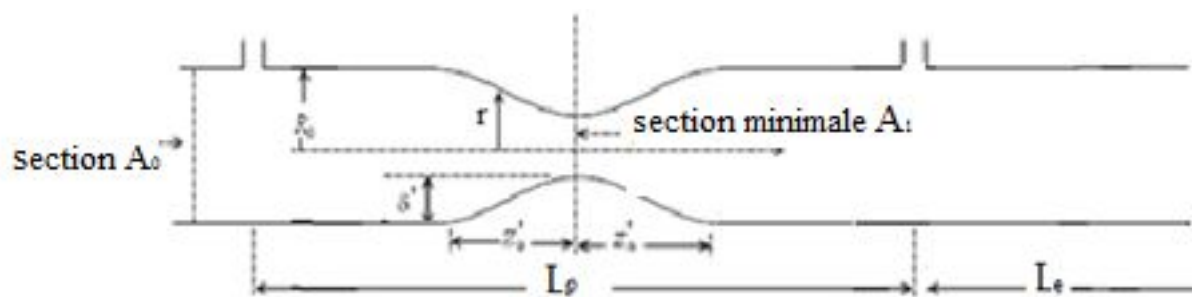
*Figure 3.4: Images réelles des veines de mesure utilisées.*

## II.1. Description des veines utilisées.

L'obstruction de la géométrie spécifique utilisée dans la présente étude correspond à la contraction axisymétrique de forme sinusoïdale donnée par les figures (3.5a) et (3.6b).



*Figure 3.5a : Géométrie de la conduite uniforme*



*Figure 3.5b : Géométrie de la conduite sténosée axisymétrique.*

La géométrie particulière de la contraction est importante et la forme de la sténose axisymétrique a été choisie d'une manière qu'elle soit décrite par une fonction cosinus.

La fonction représentative de la sténose utilisée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{r}{R_0} = 1 - \frac{\delta'}{2R_0} \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot z}{z'_0} \right) \quad (3.1)$$

Pour  $-Z_0 \leq z \leq Z_0$  avec :

$R_0$  : Rayon de la conduite loin de la sténose.

$r$  : Rayon de la conduite au niveau de la sténose.

$\delta'$  : Épaisseur maximale de la sténose.

$2z'_0 = L'$  : Longueur de la sténose.

$L_e = 0,85 \text{ m}$  : la longueur d'entrée qui est largement suffisante pour avoir un écoulement 'amont' établi pour le régime laminaire.

$L_p = 1 \text{ m}$  : représente la partie spécifique à la prise des mesures.

$A_0$  : Section droite non sténosée

$A_1$  : Section au niveau de la sténose

Le pourcentage de contraction de la sténose est défini par :

$$\xi = \left( 1 - \frac{A_1}{A_0} \right) \times 100 \quad (3.2)$$

Ce pourcentage diffère d'une conduite à une autre.

### III. Les fluides utilisés ou fluides test.

Pour les besoins d'analyse et de comparaison des caractéristiques dynamiques des écoulements, nous avons retenu deux types de fluides.

- (i) un fluide de référence newtonien à faible viscosité
- (ii) un fluide newtonien à forte viscosité

Les fluides utilisés sont :

- L'eau distillée, comme fluide newtonien de référence.
- Une Solution du glucose de 75 % de concentration massique et de viscosité dynamiques  $\eta = 22Pa.s$

Les comportements rhéologiques de ces deux fluides, leur transparence optique (facilitant les mesures par VLD) et leur non-toxicité sont les propriétés qui ont influencé notre choix.

### IV. Techniques de mesure

Dans ce qui suit, Nous décrivons les différents outils et techniques expérimentales employés qui 'ont permis les mesures, de viscosité des fluide tests, des débits volumiques, des pertes de charges générées, et des profils de la vitesse axiale.

#### IV.1.Mesure de la viscosité

Le viscosimètre « **Nahita 801** » de la Figure (3.6) est conçu pour la mesure directe de la viscosité apparente des différentes nature des fluides, tels que les huiles végétales comestible, les lubrifiants, les graisses, peintures, vernis, plastiques, produits alimentaires, produits pharmaceutiques... etc. Sa conception permet une utilisation efficace et confortable.



**Figure 3.6 :** *Viscosimètre Nahita modèle 801.*

- **Principe de fonctionnement**

Le moteur synchrone connecté au disque gradué tourne à vitesse fixe faisant tourner le rotor par le biais du ressort de l'indicateur. S'il n'y a pas de résistance du fluide, le rotor tourne de façon synchrone avec le ressort, l'indicateur et le disque gradué, de façon que la lecture soit "0". Par contre, si le rotor rencontre une résistance due à la viscosité du fluide, cela donne lieu à une torsion du ressort, lorsque celui-ci équilibre la résistance du fluide, l'indicateur connecté au ressort donne une lecture (état de torsion du ressort) sur le disque gradué. En multipliant cette lecture par le coefficient spécifique à chaque rotor et vitesse, on obtiendra la viscosité du fluide en mPa.s ou centipoises (cP). Le viscosimètre est fourni avec quatre rotors (N° 1, 2, 3 et 4) de la figure (3.7). Et une table correspondante permet de sélectionner le rotor et la vitesse adéquats à la viscosité du liquide.



**Figure 3.7 :** *Les quatre rotors du viscosimètre Nahita modèle 801*

- **Spécifications techniques**

Gamme de mesure: 10-100000 mPa.s (cP)  
 Précision : 1%  
 Rotors N° : 1, 2, 3 et 4  
 Vitesse du moteur: 6, 12, 30 et 60 r.p.m.  
 Tolérance : +/- 5% (en fluides Newtoniens)  
 Alimentation : 220 V, 50-60 Hz

#### IV.2. Mesure des débits

Elles sont réalisées à l'aide d'un débitmètre à turbine avec un affichage digital (Figure 3.8), d'une plage de mesure comprise entre 200 et 10000 ml/min. C'est un instrument intrusif qui impose une perte de charge maximale de l'ordre de 414mbars, avec une faible sensibilité à la température de l'ordre de 0.2% par °C.

La technique de mesure du débitmètre à turbine est fondée sur le lien entre le débit volumique et la vitesse de rotation de la turbine sous l'action de la pression dynamique du fluide. Des aimants permanents sont encapsulés dans les aubes de la turbine et actionnent à leur passage un capteur électronique à 'effet Hall' inséré dans la partie fixe du débitmètre. L'électronique génère un train d'impulsions proportionnel à la vitesse de rotation de la turbine, donc proportionnel au débit traversant la conduite.



*Figure 3.8 : Débitmètre à turbine.*

### IV.3. Mesure des pertes de charge

Les deux prises de pression situées sur la conduite, séparées d'un mètre de distance, sont utilisées pour la détermination des pertes de charge. Ces prises de pression sont ensuite reliées à deux tubes transparents verticaux contenant, le même liquide que la veine pour le fluide newtonien, et le mercure pour le fluide non newtonien à cause de la grande perte de charge générée par les frottements. Ce manomètre différentiel nous permet d'évaluer directement les pertes de charge linéaires et singulières en hauteur de liquide.

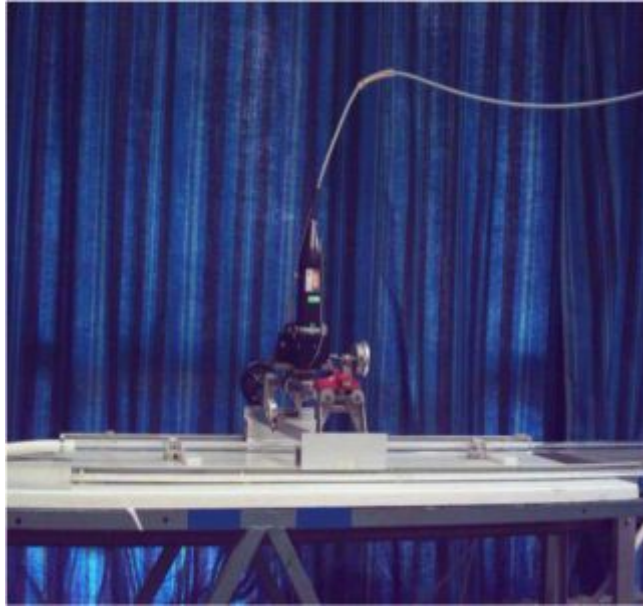
### IV.4. Mesures des vitesses

Il existe plusieurs méthodes de mesure de la vitesse dans les écoulements des fluides : l'anémométrie thermique à film chaud (HFA), l'anémométrie laser Doppler (LDA) et la vélocimétrie par imagerie de particules (PIV). Ces deux dernières méthodes, LDA et PIV, ont l'avantage d'être non intrusives et de permettre la détermination de la vitesse de l'écoulement sans ambiguïté et de son sens. Elles sont donc mieux adaptées que la HFA pour la mesure des vitesses dans les écoulements complexes, telle que la zone de recirculation.

Les mesures de la vitesse axiale sont effectuées dans ce travail dans un plan horizontal à l'aide d'une chaîne de mesure de type Vélocimétrie Laser à effet Doppler (VLD) (figure 3.9) et commercialisée par la société Dantec. Cette chaîne contient une sonde successible à se déplacer sur des railles (figure 3.10).



**Figure (3.9) :** Chaîne de mesure de la vitesse et de ses fluctuations.

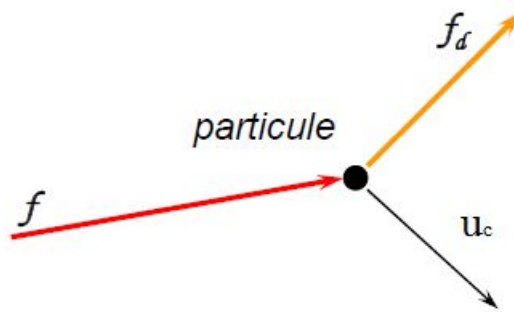


*Figure 3.10 : Sonde laser et dispositif de déplacement.*

Cette technique de mesure présente l'avantage de ne nécessiter la présence d'aucun appareillage à l'intérieur de la veine d'écoulement (mesure **non intrusive**). Elle donne une mesure locale quantitative directe et précise de la vitesse du fluide. Le volume de mesure peut être très réduit (une fraction de millimètre). Il est possible de suivre des variations très rapides de la vitesse du fluide (pendant des temps de quelques dixièmes de millisecondes).

#### **A) Principe de l'effet doppler**

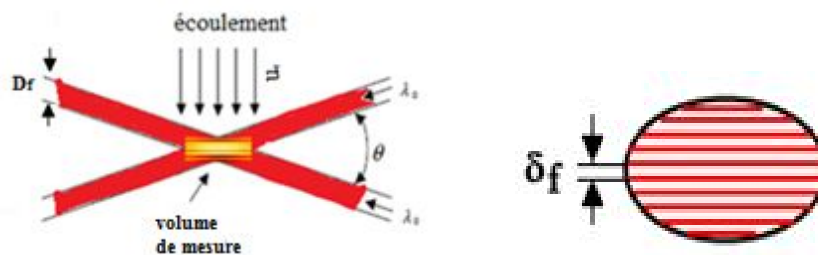
L'anémométrie ou vélocimétrie laser à effet Doppler qui est basée sur l'effet Doppler à pour principe que, si une particule passe avec une vitesse  $u_c$  dans un champ éclairé par un rayonnement de fréquence  $f$ , elle diffuse une autre fréquence  $f_d$  faiblement différente de l'origine en fonction de la vitesse  $u_c$  de la particule, en raison de l'effet Doppler (figure 3.11).



**Figure 3.11** : Schématisation de l'effet Doppler.

Dans notre cas, nous avons utilisé une configuration à hétérodynage optique (à faisceaux croisés ou à franges), dont l'interférence des deux faisceaux monochromatiques forme une onde plane qui fait apparaître un réseau de franges. Le passage d'une particule animée d'une vitesse  $u_c$  dans ce réseau, généralement nommé volume de mesure, induit un signal Gaussien (émission seulement quand la particule traverse une frange lumineuse), ce signal dépend uniquement de la composante de la vitesse  $u_c$  dans la direction perpendiculaire à la bissectrice des deux rayons (figure 3.12).

Cette technique se base sur l'analyse fréquentielle du signal lumineux diffusé par une particule passant à travers un volume de mesure constitué de franges d'interférence. Ces dernières sont obtenues à partir de l'intersection de deux faisceaux monochromatiques cohérents de diamètre  $D_f$  issus d'un même laser. Les franges d'interférence sont des plans parallèles, équidistants alternativement sombres et brillants. Ils sont parallèles à la bissectrice intérieure et perpendiculaire au plan formé par ces faisceaux. La distance  $\delta_f$  entre deux franges brillantes ou interfrange dépend de la longueur d'onde  $\lambda_0$  de la lumière laser et de l'angle  $\theta$  formé par les deux faisceaux.



**Figure 3.12** : Croisement de deux faisceaux laser et distance interfrange.

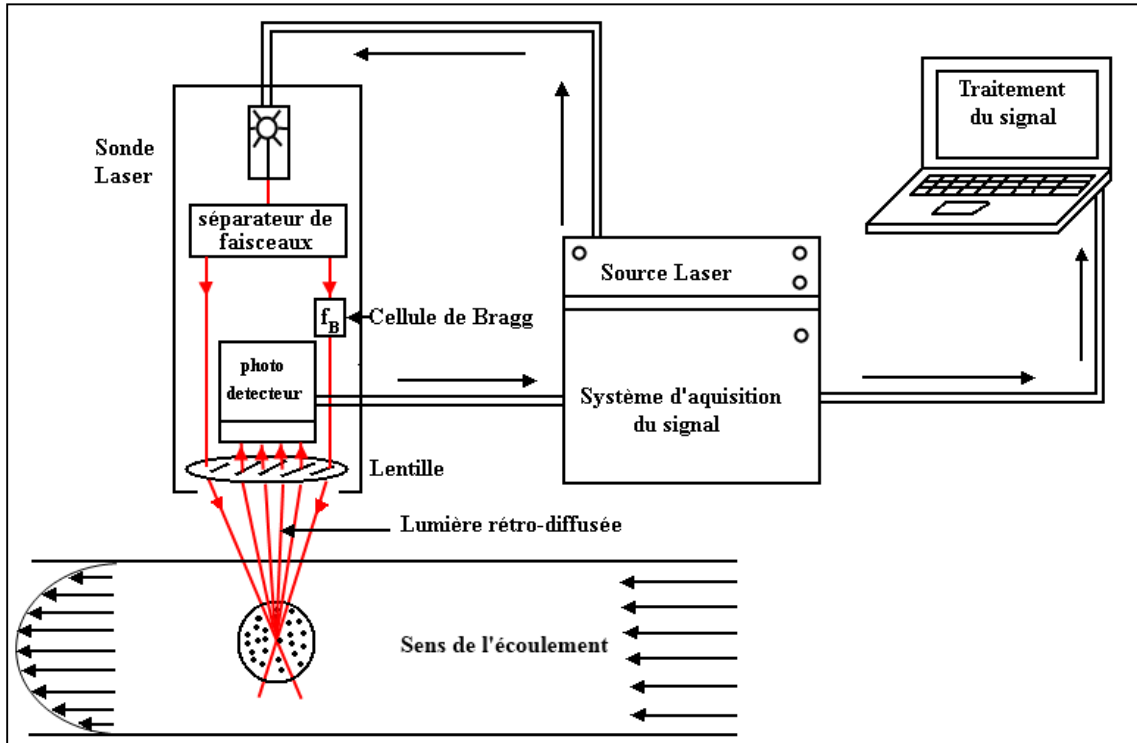
La distance interfrange  $\delta_f$  est donnée par :

$$\delta_f = \frac{\lambda_0}{2\sin(\theta/2)} \quad (3.3)$$

Le temps mis par une particule pour passer d'une frange brillante à la suivante est  $T = \frac{\delta_f}{u_c}$ , où  $u_c$  est la composante de la vitesse perpendiculaire au plan des franges et axiale par rapport à la conduite. La fréquence de lumière diffusée par la particule est :

$$f_D = \frac{1}{T} = \frac{2u_c \sin(\theta/2)}{\lambda_0} \quad (3.4)$$

Pour nos mesures expérimentales, on a utilisé un laser Hélium-Néon d'une puissance de 10 mW, émettant une lumière de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ . La fréquence diffusée par la particule  $f_D$  est réceptionnée dans le photo détecteur puis il est envoyé dans le système d'acquisition comme illustré dans le schéma de la figure (3.13).



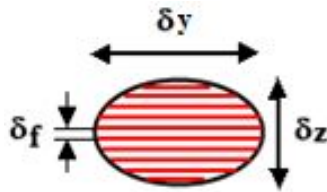
**Figure 3.13 :** Mesure de vitesse par vélocimétrie laser Doppler.

Afin de déterminer le signe de la vitesse en décalé, en fréquence, l'un des faisceaux par rapport à l'autre. Le faisceau issu du laser est séparé en deux autres faisceaux grâce à un miroir semi-transparent. L'un de ces faisceaux est décalé en fréquence de 40 MHz

par passage dans une cellule de Bragg. Les faisceaux sont ensuite dirigés vers une fibre optique. La tête optique comprend un module d'expansion qui accroît le diamètre des faisceaux ainsi que leur écartement et une lentille de focalisation qui assure la convergence des faisceaux. Dans notre cas, à la sortie du système optique, les faisceaux sont séparés d'une distance  $d = 38.4 \text{ mm}$ . Ils convergent ensuite à une distance focale  $L_f = 60 \text{ mm}$ . En raison de la forme cylindrique des faisceaux, le volume de mesure résultant de leur intersection est un ellipsoïde de révolution comprenant les franges d'interférence orientées parallèlement à la bissectrice de l'angle formé par les deux faisceaux incidents. Les dimensions du volume de mesure (voir la figure 3.13) sont donnés par :

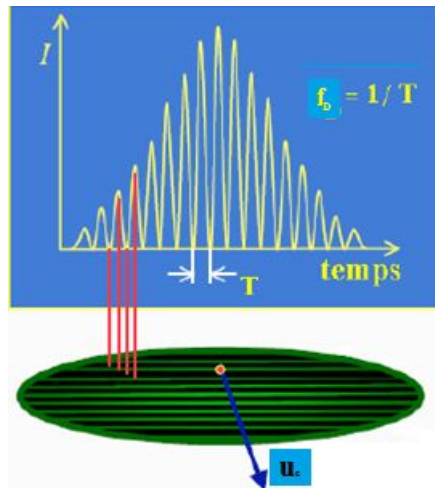
$$\delta_y = \frac{4\lambda_0 L_f}{\pi D_f \sin(\theta/2)} = 0,636 \text{ mm} \quad (3.5)$$

$$\delta_z = \frac{4\lambda_0 L_f}{\pi D_f \cos(\theta/2)} = 0,076 \text{ mm} \quad (3.6)$$



**Figure 3.13** : Dimensions du volume de mesure.

En traversant ce réseau de franges, une particule va diffuser de la lumière dans l'espace. Une partie de celle-ci va être transmise, via une lentille de focalisation au photodetecteur dont le rôle est de convertir l'énergie lumineuse en un signal électrique. Le traitement du signal électrique est effectué à l'aide d'un BSA (Burst Spectrum Analysers) 57N11 de chez DANTEC. La figure (3.14) montre l'enveloppe et la forme du signal électrique pour un passage de particules dans le volume de mesure. Le signal caractéristique est connu sous le nom de "bouffée Doppler". Pour améliorer la qualité du signal, l'écoulement estensemencé avec des particules sphériques argentées d'Iodine 100 de diamètre de  $10\mu\text{m}$ .



**Figure 3.14 :** Forme du signal résultant d'un passage de particules dans le volume de mesure : bouffée Doppler.

### B) Avantages des anémomètres laser à effet Doppler

- Mesure non perturbatrice : les poussières présentes dans un liquide sont souvent suffisantes pour donner un signal facilement mesurable. Dans le cas des gaz, il est en général nécessaire d'ensemencer l'écoulement avec des petites particules.
- Possibilité de déterminer le sens de l'écoulement en faisant défiler continûment les franges par un système de retard optique variable (le décalage de fréquence est lié à la vitesse relative des particules par rapport aux franges et, de ce fait, n'est pas le même pour deux particules dont les vitesses sont de signes opposés).
- Mesure absolue de la vitesse indépendamment des fluctuations de température ou des variations de composition du fluide.
- Mesure possible dans des flammes et des milieux réactifs.

### C) Problèmes et limitations

- On ne mesure pas directement la vitesse du fluide mais celle des particules diffusantes (des particules de  $0,25 \mu\text{m}$  peuvent suivre des variations de vitesse jusqu'à 10 kHz ; des particules de  $4 \mu\text{m}$  ne permettent pas de dépasser 1 ou 2 kHz) ; de plus, le fait d'avoir à ensemencer le fluide par des particules peut déjà présenter des limitations, notamment au niveau de la compatibilité des particules avec le fluide.

- Les mesures sont difficiles près des parois, à cause de l'agglomération de particules et des réflexions parasites sur les parois.
- Les mesures sont impossibles dans les fluides opaques.

# Chapitre 4

## Résultats et discussions

Nous présenterons dans ce chapitre l'ensemble des résultats expérimentaux et numériques obtenus lors de notre étude. On commencera par exposer les résultats expérimentaux concernant les mesures obtenues pour la variation centrale de la vitesse axiale (i.e. la composante parallèle à l'axe) pour plusieurs nombre de Reynolds. Ces mesures ont porté sur les conduites de sténose sinusoïdale avec différents diamètres d'entrée, et différents degrés de contraction (voir tableau 4.1), et ceci, en utilisant l'eau comme fluide test et qui possède une faible viscosité. Les résultats expérimentaux pour la vitesse sont comparés à la relation théorique introduite sous sa forme intégrale dans le chapitre 2.

La détermination de la valeur de la contrainte de cisaillement pariétale au centre de la sténose est effectuée de deux manières. La première méthode utilise la relation théorique introduite dans le chapitre 2 (§I.2.1) ; la seconde est basée sur les travaux analytiques de « Thwaites » améliorée par un modèle numérique (modèle du rayon fictif) introduite dans le chapitre 2 (§II.3.3). Les résultats de ces deux méthodes concernent les conduites sténosées de forme sinusoïdale et conique, pour lesquelles on a fait varier le degré de contraction, ainsi que les données rhéologiques (viscosité et densité volumique, voir tableau 4.2) des fluides utilisés.

Les mesures ont porté aussi sur les pertes de charge enregistrées lors de l'écoulement du glucose (à fortes viscosité), dans différents types de conduites. L'évolution du facteur de frottement, du nombre du Reynolds et de la contrainte pariétale en fonction de la vitesse de l'écoulement concerne uniquement la conduite uniforme. Les pertes de charges pour la solution du glucose sont comparées à celles de l'eau. Nous avons systématiquement joint les résultats expérimentaux des courbes théoriques. La perte de charge totale est mesurée également pour les conduites sténosées à différents degrés de contraction.

modèles	La forme géométrique de la sténose	Diamètre de la conduite D (mm)	Épaisseur maximale de la sténose $\delta'$ (mm)	Longueur de la sténose $L'$ (mm)	Taux de contraction de la sténose $\xi$ (%)
$M_0$	Conduite uniforme	15.65	0	-	-
$M_1$	Forme sinusoidale	9.75	3.7	20	94
$M_2$	Forme sinusoidale	15.65	4.9	35	86
$M_3$	Forme conique	9.75	3.7	20	94
$M_4$	Forme conique	15.65	4.9	35	86
$M_5$	Forme sinusoidale	15.65	4.9	35	66
$M_6$	Forme sinusoidale	15.65	2.745	35	57
$M_7$	Forme sinusoidale	15.65	4.9	20	86
$M_8$ [37]	Forme conique	3.5	0.5	8	50

**Tableau.4.1** : Grandeurs caractéristiques des modèles géométriques utilisées.

	L'eau	La solution du glucose	Le sang
La masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	1000	1000	1060
La viscosité dynamique (Pa.s)	$10^{-3}$	$22.5 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$

**Tableau.4.2** : Paramètres rhéologique des différents fluides utilisés\*.

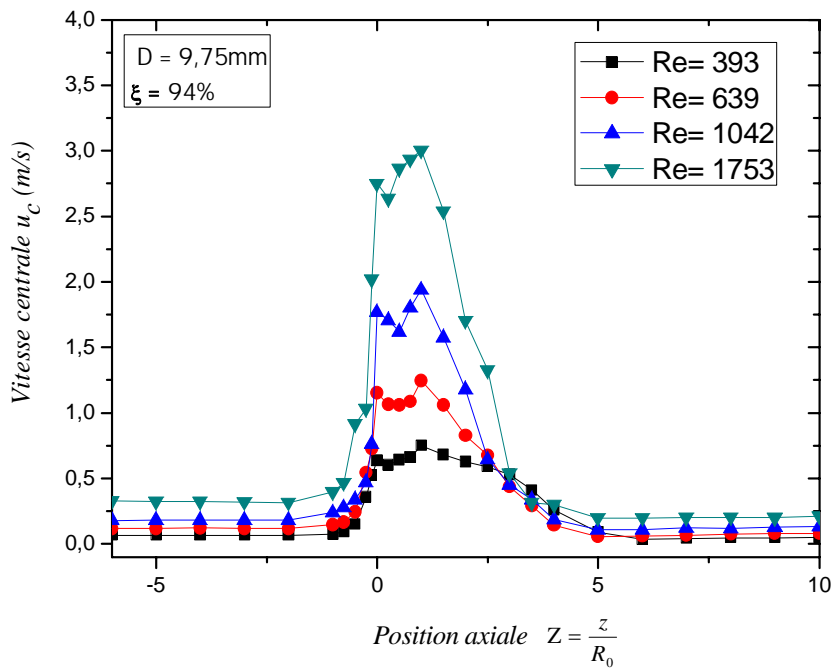
---

\* Les paramètres rhéologiques des fluides utilisés pour tous les modèles sont à 25°C.

## I. Variation centrale de la vitesse axiale.

### I.1. Evolution expérimentale de la vitesse

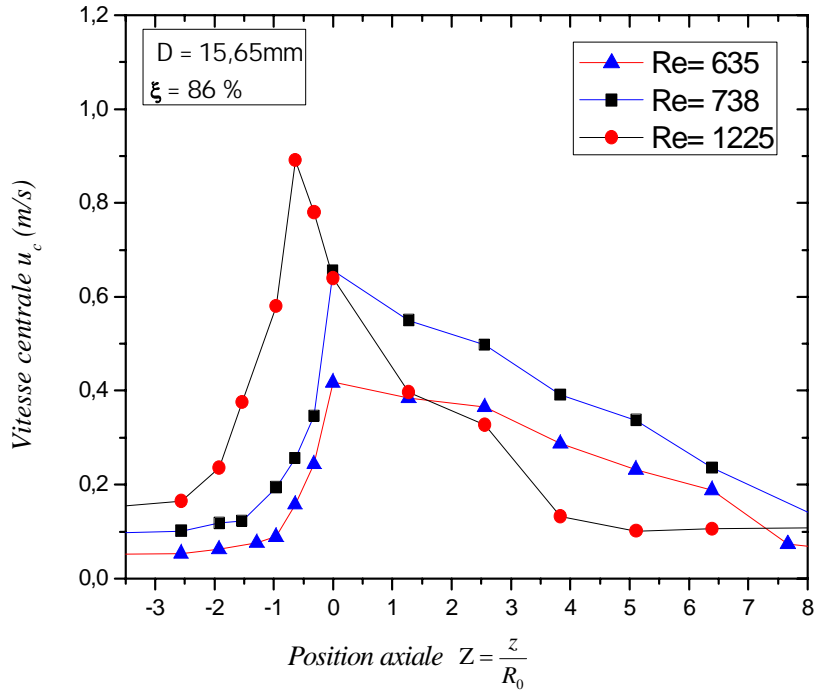
Les deux figures (4.1) et (4.2) montrent l'évolution de la vitesse axiale selon la ligne centrale de la conduite. L'allure est obtenue expérimentalement par la technique LDV pour les deux conduites (modèles M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub>).



**Figure 4.1** : Evolution centrale expérimentale de la vitesse axiale le long de la sténose. (Modèle M<sub>1</sub>) pour l'eau.

En balayant seulement le régime laminaire, les deux figures montrent que la vitesse au voisinage du centre de la sténose est très affectée, contrairement à la grande partie des zones amont et aval où la vitesse est pratiquement constante. En entrant dans la sténose (à partir de  $Z = -2$ ) le domaine géométrique occupé par le fluide se rétrécit et les particules qui se trouvent au centre de la conduite ont tendance à rejoindre plus vite la zone de pression défavorable en aval, ce qui augmente leurs vitesses, d'après le principe de conservation du débit : une diminution de la section implique l'augmentation de vitesse. Cette dernière atteint son maximum au centre de la singularité, cependant l'allure de la conduite de diamètre  $D = 9,75\text{mm}$ , admet un deuxième pic en  $Z=2$ . Ceci,

s'explique par l'existence d'une zone de recirculation assez importante juste en aval de la singularité (voir figure 2.4 chapitre II).



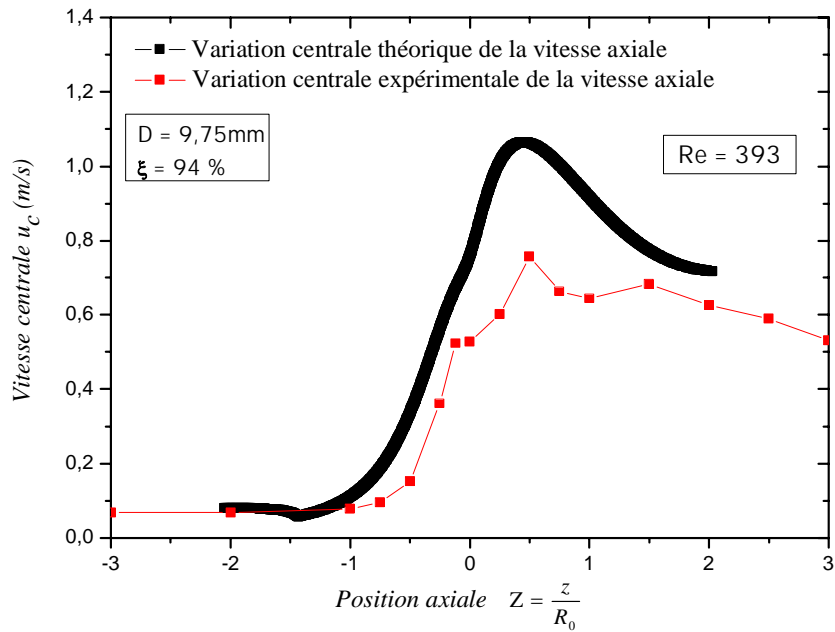
**Figure 4.2 :** Evolution centrale expérimentale de la vitesse axiale le long de la sténose. (Modèle  $M_2$ ) pour l'eau.

En aval et au-delà de la sténose, l'effet de la singularité disparaît, et le régime de l'écoulement s'établit à nouveau, et la vitesse rejoint sa valeur à l'entrée.

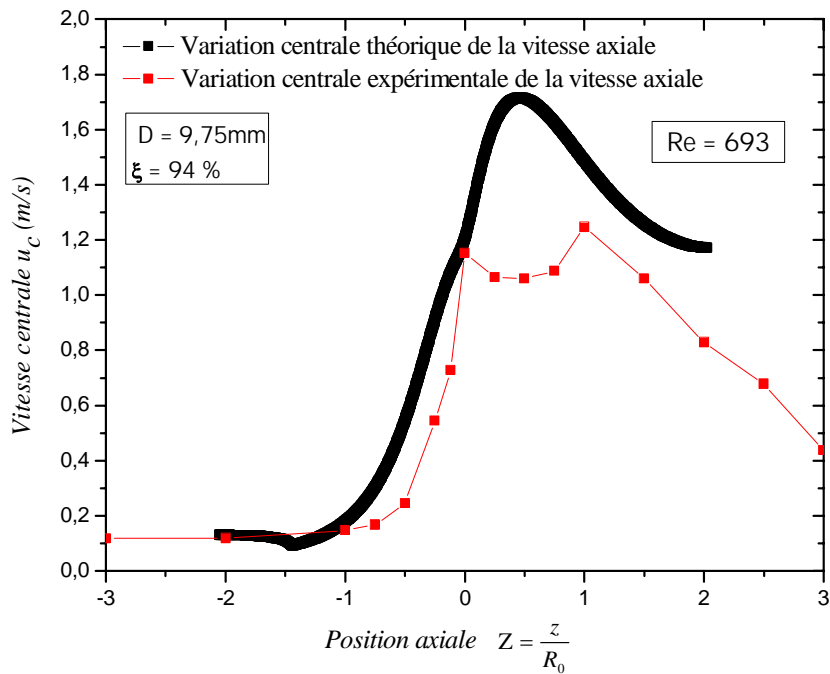
## I.2. Evolution théorique de la vitesse

La variation centrale de la vitesse axiale est obtenue théoriquement d'après les travaux de Young et Morgan (chapitre II paragraphe I. 2.2) en résolvant numériquement l'équation différentielle (2.42), et en utilisant la méthode de **Runge-Kutta RK44** développée en langage « **Fortran** ».

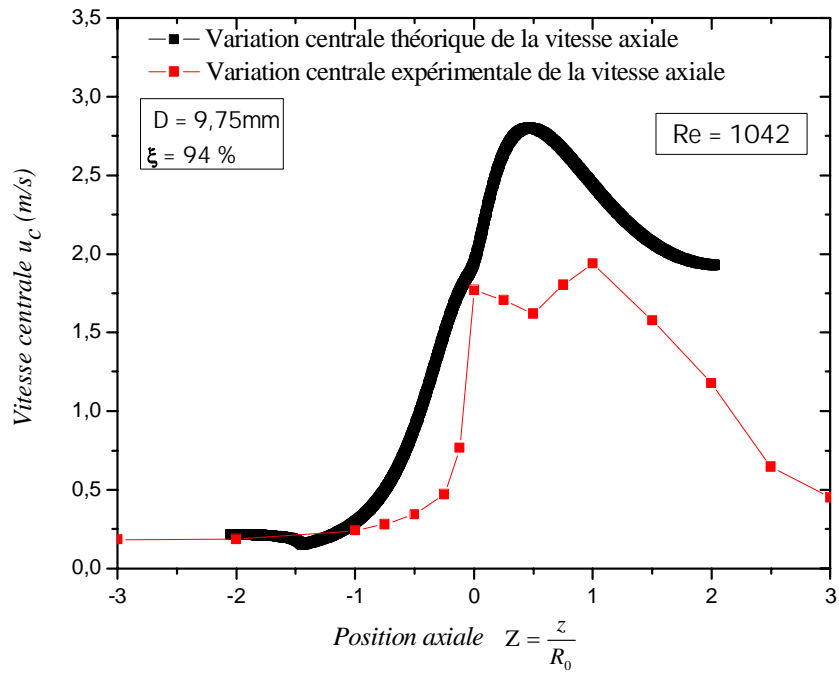
Les figures (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) montrent les résultats obtenus pour l'évolution centrale de la vitesse pour les nombres de Reynolds suivants :  $Re = 393, 693, 1042$  et  $1753$  i.e. en écoulement laminaire dans le cadre du modèle  $M_1$ . Cette évolution est comparée à l'allure expérimentale pour quatre valeurs de Reynolds.



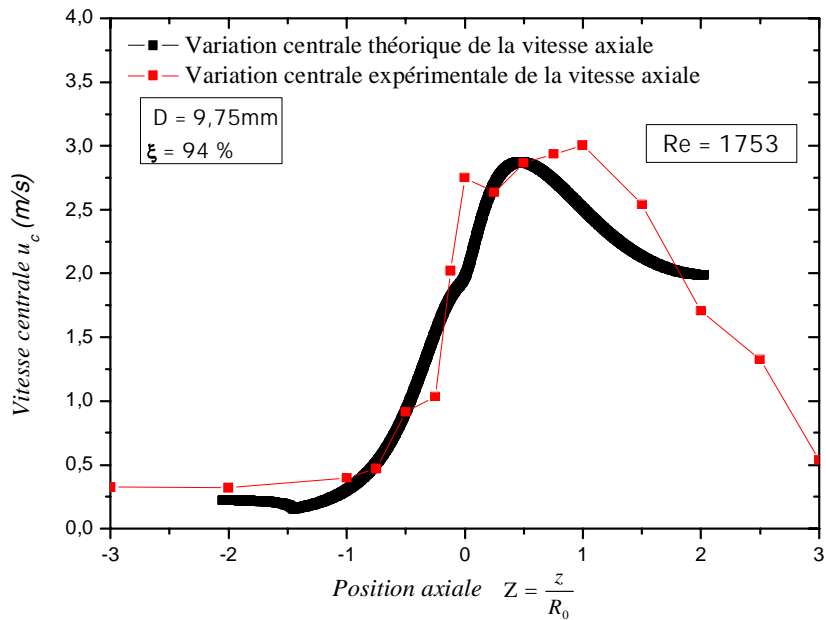
**Figure 4.3 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose. (Modèle  $M_1$ ) pour l'eau.  $Re=393$



**Figure 4.4 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose. (Modèle  $M_1$ ) pour l'eau.  $Re=693$

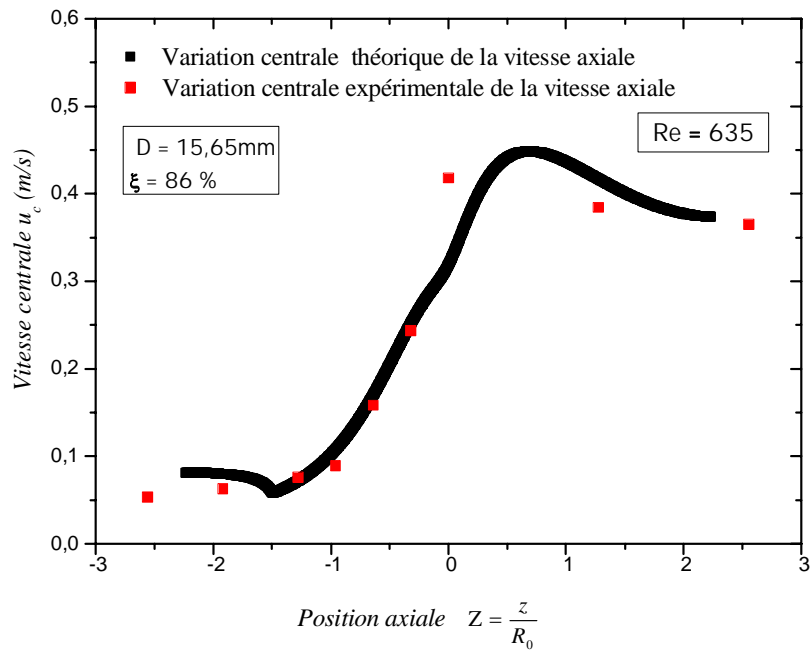


**Figure 4.5 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose (Modèle  $M_1$ ) pour l'eau.  $Re=1042$

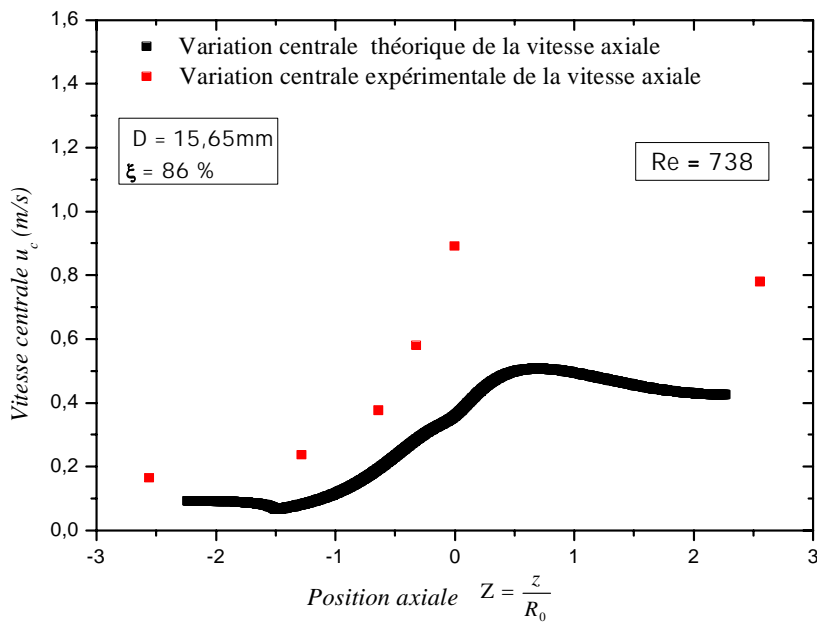


**Figure 4.6 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose (Modèle  $M_1$ ) pour l'eau.  $Re=1753$

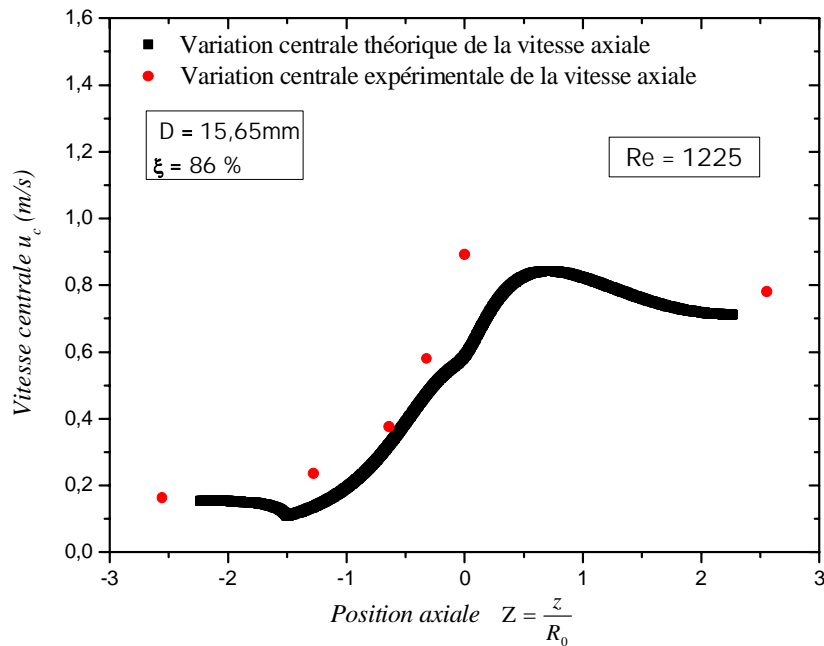
L'allure théorique de la vitesse, pour les quatre nombres de Reynolds choisis, prend la forme d'une cloche, où les valeurs maximales sont toujours au voisinage du centre de la sténose. La variation longitudinale calculée numériquement atteint son maximum au point situé juste en aval du centre, contrairement aux résultats expérimentaux où le pic se situe juste en amont du centre. Ce décalage est lié probablement à la nature elle-même de la formule théorique, où les hypothèses simplificatrices minimisent certains effets, mais qui réellement existent toujours. Le décalage entre les points théoriques et les points expérimentaux est faible, particulièrement pour  $Re = 1753$  où un excellent accord est noté, ce qui prouve la validité de la formulation théorique pour ce genre de configuration. Nous notons aussi que les valeurs théoriques sont toujours supérieures aux valeurs expérimentales pour les faibles nombre de Reynolds choisis.



**Figure 4.7 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose (Modèle  $M_2$ ) pour l'eau.  $Re=635$



**Figure 4.8 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose (Modèle  $M_2$ ) pour l'eau.  $Re=738$



**Figure 4.9 :** Evolution de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long de la sténose (Modèle  $M_2$ ) pour l'eau.  $Re=1225$

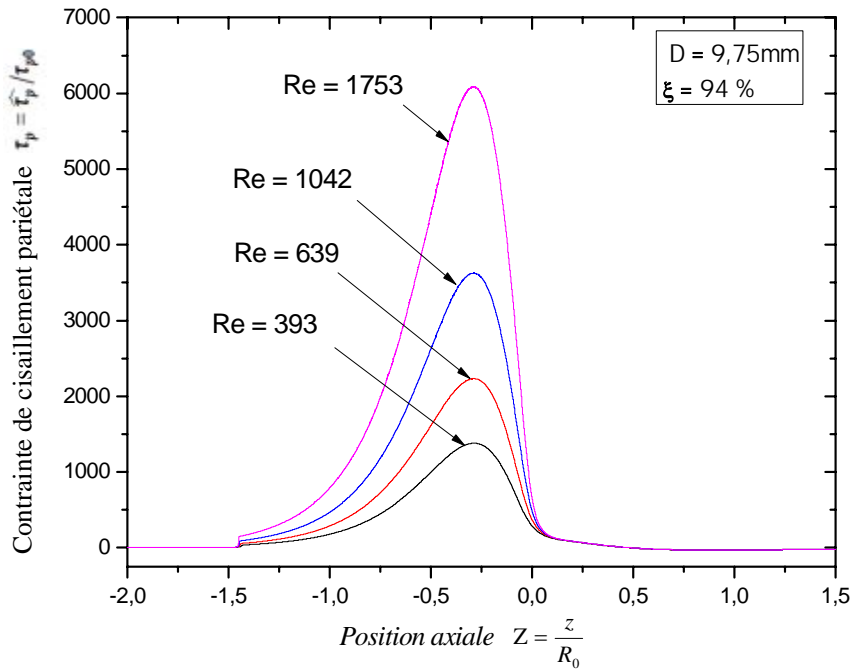
Nous présentons dans les figures (4.7), (4.8) et (4.9) les résultats des valeurs théoriques et expérimentales de la vitesse axiale relatifs au modèle  $M_2$ . Contrairement au modèle  $M_1$ , les courbes théoriques sont, cette fois-ci, au-dessous des courbes expérimentales en exception celle liée à la plus faible valeur de Reynolds. L'accord est meilleur en amont qu'en aval du centre de la sténose. A noter aussi que le nombre de points expérimentaux en aval du centre de la sténose est très faible pour qu'une comparaison fiable puisse être faite.

## **II. Contrainte pariétale**

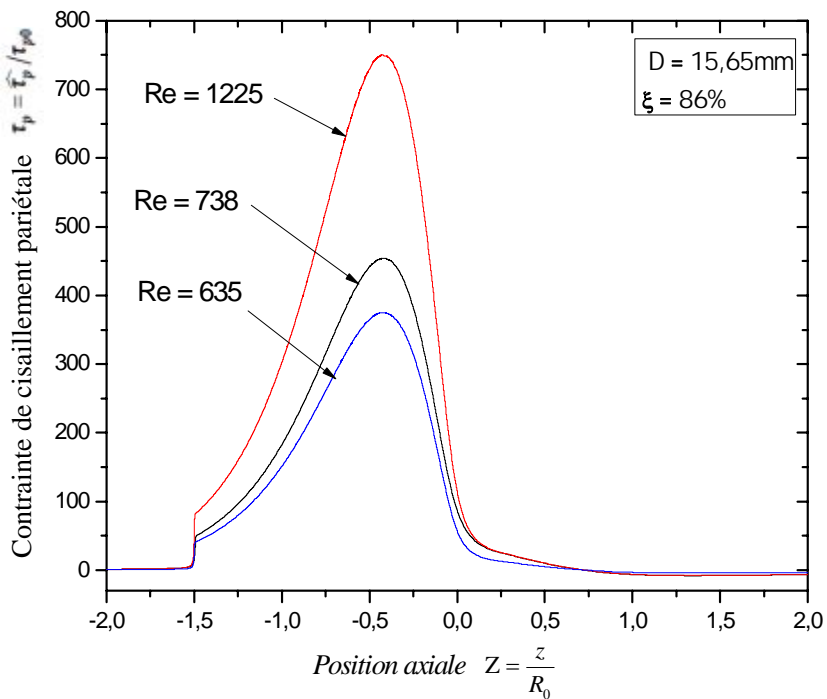
### **II.1. Contrainte pariétale théorique**

#### **II.1.1. Effet des paramètres géométriques de la sténose**

Dans ce qui suit, nous discuterons de l'évolution de la contrainte de cisaillement pariétale en fonction de  $Z$ . Les valeurs de cette contrainte sont déterminées par le calcul analytique théorique de Young et Morgan (chapitre 2 § I.2.3), et en utilisant la relation (2.46). Cette relation est en fonction du paramètre  $R^2U$  et de la forme géométrique de la sténose ( $dR/dZ$ ). En intégrant la relation (2.41) numériquement et en utilisant la forme sinusoïdale de la sténose pour les deux conduites, on remonte à la contrainte pariétale avec des conditions sur les paramètres  $\beta$  et  $\Gamma$ . Les résultats de cette méthode, relatifs au modèle  $M_1$  et  $M_2$ , donnent respectivement les figures (4.10) et (4.11).



**Figure 4.10 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long de la sténose (Modèle M1) pour l'eau.



**Figure 4.11 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long de la sténose (Modèle M2) pour l'eau.

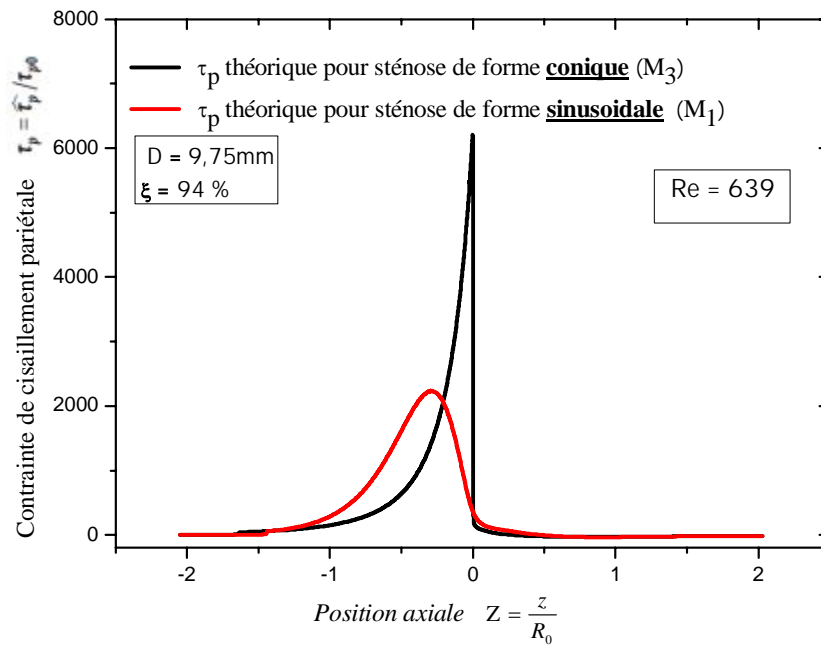
Pour les deux conduites, la contrainte pariétale suit une évolution presque gaussienne. Les maxima de contrainte augmentent avec le nombre de Reynolds, ceci est dû à l'augmentation du cisaillement interne. Ce dernier influe sur la variation transversale de la vitesse, en faisant augmenter son gradient au voisinage de la paroi. En amont et en aval de la sténose la contrainte pariétale est minimale, et elle rejoint la valeur de la contrainte pariétale de Poiseuille.

On remarque que la position de la valeur maximale pour cette forme sinusoïdale se situe toujours juste en amont du centre, et ce pour les deux modèles. Ce décalage est lié à la forme géométrique de la sténose où sa dérivée ( $dR/dz$ ) intervient directement dans la formule, et surtout l'asymétrie notée précédemment pour la vitesse axiale.

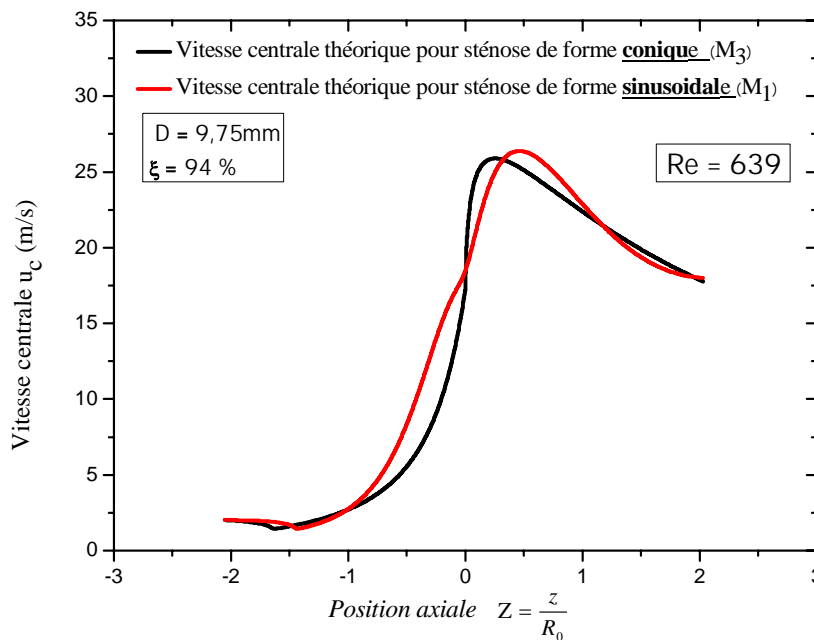
### **II.1.2. Effet de la forme géométrique de la sténose**

Pour montrer l'influence de la forme géométrique et sa variation le long de l'axe  $Z$  sur la contrainte pariétale, on a injecté la forme conique de la sténose à la place de la forme sinusoïdale, tout en gardant les mêmes diamètres d'entrées  $D$  et de degré de contraction  $\xi$ .

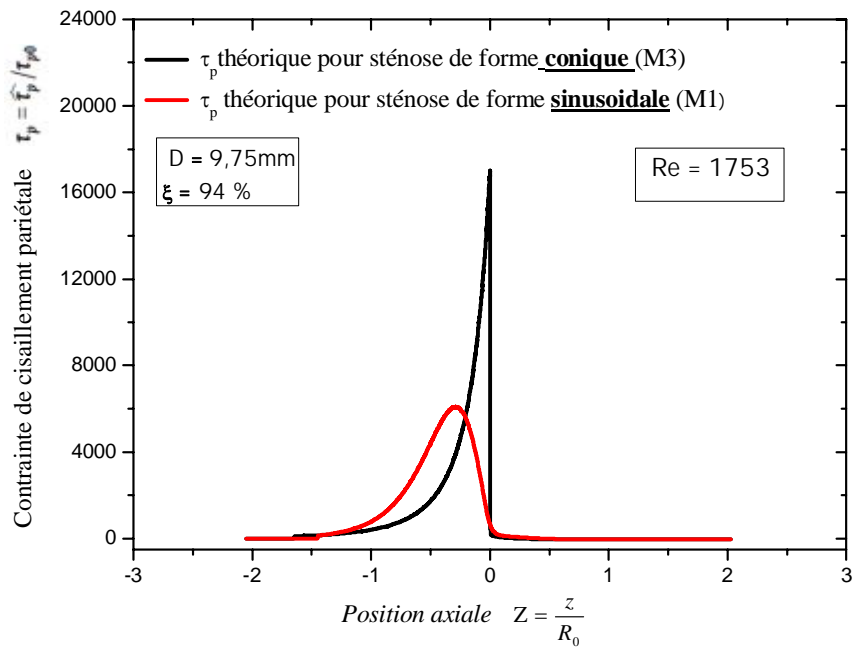
Les figures (4.12) et (4.14) montrent l'allure de la contrainte pariétale en fonction de  $Z$  pour les deux formes géométriques de la sténose considérées (forme sinusoïdale  $M_1$  et forme conique  $M_3$ ).



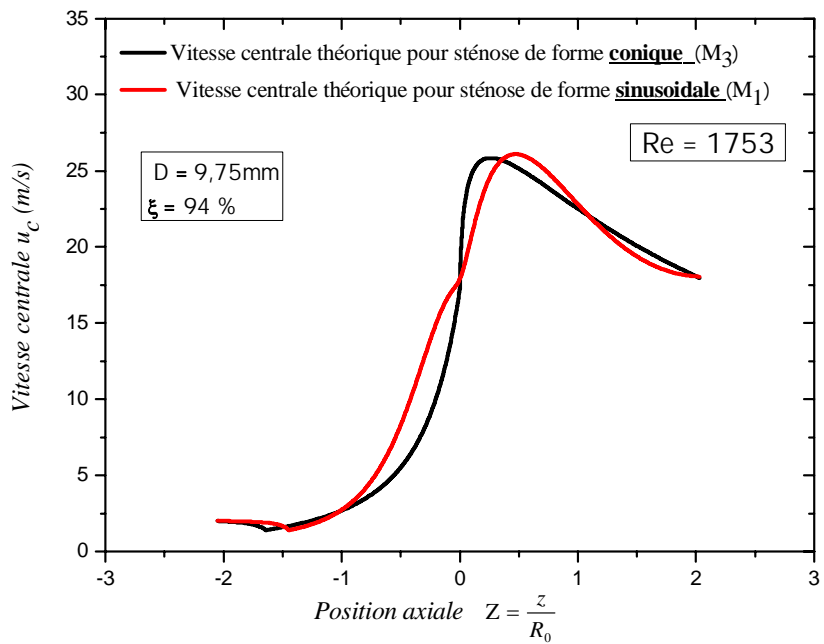
**Figure 4.12 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long des deux sténoses (Modèle M<sub>1</sub> et M<sub>3</sub>) pour l'eau.  $Re=639$



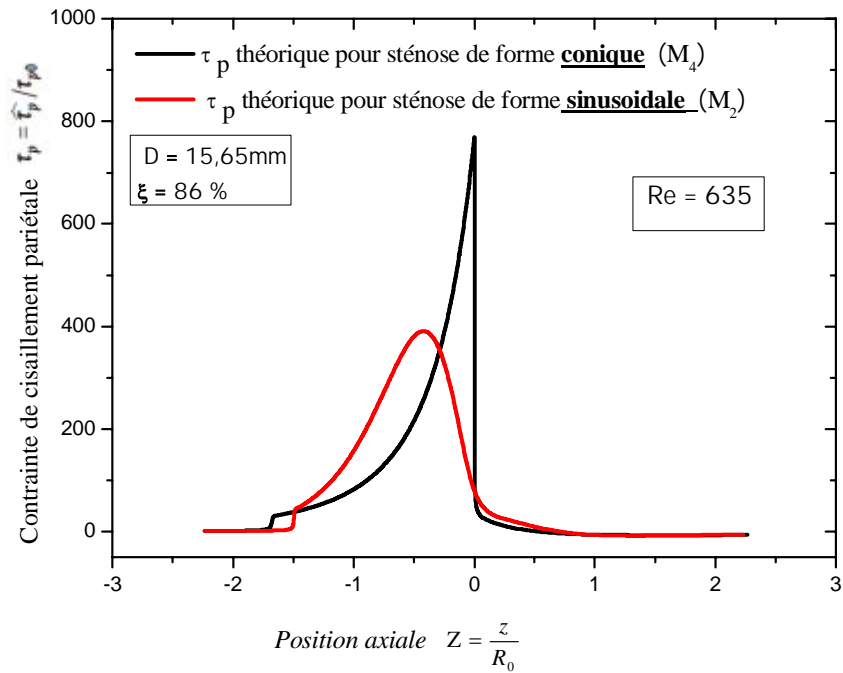
**Figure 4.13 :** Evolution théorique de la vitesse axiale le long des deux sténoses (Modèle M<sub>1</sub> et M<sub>3</sub>) pour l'eau.  $Re=639$



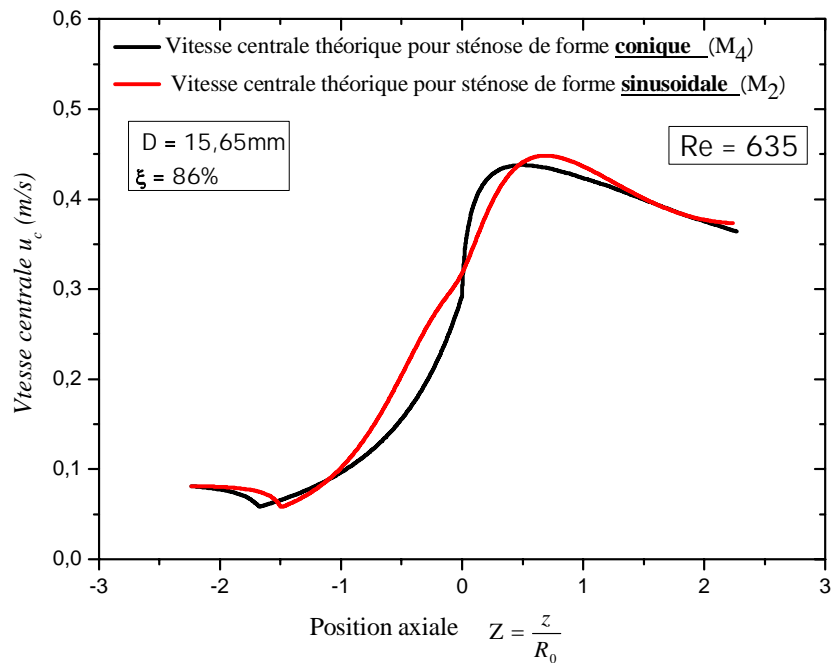
**Figure 4.14 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long des deux sténoses (Modèle  $M_1$  et  $M_3$ ) pour l'eau. ( $Re=1753$ )



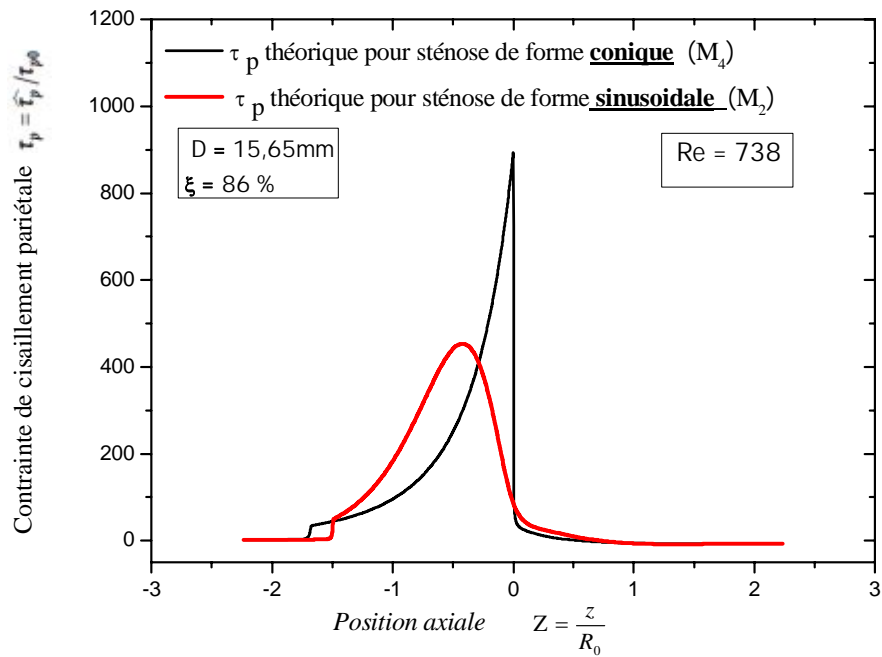
**Figure 4.15 :** Evolution théorique de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long des deux sténoses (Modèle  $M_1$  et  $M_3$ ) pour l'eau. ( $Re=1753$ )



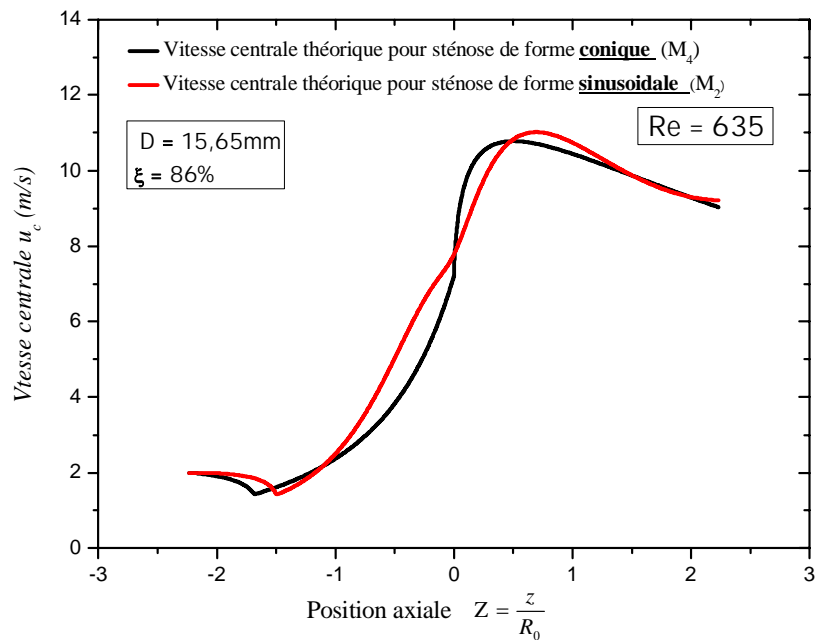
**Figure 4.16 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long des deux sténoses (Modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=635$ )



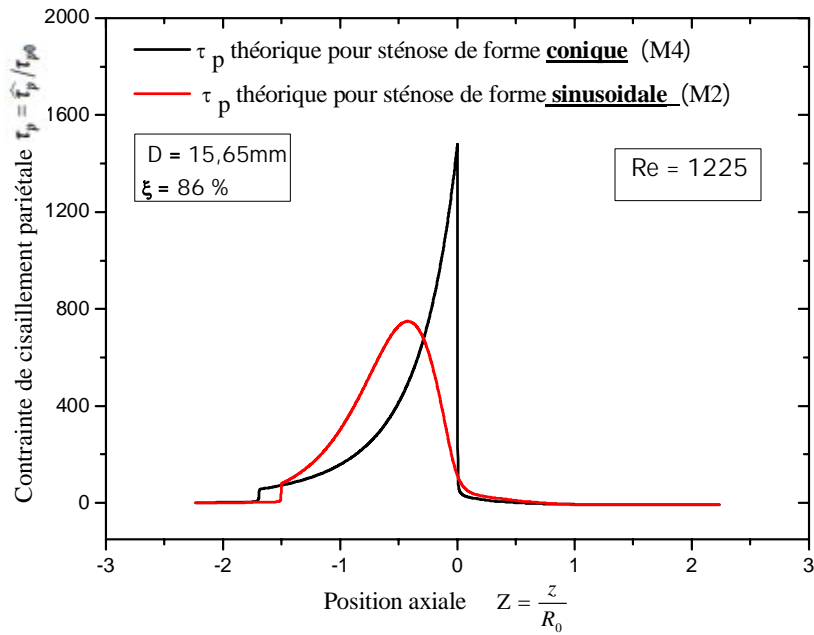
**Figure 4.17 :** Evolution théorique de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long des deux sténoses (Modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=635$ )



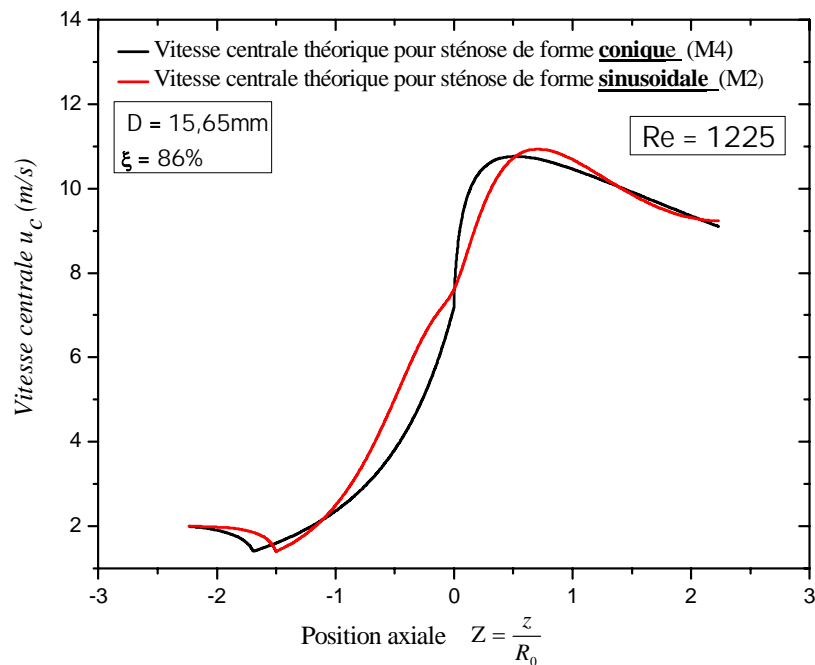
**Figure 4.18 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long des deux sténoses (Modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=738$ )



**Figure 4.19 :** Evolution théorique de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long des deux sténoses (Modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=738$ )



**Figure 4.20 :** Evolution théorique de la contrainte pariétale le long des deux sténoses (modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=1225$ )



**Figure 4.21 :** Evolution théorique de la vitesse axiale sur la ligne centrale le long des deux sténoses (Modèle  $M_2$  et  $M_4$ ) pour l'eau. ( $Re=1225$ )

L'influence de la géométrie de la sténose sur la contrainte pariétale est très importante, où on note une forte augmentation sous forme de pic des valeurs de la contrainte au voisinage du centre, pour la forme conique. Juste en aval du pic, la contrainte connaît une chute et rejoint vite sa valeur propre à l'écoulement du Poiseuille, contrairement à la forme sinusoïdale où l'évolution de la contrainte est moins brutale. La contrainte de cisaillement atteint son maximum juste en amont du centre pour les deux formes, cependant, elle est plus proche du centre pour la forme conique.

Cette différence d'évolution des contraintes pariétales pour les deux modèles géométriques est liée à la dérivée de la fonction qui décrit les deux formes géométriques, et non à l'influence de la variation centrale de la vitesse ; car, cette évolution est pratiquement la même que la géométrie soit conique ou sinusoïdale (figures 4.13 ,4.15, 4.17, 4.19, 4.21).

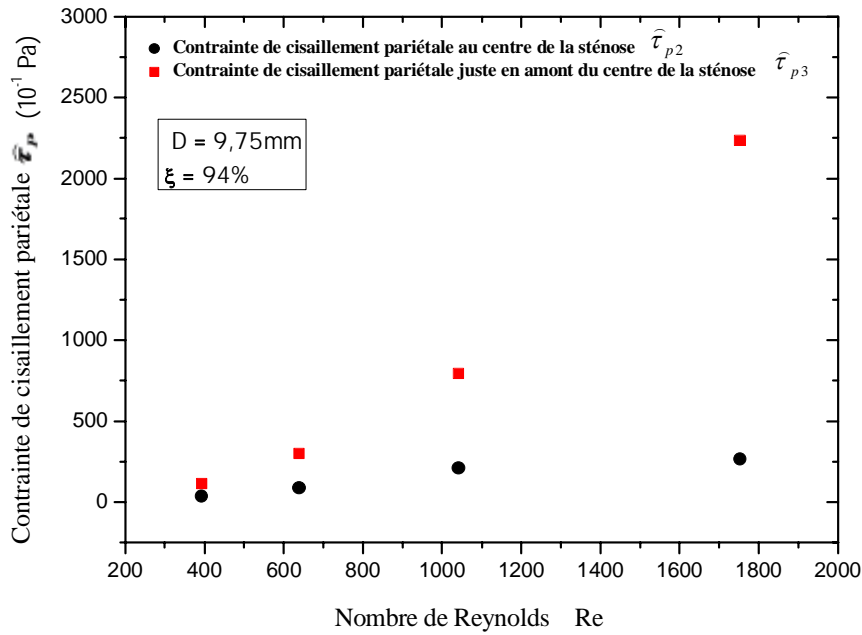
Nous notons aussi, qu'en passant de  $Re=639$  à  $Re=1753$  pour le diamètre 9,75mm, la valeur de la contrainte maximale a triplé. Avec la conduite de diamètre 15,65mm, le passage du nombre de Reynolds de 635 à 1225 a fait doubler la valeur de la contrainte maximale.

## **II. 2. Contrainte pariétale et modèle numérique (Modèle du rayon fictif).**

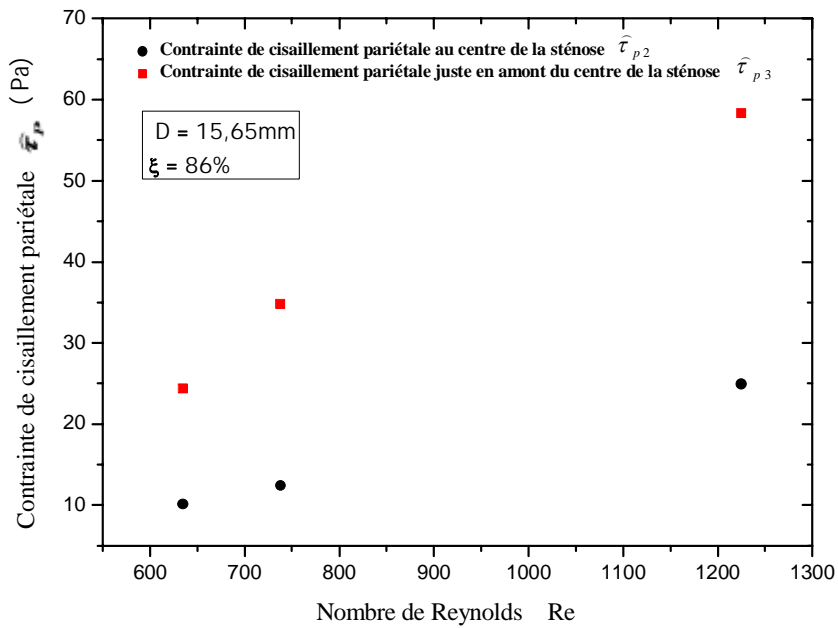
Une autre méthode est introduite dans cette étude, pour le calcul de la contrainte du cisaillement pariétale au niveau d'une sténose. Cette méthode est basée sur les calculs analytiques de Thwaites, adaptée en modèle numérique par Jason, ce qui est appelé modèle du rayon fictif.

En remplaçant la fonction  $u_c(z)$ , qui est déterminée expérimentalement dans la relation (2.82), et en suivant les étapes du schéma numérique proposé par Jason dans le chapitre 2 (paragraphe II.3), on remonte à la contrainte de cisaillement pariétale  $\hat{\tau}_p$  de la relation (2.85).

Les résultats obtenus par cette méthode dans le cas des modèles  $M_1$  et  $M_2$  en fonction du nombre de Reynolds sont présentés dans les figures (4.22) et (4.23).



**Figure 4.22 :** Contrainte de cisaillement pariétale numérique en fonction du  $Re$  (Modèle  $M_1$ ) pour l'eau.



**Figure 4.23 :** Contrainte de cisaillement pariétale en fonction du  $Re$  (modèle  $M_2$ ) pour l'eau

La contrainte pariétale au centre de la sténose  $\hat{\tau}_{p2}$  est calculée en faisant tendre la valeur du paramètre de forme  $\beta$  relation (2.52) vers zéro,  $\beta = \frac{\theta^2}{\gamma} \frac{du}{dz} = 0$ , en raison du

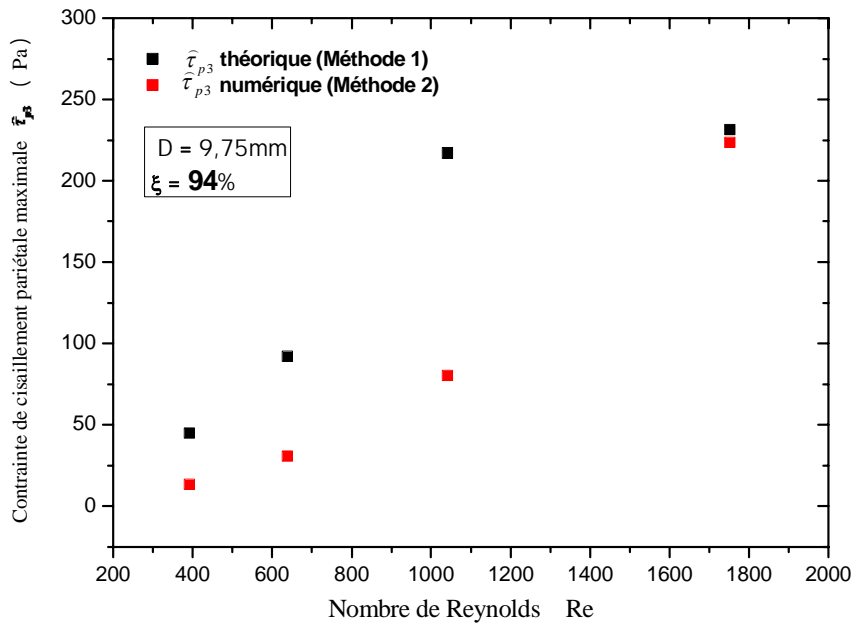
fait que la vitesse atteint son maximum et sa dérivée s'annule au centre de la sténose d'après le calcul analytique de Thwaites et l'analyse théorique du paragraphe I.2.2 du chapitre 2.

La valeur de la contrainte de cisaillement  $\widehat{\tau}_{p3}$  est calculée au point pariétal situé juste en amont du centre de la sténose, c'est-à-dire avant que la vitesse axiale atteigne son maximum, et avant que sa dérivée tende vers zéro ( $\beta \neq 0$ ).

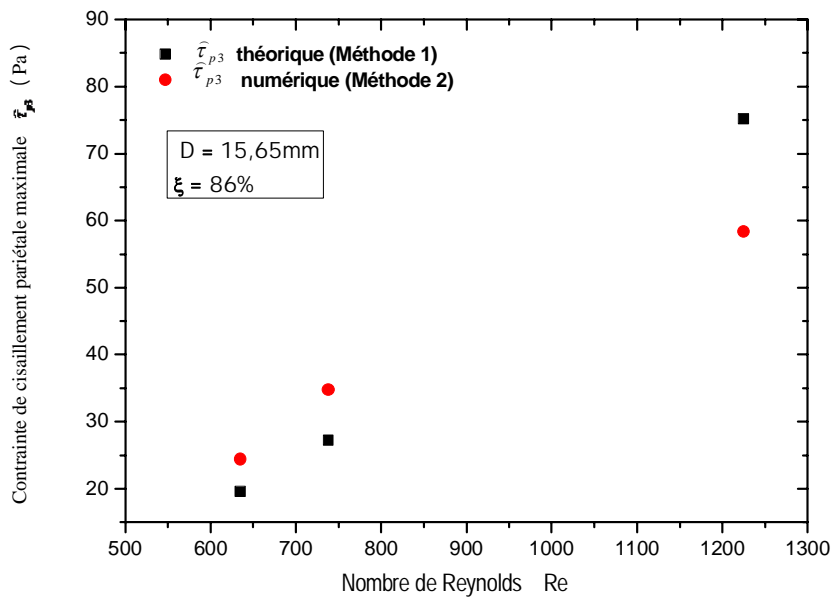
Les deux figures (4.22) et (4.23) montrent que pour les nombres de Reynolds élevés, la contrainte de cisaillement augmente d'une manière remarquable. Avec l'augmentation du débit, le taux de cisaillement croît de plus en plus en arrivant au col à cause du rétrécissement d'une part et de la viscosité du fluide d'autre part, et ceci pour les deux modèles géométriques considérés  $M_1$  et  $M_2$ .

La différence entre  $\widehat{\tau}_{p2}$  (au centre du col) et  $\widehat{\tau}_{p3}$  (juste en amont du centre) est dû à la géométrie de la singularité elle-même qui impose cette petite chute de contrainte juste en aval du centre du col, cette chute est due probablement au décollement temporel de la couche limite (zone de recirculation inévitable) à ce niveau, qui fait diminuer un peu le contact à la paroi.

Les valeurs de la contrainte pariétale maximale calculées par cette méthode (Méthode 2) sont comparées à celles obtenues par la première méthode qu'on a discuté précédemment (voir figures 4.24 et 4.25).



**Figure 4.24 :** Contrainte de cisaillement pariétale numérique et théorique (modèle  $M_1$ ) pour l'eau.



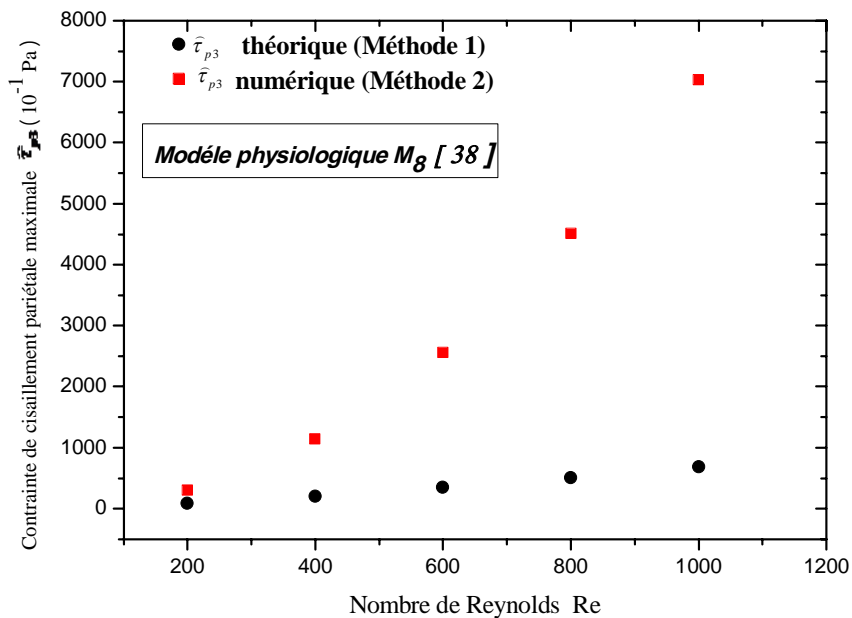
**Figure 4.25 :** Contrainte de cisaillement pariétale numérique et théorique en fonction du  $Re$  (Modèle  $M_2$ ) pour l'eau.

En comparant seulement la contrainte maximale  $\hat{\tau}_{p3}$  issue des deux méthodes dans le modèle géométrique  $M_1$ . Les valeurs de cette contrainte, issues du calcul numérique (méthode 2), rejoignent celles issues du calcul théorique (méthode 1) à partir du nombre de Reynolds égale à 1753.

Dans le modèle géométrique  $M_2$ , la différence entre les valeurs théorique et numérique n'est pas considérable; sauf pour les grands nombres de Reynolds où les valeurs théoriques l'emportent.

### II.2.1. Contrainte pariétale et paramètres physiologiques

Afin de comparer les résultats des deux méthodes employées aux résultats disponibles en littérature, la figure (4.26) montre l'évolution de la contrainte pariétale en fonction du nombre de Reynolds dans le modèle  $M_8$ . Le sang physiologique est pris comme fluide test avec ses paramètres rhéologiques [37].

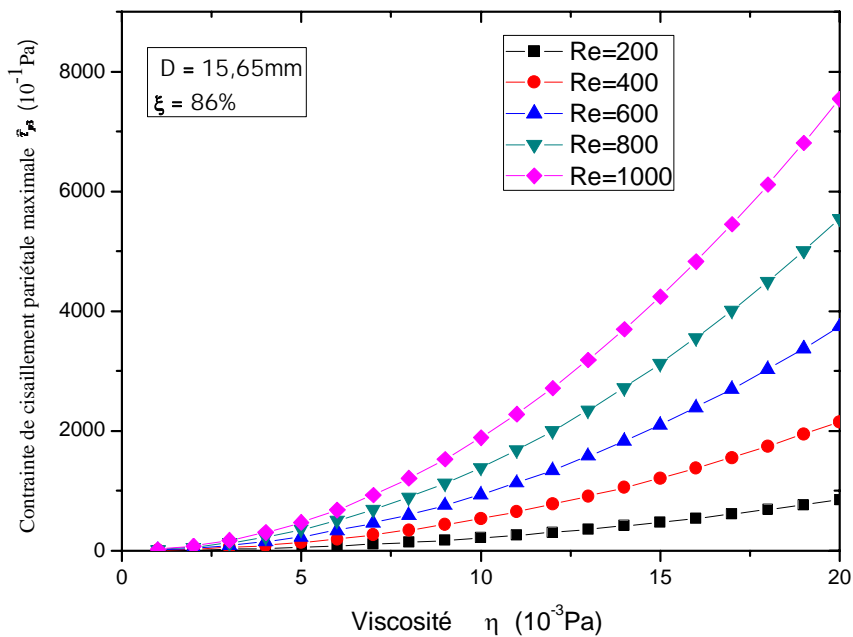


**Figure 4.26 :** Contrainte de cisaillement pariétale numérique et théorique en fonction du  $Re$  (Modèle  $M_8$ ) pour le sang physiologique.

Cette dernière figure montre le décalage qui existe entre les valeurs obtenues théoriquement et numériquement dans le cas d'une artère avec ses paramètres physiologique. Ceci est lié essentiellement au diamètre de l'artère et au degré de contraction élevé qui est fortement senti par la relation théorique, où ses valeurs s'éloignent de plus en plus des valeurs obtenues numériquement. Ce qui remet en cause la validité du calcul théorique issue de la première méthode pour ce genre de configuration, c'est-à-dire pour des artères fortement rétrécies.

## II.2. 2. Contrainte de cisaillement pariétale numérique en fonction de la viscosité

La figure suivante (4.27) montre l'évolution de la contrainte de cisaillement pariétale  $\hat{\tau}_{p2}$  calculée au centre de la sténose en fonction de la viscosité apparente du sirop du glucose dans le modèle sinusoïdale  $M_4$ .



**Figure 4.27 :** Contrainte pariétale numérique au centre de la sténose en fonction de la viscosité (modèle  $M_4$ ).

Les valeurs de la contrainte de cisaillement pariétale augmentent considérablement en fonction de la viscosité du fluide. Dans le régime laminaire, le glissement des couches du fluide les unes sur les autres augmente les forces visqueuses internes, et en se

dirigeant vers la paroi ; la pression des couches du fluide sur cette parois atteint son maximum. Cette pression est proportionnelle à la variation du débit (nombre de Reynolds) et aussi à la viscosité du fluide.

### II.2.3. Contrainte de cisaillement pariétale en fonction du degré de contraction

La figure (4.28) est obtenue en faisant varier le diamètre du centre de la sténose par rapport au diamètre d'entrée d'où une variation du degré de contraction  $\xi$  défini dans le chapitre III par :

$$\xi = \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^2 \right] \times 100$$

Au-dessous de la valeur 0.5 de la contraction  $\xi$ , le calcul de la contrainte dans notre modèle numérique est impossible physiquement, et le programme diverge totalement à cause de l'inexistence d'un rayon fictif pour lequel le profil transversal de la vitesse est aplati au-delà d'une certaine valeur du rayon géométrique.

Cette condition sur la contraction  $\xi$  est démontrée de la manière suivante :

Écrivant la fonction linéaire de la vitesse axiale dans le modèle conique

$$u(z) = u_0 + \frac{2(u_1 - u_0)}{L'}(z - z'_0) \quad (4.1)$$

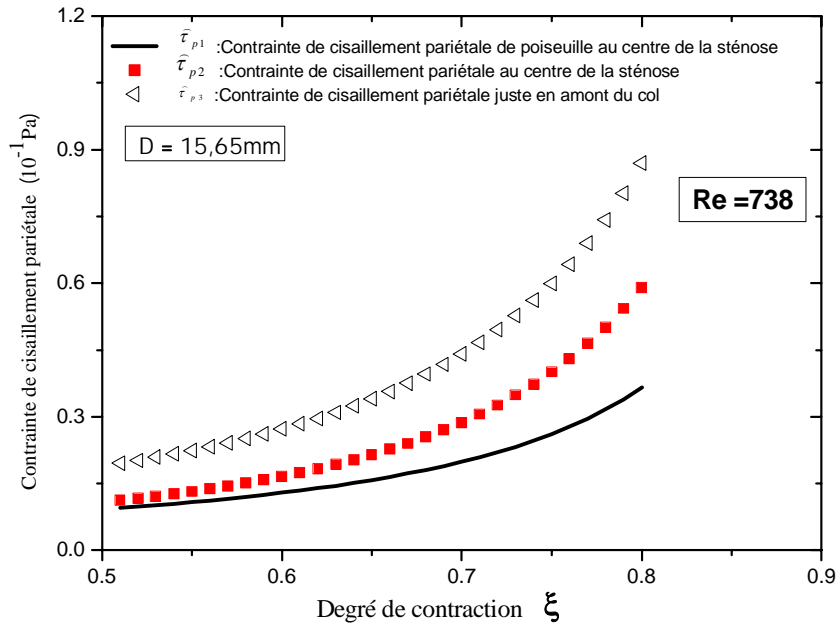
Si on admet que la vitesse varie d'une manière croissante alors que  $u_1 > u_0$ , on a :

$$\frac{u_1}{u_0} > 1$$

De l'équation (2.93) on tire le rapport :  $\frac{R_0^2}{2R_1^2} > 1$  , d'où la condition sur la contraction :

$$1 - \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^2 > 0.5$$

D'où  $\xi > 0.5$  (4.2)



**Figure 4.28** : Contrainte pariétale numérique de la sténose sinusoïdale en fonction du degré de contraction pour l'eau.

On constate le rôle du développement de la sténose sur la pression exercée au niveau de la partie interne de l'artère et dont la contraction influe d'une manière directe sur l'écoulement, et en particulier, sur la contrainte pariétale. La contrainte maximale  $\hat{\tau}_{p3}$ , à une contraction de  $\xi = 0.8$ , est dix fois plus grande que celle d'une contraction de  $\xi = 0.5$ .

La contrainte pariétale de Poiseuille  $\hat{\tau}_{p1}$  est tirée de la définition de la contrainte pariétale au centre de la sténose, dans le cas d'un profil parabolique :

$$\hat{\tau}_{p0} = -\eta \left. \frac{du(y)}{dz} \right|_{z=z_1} \quad (4.3)$$

Le profil de Poiseuille parabolique au point 2 (figure...) est donné par :

$$u(y) = u_1 \left( 1 - \frac{y^2}{R_1^2} \right) \quad (4.4)$$

La relation de Poiseuille devient :

$$\widehat{\tau}_{p0} = 2\eta \frac{u_1}{R_1} \quad (4.5)$$

Or  $Q_{v0} = Q_{v1}$  d'où  $u_1 = \frac{u_0 R_0^2}{R_1^2}$

Alors  $\widehat{\tau}_{p0} = 2\eta u_0 \frac{R_0^2}{R_1^3}$

Utilisons l'équation (2.92) qui lie  $u_0$  au nombre de Reynolds, la contrainte pariétale  $\widehat{\tau}_{p0}$  devient :

$$\widehat{\tau}_{p0} = \frac{2\eta^2 R_0 R_e}{R_1^3 \rho} \quad (4.6)$$

Cette contrainte pariétale est liée directement à la variation parabolique de la vitesse des particules au point considéré, et par conséquent, sa valeur est minimale à la paroi. Contrairement à  $\widehat{\tau}_{p2}$  et à  $\widehat{\tau}_{p3}$  où la vitesse devrait être maximale au niveau du rétrécissement près de la paroi.

### III. Pertes de charges globales

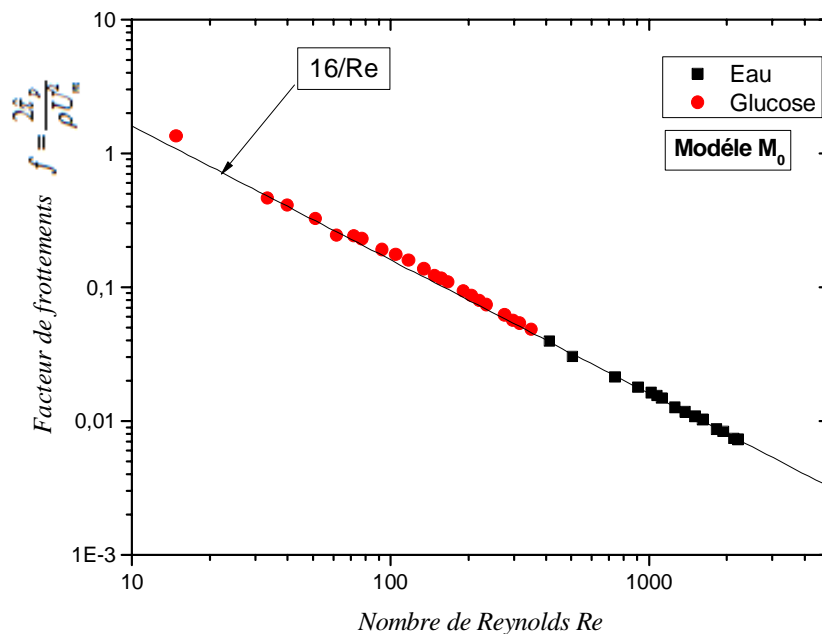
#### III.1. Conduites de sections uniformes

##### III.1.1. Facteur de frottements

Pour les conduites de sections uniformes, nous préférons exprimer les pertes de charge par le facteur de frottements  $f$  (facteur de Fanning). Il est donné par la relation (2.19).

$$f = \frac{2\hat{\tau}_p}{\rho U_m^2} = \frac{16}{Re} \quad (4.7)$$

La figure (4.29) représente l'évolution de ce facteur dans le régime laminaire en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides newtoniens utilisés : glucose et l'eau (voir tableau 4.2).



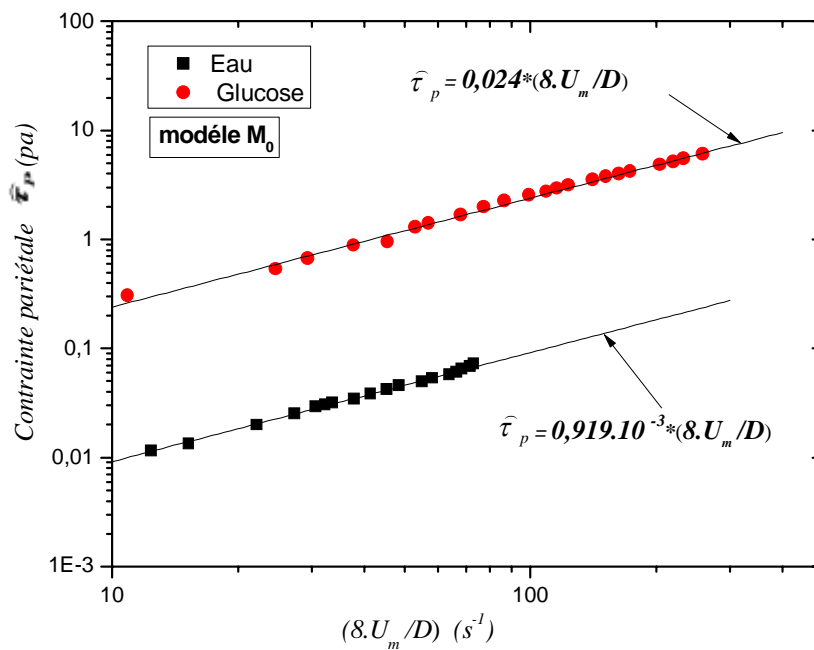
**Figure 4.29** : Evolution du facteur de frottements pour les deux fluides newtoniens

(Modèle  $M_0$ )

Le facteur de Fanning prend des valeurs plus importantes dans la solution du glucose que dans l'eau, ceci s'explique par la différence dans la valeur de viscosité qui caractérise les deux liquides. Car le fluide ayant la viscosité la plus grande (glucose) exerce sur la paroi une pression supérieure à celle exercée par un fluide moins visqueux (l'eau), d'où, le rapport entre la contrainte pariétale et la contrainte inertielle est plus important dans l'écoulement du glucose que dans l'eau. Les points expérimentaux sont en bon accord avec la courbe théorique issue de la formule (2.22) en échelle logarithmique.

Afin de remonter expérimentalement à la viscosité des deux fluides utilisés, nous allons tracer la courbe qui lie la contrainte de cisaillement pariétale  $\hat{\tau}_p$  au terme qui représente l'inertie du fluide  $(\frac{8U_m}{D})$  relation (2.16).

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_p}{\eta} = \frac{8U_m}{D} \quad (4.8)$$



**Figure 4.30 :** Evolution de la contrainte pariétale en fonction du taux de cisaillement moyen à la paroi pour les deux fluides newtoniens (Modèle  $M_0$ )

A partir du graphe de la figure (4.30), les pentes des deux droites indiquent les valeurs de la viscosité dynamique de chaque fluide. Ces valeurs sont comparées à celles données par la mesure directe du viscosimètre (voir tableau 4.3)

	Valeur expérimentale	Valeur donné par le viscosimètre
La viscosité dynamique de l'eau (m Pa.s)	0.919	1
La viscosité dynamique du glucose (m Pa.s)	24	22.5

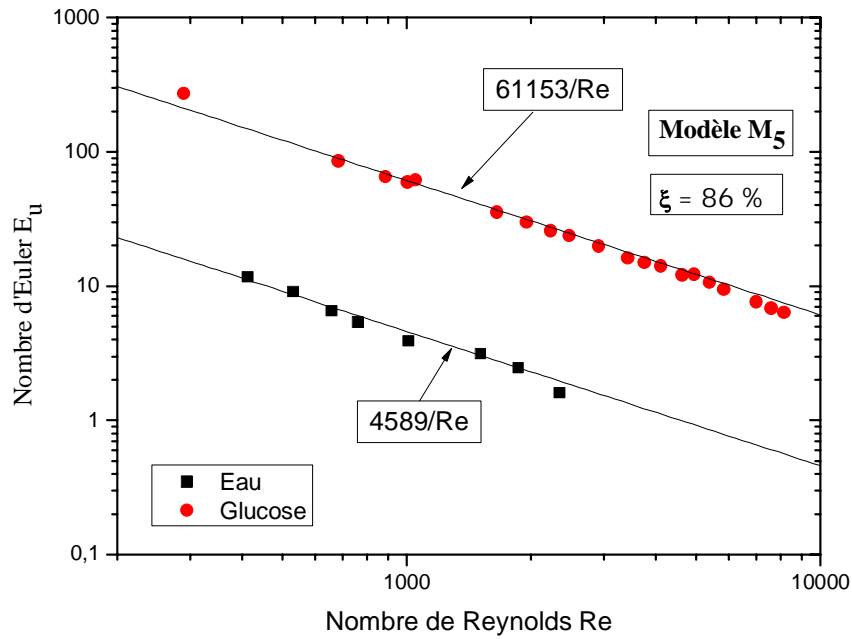
**Tableau.4.3 :** Valeurs obtenues des viscosités des fluides utilisés.

### III.2. Conduites sténosées

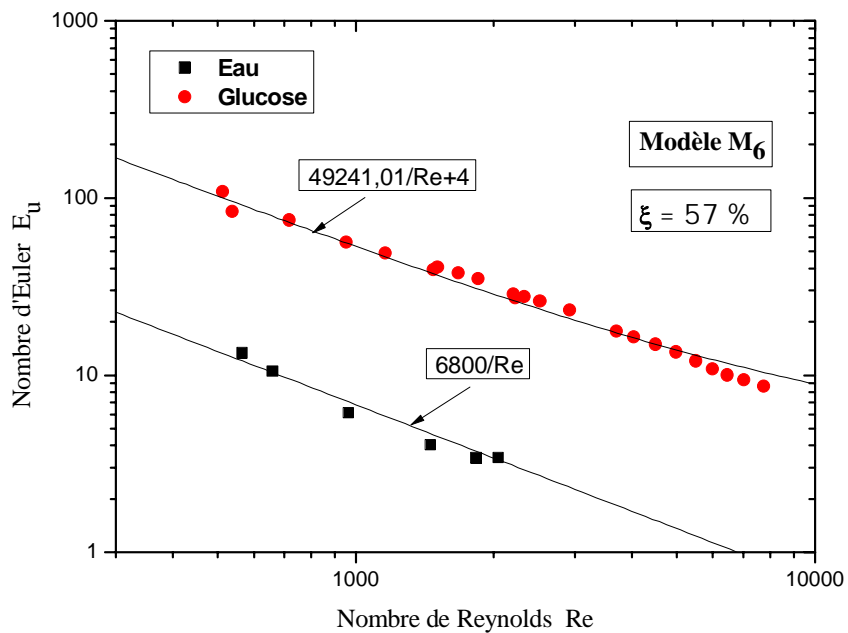
Pour les conduites non uniformes (sténosée), l'expression qui lie le facteur de frottements au nombre de Reynolds vus précédemment n'est pas valide en présence d'une singularité, cependant, un autre nombre est introduit, appelé nombre d'Euler, qui exprime le rapport entre la chute de pression et l'inertie du fluide pour un débit et donné par la relation (2.52).

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho U_m^2} = \frac{A}{Re} \quad (4.9)$$

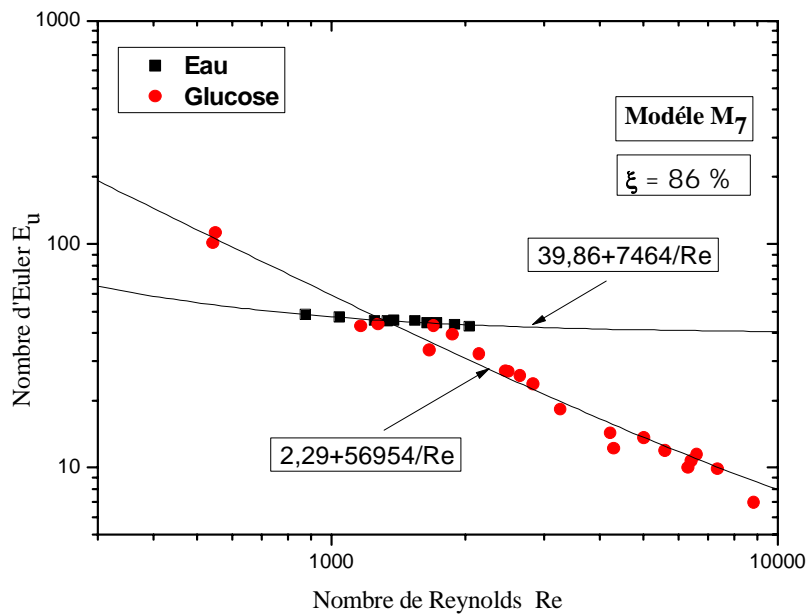
Nous avons tracé les courbes donnant le nombre d'Euler en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides tests. Les figures (4.31a), (4.31b) et (4.31c) sont relatives respectivement aux modèles  $M_5$ ,  $M_6$ , et  $M_7$ .



**Figure 4.31a :** Evolution du nombre d'Euler en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides tests (Modèle  $M_5$ )



**Figure 4.31b :** Evolution du nombre d'Euler en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides tests (Modèle  $M_6$ )



**Figure 4.31c** : Evolution du nombre d'Euler en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides tests (Modèle  $M_7$ )

La chute de pression totale  $\Delta P$  à travers les conduites est la somme des pertes dues aux effets visqueux (pertes de charges régulières) dominants, et aux pertes issues de la contraction de la section (pertes de charges singulières). Les corrélations des données expérimentales traduisent la relation (2.52) du chapitre 2.

Avec la conduite à forte contraction (Modèle  $M_7$ ), la perte de pression due à la turbulence prédomine, et les corrélations des données expérimentales traduisent cette fois-ci la relation (2.53), en particulier, les courbes relatives à l'eau, où l'écoulement est fortement turbulent à cause de sa faible viscosité.

## Conclusion

L'allure gaussienne est une meilleure approximation de la variation centrale théorique de la vitesse axiale issue du calcul analytique de Morgan et Young ; en bon accord avec les résultats expérimentaux. Le centre de la sténose n'est plus le lieu géométrique des particules ayant une vitesse maximale ; que ce soit dans le modèle géométrique sinusoïdal ou dans le modèle conique, Dans le modèle conique le point ayant la vitesse maximale est plus proche du centre que celui relatif à la forme sinusoïdale. La fonction qui décrit les deux formes géométriques intervient directement dans l'équation différentielle qui gouverne la vitesse. Par conséquent, la variation centrale est sensible à la dérivée de la forme géométrique  $dR/dz$ , en particulier, au voisinage du centre de la sténose.

La variation expérimentale de la vitesse montre qu'une zone de recirculation peut être développée juste en aval du centre, si les conditions physiques sont réunies (le diamètre, le degré de contraction, et le débit), notamment pour les grands nombres de Reynolds. Bien que la résolution numérique de l'équation différentielle pour la vitesse axiale ne tient pas compte de tous les effets physiques liés surtout aux phénomènes de recirculation, pour autant, l'importance des valeurs de la vitesse en aval du centre montre expérimentalement une zone de recirculation possible.

La contrainte de cisaillement pariétale calculée par la relation théorique de Young et Morgan (première méthode) est basée sur les résultats de la variation centrale de la vitesse, et sur l'hypothèse de la variation transversale. L'évolution de la contrainte le long de la sténose diffère d'une forme géométrique à l'autre ; qualitativement et quantitativement. Le cisaillement maximal à la paroi est beaucoup plus important dans la forme conique que dans la forme sinusoïdale. La contrainte du cisaillement pariétale maximale se produit au point situé juste en amont du centre, contrairement à la vitesse maximale. La contrainte pariétale dans la sténose conique connaît une chute brusque juste en aval du point où se produit le pic qui peut traduire un décollement de l'écoulement du fluide, contrairement au modèle sinusoïdal, où ces valeurs diminuent progressivement.

La zone de recirculation qui apparaît expérimentalement dans le modèle ( $M_1$ ) en aval du centre mène vers la séparation du fluide de la paroi, ce qui conduit physiquement à une chute brutale de la contrainte pariétale. L'effet de la zone de recirculation apparaît aussi dans les courbes théoriques où des faibles valeurs négatives de la contrainte pariétale ont été envisagées pour le même modèle.

La deuxième méthode employée pour déterminer la valeur de la contrainte du cisaillement pariétale dérive d'un schéma numérique itératif proposé par Jason. Ce schéma vient compléter les travaux analytiques de Thwaites et le principe de cette méthode diffère de celle de la première. Dans cette méthode, l'hypothèse de la variation transversale de la vitesse (profil aplati) concerne seulement le centre de la sténose. Le rayon fictif, pour lequel ce profil est aplati, est employé pour déterminer la variation centrale de la vitesse axiale, cette vitesse intervient directement dans l'expression de Thwaites pour la quantité de mouvement. Pour cela, la contrainte pariétale dépendra du gradient de la vitesse transversale et longitudinale, ainsi que du degré de contraction choisi pour les deux formes géométriques et pour chaque nombre de Reynolds. Cette méthode estime que le pic de la contrainte pariétale ne se produira pas toujours au centre de la sténose, et qu'il se situe juste en amont de son centre, ce qui est en accord avec les résultats de la première méthode.

Le nombre de Reynolds (qui est lié au débit) et le degré de contraction contrôlent les valeurs de la contrainte pariétale au voisinage du centre, ainsi que le profil de la vitesse et sa variation centrale.

La dernière partie de ce chapitre est une étude expérimentale consacrée à la perte de charge globale mesurée entre l'entrée et la sortie de la sténose. Ces mesures permettent de remonter à la relation qui lie le nombre d'Euler aux paramètres géométriques et physiques du problème, que ce soit pour le glucose (forte viscosité) ou pour l'eau (faible viscosité). Dans la conduite régulière, nous avons vérifié expérimentalement toutes les relations théoriques liées au facteur de frottement dans les différents cas de configuration géométrique. Cette partie nous a permis aussi de remonter à la contrainte de cisaillement pariétale de Poiseuille où le profil de vitesse est de type parabolique, ainsi qu'à la viscosité des deux fluides utilisés.

## Conclusion générale

La présente étude avait pour objectif de comprendre le comportement du fluide newtonien en écoulement stationnaire, en présence d'une sténose. Des modèles semi-empiriques, mathématiques et numériques ont été traités afin de remonter au profil de vitesse, à la contrainte de cisaillement pariétale, et aux pertes de charge.

La détermination de la variation de la vitesse axiale et les pertes de charges le long de la sténose s'est faite d'une manière expérimentale et théorique, tandis que l'évolution de la contrainte du cisaillement pariétale s'est faite d'une manière analytique et numérique.

Le départ de toutes les formules théoriques employées dans ce travail était les équations de Navier Stocks, pour cela, des solutions approchées. Des équations de la couche limite ont été traitées en utilisant des méthodes intégrales.

La technique expérimentale employée pour déterminer l'évolution de la vitesse axiale est la technique LDV (*Vélocimétrie laser à effet Doppler*) vu les avantages physiques qu'elle représente.

La solution des équations différentielle qu'apparaissent dans le problème est traitée par la méthode de Rang-Kuta 44 et le schéma numérique proposé pour la contrainte pariétale est développé sous Fortran.

Nous avons constaté lors de cette étude, et à travers la partie comparative, que le calcul de la contrainte de cisaillement pariétale revient essentiellement à connaître l'évolution de la vitesse axiale, ainsi que sa variation transversale.

Le profil de la vitesse axiale et les valeurs de la contrainte dépendent de la forme géométrique de la sténose, et plus exactement de la dérivée de la fonction qui décrit cette forme. Les deux formes géométriques choisies (conique et sinusoïdale) pour la sténose mènent vers un pic au voisinage du centre de la singularité, où le point situé juste en amont, et celui situé juste en aval, sont très affectés par ses paramètres géométriques et rhéologiques.

Nous avons aussi constaté à travers les résultats des deux méthodes choisies la puissance des relations théoriques proposées par Morgan et Thwaites à travers la qualité des courbes obtenues, car

ces dernières traduisent bien la réalité physique de l'évolution des caractéristiques dynamiques des écoulements.

Le calcul analytique de Morgan présente un avantage car il permet de remonter facilement aux variations transversales en chaque position appartient à la singularité, contrairement au modèle numérique issue de la méthode de Thwaites où l'hypothèse du profil aplati concerne seulement la position centrale de la sténose.

La différence enregistrée, dans les résultats des deux méthodes, est liée aux hypothèses et aux approximations de départ de chaque méthode, où les valeurs d'une méthode l'emportent sur l'autre.

Dans cette étude, l'inertie du fluide se traduit par le terme  $R^2U_c$ , par le nombre de Reynolds par le débit, et par la vitesse centrale au niveau de la sténose. Ces paramètres interviennent à chaque fois qu'on fait varier le degré de contraction et la forme géométrique de la sténose ainsi que la viscosité du fluide.

Le calcul des pertes de charges liées à la solution du glucose, permet de déterminer expérimentalement la valeur de viscosité du fluide utilisée, cette valeur est proche de celle donnée par la mesure directe du viscosimètre.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses, et elles concernent les caractéristiques rhéologiques du fluide, où l'évolution de la vitesse et de la contrainte pariétale pourraient se faire expérimentalement en fonction des paramètres hémodynamiques. L'étude peut être élargie pour la gamme de Reynolds qui se situe dans le régime turbulent. Les deux méthodes choisies peuvent être développées pour le régime instationnaire, notamment dans les écoulements pulsés, et en tenant compte du caractère non newtonien du sang et la nature élastique de la paroi artérielle.

# Références bibliographiques

- [1] P. Coussot and J.L. Grossiord: Comprendre la Rhéologie de la circulation du sang à la pris du béton, EDP Sciences, 2001.
- [2] S.Chein: Shear dependence of effective cell volume as a determinant of blood viscosity, *Science* 168, 977-979, 1970.
- [3] S.Chien,. Present state of blood rheology. In Messmeer K. Schmid- Schonbein eds, *Hemodilution: Theoretical basis and clinical applications*, Karger, Basel, 1-40, 1972.
- [4] T.M. Fischer and H.Schmid-Schonbein: Tank Tread Motion of red cell membranes in viscometric flow: behavior of intracellular and extracellular markers, *Blood cells* 3, 351-365, 1977.
- [5] P.Flaud and I.Rogova : *Hémodynamique du système artériel*, M .Jaffrin, Goubel F. eds. Masson, 179-218, 1998.
- [6] E.Fukada and M. Kaibara: Dynamic viscoelasticity of blood, *Monogr. Atheroscl*, 15, 170-180. 1990.
- [7] B.E. Morgan and D.F. Young: An Integral Method for the Analysis of Flow in Arterial Stenoses, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 36, 1974.
- [8] B.Thwaites:. Approximate calculation of the laminar boundary layer, *Aeronautical Quarterly* 1, 245-280, 1949.
- [9] M .Jason and S.David Thompson: Shear stress in arterial stenoses: a momentum integral model, *Journal of Biomechanics* 31, 1051-1057, 1998.
- [10] R .Bali and U.Awasthi: Effect of a magnetic field on the resistance to blood flow through stenotic artery, *Appl Math Comput*188, 1635–41, 2007.
- [11] S .Chakravarthy, A. Datta and PK.Mandal : Analysis of nonlinear blood flow in a stenosed flexible artery, *Int J Eng Sci* 33,1821–37, 1995.
- [12] P .Chaturani and R.Ponnalagar Samy: A study of non-Newtonian aspects of blood flow through stenosed arteries and its applications in arterial diseases, *Biorheology* 22,521–31. 1985.
- [13] DF .Young: Effects of time dependent stenosis on flow through a tube, *J Eng Ind Trans ASME* 90,248–54, 1968.
- [14] DF .Young and FY .Tsai: Flow characteristics in models of arterial stenosis in. Steady flow, *J Biomech*, 6,395–411, 1973.
- [15] JC. Mishra and S. Chakravarty: Flow in arteries in the presence of stenosis, *J Biomech*19, 18-907, 1986.
- [16] S. Chakravarty and A.Datta :Effects of stenosis on arterial rheology through a mathematical model, *Math Comp Model* 12, 12-1601, 1989.
- [17] S .Chakravarty and A.Datta :Dynamic response of stenotic blood flow in vivo, *Math Comp Model* 16,3–20. 1992.
- [18] S .Chakravarthy: Effects of stenosis on the flow behavior of blood in an artery. *Int J Eng Sci* 25: 16-1003 , 1987.
- [20] P .Houston, M.C.Dickson, V.Ludbrook, B. White, J.L. Schwachtgen, J.H.McVey, N.Mackman , J.M Reese, D.G .Gorman, 1999.
- [21] L.H.Back and D.W. Crawford : Wall shear stress estimates in coronaryConstrictions, *Journal of Biomechanical Engineering* 114,515-520, 1992.

- [22] V.Damodaran, G.W Rankin and C.Zhang,. Numerical study of steady laminar flow through tubes with multiple constrictions using curvilinear co-ordinates, *International Journal of Num, Meth, Fluids* 23, 1021-1041, 1996.
- [23] P.R Johnston and D.Kilpatrick; Mathematical modelling of flow through an irregular arterial stenosis, *Journal of Biomechanics* 24(11), 1069-1077. 1991.
- [24] H. Huang, V.J Mofi and B.R Seymour : Fluid mechanics of stenosed arteries, *International Journal of Engineering Science* 33(6), 815-828, 1995.
- [25] JC .Mishra, MK .Patra and SC Mishra: A non-Newtonian fluid model for blood flow through arteries under stenotic conditions, *J Biomech* 26, 41-1129-. 1993.
- [26] C .Tu and M.Deville: Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis.,*J .Biomech* 29,899–908. 1996.
- [27] S .Ookawara and K. Ogowa: Flow properties of Newtonian and non-Newtonian fluid downstream of stenosis, *J Chem Eng Jpn* 33, 90-582. 2000.
- [28] R.S. Rosenson, A.McCormick and E.F Uretz: Distribution of blood viscosity values and biochemical correlates in healthy adults, *Clinical Chemistry* 42(8), 1189-1195, 1996.
- [29] R .Skalak, N.Ozkaya and T.C Skalak :. *Biofluid mechanics*, *Annual Review of Fluid Mechanics* 21, 167-204. 1989.
- [30] P.L. Kapitsa ,*Collected Papers*, vol 3, Pergamon Press, Oxford, 1964 – 1967.
- [31] J. H. Forrester and D. F. Young :*Flow Through a Converging-Diverging Tube and Its Implications in Occlusive Vascular Disease* ,*J. Biomech* 3, 297-316,1970.
- [32] H .Schlichtling and K Gersten : *Boundary layers theory*, Springer Verlag, 6th edition, 1999.
- [33] F.M .White: *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Singapore, 1991.
- [34] N.Rott and L.F Crabtree: Simplified laminar boundary-layer calculations for bodies of revolution and for yawed wings, *Journal of Aeronautical Science* 19, 553-565, 1952.
- [35] R.D .Blevins: *Flow-induced vibration*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1986.
- [36] V.B. Sarin, and R.Mehrotra: Stenotic effects in a tube of elliptic cross-section at low Reynolds numbers, *International Journal of Biomedical Computing* 30, 137-146, 1992.