



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de: DOCTORAT D'ETAT

En: GENIE CIVIL

Spécialité : Structures

Par : IKHENAZEN Ghania

Thème :

**ANALYSE NUMERIQUE DE LA STABILITE DES
PLAQUES MINCES
NON-UNIFORMEMENT COMPRIMEES**

Soutenue publiquement le 22/12/2010, devant le jury composé de :

Mr. Mohammed CHABAAT	Professeur à l'USTHB	Président
Mr. Abdelkrim CHELGHOU	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mme Fettoum KHARCHI	Professeur à l'USTHB	Examinatrice
Mr. Mabrouk DJEDDI	Professeur à l'UBoumerdès	Examinateur
Mr. Messaoud SAIDANI	Professeur à l'UCoventry G.B)	Examinateur
Mr. Abdelkader NOUR	Professeur à l'UBoumerdès	Examinateur
Mr. Aomar KHALED	Maître Assistant/A à l'USTHB	Invité

À ma fille

*"Pour rejoindre Fort-National
Les chemins sont fort nombreux ;
On a beau choisir le sien :
Ce sont des chemins qui montent."*

Dicton kabyle

AVANT-PROPOS

*Les travaux qui ont abouti à la rédaction de cette thèse ont été menés sous la direction éclairée de **Mr Abdelkrim CHELGHOUM, Professeur à l'U.S.T.H.B.** Je tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance pour l'intérêt et l'attention qu'il a apportés à mes travaux, mais surtout pour les conseils et directives qu'il m'a donnés et la confiance qu'il a manifestée à mon égard durant l'élaboration de mes travaux.*

*J'exprime ma gratitude à **Mr Messsaoud SAIDANI, Professeur à l'Université de Coventry (Grande Bretagne),** pour l'intérêt scientifique qu'il a apporté à mes travaux, ainsi que pour les échanges que nous avons eus lors de nos divers contacts à ce sujet. Qu'il soit surtout remercié pour sa collaboration fructueuse.*

*Je remercie très sincèrement **Mr Mohamed CHABAAT, Professeur à l'U.S.T.H.B,** qui en cette période chargée de l'année et en dépit des nombreuses responsabilités qu'il assume, m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ma thèse.*

*Que **Mme Fettoum KHARCHI, Professeur à l'U.S.T.H.B,** **Mr Mabrouk DJEDDI, Professeur à l'Université de Boumerdès,** **Mr Messsaoud SAIDANI, Professeur à l'Université de Coventry (G.B),** **Mr Abdelkader NOUR, Professeur à l'Université de Boumerdès** soient vivement remerciés de leur disponibilité et ce malgré les nombreuses activités scientifiques qu'ils assument, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner et de juger ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à **Mr Aomar KHALED, Chargé de Cours à l'U.S.T.H.B,** pour avoir accepté de faire partie du jury en qualité d'invité.*

*Je remercie également les membres du **Laboratoire du Bâti dans l'Environnement (L.B.E)** pour les facilités qui m'ont été offertes ainsi que pour leur soutien.*

*Un grand merci à toute l'équipe, membres et agents d'administration, du **Conseil Scientifique de la Faculté de Génie Civil** et à celle du **Conseil Scientifique de Départements** pour toutes les actions et les efforts fournis dans la considération de ce travail.*

*Je pense également à tous les membres du **Service de la Scolarité de la Faculté de Génie Civil** qui par leur compréhension ont leur part dans l'avancement de mes travaux.*

*Je remercie enfin tous les membres de la **Faculté de Génie Civil** qui ont contribué de loin ou de près, ou par leur encouragement, leur soutien ou leur bonne humeur au bon déroulement de ce travail.*

*En particulier, je remercie très chaleureusement **Mr Nacer IHADOUDENE** et **Mr Rédouane ADMANE** pour les nombreuses discussions et suggestions scientifiques et aussi pour leur constant soutien moral et encouragements.*

ملخص

في هذا البحث المقدم تمت دراسة الأولوية المرنة لصفائح رقيقة السمك مرتكزة ببساطة و مضغوط عليها في اتجاه واحد بطريقة غير منتظمة. لهدف تلبية شروط الحدود بصفة صارمة اختار الباحث تطبيق طريقة العناصر المتناهية وتلك الطريقة تسمح تطبيق التوزيع الحقيقي لشحنة الغير المنتظمة على الصفائح. بني نموذج الصفائح بواسطة عنصر رقيق السمك ذو أربعة أضلع وثمانية عقد. كذلك تم البحث على أفضل نوع الشبكة الملائمة لمعالجة مسألة المطروحة وهذا بدراسة شبائك متعددة و مختلفة الأشكال.

نشر صيغ المسألة المطروحة و حلولها معروضة في هذا العمل المقدم. طبق تخفيض عدد المجاهل بتقييم عدد درجات الحرية التي يمكن التخلي عنها خلال حلول مسألة وهذا بدون خسارة في دقة النتيجة.

حصل على معامل الأولوية لمختلف حالات الشحن المطبقة على مجموعة صفائح تختلف من حيث نسبة أبعادها في المستوى. مثلت النتائج المحصل عليها على شكل منحنيات التي تعبر على تغيرات معامل الأولوية بنسبة إلى قيمة نسبة أبعاد الصفيحة وهذا لكل حالات الشحن معالجة. وبالتالي تمت مقارنة تلك النتائج مع نتائج المحصل عليها من طرف بحثين آخرين.

وأخيرا برهن أن حل مسألة أولوية الصفائح باستعمال التوزيع الحقيقي لشحنة وبتطبيق طريقة العناصر المتناهية يؤدي إلى نتائج متشابهة مع تلك النتائج المتحصل عليها بتطبيق طرق تحليلية مستعملا فيها التوزيع الحقيقي لشحنة.

RESUME

Dans la présente recherche, le flambement élastique des plaques minces simplement appuyées et non-uniformément comprimées dans une direction est étudié. Dans le but de satisfaire les conditions aux limites d'une manière rigoureuse, l'auteur a choisi l'application de la méthode des éléments finis permettant ainsi l'application d'une distribution réelle du chargement à travers la plaque. Celle-ci est modélisée au moyen d'un élément quadrilatéral mince comportant huit nœuds. Aussi, la recherche d'un type de maillage optimal adéquat au problème posé est effectuée à travers différentes formes de discrétisations.

La formulation ainsi que la résolution du problème posé sont présentées. Une réduction de variables est appliquée afin d'évaluer le nombre de degrés de liberté à éliminer dans la résolution du problème sans enregistrer une perte importante dans la précision de la solution cherchée.

Le coefficient de flambement est déterminé pour différents cas de chargements appliqués à une série de plaques différenciées par leurs rapports de dimensions en plan. Les résultats obtenus sont synthétisés sur des graphes représentant la variation du coefficient de flambement en fonction du rapport des dimensions des plaques pour chaque cas de chargement traité. Ces résultats sont ensuite comparés avec ceux des travaux effectués par d'autres chercheurs.

Enfin, il est montré que la résolution du problème de flambement des plaques, en utilisant une distribution réelle du chargement, au moyen de la méthode des éléments finis conduit à des résultats qui sont en bon accord avec ceux obtenus au moyen de méthodes analytiques, ce qui représente une avancée considérable dans la modélisation des phénomènes d'instabilité.

ABSTRACT

The present work investigates the problem of linear buckling of simply supported thin plates subjected to patch compression in one direction. In order to satisfy the boundary conditions in a rigorous way, the author chose the finite element method using the exact stress distribution throughout the plate. The plate modeling is made by means of a thin eight noded rectangular element. An optimal plate modeling suitable for the buckling analysis is investigated through different mesh discretisations.

The problem formulation and resolution are presented. A reduction of variable strategy is applied to estimate the number of degrees of freedom leading to little or no loss in seeking solution accuracy.

The buckling coefficient is determined for different load cases applied to a range of plate with various edge ratios. The achieved results are summarised through different graphs representing variation of the buckling coefficient against the plate ratio for each load case treated. A comparison with previous works is made.

Finally, it is shown that the resolution of the plate buckling problem using true stress distribution with the finite element method leads to a good agreement with results previously obtained by means of analytical methods using an exact stress distribution. This result represents a great achievement in the stability phenomena modeling.

TABLE DES MATIERES

	Page
Avant-propos	<i>i</i>
Résumé	<i>iii</i>
Notations	<i>x</i>
Table des figures	<i>xii</i>
Table des équations	<i>xv</i>
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	
1.1. Présentation de la Problématique	2
1.2. Présentation et Objectifs de la Présente Recherche	4
1.3. Présentation des Chapitres	5
CHAPITRE 2 : REVUE LITTERAIRE	
2.1. Introduction	7
2.2. Travaux Effectués au Moyen de la Résolution de l'équation Différentielle	
2.3. Travaux Effectués au Moyen des Méthodes Energétiques	9
2.3.1. Introduction	
2.3.2. Principe des Déplacements Virtuels	
2.3.3. Principe de Conservation d'Energie	12
2.3.3.1. Solution par Séries de Fourier	
2.3.3.2. Méthode de Rayleigh	13
2.3.3.3. Stabilité Elastique des Bandes Infinies Analysées par Hopkins	
2.3.4. Principe de l'Energie Potentiel Minimum	14
2.3.4.1. Solution Analytique	15
2.3.4.2. Méthode des Eléments Finis	16

2.4. Conclusion	17
-----------------	----

CHAPITRE 3 : THEORIE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES ET METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 Introduction	19
3.2. Théorie de la Flexion des Plaques Minces	
3.2.1. Hypothèses Fondamentales	
3.2.2. Relations Contraintes-Déformations	20
3.2.3. Equation Différentielle de la Surface Elastique	22
3.2.3.1. Equation Différentielle d'une Plaque sous l'Action d'une Charge Répartie Latéralement	
3.2.3.2. Equation Différentielle d'une Plaque Comprimée	23
3.2.4. Energie de Déformation et Travail des Forces Appliquées	26
3.2.4.1. Energie de Déformation d'une Plaque Fléchie sous l'Action d'une Charge Latérale	
3.2.4.2. Energie de Déformation d'une Plaque Fléchie sous l'Action Combinée d'une Compression et d'une Charge Latérale	27
3.3. Méthode des Eléments Finis	29
3.3.1. Présentation Générale	
3.3.2. Etapes de Résolution	30
3.4. Conclusion	34

CHAPITRE 4 : MODELISATION OPTIMALE D'UNE PLAQUE MINCE NON-UNIFORMEMENT COMPRIMEE

4.1. Introduction	36
4.2. Présentation du Logiciel Pafec-fe	
4.3. Précision sur les Résultats Obtenus par Eléments Finis	38
4.4. Expériences Numériques dans la Recherche d'un Maillage Optimal	

4.4.1.	Description de la Plaque Analysée	
4.4.2.	Description de la Géométrie des Maillages Adoptés	40
4.4.3.	Présentation et Interprétation des Résultats	42
4.4.3.1.	Champ de Déplacements	
4.4.3.2.	Champ de Contraintes	48
4.4.4.	Étude de la Convergence	57
4.5.	Conclusion	58

CHAPITRE 5 : ANALYSE DU PROBLEME DU FLAMBEMENT DES PLAQUES PAR ELEMENTS FINIS

5.1.	Introduction	60
5.2.	Approche Energétique du Problème	
5.2.1.	Energie Potentielle de Déformation	
5.2.2.	Travail Effectué par les Forces de Compression	61
5.2.3.	Energie Potentielle Totale	62
5.3.	Formulation et Résolution du Problème de Stabilité	
5.3.1.	Introduction	
5.3.2.	Formulation du Problème de Stabilité	
5.3.3.	Résolution du Problème de Stabilité	63
5.4.	Réduction du problème de stabilité	
5.4.1.	Introduction	
5.4.2.	Réduction du nombre de degrés de liberté	64
5.4.3.	Technique frontale	65
5.5.	Conclusion	66

CHAPITRE 6: RESULTATS ET DISCUSSIONS

6.1. Préambule	69
6.2. Expériences Numériques dans la Recherche des Nœuds Maîtres	70
6.3. Interprétation et Comparaison des Résultats pour les Cas de Chargement $0 < l/b \leq 1$	71
6.4. Interprétation et Comparaison des Résultats pour le Cas du Chargement $l/b=0$	74
6.5. Conclusion	77

CHAPITRE 7 : CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

7.1. Conclusion Générale	79
7.2. Perspectives de Recherche	80

ANNEXE	83
---------------	-----------

REREFENCES BIBLIOGRAPHIQUES	85
------------------------------------	-----------

NOTATIONS

A_{mn}	amplitude de la déformée de la plaque
a, b	dimensions en plan de la plaque avec b côté chargé
dx, dy, dz	longueurs élémentaires de la plaque dans la direction x, y, z respectivement
D	rigidité à la flexion de la plaque
D_{xy}	rigidité à la torsion de la plaque
$[D]$	matrice d'élasticité
E	module d'élasticité
f	facteur d'intensité de la force appliquée
h	épaisseur de la plaque
K	coefficient de flambement élastique
l	distance sur laquelle s'étend le chargement de la plaque
M_x, M_y	moments fléchissants
M_{xy}	moment de torsion
$\{M\}$	vecteur contenant M_x, M_y et M_{xy}
m, n	entiers positifs représentant le nombre de demi-ondes dans la direction x et y respectivement
N_x, N_y, N_{xy}	forces appliquées agissant dans le plan moyen de la plaque
N_{xcr}	charge minimale critique de flambement
$[N]$	matrice des forces appliquées dans le plan moyen de la plaque
P	force ponctuelle appliquée dans le plan moyen xy de la plaque
Q_x	effort tranchant perpendiculaire à x dans le plan yz
Q_y	effort tranchant perpendiculaire à y dans le plan xz
q	charge latérale appliquée dans la direction z
$[S_e]$	matrice de rigidité flexionnelle d'un l'élément
$[S]$	matrice de rigidité flexionnelle de la plaque
$[S'_e]$	matrice de rigidité géométrique d'un l'élément
$[S']$	matrice de rigidité géométrique de la plaque
$[S'']$	matrice de rigidité géométrique de la plaque correspondant à une force appliquée unitaire
$[S_m]$	matrice de rigidité flexionnelle effective du système après réduction
$[S''_m]$	matrice de rigidité géométrique unitaire effective du système après réduction
U_e	énergie de déformation de l'élément
U	énergie de déformation de la plaque
$U_{e\ total}$	énergie potentielle totale de l'élément
U_{total}	énergie potentielle totale de la plaque
u_x, u_y, u_z	translations dans les directions x, y et z respectivement

$\{u_e\}$	vecteur déplacements généralisés ou degrés de liberté de l'élément
$\{u\}$	vecteur déplacements généralisés ou degrés de liberté de l'ensemble de la plaque
$\{u_m\}$	vecteur degrés de liberté maîtres de la plaque
$\{u_r\}$	vecteur degrés de liberté esclaves de la plaque
W_e	travail des forces appliquées relatif à un élément
W	travail des forces appliquées relatif à l'ensemble de la plaque
(x,y,z)	repère global avec les axes x et y encadrant la plaque, z dirigé vers le bas
α_i	coefficients arbitraires i
$\{\alpha\}$	vecteur contenant les coefficients arbitraires α_i
$\{\delta\}_e$	vecteur contenant les déplacements nodaux d'un élément
$\{\delta\}$	vecteur contenant les déplacements nodaux de l'ensemble de la plaque
δA	déplacement virtuel
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$	déformations dans la direction x , y et dans le plan xy respectivement
$\{\varepsilon\}$	vecteur des déformations
Φ	rapport des deux dimensions en plan de la plaque ($\Phi=a/b$)
ν	coefficient de Poisson
ρ_x, ρ_y	Rayons de courbures de la surface neutre de la plaque dans les sections parallèles aux plans xz et yz respectivement
σ_x, σ_y	contraintes normales dans la direction x et y respectivement
τ_{xy}, τ_{yx}	contraintes de cisaillement du plan moyen perpendiculaire à x et à y respectivement
$\{\sigma\}$	vecteur des contraintes
$[\sigma]$	matrice des contraintes
∂	dérivée partielle

TABLE DES FIGURES

		Pag e
Figure (1.1) :	plaque mince non-uniformément comprimée	4
Figure (1.2) :	plaque mince comprimée par deux forces concentrées	4
Figure (3.1) :	volume élémentaire d'une plaque mince de dimensions dx , dy et h	20
Figure 3.2) :	angle formé par l'axe x et la tangente au plan moyen de la plaque	21
Figure (3.3) :	volume élémentaire d'une plaque mince sous l'action des forces N_x et N_y , N_{yx} et N_{xy} agissant sur son plan moyen	21
Figure (3.4) :	volume élémentaire d'une plaque mince sous l'action d'une charge q répartie latéralement	24
Figure (3.5) :	forces agissant dans le plan xz et xy d'une plaque mince sous l'action des forces N_x et N_y , N_{yx} et N_{xy} agissant sur son plan moyen	25
Figure (3.6):	maillage représentant la plaque étudiée	30
Figure (3.7):	élément quadrilatéral à 4 nœuds	31
Figure (4.0) :	organigramme général des étapes fondamentales de calculs du logiciel Pafec-fe (Program for Automatic Finite Element Calculations)	37
Figure (4.1) :	plaque non-uniformément comprimée avec $a/b=0.1$ et $l/b=0.8$	39
Figure (4.2) :	élément isoparamétrique quadrilatéral comportant 8 nœuds	39
Figure (4.3) :	un quart de la plaque non-uniformément comprimée avec $a/b=0.1$ et $l/b=0.8$	39
Figure (4.4) :	maillages de type A	40
Figure (4.5) :	maillage de type B comportant 132 éléments et 890 degrés de liberté	41
Figure (4.6) :	maillages de type C	41
Figure (4.7) :	maillages de type D	42

Figure (4.8a) :	déplacements dans la direction x au point P_1	43
Figure (4.8b) :	déplacements dans la direction y au point P_1	43
Figure (4.9a) :	déplacements dans la direction x au point P_2	44
Figure (4.9b) :	déplacements dans la direction y au point P_2	44
Figure (4.10a) :	déplacements dans la direction x au point P_3	45
Figure (4.10b) :	déplacements dans la direction y au point P_3	45
Figure (4.11a) :	déplacements dans la direction x au point P_4	46
Figure (4.11b) :	déplacements dans la direction y au point P_4	46
Figure (4.12a):	isobares relatives au maillage de type A comportant 40 éléments et 284 degrés de liberté	49
Figure (4.12b):	isobares relatives au maillage de type A comportant 160 éléments et 1 048 degrés de liberté	49
Figure (4.12c):	isobares relatives au maillage de type A comportant 640 éléments et 4 016 degrés de liberté	50
Figure (4.13) :	isobares relatives au maillage du type B comportant 132 éléments et 890 degrés de liberté	51
Figure (4.14a):	isobares relatives au maillage de type C comportant 66 éléments et 446 degrés de liberté	52
Figure (4.14b):	isobares relatives au maillage de type C comportant 130 éléments et 842 degrés de liberté	52
Figure (4.14c) :	isobares relatives au maillage de type C comportant 168 éléments et 1 076 degrés de liberté	53
Figure (4.15a):	isobares relatives au maillage de type D comportant 68 éléments et 460 degrés de liberté	54
Figure (4.15b):	isobares relatives au maillage de type D comportant 111 éléments et 726 degrés de liberté	54
Figure (4.15c) :	isobares relatives au maillage de type D comportant 120 éléments et 774 degrés de liberté	55
Figure (4.15d) :	isobares relatives au maillage de type D comportant 147 éléments et 954 degrés de liberté	55
Figure (4.15e) :	isobares relatives au maillage de type D comportant 148 éléments	56

et 960 degrés de liberté

Figure (4.15f):	isobares relatives au maillage de type D comportant 192 éléments et 1 224 degrés de liberté	56
Figure (5.1):	élément isoparamétrique quadrilatéral à 8 nœuds	60
Figure (6.1) :	variation de K en fonction de a/b pour $l/b=1 ; 0.8 ; 0.6 ; 0.4$	72
Figure (6.2):	variation de K en fonction de a/b pour $l/b=0.2$ et 0.1	72
Figure (6.3):	variation de K_1 (ou K_2) en fonction de a/b pour $l/b=0$	75
Figure (6.4):	variation de K_1 en fonction de a/b pour $l/b=0$	75
Figure (7.1) :	Plaques minces sous l'action de différents types de chargements appliqués dans son plan moyen	81

TABLEAUX

		Page
Tableau 4.1:	Déplacements u_x et u_y obtenus à partir du maillage B	47
Tableau 4.2:	Contraintes maximales obtenues à partir des maillages A, B, C et D	57
Tableau 6.1:	Coefficient de flambement minimal K pour une plaque uniformément comprimée avec un rapport $a/b=5$	70
Tableau 6.2:	Valeurs de K relatives au problème représenté sur la figure (1.1). Comparaison des résultats obtenus à partir de l'utilisation de la distribution exacte du chargement (Pavlovic-Baker et le présent travail) avec une distribution approchée (Yamaki).	74
Tableau 6.3:	Valeurs de K relatives au problème représenté sur la figure (1.2). Comparaison des résultats obtenus à partir de l'utilisation de la distribution exacte du chargement (Pavlovic-Baker et le présent travail) avec deux distributions approchées (Legget et Timoshenko).	71

TABLE DES EQUATIONS

titre de l'équation		Page
équation différentielle d'une plaque chargée dans son plan moyen ainsi que latéralement	(2.1)	7
équation différentielle d'une plaque chargée dans son plan moyen dans la direction x	(2.2)	8
coefficient de flambement en fonction du rapport $a/b = \Phi$	(2.7)	8
force critique de flambement	(2.8)	8
principe des déplacements virtuels	(2.9)	10
principe de conservation d'énergie	(2.23)	12
énergie totale de la plaque	(2.30)	14
principe de l'énergie potentielle minimum	(2.32)	14
relations liant les contraintes normales aux déformations	(3.1)	20
déformations dans la direction x et y	(3.2)	21
contraintes normales à la distance z de la surface neutre de la plaque	(3.3)	22
moments fléchissants par rapport à x	(3.4)	22
moments fléchissants par rapport à y	(3.5)	22
moment de torsion	(3.6)	22
équation de Lagrange	(3.9)	23
équation différentielle d'une plaque chargée dans son plan moyen ainsi que latéralement	(3.12)	26
équation différentielle d'une plaque chargée dans son plan moyen	(3.13)	26
équation différentielle d'une plaque chargée dans son plan moyen dans la direction x seulement	(3.14)	26
énergie de déformation de la plaque première forme	(3.20)	27

énergie de déformation de la plaque deuxième forme	(3.20b)	27
vecteur déplacement nodal de l'élément	(3.34)	31
vecteur déformation	(3.36)	31
énergie de déformation de l'élément	(3.43)	32
travail effectué par les forces extérieures de l'élément	(3.49)	33
énergie potentielle totale de la plaque	(3.52)	33
équation donnant la valeur de la charge critique	(3.53)	33
<hr/>		
relation liant le vecteur contraintes au vecteur déformations	(5.1)	60
matrice d'élasticité de l'élément	(5.2)	61
énergie de déformation de l'élément	(5.4)	61
tenseur des contraintes	(5.5)	61
travail des forces appliquées	(5.8)	61
énergie potentielle totale de l'élément	(5.9)	62
énergie potentielle totale de la plaque	(5.12)	62
minimisation de l'énergie potentielle totale de l'élément	(5.13)	62
minimisation de l'énergie potentielle totale de la plaque	(5.16)	63
équation ayant pour solutions les valeurs de la charge qui provoque le flambement	(5.18)	63
vecteur déplacement généralisé partitionné	(5.19)	64
minimisation de l'énergie potentielle totale de la plaque sous la forme partitionnée	(5.20)	64
minimisation de l'énergie potentielle totale de la plaque après réduction de variables	(5.27)	64

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Présentation de la Problématique

Les plaques ainsi que les coques minces sont de nos jours des éléments structuraux qui sont de plus en plus présents dans les ouvrages d'art ainsi que dans les ouvrages spéciaux de génie civil à travers le monde et notamment en Algérie. Leurs qualités intrinsèques (légèreté, résistance et esthétique) permettent de les classer parmi les éléments de premier choix dans la constitution de ces structures. Ces éléments structuraux sont utilisés notamment sous la forme de tablier de ponts et de viaducs, d'enveloppe de piles de ponts, de silos ainsi que sous la forme de conteneur de fluides. Ils sont susceptibles de subir un flambement sous l'effet d'actions extérieures d'origine diverses de type statique tel que la température ou bien dynamique [1] tel que la charge sismique pour laquelle l'effet de site sur la structure est prépondérant [2].

Bien que l'étude de la résistance réelle des plaques nécessite l'analyse du flambement dans le domaine plastique, l'évaluation de la charge de flambement élastique demeure physiquement importante. En effet, le changement de configuration de la structure dans le domaine élastique représente une étape critique dans laquelle la perte de la stabilité peut engendrer un endommagement irréversible conduisant éventuellement à l'effondrement total de la structure. La charge critique de flambement élastique est un facteur important dans la conception des structures non seulement de génie civil mais également de mécanique et d'aéronautique.

Dans la présente recherche le flambement linéaire des plaques minces de forme rectangulaire sollicitées par une compression uniaxiale statique non-uniforme est étudié.

A partir du moment où les processus de constructions modernes nécessitent l'application de niveaux de sécurité élevés, plusieurs études ont été menés durant ces dernières décennies dans le but de contrôler le phénomène de flambement élastique dû à des sollicitations variées telles que : le cisaillement [3], la tension [7,8] ainsi que la compression [3-6]. Certains de ces travaux ont été synthétisés et résumés par George Gerard et Hebert Becker [9].

Cependant, un nombre limité d'études a été mené pour évaluer l'influence du chargement partiel sur la valeur de la charge critique de flambement dans les plaques comprimées et ce malgré la confrontation récurrente des concepteurs avec cette question. Un tel problème existe au niveau des plateformes pétrolières (construction offshore) où l'effet de la houle peut être assimilé à un chargement partiel. Ce phénomène apparaît aussi au niveau de la coque d'un avion où l'action de la résistance de l'air développe sur l'aile de celui-ci un chargement axial générant une compression non-uniforme qui peut conduire à une perte de stabilité. Egalement, le réchauffement aérodynamique des panneaux des avions supersoniques peut être modélisé par des actions thermiques non-uniformes car la répartition de la température est variable sur l'étendue de la plaque. Aussi, dans les structures de génie civil, les ingénieurs sont souvent confrontés à des projets dans lesquels interviennent des chargements partiels de pourtour d'éléments structuraux tel que l'action des roues pesantes sur l'âme d'une poutre de roulement susceptible de provoquer son flambement.

En outre, même lorsque la problématique de la compression partielle a été abordée, la question de l'influence de l'application de la distribution exacte du chargement à travers l'élément structural n'a pas reçu une attention suffisante et reste encore posée.

De loin, l'approximation la plus largement utilisée est celle qui a été proposée en premier par Sommerfeld [10] qui a supposé que l'effet de la charge partielle ne se diffusait pas et que son intensité était la même dans chaque section de l'élément. Cependant, certains auteurs [13,14,15] ont découvert que si une telle approche pouvait donner des résultats raisonnables pour des plaques de forme carrée, l'erreur dans l'évaluation de la charge de flambement peut devenir inacceptablement élevée pour des plaques de forme rectangulaire. Dans certains cas de chargement partiel, la valeur d'une telle erreur peut atteindre plusieurs centaines de pourcentages (en sous-estimation).

Le cas de la compression ponctuelle a été étudié, sur la base de l'hypothèse citée plus haut, d'abord par Sommerfeld [10] et plus tard par Timoshenko [16]. Le premier a proposé une solution de l'équation différentielle dont il admettait, dans un article qu'il a publié plus tard, que celle-ci était sujette à une erreur considérable, alors que le second a construit une solution au moyen d'une méthode bien connue qui est la méthode de l'énergie de déformation. Dans le traitement de plusieurs problèmes, cette dernière méthode a donné des résultats très proches de ceux obtenus d'une manière plus rigoureuse, mais dans le cas particulier du chargement ponctuel il semble que l'erreur est due à l'hypothèse stipulant que les contraintes existent seulement le long de la ligne d'action des forces ponctuelles appliquées. Par la suite Legget [13] a publié un article dans lequel il traite l'effet de cette sollicitation particulière sur une plaque infiniment longue. Cet auteur a obtenu au moyen d'une résolution analytique de l'équation différentielle une solution relativement précise qu'il a comparée avec celle obtenue par Timoshenko produisant ainsi une base d'estimation de l'erreur par rapport aux résultats atteints à partir de la méthode de l'énergie de déformation.

D'autres auteurs tels que [11,12,17] ont également utilisé dans la recherche de ce problème des formes simplifiées du chargement conduisant à des erreurs importantes dans les résultats.

Plus tard, la publication de travaux dans lesquels une distribution réelle du chargement a été appliquée a permis l'enregistrement de résultats relativement fiables. En effet, Pavlovic et Baker [18] ont utilisé une méthode analytique afin d'analyser le flambement des plaques minces, Rockey [19] a utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le flambement des plaques raidies, et Stephen et Steven [20] ont travaillé sur l'estimation de l'erreur obtenue au moyen d'un calcul numérique utilisant un élément fini modélisant le flambement de la plaque.

Il est important de remarquer que comme la compression partielle est une sollicitation courante et que celle-ci engendre souvent le phénomène de flambement, des investigations supplémentaires plus approfondies devraient être menées ceci afin de fournir des résultats qui vont aider à améliorer la conception des structures comportant des plaques rectangulaires minces subissant cette forme de sollicitation.

Si un tel problème a jusqu'à présent reçu relativement peu d'attention de la part des chercheurs, la raison est sans aucun doute due aux difficultés théoriques additionnelles impliquées pour l'obtention d'une solution rigoureuse au flambement des plaques lorsque celles-ci sont sollicitées par une compression partielle.

Indéniablement, la solution de ce problème de stabilité est mathématiquement difficile à obtenir car la distribution des contraintes à travers la plaque varie d'une manière considérable. Cependant, au moyen de la méthode des éléments finis, il est possible de traiter ce type de contrainte impliqué dans la modélisation du chargement partiel.

1.2. Présentation et Objectifs de la Présente Recherche

Dans la présente recherche, le flambement élastique des plaques minces non-uniformément comprimées statiquement dans une direction (voir figs.(1.1) et (1.2)) est étudié en utilisant la méthode des éléments finis. Cette analyse numérique, effectuée au moyen du logiciel Pafec-fe [21] qui sera présenté au paragraphe (4.2.), permet de prêter une attention particulière à la distribution réelle du chargement.

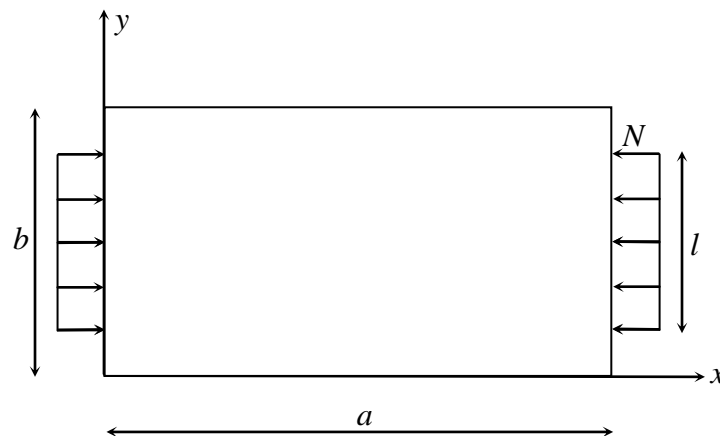


Figure (1.1) : Plaque mince non-uniformément

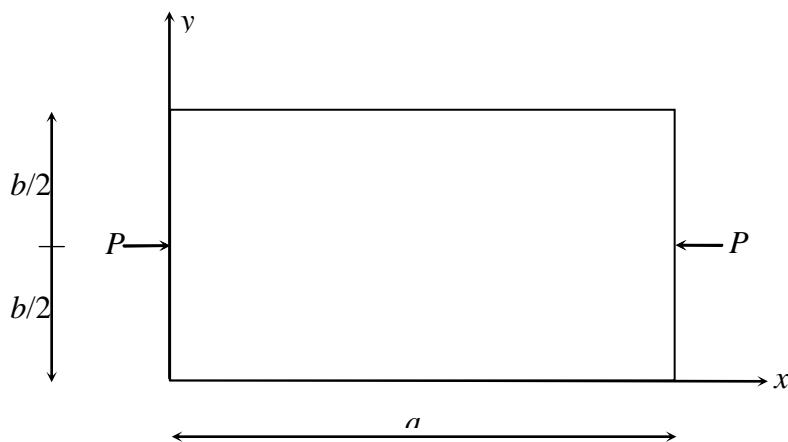


Figure (1.2) : Plaque mince comprimée par deux forces

Les objectifs principaux de la présente investigation est de présenter des valeurs représentatives du coefficient de flambement élastique de plusieurs séries de plaques minces simplement appuyées qui se différencient par le rapport de leurs dimensions ainsi que par l'étendue de leurs chargements de compression. Par cette action, une base de données sera constituée. Celle-ci pourra être utilisée lors de la conception des structures comportant ce type d'élément structural et pourra également être introduite dans les codes de sécurité inhérents à la stabilité des plaques minces partiellement comprimées.

A cet effet, une recherche bibliographique riche en travaux effectués dans le domaine de la problématique est menée. La stabilité des plaques étant indissociable de sa flexion, la théorie de la flexion des plaques est brièvement présentée suivie de méthode des éléments finis, méthode utilisée dans le présent travail.

La recherche d'une modélisation optimale spécifique au problème posé est menée à travers une série de maillages différemment subdivisés. L'influence de paramètres importants de la plaque sur le coefficient de flambement critique est recherchée. Ces paramètres sont notamment le rapport des dimensions en plan de la plaque et le rapport de la distance sur laquelle s'étend le chargement sur le côté chargé.

Afin d'apporter plus d'efficacité dans les calculs, une technique de réduction de variables est appliquée. Celle-ci consiste à évaluer le nombre de degrés de liberté à éliminer dans la résolution du problème sans pour autant enregistrer une perte importante dans la précision de la solution cherchée voir même affecter totalement cette dernière.

Les résultats numériques obtenus sont synthétisés sur des graphes représentant la variation du coefficient de flambement en fonction de paramètres judicieusement choisis. Ces résultats sont ensuite comparés avec ceux de travaux antérieurs. Enfin, des conclusions intéressantes sont dressées.

1.3. Présentation des Chapitres

La problématique exposée ci-dessus a été traitée et rédigée dans la présente thèse à travers sept chapitres. Une revue littéraire relative aux travaux effectués dans le domaine du problème posé, illustrée par les différentes méthodes de résolution utilisées par divers chercheurs, est exposée dans le *chapitre 2*. Dans le *chapitre 3* la théorie de la flexion des plaques ainsi que la méthode des éléments finis sont présentées. Dans le *chapitre 4* un maillage optimal adéquat au problème posé est recherché à travers une étude de convergence. La formulation ainsi que la résolution du problème de flambement des plaques minces sollicitées par une compression uniaxiale sont présentées dans le *chapitre 5*. Le *chapitre 6* renferme les résultats des expériences numériques menées lors des présentes investigations. Enfin, une conclusion générale est dressée ainsi que des perspectives de recherche sont proposées dans le *chapitre 7*.

CHAPITRE 2

REVUE LITTERAIRE

2.1. Introduction

Le problème de flambement des plaques minces (voir figs.(1.1) et (1.2)) est communément résolu au moyen de deux méthodes principales différentes. La première utilise les équations d'équilibre statique de la plaque conduisant à l'établissement et la résolution de l'équation différentielle qui régit le comportement de l'élément structural et la seconde son énergie de déformation. Ces deux techniques peuvent conduire à une solution 'exacte' à condition que la fonction d'approximation de la déformée u_z du plan moyen de la plaque soit convenablement choisie.

Le présent chapitre a pour but de présenter l'historique du développement des solutions obtenues à partir de l'équation différentielle qui caractérise le flambement des plaques ainsi que celles trouvées au moyen d'une approche énergétique. L'intérêt est porté sur les plaques uniformément et partiellement comprimées. Le cas de la plaque soumise à une compression due à deux forces concentrées opposées est également considéré. Il est bien entendu que toutes les sollicitations extérieures sont appliquées au niveau du plan moyen de la plaque.

2.2. Travaux Effectués au Moyen de la Résolution de l'équation Différentielle

L'équation différentielle qui régit le comportement d'une plaque sollicitée par un chargement latéral q a été développée d'abord par Bernoulli en 1789. Cependant, cet auteur n'a pas tenu compte de l'effet de torsion qui assure la continuité des différentes bandes constituant fictivement la plaque. Plus tard, en 1811 et 1820 Lagrange et Navier respectivement, ont introduit ce terme manquant et ont de ce fait posé le problème d'une manière rigoureuse donnant ainsi à l'équation différentielle sa forme définitive. La complexité du comportement des plaques a fait qu'il a fallu attendre la fin du 19^{ème} siècle pour que d'autres auteurs puissent généraliser encore plus cette équation. En effet, celle-ci a été grâce à Saint Venant en 1883, enrichie par l'étude de l'effet du chargement appliqué dans le plan moyen de la plaque. Ce nouvel apport a permis des avancées considérables dans la conception des structures présentant ce type d'élément structural.

Afin d'évaluer l'intensité des forces appliquées dans le plan moyen d'une plaque pour laquelle la forme plane d'équilibre devient instable et le flambement commence à se produire, on peut procéder par l'intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

établie par Saint Venant en 1883 et qui sera développée en détail dans le prochain chapitre (équation (3.12)). Le cas le plus simple à étudier est celui où les forces appliquées dans le plan moyen sont constantes sur tout le pourtour de la plaque et où la valeur du chargement latéral q est nulle. En résolvant cette équation pour des conditions données au contour, on trouve que le flambement présumé n'est possible que pour certaines valeurs définies de N_x , N_y et N_{xy} . La plus faible de ces valeurs détermine la valeur critique cherchée.

La résolution de l'équation (2.1) par l'auteur [4] dans le cas d'une plaque simplement appuyée le long de son pourtour et comprimée dans la direction x par N_x , prend dans ce cas la forme suivante:

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.2)$$

Cette équation sera développée en détail dans le prochain chapitre (voir équation (3.14)). Celle-ci fait intervenir les étapes suivantes :

i) On suppose que la plaque subit un flambement en m demi-ondes dans la direction de la compression x et en une seule demi-onde dans la direction y . La solution peut être exprimée sous la forme :

$$u_z = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.3)$$

où m est un entier positif qui peut être pair ou impair. u_z est alors substitué dans l'équation (2.2).

ii) On résout l'équation différentielle du quatrième ordre ainsi développée dont la solution est de la forme :

$$f(y) = A_1 \cosh(\alpha y) + A_2 \sinh(\alpha y) + A_3 \cos(\beta y) + A_4 \sin(\beta y) \quad (2.4)$$

où A_i $i=1, 4$ sont des constantes d'intégration et α et β sont déterminés de la manière suivante :

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\left(\frac{N_x}{D} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\left(\frac{N_x}{D} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)}} \quad (2.5)$$

iii) On utilise les conditions données au contour pour constituer un système de quatre équations linéaires. Dans le cas de la plaque simplement appuyée sur son pourtour, u_z ainsi que le moment de flexion sont nuls.

iv) On résout le système d'équations. Une solution non-triviale correspond à un déterminant nul.

v) On développe le déterminant pour obtenir l'équation caractéristique qui définit la stabilité de la plaque.

vi) On calcule les racines de l'équation caractéristique exprimées en fonction des quantités [4] :

$$K = N_x \frac{b^2}{\pi^2 D} \quad (2.6)$$

ou encore dans le cas particulier où $m=1$, K prend la forme suivante :

$$K = \frac{1}{\Phi^2} + \Phi^2 + 2 \quad (2.7)$$

K est appelé coefficient de flambement de la plaque, sa valeur dépend du rapport $\Phi=a/b$. On peut constater d'après l'expression (2.7) que la fonction K passe par un minimum de valeur 4 lorsque $\Phi = 1$ ce qui signifie que pour une plaque de largeur donnée, la valeur critique de la charge est minimale pour la plaque lorsque celle-ci prend la forme carrée.

vii) On évalue la force critique pour un rapport donné Φ à partir de l'équation :

$$N_{xcr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^3}{b^2} = K \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (2.8)$$

L'auteur Yamaki [12] (dans son deuxième rapport) a utilisé la méthode d'intégration de l'équation différentielle dans la recherche du problème de flambement des plaques rectangulaires simplement appuyées soumises à une

compression uniaxiale non-uniforme. Dans le but de faciliter le traitement mathématique, ce dernier a supposé que seule la surface limitée par le chargement extérieur et les deux lignes parallèles passant par les points où le chargement s'arrête est uniformément comprimée (les autres régions n'étant pas affectées par la sollicitation). Cette manière d'approcher le problème a été en premier utilisée par Sommerfeld [10]. D'abord, les équations fondamentales ont été développées et la valeur critique a été obtenue à partir de l'équation caractéristique. Une solution approximative au problème de flambement a été obtenue au moyen de cette simplification. Yamaki [11] (dans un premier rapport) a également traité le même problème en utilisant la méthode énergétique, méthode qui sera présentée dans le prochain paragraphe et développée dans le chapitre 3, il a conclu que celle-ci garantissait une précision de quatre chiffres avec l'application de trois à quatre termes seulement dans la série d'approximation et qu'enfin les résultats moyennant les deux méthodes étaient en bon accord l'une par rapport à l'autre.

Le problème de la stabilité des longues plaques rectangulaires simplement appuyées comprimées par deux forces concentrées égales et de sens opposés appliquées au milieu des longueurs de la plaque a été également étudié par Leggett [13] (voir fig.(1.2)). Dans son étude, à travers la résolution de l'équation différentielle régissant le flambement de la plaque, Legget a montré que l'hypothèse qui consiste à considérer que les contraintes de compression sont entièrement concentrées sur la ligne d'action commune des deux forces appliquées conduit à une sous estimation considérable de la valeur réelle de la force critique. Dans son analyse à la stabilité, Legget a recherché l'amélioration de la précision des résultats. Cet auteur a utilisé la solution bien connue du problème élastique dans lequel les forces appliquées sont exprimées sous la forme de séries de Fourier (dans la direction des forces appliquées). Cette solution relativement simple est discutée en détail par Timoshenko et Goodier [32]. Cependant, c'est seulement pour des plaques très longues que la solution proposée par Legget va se rapprocher étroitement de la solution cherchée. Par conséquent, il est clair que la méthode proposée par cet auteur est applicable seulement dans l'étude de la stabilité des plaques longues dont le rapport des dimensions $a/b < 0.3$ [18].

2.3. Travaux Effectués au Moyen des Méthodes Energétiques

2.3.1. Introduction

La principale application de la méthode énergétique dans la résolution du problème de flambement élastique est l'évaluation approchée de la charge critique dans le cas où une solution rigoureuse de l'équation différentielle (2.2), qui sera développée dans le prochain chapitre, est soit inconnue soit trop compliquée. Dans la recherche de la charge critique de la plaque sollicitée par des forces agissant dans son plan moyen et soumise à des conditions données au contour des solutions énergétiques variées peuvent être utilisées.

2.3.2. Principe des Déplacements Virtuels

Lorsque la plaque subit un petit déplacement virtuel δA par rapport à sa position d'équilibre, une augmentation de l'énergie de déformation $\frac{\partial U}{\partial A} \delta A$ apparaît. Au même moment, les forces de compression appliquées vont se déplacer sur une petite distance en effectuant un travail égal à $\frac{\partial W}{\partial A} \delta A$. Le système demeure stable si $\frac{\partial W}{\partial A} \delta A < \frac{\partial U}{\partial A} \delta A$ et devient instable dans le cas où $\frac{\partial W}{\partial A} \delta A > \frac{\partial U}{\partial A} \delta A$. Par conséquent, la valeur critique de la charge de compression sera évaluée à partir de l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial A} \delta A = \frac{\partial U}{\partial A} \delta A \quad (2.9)$$

Cette dernière représente le passage de la plaque de sa configuration d'équilibre stable vers sa configuration d'équilibre instable ce qui caractérise le principe des déplacements virtuels [4].

En se servant du principe des déplacements virtuels, Timoshenko [29] a étudié le cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et uniformément comprimée dans la direction x parallèle à sa longueur a , la largeur b étant le côté chargé. La surface élastique de la plaque déformée est représentée par la double série :

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.10)$$

où A_{mn} est l'amplitude de la déformée, m et n sont des entiers positifs qui peuvent être pairs ou impairs. Ces derniers représentent le nombre de demi-ondes dans les directions x et y respectivement. La forme de l'équation (2.10) est plus générale que celle de l'équation (2.3). Chaque terme de ces séries disparaît pour $x=0$ et $x=a$, ainsi que pour $y=0$ et $y=b$. Par la suite, la flèche u_z est nulle tout le long du contour. En

calculant les dérivées $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$, on trouve que chaque terme des séries

calculées devient nul sur le contour de la plaque. On en déduit que les moments fléchissants sont également nuls sur les contours, comme ils doivent l'être dans le cas où les côtés sont simplement appuyés. Ces conditions aux contours peuvent être formulées de la manière suivante :

$$[u_z = 0]_{x=0,a}^{y=0,b} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right]_{x=0,a}^{y=0,b} \quad (2.11)$$

D'autre part, l'expression de l'énergie de déformation d'une plaque fléchie est la suivante :

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.12)$$

Celle-ci sera développée dans le prochain chapitre (voir équation (3.20a)). Cette énergie peut être déterminée en substituant l'expression (2.10) de u_z dans l'équation (2.12) et en intégrant entre les bornes 0 et a et entre 0 et b . Par conséquent, cette équation devient

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy \quad (2.13)$$

car la double intégrale $\int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$ s'annule. On trouve finalement

$$U = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.14)$$

Le travail effectué par les forces appliquées agissant dans le plan moyen de la plaque a pour expression :

$$W = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.15)$$

Cette expression sera développée dans le prochain chapitre (voir équation (3.28)). Dans le cas de la compression uniaxiale dans la direction x , N_y et N_{xy} sont nuls et la substitution de u_z dans l'expression (2.15) conduit à:

$$W = \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 m^2 \quad (2.16)$$

Pour déterminer la valeur d'un coefficient quelconque A_{mn} de la série, on donne à ce coefficient un petit accroissement δA_{mn} et la flexion virtuelle de la plaque devient :

$$\delta u_z = \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.17)$$

Maintenant le principe des déplacements virtuels permet d'écrire

$$\frac{\partial W}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn} = \frac{\partial U}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn} \quad (2.18)$$

ce qui conduit à

$$\frac{Dab}{4} A_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \delta A_{mn} = \frac{\pi^2 b}{4a} N_x A_{mn} m^2 \delta A_{mn} \quad (2.19)$$

On obtient alors:

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2}{m^2} D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.20)$$

Il est évident que la plus petite valeur de N_x donné par la relation ci-dessus sera celle pour laquelle on fera $n=1$. La signification physique de ce fait est que le flambement d'une plaque s'effectue de telle manière qu'il peut y avoir plusieurs demi-ondes dans la direction de la compression, mais une seule dans la direction perpendiculaire. L'expression de la valeur critique de la force de compression devient

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.21)$$

Le premier facteur dans cette expression représente la charge d'Euler pour un barreau de longueur a et de largeur égale à l'unité. Le deuxième facteur indique dans quelle proportion la stabilité d'une plaque est supérieur à celle d'un barreau isolé. La valeur de ce facteur dépend de celle du rapport a/b , ainsi que du nombre m qui donne le nombre de demi-ondes produites lors du flambement. Si a est inférieur à b , le deuxième terme de la parenthèse de l'expression (2.21) est toujours inférieur au

premier et la valeur minimale de cette expression s'obtient en faisant $m=1$, c'est-à-dire en supposant qu'au flambement de la plaque, il ne se produit qu'une demi-onde. La charge critique avec $m=1$, dans l'expression (2.21), peut finalement être représentée sous la forme suivante

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \quad (2.22)$$

Si l'on maintient constante la largeur de la plaque (côté chargé) et que l'on modifie graduellement sa longueur a (côté non chargée), la quantité $\frac{\pi^2 D}{b^2}$ de l'expression (2.22) reste constante et le facteur entre parenthèse $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2$ varie suivant la variation du rapport a/b . Dans le cas particulier de la plaque simplement appuyé comprimée dans une direction il est possible d'écrire K selon la relation (2.7) et l'expression (2.22) de N_{xcr} peut être alors présentée sous la forme (2.8).

Timoshenko [16] a traité au moyen du principe des déplacements virtuels le problème du flambement des plaques non-uniformément comprimées dans une direction en appliquant l'hypothèse de Sommerfeld [10]. Ses résultats ont été comparés avec ceux d'un autre auteur [13] qui a montré que l'hypothèse appliquée a conduit à de grandes erreurs.

2.3.3. Principe de Conservation d'Énergie

Le principe de conservation d'énergie stipule que l'énergie de déformation accumulée dans le système est égale au travail effectué par les forces appliquées au cours du chargement, ceci permet d'examiner d'une manière directe et simple la stabilité des plaques rectangulaires.

La plaque soumise à l'action des forces agissant dans son plan moyen est supposée subir une certaine flexion latérale, pour des conditions données au contour. Cette flexion limitée peut se produire sans étirement du plan moyen, et l'on n'a alors à tenir compte que de l'énergie de flexion et du travail correspondant produit par les forces agissant dans le plan moyen. Si ce travail a une valeur inférieure à celle de l'énergie de déformation par flexion, pour toutes les formes possibles de flambement latéral, la forme plane d'équilibre de la plaque est stable. Si au contraire la valeur de ce travail devient supérieure à celle de l'énergie de déformation, la forme plane d'équilibre est instable et le flambement se produit. En désignant par W le travail en question, effectué par les forces extérieures et par U l'énergie de flexion, les valeurs critiques des forces sont données à partir de l'équation:

$$W=U \quad (2.23)$$

2.3.3.1. Solution par Séries de Fourier

La surface élastique de la plaque uniformément comprimée dans la direction x peut être représentée, dans le cas où les côtés reposent simplement sur appuis par la double série de Fourier (2.10) [29]. Il a été montré plus haut que cette forme de u_z satisfait pleinement les conditions au contour et il a été vu dans le paragraphe (2.3.2) que lorsque la surface élastique est choisie sous cette forme, les expressions de l'énergie de flexion ainsi que le travail effectué par les forces extérieures sont données par les équations (2.14) et (2.16) respectivement. L'équation (2.23) devient alors

$$\frac{\pi^2 b}{8a} N_{xcr} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 m^2 = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.24)$$

N_{xcr} prend sa plus petite valeur si l'on égale à zéro tous les coefficients A_{mn} sauf un. On a alors

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 a^2}{m^2} D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.25)$$

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent N_{xcr} est minimal si m et n sont égaux à un, ce qui conduit à la relation (2.8) précédemment établie dans le paragraphe 2.2.

2.3.3.2. Méthode de Rayleigh

Conçue par Lord Rayleigh en 1877 [30] en relation avec le calcul des fréquences de vibration des plaques, cette méthode consiste à choisir arbitrairement une expression de la déformée u_z et à utiliser cette expression de la même manière que l'expression (2.10). Dans les solutions précédentes la surface élastique, de la plaque simplement appuyée, était représentée par la double série de Fourier alors que dans la méthode de Rayleigh celle-ci est supposée flamber de manière à ce que sa déformée puisse être représentée par la fonction

$$u_z = A_{mn} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.26)$$

En utilisant la même procédure que dans le paragraphe précédent, l'énergie de déformation ainsi que le travail effectué par les forces appliquées dans le plan moyen s'écrivent sous la forme suivante

$$U = \frac{Dab}{8} A_{mn}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.27)$$

et

$$W = \frac{\pi^2 b}{8a} N_{xcr} A_{mn}^2 \quad (2.28)$$

En égalant les expressions de U et de W , il s'ensuit que N_{xcr} prend encore une fois la forme de la relation (2.8).

2.3.3.3. Stabilité Élastique des Bandes Infinies Analysées par Hopkins

En utilisant le principe de la conservation de l'énergie Hopkins [17,31] a résolu divers problèmes de stabilité élastique pour des plaques rectangulaires infiniment longues, isotropes, simplement appuyées le long de leurs longueurs. Dans ses recherches figure le cas de la compression uniforme distribuée sur une longueur finie l de chaque côté de la plaque (voir fig.(1.1)).

Le problème est résolu pour le chargement considéré, sujet à certaines conditions mathématiques imposées par l'auteur. Ce chargement, appliqué sur les bords longs, est supposé augmenter graduellement de zéro vers une valeur critique à laquelle le flambement apparaît. Dans cette étude, l'analyse du système montre que l'expression

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x) Y_m(y) \quad (2.29)$$

du déplacement latérale satisfait les conditions au contour et peut être différenciée terme par terme afin d'obtenir l'énergie de déformation ainsi que le travail effectué par les forces extérieures durant le flambement (m est le nombre de demi-ondes dans la direction du chargement).

Dans ses travaux, l'auteur a négligé l'extension de la surface moyenne pendant le flambement à la manière de Timoshenko ; ce qui simplifie considérablement l'analyse. Bien que cette simplification mène à une sous-estimation (de l'ordre de 10%) des forces critiques, selon cet auteur il est improbable que cette sous-estimation ait une quelconque influence sur les conclusions générales.

Les résultats numériques obtenus ont montré d'une part que dès que la longueur des côtés non uniformément chargés dépasse quatre fois celle des côtés non chargés, la valeur de la charge critique de flambement reste la même. D'autre part, lorsque la longueur des côtés chargés est inférieure au quart des côtés non chargés, la valeur de la charge critique de flambement se rapproche de celle due à deux forces concentrées.

2.3.4. Principe de l'Énergie Potentiel Minimum

L'énergie potentielle totale d'une plaque rectangulaire est la somme de son énergie potentielle de déformation U et du travail effectué par le chargement appliqué W (ou énergie potentielle due au chargement appliqué).

Lorsque la charge critique est atteinte, la plaque est dans un état d'équilibre neutre et dans cet état, l'énergie potentielle totale est toujours minimale. Cette dernière est égale à :

$$U_{total} = U + W \quad (2.30)$$

La méthode de l'énergie potentielle minimum peut être utilisée en choisissant une déformée du type

$$u_z = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.31)$$

Pour que la quantité U_{total} soit minimale, il faut vérifier la relation :

$$\frac{\partial U}{\partial A} + \frac{\partial W}{\partial A} \leq 0 \quad (2.32)$$

Il faut noter que la conservation d'énergie présentée dans le paragraphe (2.3.3) fait intervenir seulement l'énergie sans ses dérivées, tandis que le principe de l'énergie potentielle minimale utilise les dérivées des quantités énergétiques par rapport au déplacement. En pratique, la relation (2.32) est vérifiée seulement lorsque la forme choisie pour le déplacement u_z est de type de l'expression (2.31) ou bien de type polynomial dans une analyse par éléments finis. L'importance de la méthode de l'énergie minimum repose sur le fait que celle-ci permet d'obtenir une approximation proche de la valeur réelle de N_{xcr} en choisissant une forme judicieuse pour u_z . Cette méthode approximative est connue sous le nom de Rayleigh-Ritz car celle-ci découle de l'article classique traitant les problèmes de l'énergie minimum en mécanique publié par Ritz en 1909 [33].

2.3.4.1. Solution Analytique

L'énergie potentielle totale d'une plaque simplement appuyée et uniformément comprimée le long de deux côtés opposés peut être obtenue en utilisant l'expression (2.31) et la pour expression [4] :

$$U + W = \frac{Dab}{8} A^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{8a} N_{xcr} A^2 \quad (2.33)$$

Comme $(U+W)$ doit avoir une valeur minimale, on a la relation (2.32) qui doit être vérifiée, ce qui conduit à

$$\frac{Dab}{4} A \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{4a} N_{xcr} A = 0 \quad (2.34)$$

On en déduit la valeur du chargement sous lequel le flambement de la plaque se produit. On aboutit ainsi à l'expression de N_{xcr} qui est de la forme (2.8).

Il peut être noté que le terme W de l'équation (2.33) est négatif car les contraintes de compression dues au chargement appliqué agissent dans le sens opposé à celui du chargement lorsque le flambement se produit.

Pavlovic et Baker [18] ont étudié le flambement des plaques simplement appuyées et non-uniformément comprimées dans la direction de l'axe x . Lors de leurs travaux ces auteurs ont satisfait la condition de l'énergie potentielle minimale de la plaque lorsque le flambement se produit et ont supposé que le déplacement transversal était de la forme

$$u_z = \sin \frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.35)$$

L'expression (2.35) satisfait terme par terme aux conditions au contour de la plaque assurant ainsi la convergence vers un résultat fiable. La distribution du chargement non-uniforme $f(y)$ a été modélisée au moyen de l'analyse élastique et a été exprimée sous la forme d'un développement de série de Fourier

$$f(y) = B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \cos sy \quad \text{avec} \quad s = \frac{2\pi r}{b} \quad r : \text{entier positif} \quad (2.36)$$

où $B_0 = \frac{Pl}{b}$, $B_s = \frac{2P}{b} \sum_{i=1}^l \cos \left[\frac{\pi \varpi}{l} (2i-l-1) \right]$ avec P : module du chargement, l :

longueur sur laquelle s'étend le chargement et $\varpi = 1, 2, 3, \dots, \infty$. Le calcul des forces critiques de flambement a été effectué en considérant un nombre fini de termes dans la série de u_z et le problème de valeurs propres résultant a été résolu par une réduction de Householder ainsi que par une bisection de la matrice tridiagonale résultante. Seulement quelques termes de la série (approximative) de u_z ont suffi pour garantir une excellente précision du coefficient de flambement K .

Auparavant, Yamaki [11] (dans son premier rapport), en utilisant le principe de l'énergie potentielle minimum, a analysé le même problème de stabilité que les auteurs [34,35] (voir fig.(1.1)). Dans son étude cet auteur a appliqué une simplification de la distribution du chargement en suivant la manière de Sommerfeld [10] et de Timoshenko [16]. Il a supposé que seulement la zone de la plaque limitée par les deux lignes parallèles passant par les deux points d'arrêt du chargement est uniformément comprimée, le reste de la plaque ne subissant aucune contrainte. Cette hypothèse a énormément simplifié l'analyse, et bien qu'elle ait conduit à une sous estimation de la charge de flambement, il a semblé à cet auteur que les résultats obtenus seraient utiles dans la conception des panneaux soumis à de telles conditions de chargement.

2.3.4.2. Méthode des Eléments Finis

La solution au problème de flambement des plaques au moyen de la théorie des éléments finis a été d'une manière croissante utilisée durant ces dernières décennies. La technique de cette méthode consiste à diviser la plaque en un nombre fini d'éléments plats reliés entre eux seulement au niveau de points appelés nœuds et la continuité ainsi que l'équilibre sont établis seulement au niveau de ces nœuds. Le principe de la méthode des éléments finis ainsi qu'un grand nombre d'exemples d'applications décrits dans de nombreux articles sont présentés dans l'ouvrage [26]. Cette méthode a été choisie pour mener les investigations de la présente recherche.

Kapur et Hartz [36] ont publié un article en 1966 dans lequel ils ont présenté une étude traitant différents cas de chargements appliqués dans le plan moyen de la plaque associés à des conditions au contour variées ceci dans le but d'étendre l'application de la méthode des éléments finis à une large gamme de problèmes de stabilité. Dans leurs travaux, la plaque est supposée divisée en quelques éléments rectangulaires. Ces derniers sont munis de points nodaux situés au niveau de chaque angle, chaque nœud subissant un déplacement latéral u_z exprimé sous une forme

polynomiale ainsi que deux rotations $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ et $-\frac{\partial u_z}{\partial y}$. Une comparaison des valeurs des

charges de flambement obtenues par Kapur et Hartz [36] avec celles provenant de solutions classiques exactes déjà existantes, montre un bon accord dans les résultats même avec ceux obtenus à partir d'une division relativement éparse de la plaque. Kapur et Hartz ont montré que leur méthode était non seulement flexible et puissante mais également directe. En outre, celle-ci est applicable à une large variété de problèmes incluant les plaques chargées d'une manière tout à fait arbitraire.

La méthode des éléments finis a été également utilisée par Rockey et al [19,37]. Ces auteurs ont présenté des travaux sur le flambement de l'âme d'un profilé sous l'action d'un chargement partiel appliqué dans le plan moyen de l'âme. Ils ont également analysé les plaques raidies. L'étude de tels problèmes, menée au moyen de la technique des éléments finis, a été acceptée avec une plus grande confiance que l'étude découlant d'une méthode analytique utilisant une forme simplifiée du chargement telle celle présentée par Khan et Walker [38]. La limite d'application la plus sérieuse que pourrait éventuellement rencontrer la méthode des éléments finis est le nombre extrêmement important de calculs nécessaires lors de l'analyse ; ce qui rend le processus dépendant d'ordinateurs performants qui de nos jours ne constituent aucun obstacle.

2.4. Conclusion

La présentation des travaux menés pour évaluer la charge critique de flambement des plaques sollicitées par une compression uniforme et non-uniforme ainsi que celle des méthodes utilisées à cet effet ont fait l'objet du présent chapitre. La bibliographie des travaux effectués sur des plaques partiellement comprimées est résumée dans l'annexe du présent mémoire.

La conclusion principale qui émane de cette étude est la suivante : dans le cas d'un chargement non-uniforme, si une bonne précision dans les résultats est nécessaire alors, la distribution réelle du chargement doit être utilisée dans l'analyse du problème.

Les avancées de la technologie informatique ont, de nos jours, largement contribué à la résolution des problèmes de stabilité au moyen de logiciels puissants.

Néanmoins, très peu de travaux ont été menés dans le domaine de l'analyse du flambement des plaques non-uniformément comprimées ceci au moyen de méthodes numériques.

Par conséquent, la contribution originale de ce travail de recherche a consisté à utiliser la technique des éléments finis afin de traiter la problématique inhérente aux plaques minces sous l'effet d'un chargement non-uniforme.

CHAPITRE 3
THEORIE DE LA FLEXION DES
PLAQUES MINCES
ET
METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 Introduction

Avant toute discussion concernant la stabilité des plaques, il est nécessaire d'établir la théorie de leur flexion. Celle-ci permet le développement de l'équation différentielle qui détermine la surface élastique de la plaque. Cette théorie permet également d'établir l'expression de l'énergie de déformation due à la flexion ainsi que celle du travail effectué par les forces appliquées.

Dans ce chapitre, l'équation qui gouverne la compression des plaques est développée. D'abord, la plaque est supposée sollicitée par un chargement latéral uniformément distribuée, ensuite, des forces agissant dans le plan moyen de la plaque sont superposées au premier chargement. L'équation différentielle décrivant le comportement de la plaque est alors développée pour chaque sollicitation en s'appuyant sur l'équilibre statique de toutes les forces agissant sur la plaque. Enfin, l'équation différentielle décrivant le comportement de la plaque analysée dans la présente recherche est développée ceci en gardant les forces agissant dans le plan moyen dans une seule direction et en annulant les autres chargements.

Plusieurs problèmes de stabilité des plaques, à cause de leur complexité, peuvent être résolus uniquement au moyen des méthodes énergétiques. Ces dernières font intervenir les expressions de l'énergie de déformation due à la flexion de la plaque ainsi que le travail effectué par les forces coplanaires, ces expressions sont également développées dans le présent chapitre.

La méthode des éléments finis, méthode utilisée dans la présente investigation, fait intervenir les concepts cités plus haut, aussi une présentation générale ainsi que les étapes de résolution relatives à cette méthode sont également exposées dans le présent chapitre.

3.2. Théorie de la Flexion des Plaques Mincées

3.2.1. Hypothèses Fondamentales

L'analyse du comportement des plaques fléchies nécessite l'application de quelques hypothèses fondamentales. La 'minceur' de la plaque justifie les hypothèses simplificatrices suivantes :

- i) La plaque est homogène, élastique et isotrope.
- ii) L'épaisseur de la plaque est considérée comme petite en comparaison avec les dimensions en plan de la plaque.
- iii) La plaque est initialement plate.
- iv) Le comportement de la plaque est assimilé à celui de son plan moyen : surface sectionnant l'épaisseur en deux parties égales. Toutes les entités recherchées sont exprimées en termes de déplacement transversal u_z de ce plan moyen.
- v) Le plan moyen sera noté par xy où les axes x et y seront dirigés suivant les bords de la plaque, comme le montrent les figures (1.1) et (1.2). L'axe z est perpendiculaire au plan moyen, sa direction positive est dirigée de haut en bas.

- vi) Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque.
- vii) Les déformations de la plaque sont petites par rapport à son épaisseur.
- viii) Les sections transversales droites restent planes pendant la flexion de la plaque et ne tournent qu'autour de leurs axes de manière à rester normales à la surface élastique.
- ix) Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen.

3.2.2. Relations Contraintes-Déformations

Considérons un élément découpé dans la plaque par deux paires de plans parallèles au plan xy et au plan xz , comme le montrent les figures (3.1) et (3.2) [3]. En supposant que, pendant la flexion de la plaque, les faces latérales de cet élément restent planes et tournent autour des axes neutres $n-n$, de manière à rester normales à la surface élastique, le plan moyen ne subira aucune déformation pendant cette flexion et sera par la suite une surface neutre. La loi de Hooke donne les relations suivantes qui lient les contraintes, dans les directions x et y respectivement, aux déformations :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où E est le module de Young, ν est le coefficient de Poisson. Les contraintes ci-dessus sont représentées sur la figure (3.3).

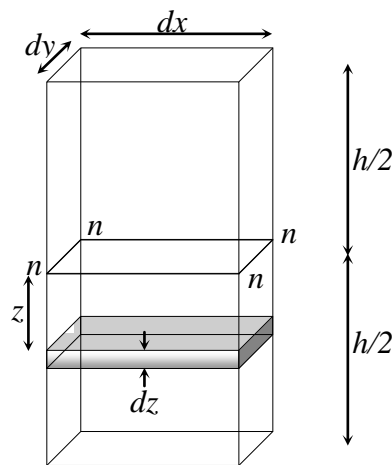


Figure (3.1) : volume élémentaire d'une plaque mince de dimensions dx , dy et h

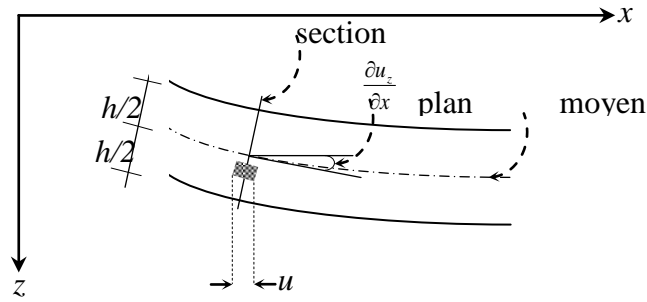


Figure 3.2) : angle formé par l'axe x et la tangente au plan moyen de la plaque

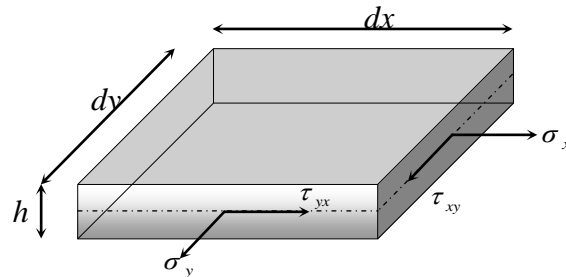


Figure (3.3) : volume élémentaire d'une plaque mince sous l'action des forces N_x et N_y , N_{xy} et N_{yx} agissant sur son plan moyen

Soient $\frac{1}{\rho_x}$ et $\frac{1}{\rho_y}$ les courbures de la surface neutre dans les sections parallèles

aux plans xz et yz . Les allongements unitaires, dans le sens des x et des y , d'un feuillet élémentaire $abcd$ (voir fig.(3.1)), à une distance z de la surface neutre, sont égaux à

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y}$$

En appelant u_z la flexion de la plaque ou encore le déplacement parallèle à l'axe z , les formules approchées qui donnent les courbures de la plaque, analogues à la formule connue de la courbure d'une poutre, sont

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$$

D'où :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

Après substitution des équations (3.2) dans les équations (3.1), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Les tensions normales réparties sur les faces latérales de l'élément de la figure (3.3) peuvent être réduites à des couples qui doivent être égaux aux moments extérieurs. On arrive ainsi aux équations

$$M_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dy dz$$

$$M_y dx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dx dz$$

où M_x et M_y sont des moments fléchissants. En remplaçant σ_x et σ_y par leurs expressions, on trouve

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.5)$$

Le moment de torsion M_{xy} s'écrit:

$$M_{xy} = -M_{yx} = D_{xy} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.6)$$

D est la rigidité à la flexion de la plaque et D_{xy} est la rigidité à la torsion. Dans le cas présent (matériau isotrope) D et D_{xy} ont pour expressions respectives:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{et} \quad D_{xy} = D(1-\nu)$$

3.2.3. Equation Différentielle de le Surface Elastique

3.2.3.1. Equation Différentielle d'une Plaque sous l'Action d'une Charge Répartie Latéralement

Soit q l'intensité de la charge répartie, agissant perpendiculairement à son plan moyen. On suppose ce dernier horizontal et contenant les axes des x et des y , l'axe des z étant perpendiculaire à ce plan et dirigé de haut en bas. On déduit des lois de la statique qu'en raison de l'action de la charge q il se produira sur les faces latérales d'un élément $dx dy dz$ (voir fig.(3.2) et fig.(3.3)) de la plaque non seulement des moments de flexion et de torsion, mais aussi des efforts tranchants verticaux dont la valeur par unité de longueur sera définie par les formules suivantes [3,6]:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

Si l'on considère les conditions d'équilibre de l'élément $dx dy dz$ (voir fig.(3.4)), on remarque que toutes les forces qui agissent sur lui sont parallèles à l'axe des z , et que les couples sont représentés par des vecteurs perpendiculaires à l'axe des z . Il n'y aura donc à discuter que de trois équations de la statique :

- les projections de toutes les forces sur l'axe des z
- les moments de toutes les forces par rapport à l'axe des x

– les moments de toutes les forces par rapport à l'axe des y .

En tenant compte des directions des forces indiquées sur la figure (3.4), leurs projections sur l'axe des z nous donnent

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

ou encore après simplification :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (a)$$

En prenant les moments de toutes les forces agissant sur l'élément par rapport à l'axe des x et en observant les directions indiquées sur la figure, l'équation devient

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0$$

ou encore après simplification :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (b)$$

De même, en prenant les moments par rapport à l'axe des y , on obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (c)$$

Si l'on tire les valeurs de Q_x et de Q_y des équations (b) et (c) et qu'on les porte dans l'équation (a), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (3.7)$$

Si l'on remarque que $M_{xy} = -M_{yx}$, parce que les contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{yx} sont égales, on arrive finalement à l'équation d'équilibre:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.8)$$

En substituant M_x , M_y et M_{xy} par leurs expressions respectives l'équation d'équilibre finale est obtenue:

$$D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = q \quad (3.9)$$

La détermination de la surface élastique d'une plaque est donc ramenée à l'intégration de l'équation (3.9) Cette dernière a été développée par Lagrange en 1811 et ensuite par Navier en 1820 [22]. Auparavant l'effet de la torsion était négligé et le deuxième terme ne figurait pas dans l'expression. La prise en compte de ce terme est importante car la résistance de la plaque à la torsion peut réduire sa déformation d'une manière considérable.

3.2.3.2. Equation Différentielle d'une Plaque Comprimée

Lorsqu'en plus des forces latérales il existe des forces appliquées dans le plan moyen de la plaque sur son pourtour, l'effet de ces forces sur la flexion ainsi que sur la stabilité de la plaque peut être considérable. Les forces agissant sur le plan moyen

de la plaque déterminent une déformation du plan moyen et il est nécessaire de tenir compte des tensions correspondantes. Il faut distinguer deux cas :

- les tensions sont faibles par rapport aux tensions critiques et on peut négliger l'effet qu'elles produisent sur la flexion de la plaque ;
- les tensions qui prennent naissance dans le plan moyen ne sont pas négligeables et leur effet sur la flexion de la plaque intervient dans le calcul.

Afin d'établir l'équation différentielle de la surface élastique dans ce dernier cas, on considère, l'équilibre d'un petit élément découpé dans la plaque. Aux forces déjà considérées dans la figure (3.4), il faut ajouter celles qui agissent sur le plan moyen de la plaque et dont les notations par unité de longueur sont indiquées sur la figure (3.5). En projetant ces forces sur les axes des x et des y et en supposant qu'il n'y a pas de forces de volume s'exerçant dans d'autres directions, on obtient les équations suivantes, pour les conditions d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

N_x et N_y , N_{yx} et N_{xy} sont respectivement les tensions (traction ou compression) et les cisaillements dans les directions x et y .

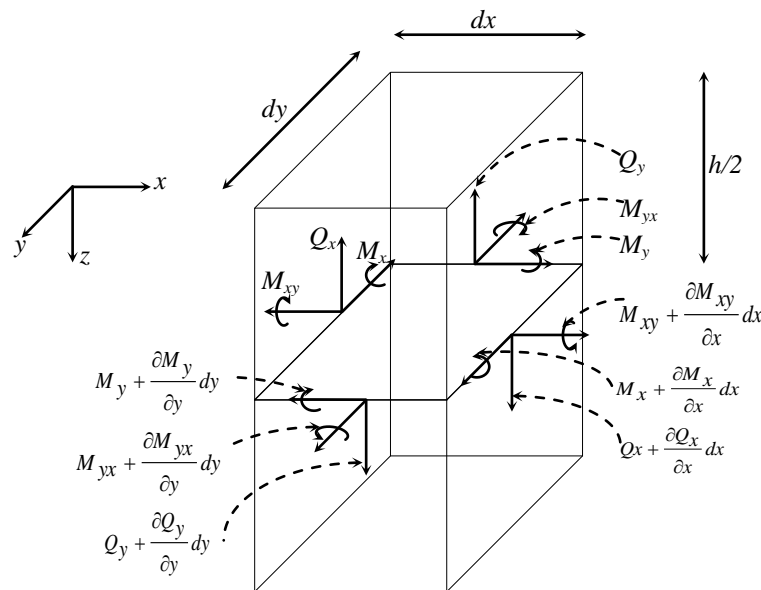


Figure (3.4) : volume élémentaire d'une plaque mince sous l'action d'une charge q répartie latéralement

Q_x : effort tranchant perpendiculaire à x dans le plan yz
 Q_y : effort tranchant perpendiculaire à y dans le plan xz

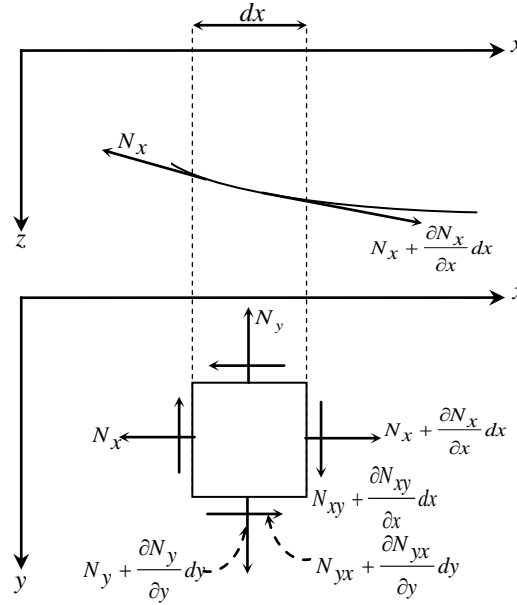


Figure (3.5) : forces agissant dans le plan xz et xy d'une plaque mince sous l'action des forces N_x et N_y , N_{yx} et N_{xy} agissant sur son plan moyen

Pour étudier la projection des forces, indiquées sur la figure (3.5) sur l'axe des z , il faut tenir compte de la flexion de la plaque. En raison de la courbure de la plaque dans le plan xz , la projection des forces normales N_x sur l'axe des z donne:

$$- N_x dy \frac{\partial u_z}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (3.11)$$

Après simplification et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, cette projection devient :

$$N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} dx dy \quad (a)$$

De même, la projection des forces normales N_y sur l'axe des z donne:

$$N_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} dx dy \quad (b)$$

Les efforts tranchants N_{xy} ont pour projection sur l'axe des z :

$$N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} dx dy$$

avec $N_{xy} = N_{yx}$. Enfin, la projection de tous les efforts tranchants sur l'axe des z est:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial x} dx dy \quad (c)$$

En ajoutant à la charge $q dx dy$ agissant sur l'élément les expressions (a), (b), (c) et utilisant les équations (3.10) on obtient au lieu de l'équation (3.7) l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(q + N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)$$

En remplaçant M_x , M_y et M_{xy} par leurs expressions respectives (3.4), (3.5) et (3.6) on obtient :

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

Cette équation est l'équation différentielle qui détermine la surface élastique d'une plaque lorsque les forces N_x, N_y et N_{xy} n'ont pas une valeur insignifiante en comparaison avec leurs valeurs critiques.

Dans le cas où le chargement latéral q est nul l'équation (3.12) devient :

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

Dans la présente recherche la plaque étudiée subit l'action d'une compression uniaxiale. De ce fait, en affectant aux quantités q, N_y et N_{xy} une valeur nulle, l'équation (3.12) devient :

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.14)$$

Les équations (3.12), (3.13) et (3.14) ont constitué pendant longtemps la base de la résolution des plaques minces avant le développement des méthodes énergétiques notamment l'une des plus modernes : la méthode des éléments finis.

3.2.4. Energie de Déformation et Travail des Forces Appliquées

Le problème de stabilité des plaques peut être résolu au moyen des méthodes énergétiques. Dans le présent paragraphe l'expression de l'énergie de déformation d'une plaque fléchie sous l'action d'une charge latérale puis sous l'effet combiné d'une compression et d'une charge latérale sera établie.

3.2.4.1. Energie de Déformation d'une Plaque Fléchie sous l'Action d'une Charge Latérale

L'énergie de déformation accumulée dans un élément tel que celui représenté par la figure (3.1) est calculée en déterminant le travail effectué par les moments de flexion $M_x dy$ et $M_y dx$ ainsi que par les moments de torsion $M_{xy} dy$ et $M_{yx} dx$ sur cet élément pendant la déformation de celui-ci [3].

Puisque les côtés de cet élément restent plans, le travail effectué par les moments $M_x dy$ s'obtient en prenant la moitié du produit du moment et de l'angle que font entre eux les côtés correspondants de l'élément après flexion. Puisque $-\left(\partial^2 u_z / \partial x^2\right)$ représente approximativement la courbure de la plaque dans le plan des xz , l'angle correspondant à ces moments $M_x dy$ est $-\left(\partial^2 u_z / \partial x^2\right) dx$ et le travail effectué par ces moments, tout en utilisant la relation (3.4), est :

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx dy = \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx dy \quad (3.15)$$

Une équation analogue est obtenue pour le travail effectué par les moments $M_y dx$ tout en utilisant la relation (3.5) :

$$-\frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy = \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy \quad (3.16)$$

L'angle de torsion correspondant aux moments de torsions $M_{xy}dy$ est $(\partial^2 u_z / \partial x \partial y) dx$ où l'énergie de déformation due à $M_{xy}dy$ en utilisant la relation (2.6) :

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{D}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.17)$$

La même quantité d'énergie sera produite par les couples $M_{yx}dx$, de sorte que l'énergie de déformation due aux deux couples de torsion est :

$$D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.18)$$

L'énergie totale de déformation d'un élément de plaque s'obtient en additionnant l'énergie de flexion et l'énergie de torsion. On obtient ainsi :

$$dU = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right] dx dy + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.19)$$

L'énergie de déformation de la plaque entière est obtenue en intégrant l'expression ci-dessus sur toute la surface de la plaque, ce qui conduit à l'expression de l'énergie de déformation établie par Bryan [23] en 1891 :

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.20a)$$

qui peut être exprimée également de la façon suivante :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left(-M_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (3.20b)$$

3.2.4.2. Energie de Déformation d'une Plaque Fléchie sous l'Action Combinée d'une Compression et d'une Charge Latérale

Le problème de la flexion d'une plaque soumise à l'action simultanée de forces transversales et de forces appliquées dans le plan moyen de la plaque est un problème à deux dimensions. L'énergie due à la déformation du plan moyen par les forces N_x , N_y et N_{xy} qui agissent dans ce plan et qui sont supposées de faibles valeurs, n'en sera pas tenue compte.

La déformation dans la direction de l'axe x résultant de la flexion d'un élément situé dans le plan moyen de la plaque est :

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \quad (3.21)$$

La déformation dans la direction de l'axe y est :

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \quad (3.22)$$

La déformation par cisaillement due aux déplacements u_x , u_y et u_z est :

$$\varepsilon'_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.23)$$

On admet que les forces N_x , N_y et N_{xy} restent constantes pendant la flexion, l'énergie de déformation de la plaque due à l'extension du plan moyen est :

$$\iint (N_x \varepsilon'_x + N_y \varepsilon'_y + N_{xy} \varepsilon'_{xy}) dx dy$$

En ajoutant à cette quantité l'énergie de flexion représentée par l'équation (3.20) et en remplaçant ε'_x , ε'_y et ε'_{xy} par leurs expressions respectives, la variation totale d'énergie de déformation de la plaque pendant la flexion est :

$$\begin{aligned} U = \iint & \left[N_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + N_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.24)$$

L'expression ci-dessus peut être partagée en deux parties de la manière suivante :

- les forces agissant dans le plan moyen de la plaque effectuent un travail W_1 égal à:

$$W_1 = \iint \left[N_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + N_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (3.25)$$

- la charge normale à la plaque produit un travail W_2 égal à :

$$\begin{aligned} W_2 = \frac{1}{2} \iint & \left[N_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.26)$$

ce qui conduit à:

$$U = W_1 + W_2. \quad (3.27)$$

Lorsque les flèches sont faibles, l'étirement du plan moyen de la plaque est négligé ; alors ε'_x , ε'_y et ε'_{xy} sont nuls et les expressions (3.21), (3.22) et (3.23) donnent :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Il résulte de ce qui précède les relations suivantes :

$$W_1 = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.28)$$

$$U = W_1 + W_2 = + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3.29)$$

Cette dernière relation rappelle la relation (3.20a). Enfin, les équations (3.28) et (3.29) sont à la base des méthodes énergétiques qui permettent de résoudre les plaques soumises à l'action simultanée de forces transversales et de forces appliquées dans le plan moyen de la plaque.

3.3. Méthode des Eléments Finis

3.3.1. Présentation Générale

La méthode des éléments finis, utilisée dans la présente recherche, est une méthode basée sur le principe de l'énergie potentielle minimum. Cette méthode repose sur une technique qui consiste à modéliser la structure réelle en un système simplifié et idéalisé pour lequel une solution existe. La structure est divisée en un nombre fini d'éléments assemblés seulement au niveau des nœuds, la continuité ainsi que l'équilibre sont satisfaits au niveau de ces nœuds seulement. Il est évident qu'un nombre important d'éléments de petites dimensions conduira à un modèle virtuel continu dont le comportement sera similaire à celui de la structure étudiée.

L'avantage le plus intéressant de ce système est qu'il utilise une formulation matricielle qui convient parfaitement à l'utilisation du calcul par ordinateur, ceci associé à des conditions au contour permet d'examiner le problème posé sans aucune difficulté.

Cependant, il y a une différence très importante dans la flexibilité de la modélisation et par conséquent, une différence aussi importante dans la précision avec laquelle le système idéalisé va être ramené à ressembler à la structure réelle. La méthode des éléments finis nécessite la résolution des deux principaux problèmes qui sont représentés par d'une part, l'analyse de l'élément et d'autre part par l'analyse du système lui-même [24].

L'analyse de l'élément fait intervenir :

- i)* la sélection des fonctions qui décrivent d'une manière unique les déplacements à l'intérieur du domaine de l'élément, ceci en termes de déplacements nodaux,
- ii)* le calcul des déformations ainsi que celui des contraintes correspondantes,
- iii)* le calcul des forces nodales fictives qui équilibrent la distribution des forces appliquées données.

L'analyse de l'élément permet d'aboutir à une relation reliant les forces nodales aux déplacements nodaux. Cette relation est exprimée en termes de matrice de flexibilité ou de rigidité relative à l'élément. Durant ces dernières décennies, face à la diversité des problèmes rencontrés, les chercheurs ont concentré leurs efforts dans la construction de différents types d'éléments ; il reste toujours à connaître quel est l'élément le plus approprié pour résoudre un problème spécifique.

Enfin, l'analyse d'une structure découle directement de l'analyse de chacun des éléments qui la constituent, car en fait l'analyse globale du système n'est qu'un assemblage des analyses de chaque élément.

Le champ de déplacement est généralement décrit au moyen de fonctions choisies au préalable, chacune affectée de coefficients [25]. Ces constantes sont déterminées de manière à satisfaire les conditions de l'énergie potentielle minimum. Le déplacement à l'intérieur de l'élément est défini en termes de valeurs ponctuelles uniquement et tout le champ de déplacement est supposé être constitué par un grand nombre de champs continus décrivant chacun la déformation d'un seul élément. La

condition d'équilibre des nœuds donne les déplacements des nœuds correspondants à l'énergie potentielle minimale associée à la forme du champ de déplacement présumé ; la solution sera évidemment approchée.

Dans l'application de la technique des éléments finis, la principale préoccupation de l'analyste est de savoir si la méthode va donner des résultats suffisamment précis. Lorsque la taille des éléments est graduellement réduite, il est évident d'atteindre une valeur proche de la valeur du déplacement réel avec un degré de précision fixé à l'avance. Par conséquent, il est possible de calculer les contraintes recherchées avec un degré de précision désiré. En d'autres termes, la méthode converge vers la solution exacte. La seule condition à satisfaire dans ce cas est que la forme sélectionnée pour le déplacement soit capable de produire des champs de contraintes constants à l'intérieur de chaque élément. Cette condition est évidemment satisfaite car lorsque la taille de l'élément diminue, les contraintes doivent obligatoirement devenir de plus en plus constantes à l'intérieure de chacun des éléments [26].

3.3.2. Etapes de Résolution

Afin de décrire les principales étapes de résolution utilisées dans la méthode des éléments finis, l'exemple de l'analyse du flambement d'une plaque comprimée dans une direction est considéré. Dans cet exemple l'élément fini utilisé est un élément rectangulaire qui possède un nœud au niveau de chacun de ses angles (voir figs.(3.6) et (3.7)) [27]. Le vecteur 'degrés de liberté' ou 'déplacements généralisés nodaux' du nœud n est de la forme :

$$\{\delta_n\} = \begin{Bmatrix} \text{translation sur } z \\ \text{rotation } / x \\ \text{rotation } / y \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Sa formulation se présente de la manière suivante :

$$\{\delta_n\} = \begin{Bmatrix} u_{z_n} \\ \frac{\partial u_{z_n}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{z_n}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

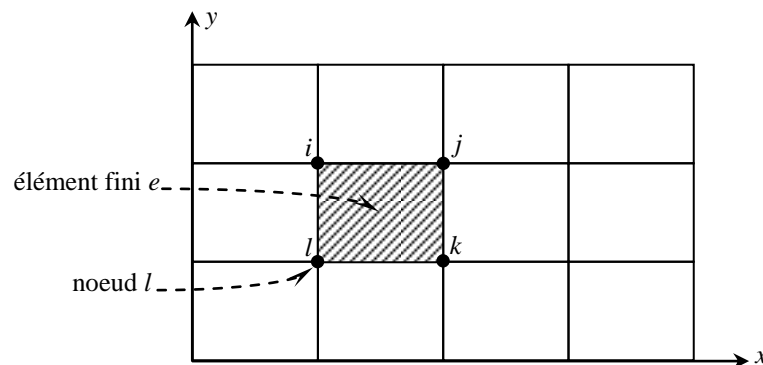


Figure (3.6): maillage représentant la plaque étudiée

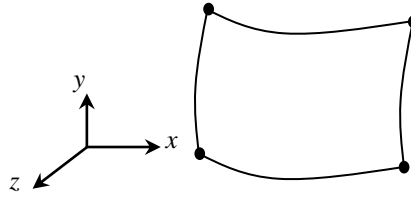


Figure (3.7): élément quadrilatéral à 4 nœuds

La liste des douze déplacements généralisés relatifs aux quatre nœuds $n = i, j, k$ et l de l'élément peut être désignée par $\{\delta\}_e$, où

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Dans cette étape on doit choisir une expression pour la déflexion u_z . Pour des raisons de continuité celle-ci aura la forme polynomiale suivante :

$$u_z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3.33)$$

Ainsi les expressions des deux autres degrés de liberté peuvent être obtenus en utilisant les relations (3.31) et (3.33) pour les quatre nœuds i, j, k et l de l'élément. En plaçant ces expressions dans (3.32) on aboutit à la relation :

$$\{\delta\}_e = [C]\{\alpha\} \quad (3.34)$$

où $[C]$ est une matrice carrée d'ordre douze. Celle-ci contient les coordonnées x_i et y_i relatives à chacun des quatre nœuds et $\{\alpha\}$ est un vecteur contenant les douze coefficients α_i .

Dans une étape suivante on considère le vecteur déformation qui s'écrit de la manière suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

(Le facteur 2 est nécessaire car le travail des moments de torsion s'effectue sur les deux faces de l'élément). Les expressions des éléments du vecteur $\{\varepsilon\}$ peuvent être obtenues à partir de la relation (3.33), ce qui permet d'écrire ce vecteur sous la forme :

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \quad (3.36)$$

où la matrice $[Q]$ est une matrice carrée d'ordre douze.

D'autre part, les moments de flexion et de torsion peuvent être exprimés sous une forme matricielle à partir des relations (3.4), (3.5) et (3.6):

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

ou d'une manière plus condensée :

$$\{M\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.38)$$

[D] étant la matrice d'élasticité.

En substituant la relation (3.36) dans la relation (3.38) on obtient:

$$\{M\} = [D][Q]\{\alpha\} \quad (3.39)$$

Or, l'énergie de déformation U_e d'un élément de la plaque s'obtient en appliquant la relation (3.20b) qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint \{M\}^T \{\varepsilon\} dx dy \quad (3.40)$$

où l'intégration se fait sur toute la surface de l'élément rectangulaire à quatre nœuds et $\{M\}^T$ n'est que l'inverse du vecteur $\{M\}$ précédemment défini qui peut être obtenu en utilisant la relation (3.34) :

$$\{M\}^T = \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [Q]^T [D]^T \quad (3.41)$$

et en utilisant les relations (3.36) et (3.41), l'équation (3.40) devient :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [Q]^T [D]^T [Q][C]^{-1} \{\delta\}_e dx dy \quad (3.42)$$

Cette expression peut être réduite à :

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [S_e] \{\delta\}_e \quad (3.43)$$

$[S_e]$ est la matrice de rigidité flexionnelle de l'élément donnée par :

$$[S_e] = \iint [C]^{-1T} [Q]^T [D][Q][C]^{-1} dx dy \quad (3.44)$$

Il faut noter que comme $[D]$ est une matrice symétrique par rapport à sa diagonale principale, celle-ci est égale à $[D]^T$, d'autre part les matrices $[C]^{-1}$ et $[C]^{-1T}$ ne dépendent pas des variables x et y , la matrice de rigidité peut être alors écrite comme :

$$[S_e] = [C]^{-1T} \iint [Q]^T [D][Q] dx dy [C]^{-1} \quad (3.45)$$

Une fois l'énergie de déformation exprimée et la matrice de rigidité pour un élément formée, l'expression du travail effectué par les forces extérieures est développée en appliquant la relation (3.28). Le terme à l'intérieur de l'intégrale de cette relation est :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

En utilisant la relation (3.33) on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G]\{\alpha\} \quad (3.47)$$

et par la suite en utilisant la relation (3.34) on a alors :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G][C]^{-1T} \{\delta\}_e \quad (3.48)$$

Enfin, W_e s'écrit :

$$W_e = -\frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [S'_e] \{\delta\}_e \quad (3.49)$$

où $[K_G]_e$ est la matrice de rigidité géométrique d'un élément qui peut être calculée de la manière suivante :

$$[S'_e] = [C]^{-1T} \iint [G]^T [N][G] dx dy [C]^{-1} \quad (3.50)$$

où la matrice $[N] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$.

L'énergie potentielle totale d'un élément est obtenue en additionnant U_e et W_e . En sommant les relations (3.43) et (3.49) on obtient :

$$\frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [[S_e] - [S'_e]] \{\delta\}_e \quad (3.51)$$

La matrice $[[S] - [S']]$ est ensuite constituée pour l'ensemble de la plaque en assemblant les matrices $[[S_e] - [S'_e]]$ de tous les éléments. Soit $\{\delta\}$ le vecteur contenant les déplacements généralisés nodaux de l'ensemble de la plaque, la relation (3.51) devient:

$$\frac{1}{2} \{\delta\}^T [[S] - [S']] \{\delta\} \quad (3.52)$$

Le flambement de la plaque apparaît lorsque les forces agissant dans le plan moyen de celle-ci atteignent une valeur critique ce qui correspond à un état minimal de l'énergie potentiel totale et dans ce cas il peut être montré que l'équation

$$[[S] - [S']] \{\delta\} = 0 \quad (3.53)$$

possède une solution non-triviale. La charge critique correspond alors à la plus petite racine de l'équation caractéristique qui annule le déterminant de la matrice $[[S] - [S']]$. Par conséquent, la résolution du problème de flambement posé consiste à déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'équation (3.53). Cette dernière sera développée en détail dans le paragraphe 5.3.3.

3.4. Conclusion

La formulation du phénomène de flexion que ce soit sous la forme d'équation différentielle ou sous la forme d'expression de l'énergie du système constitue la base de la résolution des problèmes relatifs aux plaques notamment celui de leur stabilité.

Une solution rigoureuse de l'équation différentielle est souvent difficile à déterminer, tandis l'approche énergétique plus accessible conduit, selon de nombreux travaux [14,15,18,19,36,37], à des résultats relativement précis. Cette dernière approche sur laquelle est basée la méthode des éléments finis est utilisée dans la présente investigation dont l'objet est l'analyse, au moyen d'éléments finis, du flambement élastique des plaques minces non-uniformément comprimées dans une direction.

CHAPITRE 4
MODELISATION OPTIMALE D'UNE
PLAQUE MINCE NON-UNIFORMEMENT
COMPRISEE

4.1. Introduction

La présente recherche traite le problème de la compression non-uniforme des plaques minces simplement appuyées au moyen de la méthode des éléments finis.

La forme irrégulière du chargement fait penser qu'une subdivision spécifique du maillage devrait être adoptée pour que le modèle puisse refléter le plus fidèlement possible le comportement de la plaque.

Une étude complète du problème plan, notamment l'étude du champ des contraintes et celui des déplacements, est menée. L'évolution du comportement de la plaque est suivie à travers des discrétisations judicieusement élaborées. Pour ce faire, différents modèles de maillages sont traités au moyen d'un logiciel commercial Pafec-fe [21].

Les résultats de la présente investigation pourront être appliqués dans l'analyse du phénomène de flambement qui fait l'objet de la problématique du présent travail. Cet état d'instabilité élastique a pour origine une compression qui au départ est un état plan de contrainte. L'analyse du champ de déplacement de cet état permet de choisir un modèle de discrétisation optimal adéquat au problème posé.

4.2. Présentation du Logiciel Pafec-fe

Dans la présente recherche les expériences numériques sont menées au moyen d'un logiciel commercial Pafec-fe [21] (Program for Automatic Finite Element Calculations) dont l'organigramme est représenté sur la figure (4.0). Les données sont introduites sous une forme modulaire. La configuration physique du problème posé est décrite à travers des modules tel que : NODES, ELEMENT, PAFBLOCKS, PLATES.AND.SHELLS, LOADS, RETRAINTS, OUT.DRAW, CONTROL etc. Ainsi par exemple, le module PAFBLOCKS donne la possibilité de construire un maillage automatique dans une zone spécifique ou encore pour l'ensemble de la structure. Le choix de l'élément fini utilisé dépend du type d'analyse à effectuer. Ce dernier est spécifié dans le module CONTROL.

D'autre part, Pafec-fe est constitué par dix principaux programmes qui une fois exécutés produisent une analyse complète du problème posé. A la fin de chaque programme, appelé 'PHASE', des résultats spécifiques peuvent être récupérés.

Dans la PHASE 1, les modules contenant les données sont lus et certaines valeurs par défaut leur sont assignées si l'analyste n'intervient pas.

Dans la PHASE 2 le maillage de l'ensemble de la structure est construit éventuellement au moyen du module PAFBLOCKS. L'ensemble des coordonnées nodales de tous les éléments du maillage est constitué. PAFBLOCKS est utilisé dans les expériences numériques étudiées dans les présentes investigations.

La PHASE 3 est l'étape durant laquelle la structure pourrait être éventuellement dessinée si le module IN.DRAW a été utilisé comme c'est le cas dans les expériences numériques présentées dans le présent chapitre.

Dans la PHASE 4 les contraintes du problème traité sont considérées et un système de numérotation relatif aux degrés de liberté est mis en place. Dans le cas où la solution frontale est nécessaire, un ordre automatique de numérotation des

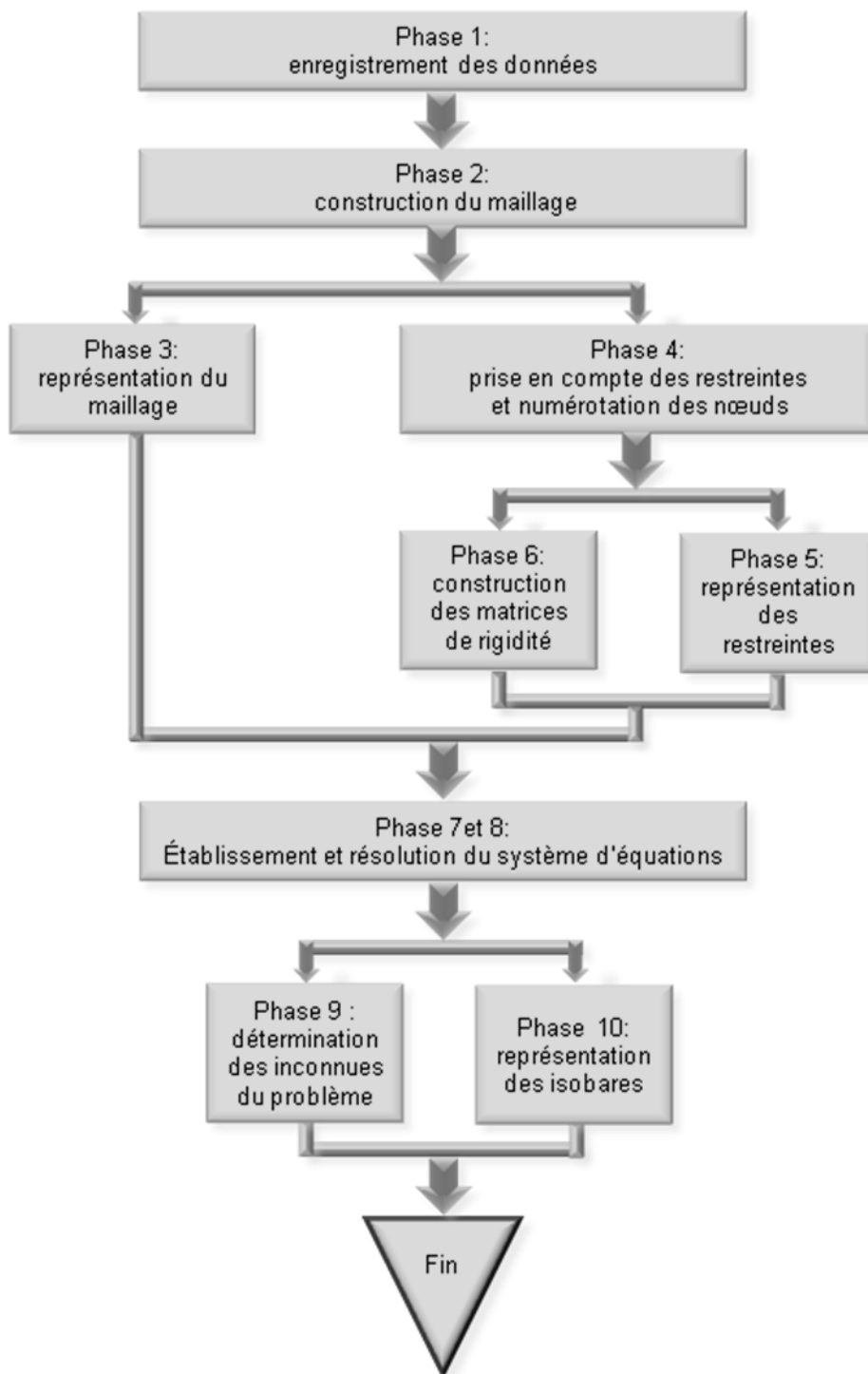


Figure (4.0) : organigramme général des étapes fondamentales de calculs du logiciel Pafec-fe (Program for Automatic Finite Element Calculations)

éléments ainsi que celui des degrés de liberté est instauré. La technique frontale sera utilisée par le programme lors de l'analyse du flambement des plaques (voir chapitre 5).

La PHASE 5 se distingue de la PHASE 3 par un dessin représentatif de toutes les contraintes.

Dans la PHASE 6 les matrices de rigidité de tous les éléments sont déterminées et stockées dans un fichier.

La PHASE 7 et la PHASE 8 sont des phases 'solution'. Le système d'équations est résolu et les déplacements inconnus sont déterminés.

Dans la PHASE 9 et la PHASE 10 les contraintes sont déterminées et le tracé des isobares est représenté à la demande comme c'est le cas des expériences numériques présentées dans le présent chapitre.

Cette description des différentes étapes de résolution effectuées par le programme montre que certaines phases sont relativement plus importantes que d'autres du point de vue de l'obtention des résultats. L'analyse d'une structure complètement définie, de la lecture des données au calcul des premières inconnues, nécessite au moins cinq phases du programme qui sont les suivantes : 1, 4, 6, 7 et 9. Les autres phases relativement moins importantes produisent soit un maillage soit un graphisme.

4.3. Précision sur les Résultats Obtenus par Eléments Finis

Dans l'analyse des structures par éléments finis, la précision des résultats dépend du nombre de degrés de liberté intervenant dans les calculs et de la manière avec laquelle celui-ci est augmenté. En fait, il existe trois façons d'augmenter le nombre de degrés de liberté [39].

Pour commencer, le nombre d'éléments dans le domaine est maintenu et le nombre de nœuds par éléments est augmenté, l'ordre polynômial se trouve ainsi augmenté. Ce processus est appelé la "p-version".

Une deuxième façon de multiplier le nombre de degrés de liberté est de garder l'ordre du polynôme et d'accroître le nombre d'éléments, ce qui conduit à une diminution de la taille des éléments. Ce processus est appelé la "h-version" où h est représentatif de la dimension de l'élément.

Pour terminer, les deux processus cités peuvent être utilisés simultanément. Ce dernier processus est appelé la "h-p-version".

Le processus de la "h-version" a été utilisé au cours des expériences numériques menées dans la recherche du maillage optimum.

4.4. Expériences Numériques dans la Recherche d'un Maillage Optimal

4.4.1. Description de la Plaque Analysée

Le problème traité dans le présent travail consiste à étudier le comportement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée le long de ses axes centraux. Cette plaque est soumise à l'effet d'une compression uniaxiale $N_x=18 \times 10^4 \text{N/ml}$. Le rapport des dimensions est $a/b=0.1$, le rapport $l/b=0.8$ où $2l$ est la distance sur laquelle s'étend le chargement et $2b$ est la dimension du côté chargé de la plaque comme le

montre la figure (4.1). Le rapport $2a/h$ est pris égal à 100 ce qui classe la plaque étudiée parmi les plaques minces. Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3. Le module d'élasticité du matériau considéré est $E=209 \times 10^9 \text{N/m}^2$. Le modèle de la plaque est construit à partir de l'élément isoparamétrique quadrilatéral mince comportant huit nœuds présentant chacun deux degrés de liberté u_x et u_y qui sont deux translations indépendants dans la direction x et y respectivement (voir fig. 4.2). Pour des raisons de symétrie un quart de la plaque a été considérée (voir fig.(4.3)).

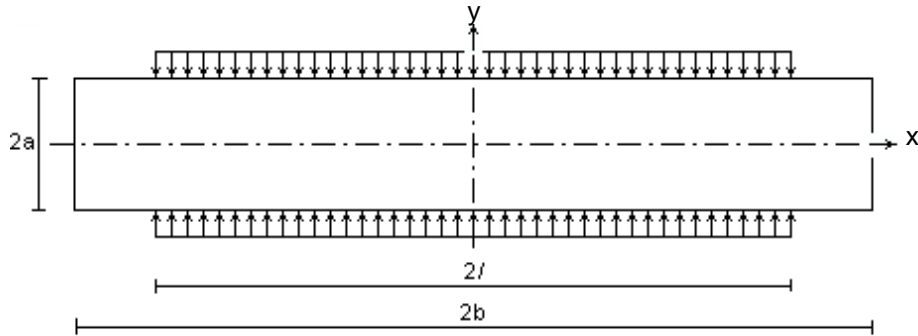


Figure (4.1): plaque non-uniformément comprimée avec $a/b=0.1$ et $l/b=0.8$

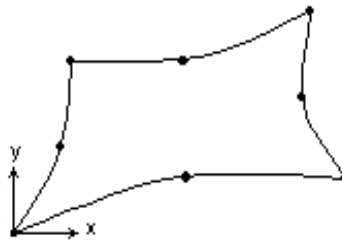


Figure (4.2) : élément isoparamétrique quadrilatéral comportant 8 nœuds

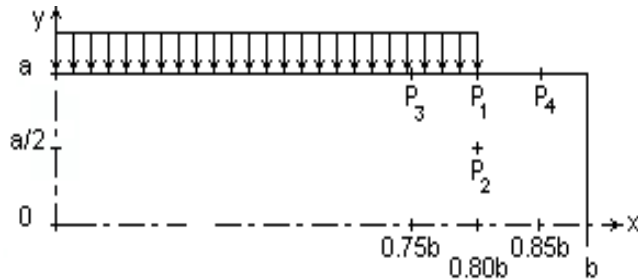


Figure (4.3) : un quart de la plaque non-uniformément comprimée avec $a/b=0.1$ et $l/b=0.8$

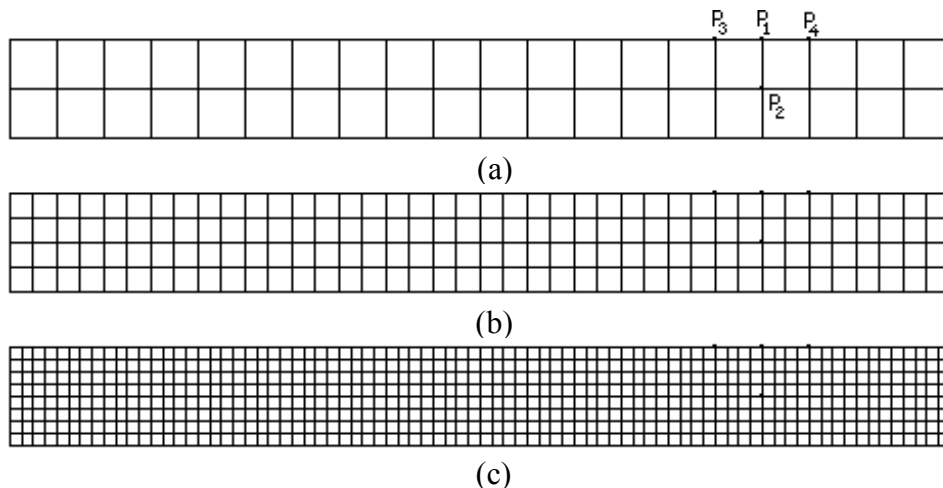
4.4.2. Description de la Géométrie des Maillages Adoptés

Dans le but de construire le modèle le plus approprié pour analyser le problème posé, quatre formes différentes de discrétisation : A, B, C et D sont étudiées. Ces discrétisations ont été conçues de manière à repérer et à identifier des zones supposées critiques de la plaque, ce qui justifierait l'utilisation d'un maillage serré dans ces régions et une discrétisation relativement éparse ailleurs. Un tel maillage serait économique d'un point de vue de calcul sans pour autant sacrifier la précision dans les résultats. Par la même occasion, une étude de convergence pourrait être menée en subdivisant de plus en plus chaque forme de discrétisation.

À première vue, comme il y a un changement brutal dans les conditions de chargement sur le pourtour de la plaque, il a été estimé qu'une zone de singularité pourrait exister dans la région du bord chargé. Ainsi un domaine délimité par quatre points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 a été judicieusement choisi. Ces points occupent les positions suivantes (voir fig.(4.3)) :

- P_1 est le point où la distribution du chargement s'arrête,
- P_2 est un point situé à une distance $a/2$ sur la parallèle (à la largeur de la plaque) menée à partir de P_1 ,
- P_3 et P_4 sont des points situés respectivement à gauche et à droite de P_1 sur la bordure de la plaque, ils sont équidistants d'une longueur de $0.05b$ par rapport à P_1 .

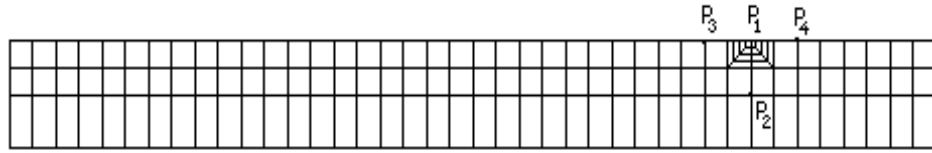
Les maillages de type A, représentés sur la figure (4.4), sont des maillages construits à partir d'une subdivision uniforme de plus en plus serrée où les dimensions de tous les éléments sont identiques (h-version). Dans le but d'obtenir une idée générale sur le comportement de la plaque sans tenir compte des points de singularité, trois maillages qui se distinguent par le nombre d'éléments qui les constituent ont été analysés. Cette première forme de discrétisation qui ne distingue aucune région par rapport à une autre, servira de référence dans cette étude.



- (a) maillage comportant 40 éléments et 284 degrés de liberté
- (b) maillage comportant 160 éléments et 1 048 degrés de liberté
- (c) maillage comportant 640 éléments et 4 016 degrés de liberté

Figure (4.4) : maillages de type A

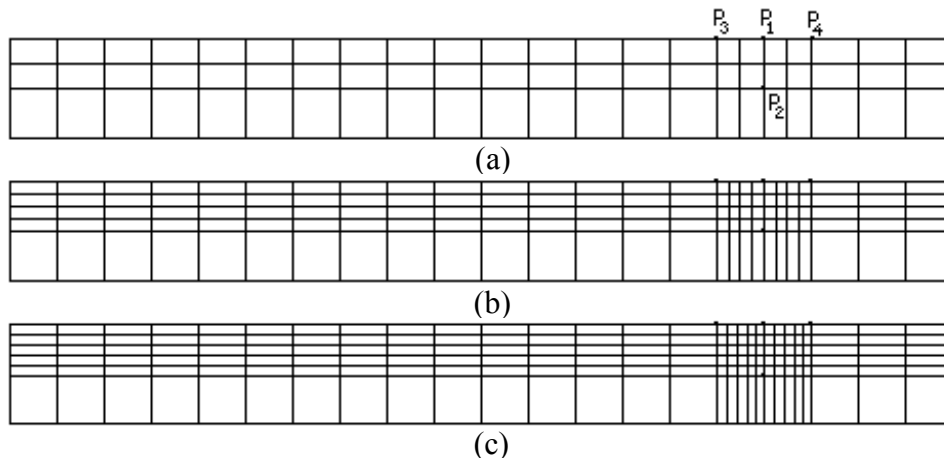
Le maillage B (voir fig.(4.5)) est un maillage obtenu par une subdivision très serrée autour du point P_1 , point où le chargement s'arrête, en utilisant des éléments de forme trapézoïdale. Ce modèle, dont la zone supposée critique est très restreinte, est examiné dans le but de voir si le problème est particulièrement localisé au niveau du point P_1 .



maillage comportant 132 éléments et 890 degrés de liberté

Figure (4.5) : maillage de type B

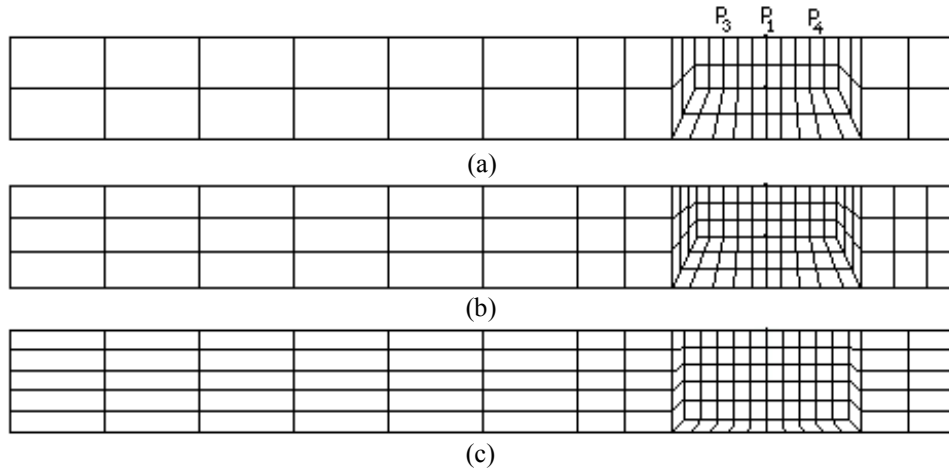
Dans les grilles du type C la zone supposée critique est plus étendue que dans la grille B. En effet, celle-ci se prolonge jusqu'aux points P_2 , P_3 et P_4 . Le quadrillage de cette zone est relativement serré, il est constitué par des éléments de forme carrée. Ailleurs, le quadrillage est plus épars comme le montre la figure (4.6).



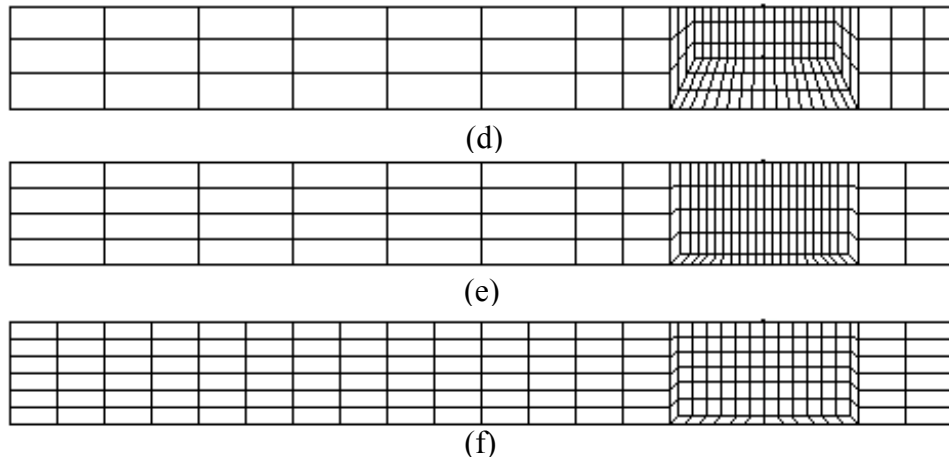
- (a) maillage comportant 66 éléments et 446 degrés de liberté
- (b) maillage comportant 130 éléments et 842 degrés de liberté
- (c) maillage comportant 168 éléments et 1 076 degrés de liberté

Figure (4.6) : maillages de type C

Enfin, les grilles du type D constituent un ensemble de six grilles dont la zone supposée critique dépasse la région délimitée par les points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 et s'étale sur toute la largeur de la plaque comme le montre la figure (4.7). Dans cette zone, le quadrillage est de plus en plus serré et est constitué d'éléments de formes variées : rectangulaire, carrée, trapézoïdale et de losange. Ailleurs, le maillage est relativement plus épars et est uniformément constitué d'éléments rectangulaires.



(a) maillage comportant 68 éléments et 460 degrés de liberté
 (b) maillage comportant 111 éléments et 726 degrés de liberté
 (c) maillage comportant 120 éléments et 774 degrés de liberté



(d) maillage comportant 147 éléments et 954 degrés de liberté
 (e) maillage comportant 148 éléments et 960 degrés de liberté
 (f) maillage comportant 192 éléments et 1 224 degrés de liberté

Figure (4.7) : maillages de type D

4.4.3. Présentation et Interprétation des Résultats

4.4.3.1. Champ de Déplacements

Sous l'action de la compression uniaxiale la flexion de la plaque est restée négligeable. Les valeurs des déplacements u_x et u_y ont été enregistrées. Afin de suivre l'évolution de ces dernières au niveau des points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 , des graphes respectifs ont été tracés. Les figures (4.8) à (4.11) correspondent aux résultats trouvés respectivement en P_1 , P_2 , P_3 et P_4 . Dans les figures dont le numéro est affecté de la lettre (a), l'axe vertical représente le déplacement u_x et dans les figures dont le numéro est affecté de la lettre (b), l'axe vertical représente le déplacement u_y . Les résultats sont présentés avec une précision de 10^{-7} m ou 10^{-8} m pour un point donné P_i . L'axe horizontal représente le logarithme du nombre de degrés de liberté. Trois courbes sont tracées dans chaque figure. Chaque courbe représente les résultats

numériques enregistrés pour un groupe de maillages donné : A, C ou bien D pour un point donné P_i .

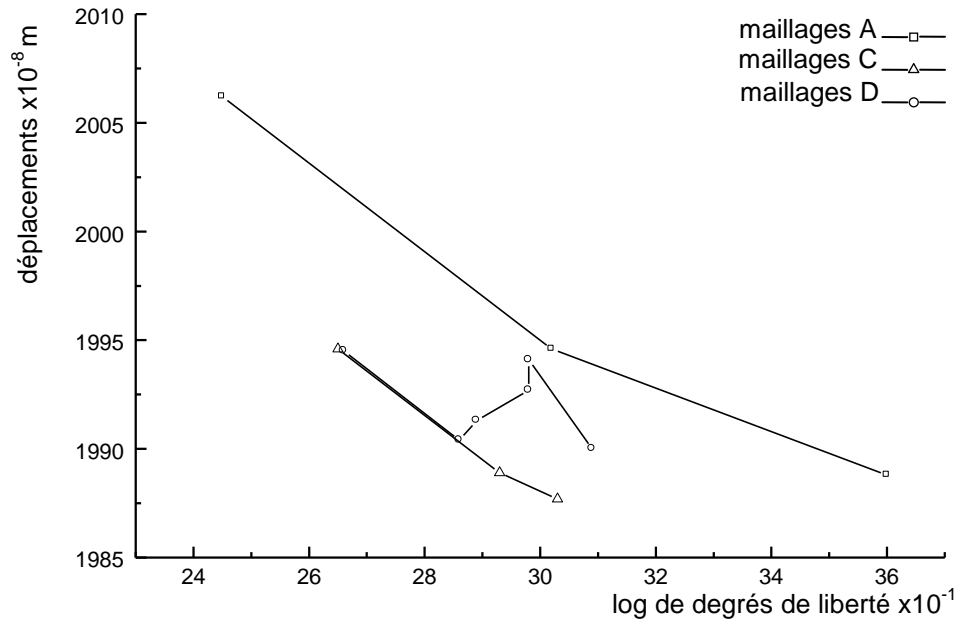


Figure (4.8a) : déplacements dans la direction x au point P_1

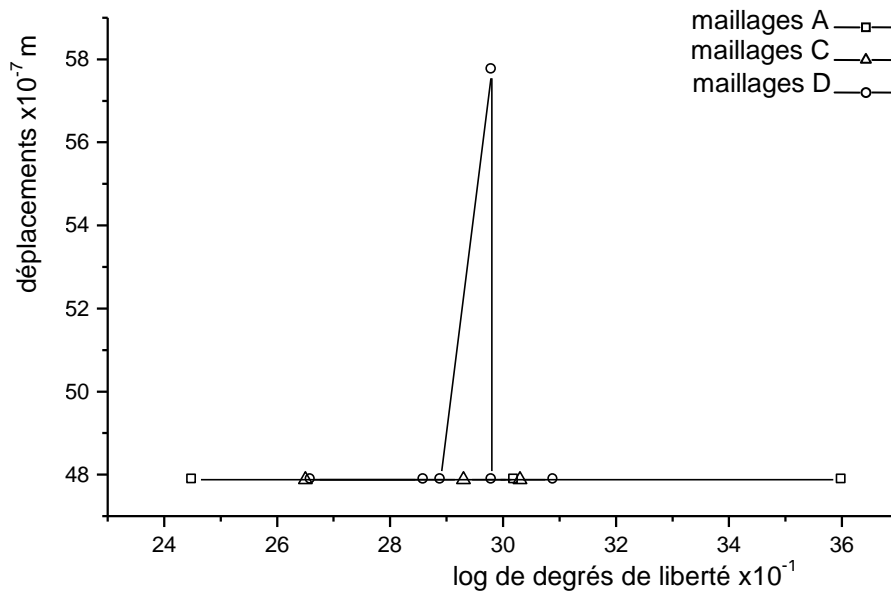


Figure (4.8b) : déplacements dans la direction y au point P_1

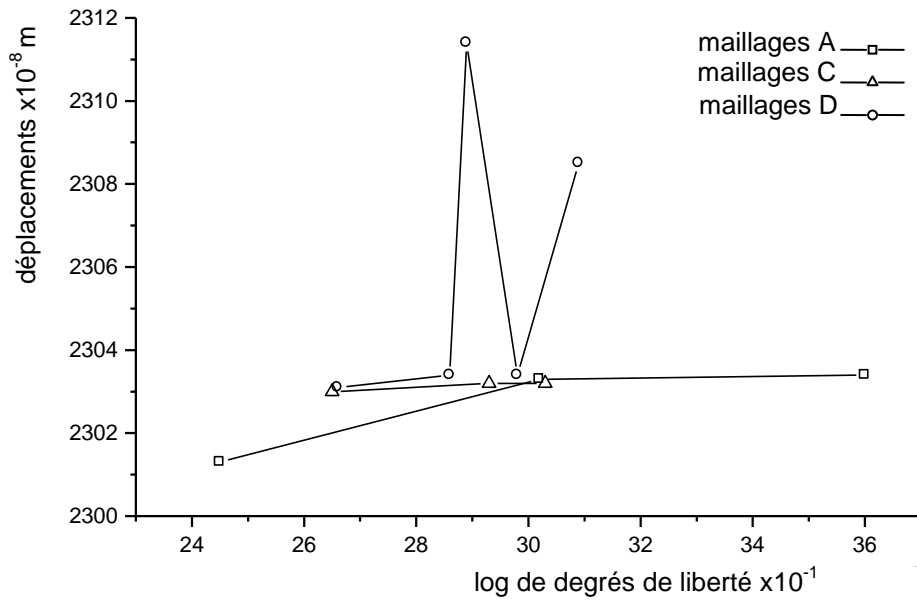


Figure (4.9a) : déplacements dans la direction x au point P_2

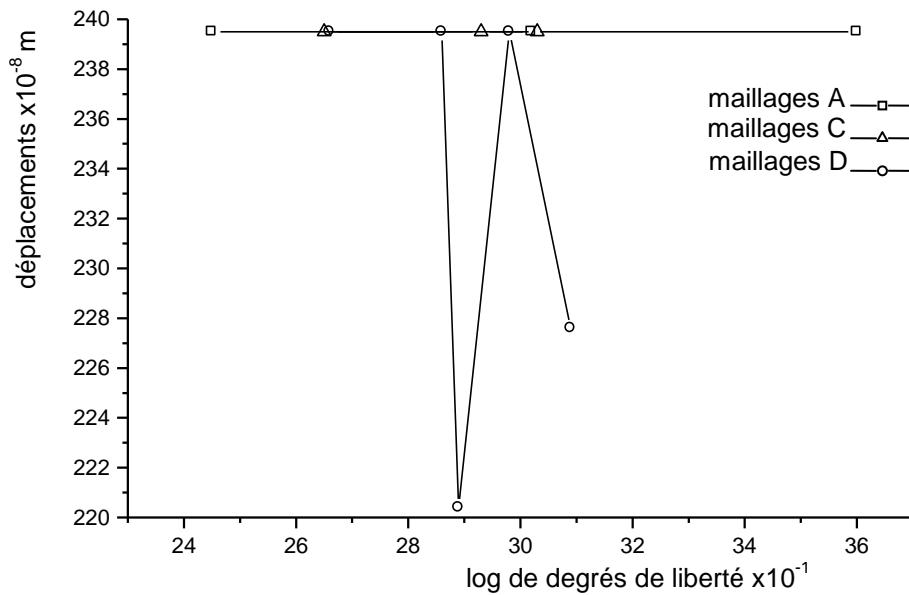


Figure (4.9b) : déplacements dans la direction y au point P_2

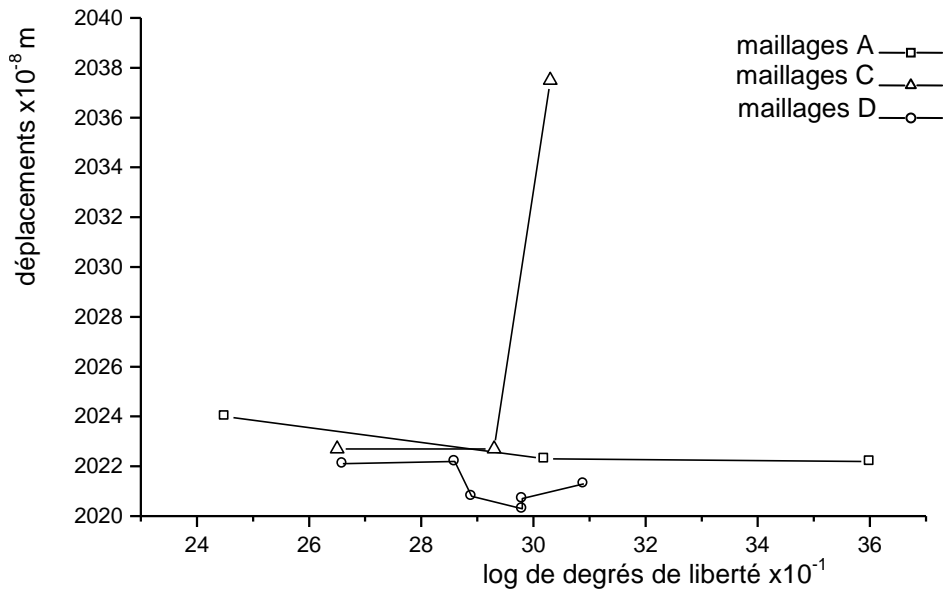


Figure (4.10a) : déplacements dans la direction x au point P₃

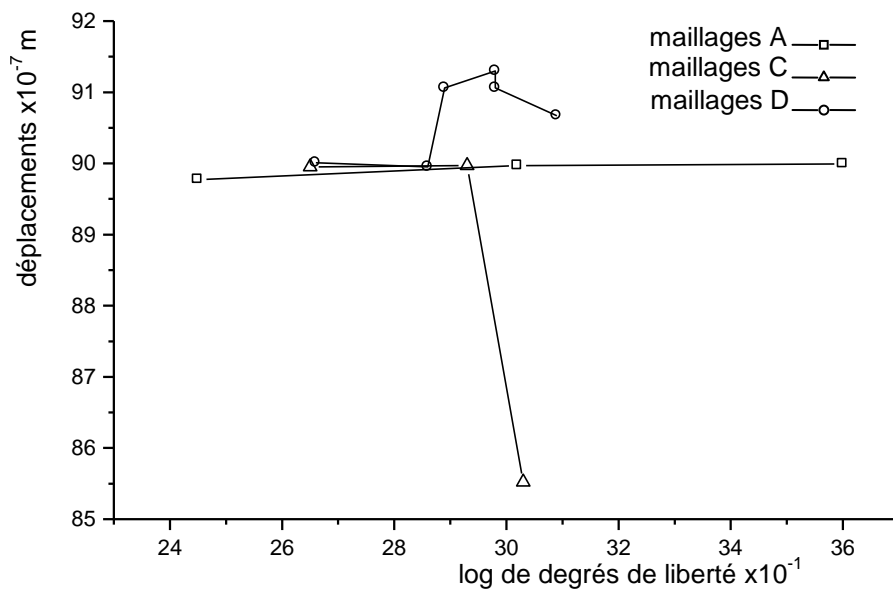


Figure (4.10b) : déplacements dans la direction y au point P₃

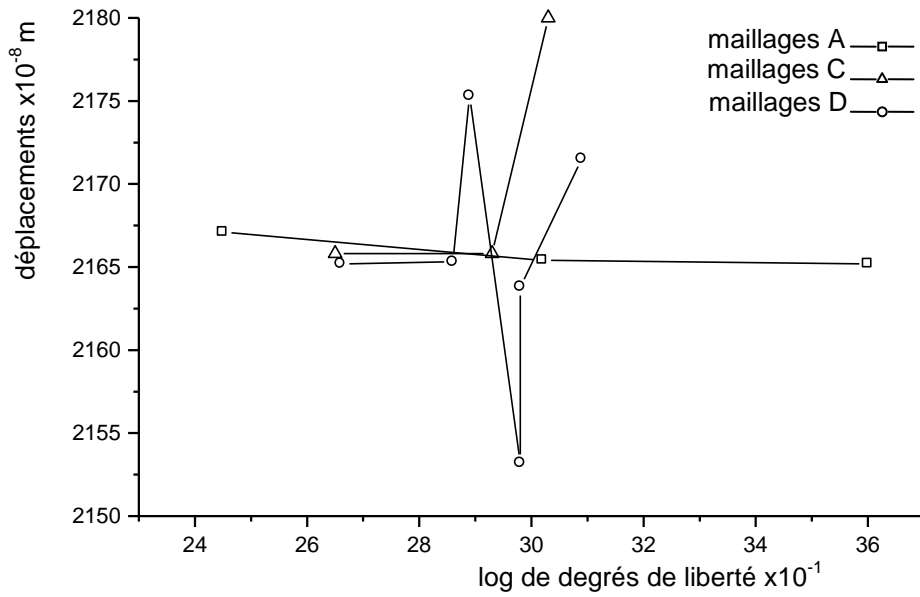


Figure (4.11a) : déplacements dans la direction x au point P_4

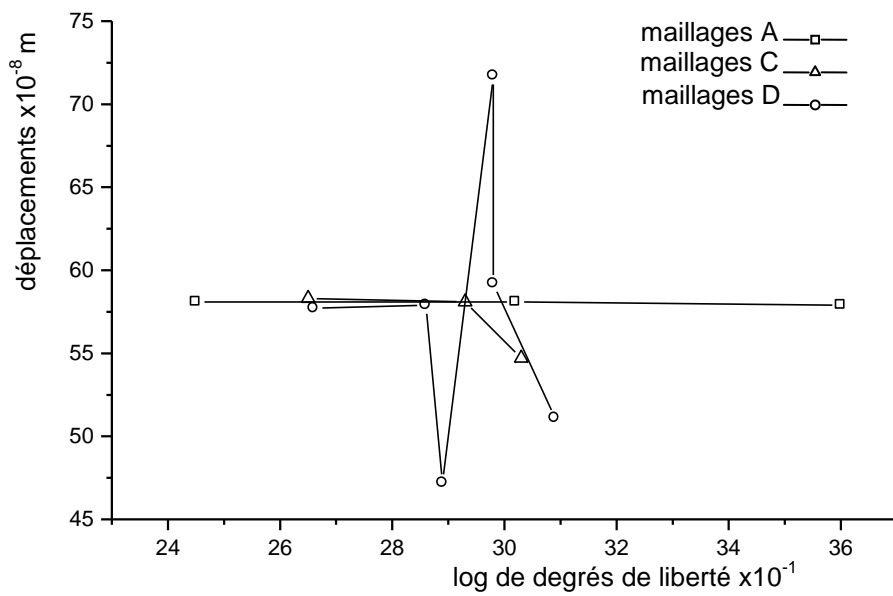


Figure (4.11b) : déplacements dans la direction y au point P_4

D'une manière générale, il peut être constaté, à partir de toutes les courbes correspondants aux maillages de type A, que lorsque le nombre d'éléments augmente les déplacements prennent une valeur constante. Comme les maillages sont de plus en plus uniformément subdivisés, ils tendent d'une manière virtuelle, vers un modèle continu dont le comportement est similaire à celui de la plaque étudiée. La courbe relative aux résultats ainsi obtenus représente la caractéristique de la solution 'exacte' appelée 'courbe régulière' [39].

Les valeurs des déplacements obtenus à partir du maillage B, subdivisé d'une manière raffinée uniquement au niveau du point P_1 au moyen d'éléments de forme trapézoïdale, sont très éloignées de celles obtenues à partir des autres maillages et c'est pour cette raison que celles-ci n'ont pas été représentées sur les différentes figures. Ces valeurs peuvent être consultées dans le tableau 4.1 ; de tels résultats montrent que le problème n'est pas seulement localisé au niveau où le changement brutal du chargement existe, mais également ailleurs. Dans ce maillage, le voisinage finement gradué du point P_1 a besoin d'être inscrit dans un domaine plus étendu. Ce fait sera confirmé à travers l'analyse des autres maillages.

Tableau 4.1

Déplacements u_x et u_y obtenus à partir du maillage B

Nombre d'éléments	Nombre de degrés de liberté (d.d.l)	log(d.d.l)	Déplacements en P_1 de coordonnées (0.80b, a)		Déplacements en P_2 de coordonnées (0.80b, 0.50a)		Déplacements en P_3 de coordonnées (0.75b, a)		Déplacements en P_4 de coordonnées (0.85b, a)	
			u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
			$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m	$\times 10^{-6}$ m
132	890	2.94	19.836	-6.829	23.523	-3.684	20.896	-10.047	21.471	-1.073

Dans les figures (4.8a) et (4.8b) les résultats obtenus à partir des maillages C, dans lesquels la zone limitée par les points P_1 est uniformément graduée, se rapprochent de la courbe régulière. En effet, la courbe qui représente u_x décroît parallèlement à la courbe régulière et la même valeur du déplacement est atteinte plus rapidement avec les grilles C qu'avec les grilles A. Autrement dit, on a besoin de moins d'éléments pour atteindre le même résultat. En ce qui concerne u_y , la courbe représentative du comportement de P_1 dans le maillage C ainsi que la courbe régulière sont confondues. Ce comportement va être également observé dans les figures (4.9a) et (4.9b) qui représentent les déplacements du point P_2 . Par contre, dans les figures (4.10) et (4.11), correspondant respectivement aux points P_3 et P_4 , les maillages C donnent des valeurs qui d'abord suivent la courbe régulière pour s'en éloigner ensuite brutalement. Comme dans ce dernier cas, les résultats numériques s'écartent de la courbe régulière, la zone supposée critique est donc plus étendue et va au-delà des points P_3 et P_4 .

Lorsque les maillages D sont utilisés (cas où la zone supposée critique est graduée d'une manière très raffinée au moyen d'éléments de forme rectangulaire et

trapézoïdale simultanément), il est noté que les déplacements aux points P_i préalablement choisis, présentent un caractère oscillatoire avec d'importantes amplitudes. Les fluctuations sont situées tantôt au-dessus de la courbe régulière, tantôt au-dessous, en la coupant parfois, comme c'est le cas dans les figures (4.11). L'explication probable d'un tel comportement pourrait être le fait que le rapport des dimensions d'un élément et le nombre d'éléments trapézoïdaux présents dans le maillage jouent un rôle important dans l'atteinte de la solution exacte. Le fait que les quadrillages ne tolèrent pas de rapport important des dimensions des éléments ainsi qu'un nombre important d'éléments de forme trapézoïdale est illustré par ces fluctuations. Il peut être remarqué à partir des interprétations ci-dessus que la discrétisation de type A reste la plus appropriée pour déterminer d'une manière rapide et efficace le champ de déplacement.

4.4.3.2. Champ de Contraintes

Les isobares relatives aux différents maillages décrits dans le paragraphe (4.4.2.) sont représentées dans les figures (4.12) à (4.15). On remarque d'abord dans la zone non chargée la présence d'isobares. Bien que ces dernières correspondent à des valeurs relativement faibles, leur apparition dans cette zone met en évidence la diffusion de l'effet du chargement appliqué sur la plaque. Ce résultat confirme bien que l'hypothèse émise par Sommerfeld [10] et appliquée ensuite par d'autres chercheurs [11,12,16,38] n'est pas fondée. Cette hypothèse stipule que seule la zone de la plaque délimitée par les droites parallèles aux côtés non chargés et passant par les points où le chargement s'arrête est comprimée. En outre, ces résultats obtenus au moyen de la méthode des éléments finis confortent ceux atteints par Pavlovic et Baker [14,15,18] ainsi que ceux de Legget [13] dont les travaux ont été basés sur la diffusion des contraintes à travers la plaque. Les premiers auteurs ont utilisé un calcul analytique basé sur le principe de l'énergie minimum et le second a proposé une solution à l'équation différentielle régissant le comportement de la plaque.

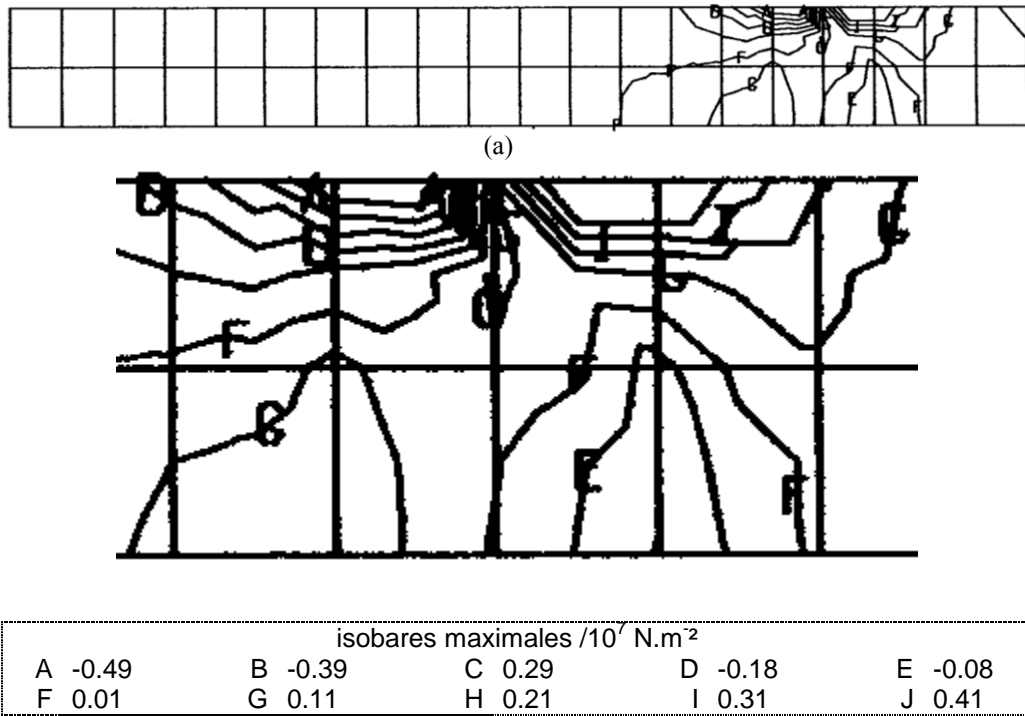


Figure (4.12a): isobares relatives au maillage de type A comportant 40 éléments et 284 degrés de liberté

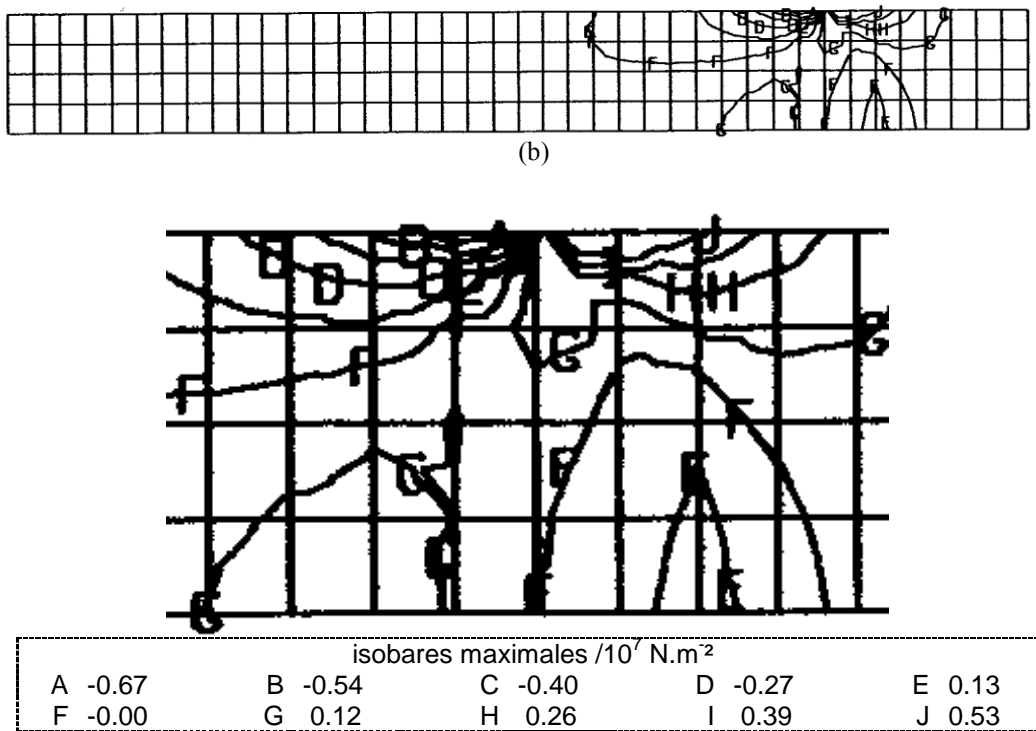
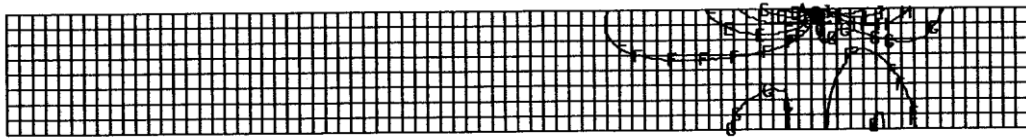
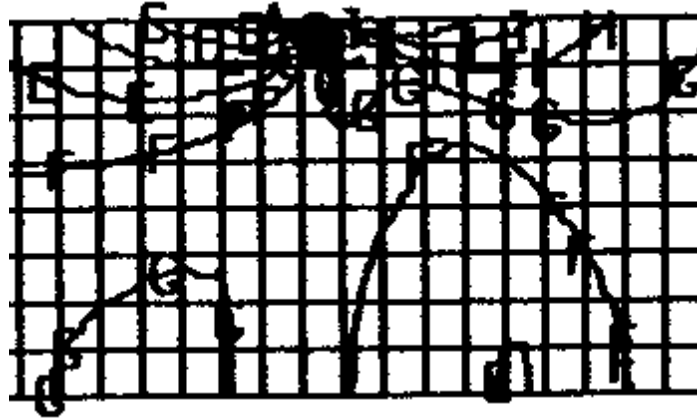


Figure (4.12b): isobares relatives au maillage de type A comportant 160 éléments et 1 048 degrés de liberté



(c)



isobares maximales /10 ⁷ N.m ²				
A -0.77	B -0.62	C -0.46	D -0.31	E -0.16
F -0.00	G 0.14	H 0.29	I 0.44	J 0.60

Figure (4.12c): isobares relatives au maillage de type A comportant 640 éléments et 4 016 degrés de liberté

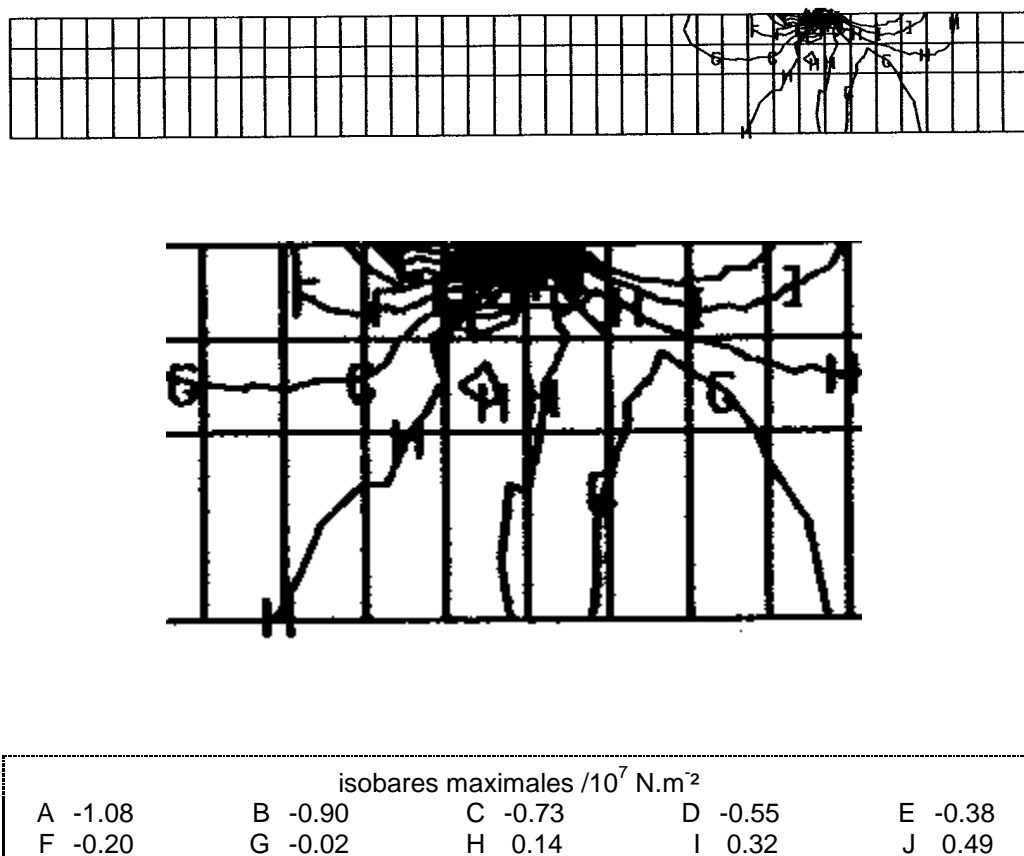
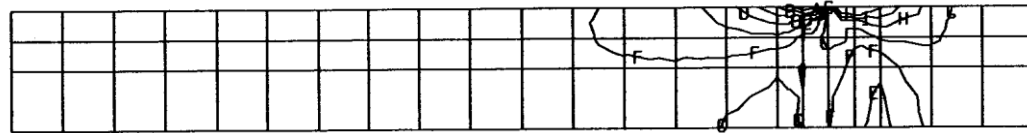
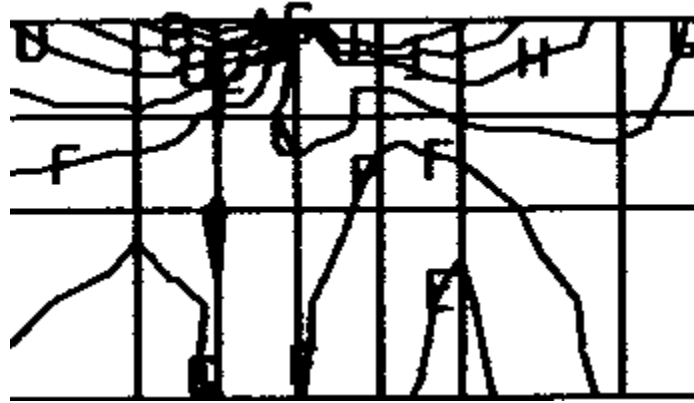


Figure (4.13) : isobares relatives au maillage du type B comportant 132 éléments et 890 degrés de liberté

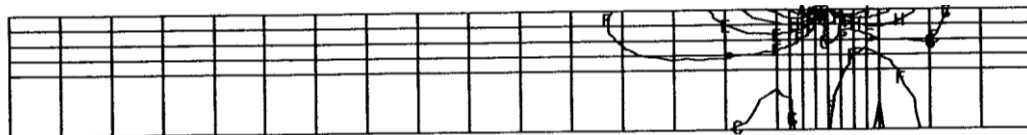


(a)

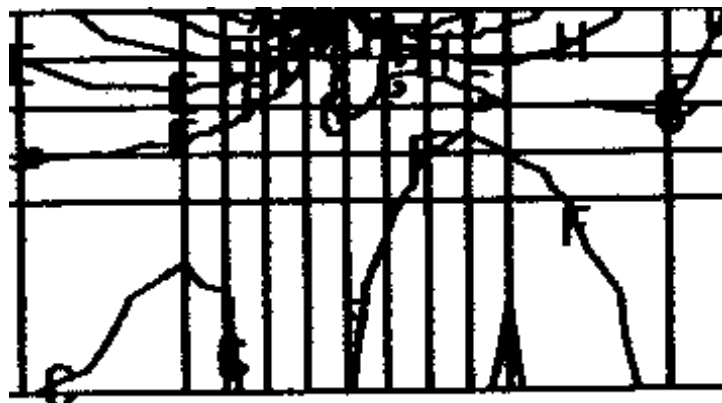


isobares maximales / 10^7 N.m^{-2}				
A -0.67	B -0.54	C -0.40	D -0.27	E -0.13
F -0.00	G 0.12	H 0.26	I 0.39	J 0.53

Figure (4.14a): isobares relatives au maillage de type C comportant 66 éléments et 446 degrés de liberté

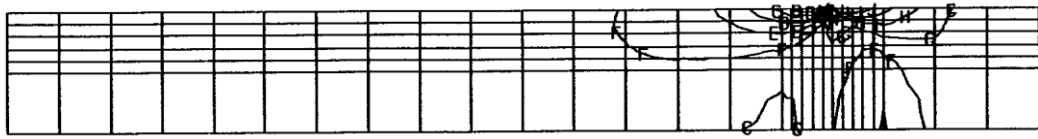


(b)

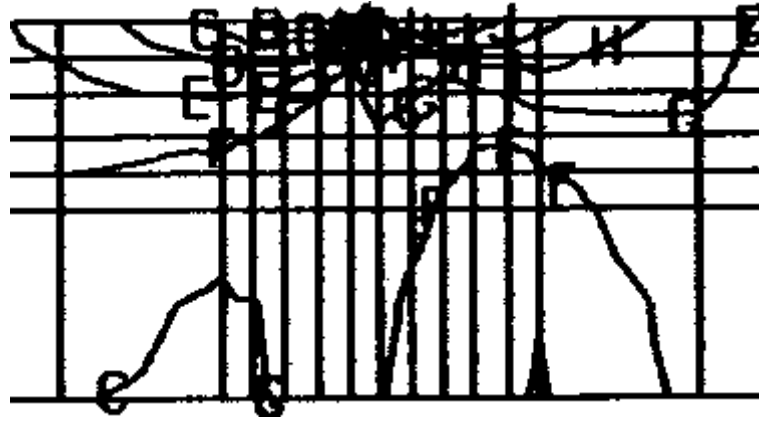


isobares maximales / 10^7 N.m^{-2}				
A -0.77	B -0.62	C -0.46	D -0.31	E -0.16
F -0.00	G 0.14	H 0.29	I 0.44	J 0.60

Figure (4.14b): isobares relatives au maillage de type C comportant 130 éléments et 842 degrés de liberté

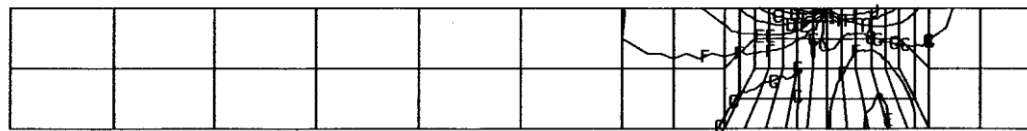


(c)

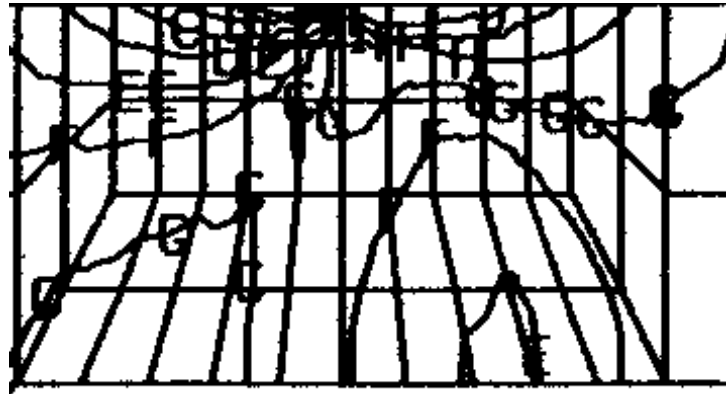


isobares maximales / 10^7 N.m ²									
A	-0.79	B	-0.63	C	-0.47	D	-0.32	E	-0.16
F	-0.01	G	0.14	H	0.30	I	0.45	J	0.61

Figure (4.14c) : isobares relatives au maillage de type C comportant 168 éléments et 1 076 degrés de liberté

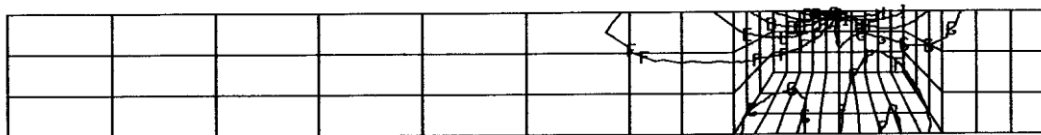


(a)

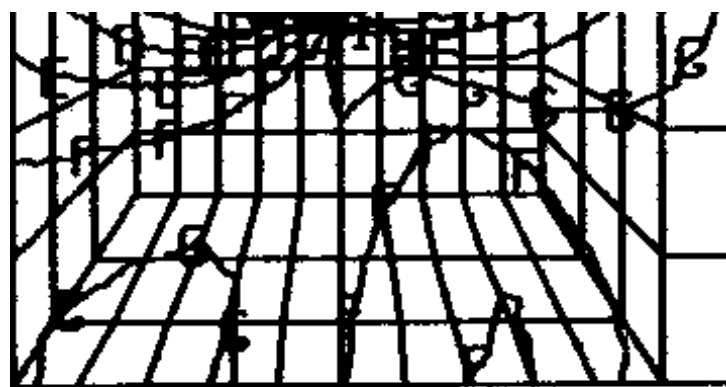


isobares maximales / 10^7 N.m ²									
A	-0,69	B	-0,55	C	-0,41	D	-0,28	E	-0,14
F	-0,01	G	0,12	H	0,26	I	0,39	J	0,53

Figure (4.15a): isobares relatives au maillage de type D comportant 68 éléments et 460 degrés de liberté



(b)

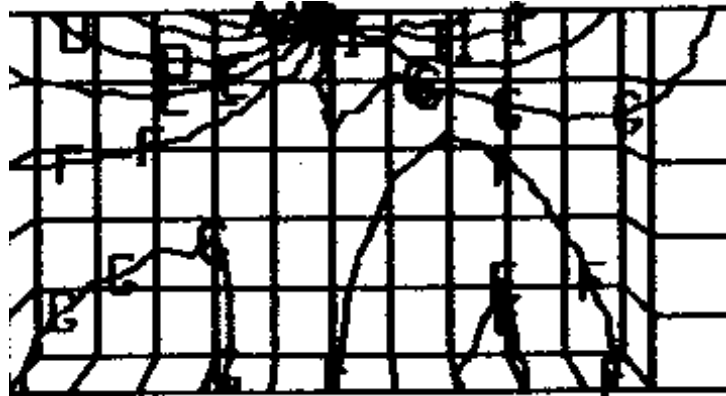


isobares maximales / 10^7 N.m ²									
A	-0,74	B	-0,59	C	-0,45	D	-0,30	E	-0,15
F	-0,00	G	0,13	H	0,28	I	0,43	J	0,58

Figure (4.15b): isobares relatives au maillage de type D comportant 111 éléments et 726 degrés de liberté

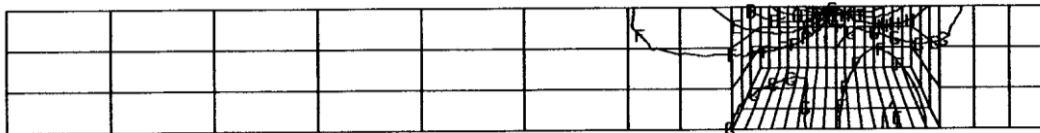


(c)



isobares maximales /10 ⁷ N.m ²									
A	-0,73	B	-0,58	C	-0,44	D	-0,29	E	-0,15
F	-0,00	G	0,13	H	0,28	I	0,42	J	0,57

Figure (4.15c) : isobares relatives au maillage de type D comportant 120 éléments et 774 degrés de liberté

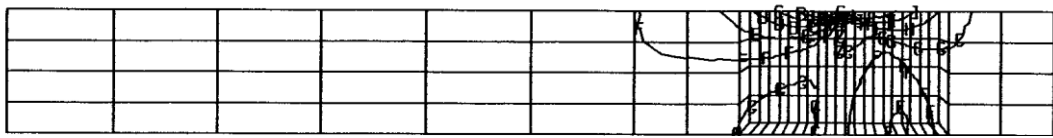


(d)

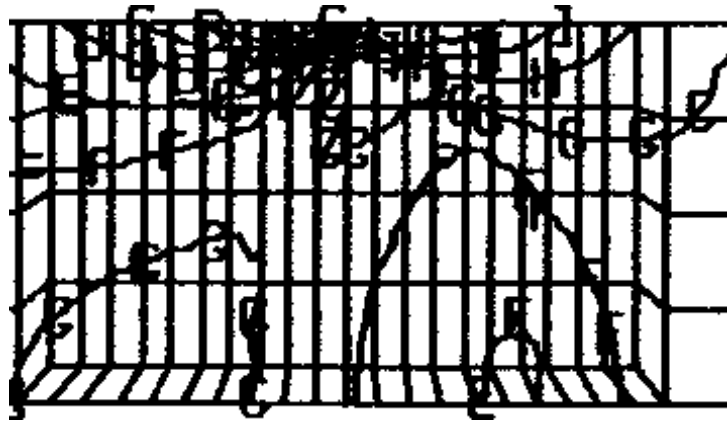


isobares maximales /10 ⁷ N.m ²									
A	-0,72	B	-0,58	C	-0,44	D	-0,29	E	-0,15
F	-0,01	G	0,12	H	0,27	I	0,41	J	0,55

Figure (4.15d) : isobares relatives au maillage de type D comportant 147 éléments et 954 degrés de liberté

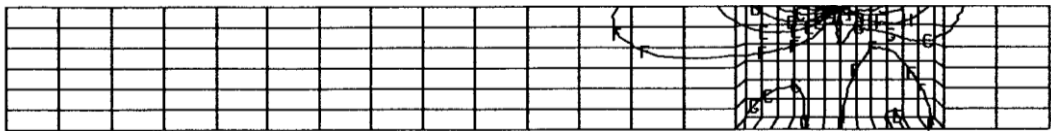


(e)



isobares maximales /10 ⁷ N.m ²				
A -0,71	B -0,57	C -0,43	D -0,29	E -0,15
F -0,01	G 0,12	H 0,26	I 0,40	J 0,54

Figure (4.15e) : isobares relatives au maillage de type D comportant 148 éléments et 960 degrés de liberté



(f)



isobares maximales /10 ⁷ N.m ²				
A -0,75	B -0,60	C -0,45	D -0,30	E -0,15
F -0,00	G 0,14	H 0,28	I 0,43	J 0,58

Figure (4.15f): isobares relatives au maillage de type D comportant 192 éléments et 1 224 degrés de liberté

On remarque à travers les différentes figures que les isobares de valeurs importantes sont situées autour du point d'arrêt du chargement. Dans les zones plus éloignées, ces valeurs s'estompent peu à peu. La contrainte maximale apparaît au niveau du point P_1 , point marquant l'arrêt de l'application du chargement. Les résultats enregistrés sont rassemblés dans le tableau 4.2. Le maillage B, maillage présentant un quadrillage très serré autour du point P_1 , donne la valeur la plus importante de la contrainte. Les autres types de discrétisation convergent vers cette valeur, comme c'est le cas des maillages A et C, ou bien effectuent des fluctuations comme dans le cas des maillages D. Par conséquent, le maillage B se révèle comme étant le maillage le plus approprié pour repérer et évaluer les contraintes maximales relatives au problème traité.

Tableau 4.2

Contraintes maximales obtenues à partir des maillages A, B, C et D

Type de maillage	Nombre de degrés de liberté	Nombre d'éléments	Contraintes maximales en P_1 / 10^7 N.m ²
A	284	40	-0.49
	1 048	160	-0.67
	4 016	640	-0.77
B	890	132	-1.08
C	446	66	-0.67
	842	130	-0.77
	1 076	168	-0.79
D	440	68	-0.69
	726	111	-0.74
	774	120	-0.73
	954	147	-0.72
	960	148	-0.71
	1 224	192	-0.75

4.4.4. Etude de la Convergence

Les expériences numériques menées dans le présent chapitre ont pour but de construire un modèle optimal sur lequel pourraient être effectués les essais numériques de flambement. Les différents types de maillages étudiés se différencient par le choix des zones graduées d'une manière relativement raffinée. De plus, le nombre d'éléments a été régulièrement augmenté dans chaque type de maillage afin d'observer l'influence de cette augmentation sur les résultats obtenus.

Dans la recherche du champ de déplacement, il a été constaté qu'en général 160 éléments dans le maillage uniformément gradué, suffisent pour atteindre la solution cherchée. Dans le cas des autres maillages, l'augmentation du nombre d'éléments conduit à une fluctuation de la valeur du déplacement autour de la courbe régulière

avec une tendance de rapprochement vers celle-ci. Par conséquent, le maillage uniforme est le plus convenable pour mener l'étude du champ de déplacements.

Dans la recherche du champ de contraintes, le modèle uniforme avec 640 éléments donne le même résultat que le modèle de type C avec 130 éléments et le raffinement de ce dernier modèle indique une tendance croissante de la contrainte. D'autre part, le maillage B contenant 132 éléments concentrés spécifiquement autour du point d'arrêt du chargement donne une valeur supérieure de la contrainte avec un nombre inférieur d'éléments. Ce résultat laisse supposer que le maillage B est le plus approprié dans la détermination du champ de contraintes.

4.5. Conclusion

Il peut être conclu à partir des résultats obtenus que la zone qui doit être graduée relativement serrée pour atteindre le plus rapidement possible les résultats recherchés, n'occupe pas le même espace selon l'orientation des travaux.

En effet, les résultats relatifs aux contraintes convergent tous vers les valeurs obtenues au moyen du maillage B. Il est rappelé que le maillage B est un maillage construit par une subdivision très serrée dans une zone relativement restreinte située autour du point où le chargement s'arrête (P_1). Donc, il suffit de graduer finement la zone autour de P_1 pour atteindre rapidement le résultat souhaité.

Par contre, si les investigations sont axées dans une direction où il est souhaitable d'aboutir au champ de déplacement 'exact', ce n'est plus le maillage B qui doit être adopté mais plutôt le maillage de type A où l'élément structural est uniformément gradué. Dans la recherche du champ de déplacements des plaques non-uniformément comprimées, il ne s'agit pas de distinguer la participation d'une région de la structure par rapport à une autre, car toutes les parties de la plaque répondent aux sollicitations simultanément. Ainsi, le maillage uniforme contrôle et reflète beaucoup mieux le comportement de la plaque que les autres types de discrétisation. Il peut être également constaté, à partir du présent travail, que si le rapport des dimensions au sein d'un même élément ainsi que le nombre d'éléments de forme trapézoïdale présents dans le maillage sont importants, ceci conduit à des résultats très éloignés de la solution exacte. Pour effectuer l'analyse du champ de déplacement d'une plaque non-uniformément comprimée, il est donc judicieux d'utiliser un maillage uniforme constitué d'éléments dont la forme se rapproche de celle du carré. Ce type de discrétisation convient notamment à l'analyse du flambement des plaques où le champ de déplacement décrivant les différentes ondulations de la structure est d'un intérêt particulier.

CHAPITRE 5
ANALYSE DU PROBLEME DU
FLAMBEMENT DES PLAQUES MINCES
PAR ELEMENTS FINIS

5.1. Introduction

Dans le présent chapitre, l'analyse du flambement d'une plaque mince simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale est menée. A cet effet, d'abord l'élément structural est modélisé, ensuite la formulation du problème posé est développée selon une approche énergétique appropriée à la méthode utilisée dans la présente recherche, notamment la méthode des éléments finis, enfin la résolution du problème ainsi que sa réduction de variables sont présentées.

L'étude de ce problème de stabilité particulier a été menée au moyen d'un élément isoparamétrique quadrilatéral mince comportant huit nœuds (voir fig.(5.1)). Cet élément peut être utilisé aussi bien pour une action membranaire que flexionnelle. Les deux translations indépendantes dans son propre plan ont été bloquées, la translation transversale ainsi que les deux rotations autour des axes adjacents à ses côtés sont utilisées. De plus, étant donné sa faible épaisseur, les déplacements latéraux dus au cisaillement sont totalement négligés.

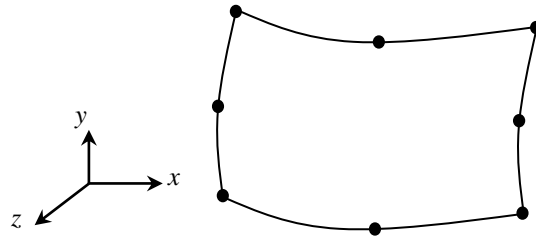


Figure (5.1) : Élément isoparamétrique quadrilatéral à 8 nœuds

5.2. Approche Énergétique du Problème

5.2.1. Énergie Potentielle de Déformation

La plaque rectangulaire de la figure (1.1) est comprimée dans son plan moyen par des forces non uniformément réparties le long de sa largeur. L'augmentation graduelle de l'intensité de ces forces provoque l'instabilité de la forme plane d'équilibre de la plaque et la valeur critique de la compression peut être obtenue soit par l'intégration de l'équation différentielle régissant le comportement de la plaque, soit par la considération de l'énergie du système comme c'est le cas dans la méthode des éléments finis, méthode utilisée dans la présente investigation. Cette énergie fait intervenir l'expression de l'énergie de déformation due à la flexion de la plaque ainsi que l'expression du travail effectué par les forces de compression. La loi de Hooke est utilisée pour relier le vecteur des déformations $\{\mathcal{E}\}$ au vecteur des contraintes $\{\sigma\}$ selon la relation bien connue :

$$\{\sigma\} = [D]\{\mathcal{E}\} \quad (5.1)$$

où $[D]$ est la matrice carrée d'ordre 6 qui s'écrit de la manière suivante :

$$[D] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2/12 & \nu h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu h^2/12 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h^2(1-\nu)/24 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

où E est le module de Young, h est l'épaisseur de la plaque et ν est le coefficient de Poisson. L'énergie de déformation relative à un élément peut être exprimée au moyen de l'intégrale :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{\text{surface de l'élément}} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy \quad (5.3)$$

Cette intégrale peut être exprimée à son tour en fonction de la matrice de rigidité élastique flexionnelle $[S_e]$ d'un élément et des déplacements généralisés nodaux $\{u_e\}$ de cet élément de la manière suivante :

$$U_e = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [S_e] \{u_e\} \quad (5.4)$$

5.2.2. Travail Effectué par les Forces de Compression

Les composantes du tenseur des contraintes d'une plaque comprimée dans une direction x sont nulles sauf dans cette dite direction et la matrice des contraintes est définie comme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Le travail des forces est exprimé pour un élément par :

$$W_e = -\frac{1}{2} \iint_{\text{surface de l'élément}} \left(\sigma_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right) h dx dy \quad (5.6)$$

et peut être écrit sous la forme matricielle suivante [26,36,40] :

$$W_e = -\frac{1}{2} \iint_{\text{surface de l'élément}} \begin{bmatrix} \partial u_z / \partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_z / \partial x \\ 0 \end{Bmatrix} h dx dy \quad (5.7)$$

L'intégration numérique est effectuée terme par terme sur toute la surface de l'élément de la plaque et enfin W_e peut être écrit sous la forme :

$$W_e = -\frac{1}{2} \{u_e\}^T [S'_e] \{u_e\} \quad (5.8)$$

où $[S'_e]$ est la matrice de rigidité géométrique d'un élément.

5.2.3. Energie Potentielle Totale

L'énergie potentielle totale d'un élément peut être obtenue en additionnant simplement l'expression de l'énergie de déformation à celle du travail effectué par les forces de compression dans cet élément, ce qui conduit à :

$$U_{e\ total} = U_e + W_e \quad (5.9)$$

ou encore
$$U_{e\ total} = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [S_e] \{u_e\} - \frac{1}{2} \{u_e\}^T [S'_e] \{u_e\} \quad (5.10)$$

ou encore d'une manière plus compacte :

$$U_{e\ total} = \frac{1}{2} \{u_e\}^T ([S_e] - [S'_e]) \{u_e\} \quad (5.11)$$

Pour l'ensemble de la plaque l'énergie potentielle totale sera :

$$U_{\ total} = \sum_{i=1}^{i=n} U_{e\ total_i} \quad (5.12)$$

où n est le nombre d'éléments constituant le modèle.

5.3. Formulation et Résolution du Problème de Stabilité

5.3.1. Introduction

La compression est appliquée pas à pas sur la plaque et la matrice de rigidité géométrique est évaluée à chacun de ces pas. On suppose que la plaque est parfaitement plate avant l'application de la compression et on suppose également qu'il n'y a aucun déplacement transversal avant que la charge critique ne soit atteinte.

5.3.2. Formulation du Problème de Stabilité

La position de l'équilibre statique d'une structure élastique est la position dans laquelle la structure est dans un état d'énergie potentielle minimale. Autrement dit, la solution du problème de stabilité traité fait intervenir l'évaluation du minimum de la quantité U_{total} pour l'ensemble de la plaque. Il faut noter que l'expression de cette énergie se présente sous la forme d'une intégrale qui est une fonction de fonctions-déplacements ainsi que de leurs dérivées (déformations). Le problème ainsi posé prend la forme d'un problème 'variationnel' [41,42]. La minimisation de l'énergie potentielle totale revient tout simplement à rendre la fonctionnelle U_{total} stationnaire, autrement dit :

$$\frac{\partial U_{e\ total}}{\partial \{u_e\}} = \frac{\partial (U_e + W_e)}{\partial \{u_e\}} = 0 \quad (5.13)$$

Sous la forme matricielle, l'équation ci-dessus devient :

$$([S_e] - [S'_e]) \{u_e\} = 0 \quad (5.14)$$

Maintenant pour l'ensemble de la plaque, l'équation (5.14) donne :

$$([S] - [S']) \{u\} = 0 \quad (5.15)$$

5.3.3. Résolution du Problème de Stabilité

Après sa formulation, la résolution du problème de stabilité posé consiste à trouver la valeur de la force appliquée qui pourrait provoquer le flambement de la plaque. Pour ce faire, la matrice de rigidité géométrique $[S']$ de la plaque est évaluée pour une valeur unitaire (un $N.ml^{-1}$) de la force appliquée et un facteur d'intensité f de cette force est utilisé afin de prendre en compte la valeur réelle de la sollicitation. L'équation (5.15) peut être alors écrite sous la forme matricielle suivante:

$$[[S] - f[S'']] \{u\} = 0 \quad (5.16)$$

où $f[S''] = [S']$ (5.17)

Il s'agit donc de calculer les vecteurs et valeurs propres de l'équation (5.16). La quantité f représente le multiplicateur (ou facteur d'intensité) de la force appliquée supposée qui provoquerait le flambement de l'élément structural.

La matrice globale de la relation (5.16) est obtenue en additionnant terme par terme toutes les composantes de la matrice de rigidité flexionnelle avec celles de la matrice de rigidité géométrique. Lorsque la force appliquée atteint une valeur critique, l'énergie potentielle totale est minimale et l'équation homogène (5.16) possède une solution non triviale. La force critique est la plus petite racine du déterminant :

$$\det[[S] - f[S'']] = 0 \quad (5.18)$$

La recherche de la valeur critique se fait pas à pas en commençant par une valeur arbitraire de départ. A chaque valeur de f correspond un nouveau déterminant. La plus petite valeur de f qui annule l'équation (5.18) correspond à la force de flambement cherchée.

5.4. Réduction du Problème de Stabilité

5.4.1. Introduction

La solution du problème de vecteurs et valeurs propres par la méthode des éléments finis nécessite souvent un espace mémoire de stockage ainsi qu'un temps d'exécution de calcul automatique très importants et peut de ce fait devenir très onéreuse.

Les méthodes de réduction de variables représentent une alternative pratique dans ce type d'analyse car celles-ci permettent de résoudre des problèmes au moyen d'un nombre d'inconnues inférieur au nombre réel de degrés de liberté du problème posé sans pour autant enregistrer une perte importante dans la précision de la solution recherchée [43,44]. Il arrive que beaucoup de degrés de liberté, dans un problème possédant un grand nombre d'inconnues, aient une faible influence sur la matrice de rigidité géométrique celle-ci n'utilisant que les premières dérivées des déplacements. Par conséquent, l'aspect géométrique de certains degrés de liberté peut être éliminé en conservant, bien entendu, l'équilibre statique de l'ensemble de l'élément structural. Dans le présent travail une réduction de variables a été adoptée. Lors de cette réduction la technique frontale bien connue [45,46] a été utilisée.

5.4.2. Réduction du Nombre de Degrés de Liberté

Le vecteur déplacement généralisé $\{u\}$ est partitionné comme suit :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ \{u_r\} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

où $\{u_m\}$ est le vecteur qui contient tous les degrés de liberté pris en compte dans l'analyse (appelés degré de liberté 'maîtres') et celui-ci se rapporte à un nœud maître, tandis que $\{u_r\}$ est un vecteur qui contient les degrés de liberté qui doivent être omis (appelés degré de liberté 'esclaves') et celui-ci se rapporte à un nœud esclave. L'élimination des termes du vecteur $\{u_r\}$ représente une étape de la méthode frontale [46]. L'équation (5.16) s'écrit maintenant :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [S_{mm}] & [S_{mr}] \\ [S_{rm}] & [S_{rr}] \end{bmatrix} - f \begin{bmatrix} [S''_{mm}] & [S''_{mr}] \\ [S''_{rm}] & [S''_{rr}] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ \{u_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

La deuxième ligne de cette équation matricielle exprime le fait que l'équilibre statique doit être vérifié au niveau des degrés de liberté esclaves $\{u_r\}$ c'est-à-dire ceux qui doivent être réduits. L'aspect géométrique de ces derniers est éliminé et la matrice de rigidité est conservée ce qui se traduit par la relation :

$$[S_{rm}]\{u_m\} + [S_{rr}]\{u_r\} = \{0\} \quad (5.21)$$

conduisant à :

$$\{u_r\} = -[S_{rr}]^{-1}[S_{rm}]\{u_m\} \quad (5.22)$$

Cette dernière relation représente à son tour une condition aux limites supplémentaire relative aux degrés de liberté. La relation (5.22) est ensuite introduite dans la reformulation de l'énergie de déformation ainsi que dans l'expression du travail effectué par les forces extérieures de façon à éliminer le vecteur $\{u_r\}$. Après développement, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \{u_m\}^T \left([S_{mm}] - [S_{mr}][S_{rr}]^{-1}[S_{rm}] \right) \{u_m\} \quad (5.23)$$

ou bien d'une manière plus compacte :

$$U = \frac{1}{2} \{u_m\}^T [S_m] \{u_m\} \quad (5.24)$$

De la même manière, le travail des forces extérieures prend la forme suivante :

$$W = -\frac{1}{2} \{u_m\}^T \left([S''_{mm}] - [S''_{mr}][S_{rr}]^{-1}[S_{rm}] - [S_{mr}][S_{rr}]^{-1}[S''_{rm}] + [S_{mr}][S_{rr}]^{-1}[S''_{rr}][S_{rr}]^{-1}[S_{rm}] \right) \{u_m\} \quad (5.25)$$

ou encore d'une manière plus compacte :

$$W = -\frac{1}{2} \{u_m\}^T [S''_m] \{u_m\} \quad (5.26)$$

Les matrices $[S_m]$ et $[S''_m]$ sont le résultat des termes entourés par des parenthèses des équations (5.23) et (5.25) ; celles-ci représentent respectivement la rigidité flexionnelle effective ainsi que la rigidité géométrique effective du système après réduction. Le système d'équations devient alors :

$$\left[[S_m] - f [S''_m] \right] \{u_m\} = \{0\} \quad (5.27)$$

où l'indice m représente les degrés de liberté maîtres.

La réduction matricielle implique obligatoirement un choix qui va être porté sur certains degrés de liberté. Cette sélection a fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux réalisés par Irons [43] et Guyan [44]. Ces auteurs ont développé des procédures d'élimination des degrés de liberté en se basant sur le rôle de ces derniers

dans le phénomène physique étudié et ont éliminé de ce fait les degrés de liberté dont la participation est relativement négligeable. Toutefois, Irons et Guyan s'accordent sur le fait que le choix des degrés de liberté qu'il faut conserver lors de l'analyse reste toujours délicat. Dans la présente étude du flambement, les degrés de liberté maîtres, c'est-à-dire ceux qui seront retenus lors des calculs, devront être ceux qui décrivent le mieux possible le comportement de la plaque et donc ceux qui participent le plus aux déformations de part leurs positions dans l'élément structural. De ce fait, les degrés de liberté situés dans les régions les moins rigides et les plus chargées seront sélectionnés en qualité de maîtres. En termes de calcul, cette sélection est faite sur la base de l'étude du rapport S_{ii} / S''_{ii} qui fait intervenir les éléments diagonaux des matrices de rigidité flexionnelle et géométrique. Lorsque le rapport S_{ii} / S''_{ii} se présente avec une valeur importante cela signifie que la compression est faible ou bien que la rigidité est importante ce qui traduit un bon maintien au sein de l'élément structural et il n'est donc pas intéressant de retenir le degré de liberté i en qualité de maître. En revanche, lorsque le rapport S_{ii} / S''_{ii} est faible, autrement dit lorsque l'élément matriciel S''_{ii} a une valeur importante et (ou bien) S_{ii} est petit, la probabilité de l'instabilité du degré de liberté i ne doit pas être négligée. Celui-ci devra, par conséquent, être sélectionné en qualité de maître. L'élimination de chaque degré de liberté esclave est suivie par la reprise du calcul au moyen des matrices de rigidité réduites. Cette opération, effectuée au moyen de la technique frontale dont la formulation est résumée dans le paragraphe suivant, est répétée autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à ce que le nombre de degrés de liberté maîtres qui est fixé à l'avance soit atteint.

Cette réduction de variables a fait l'objet d'expériences numériques effectuées lors de la présente recherche. Ces expériences seront présentées et discutées dans le sixième chapitre du présent mémoire. Ces investigations ont été menées dans le but de déterminer le pourcentage de degrés de liberté le plus adéquat à prendre en compte lors de l'analyse du flambement de la plaque.

D'autre part, la résolution numérique et expérimentale des problèmes réduits, comme c'est le cas des travaux [45,47,48,49], recommande l'utilisation d'un nombre limité de modes de flambement. Dans la présente recherche, il a été remarqué que les résultats obtenus pour un mode k divergent lorsque la valeur de k se rapproche du nombre de degrés maîtres. En s'appuyant sur ces résultats les tests numériques ont été réalisés pour les trois premiers modes de flambement.

5.4.3. Technique Frontale

Dans la technique frontale, le processus de réduction de variables s'effectue en alternance avec l'assemblage matricielle régissant la résolution du problème posé. Lors de l'enregistrement des données, certains degrés de liberté, en fonction des matrices de rigidité flexionnelle et géométrique auxquelles ils sont associés, sont directement transformés en 'esclaves' (comme cela est expliqué plus haut) et sont immédiatement éliminés. Il est clair que suite à ce mécanisme de calcul l'espace mémoire de stockage nécessaire devient avantageusement réduit [43,46].

L'énergie de déformation d'un système doté de n degrés de liberté s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] [S] [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (5.28)$$

et le travail effectué par les forces de compression appliquées à ce même système a pour expression :

$$W = -\frac{1}{2} [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] [S''] [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \quad (5.29)$$

La condition qui minimise l'énergie de déformation par rapport à la variable esclave u_r est selon [45]:

$$S_{r1}u_1 + \dots + S_{rr}u_r + \dots + S_{rn}u_n = 0 \quad (5.30)$$

La substitution de l'élément u_r dans la relation (5.28) donne la forme réduite de la matrice $[S]$ dont la ligne ainsi que la colonne r sont supprimées ; cette matrice est de suite notée par $[S]^*$ et ses termes ont pour expression :

$$S_{ij}^* = S_{ij} - S_{ir} \frac{S_{jr}}{S_{rr}} \quad (5.31)$$

De la même manière la matrice $[S'']$ devient $[S'']^*$ dont les termes ont pour expression :

$$S_{ij}''^* = S_{ij}'' - S_{ir}'' \frac{S_{jr}''}{S_{rr}''} - S_{jr}'' \frac{S_{ir}''}{S_{rr}''} + S_{rr}'' \frac{S_{ir}''}{S_{rr}''} \frac{S_{jr}''}{S_{rr}''} \quad (5.32)$$

La réduction de la variable u_r peut être accélérée considérablement en construisant un vecteur $\{G\}$ et par la suite un vecteur $\{H\}$ calculé par substitution et stocké en mémoire. Les composantes de ces vecteurs ont pour expressions respectives :

$$G_i = \frac{S_{ir}}{\sqrt{S_{rr}}} \quad (5.33)$$

et

$$H_i = \left(S_{ir}'' - \frac{1}{2} S_{rr}'' \frac{G_i}{\sqrt{S_{rr}}} \right) \frac{1}{\sqrt{S_{rr}}} \quad (5.34)$$

Enfin, les composantes des matrices $[S]^*$ et $[S'']^*$ sont obtenues en appliquant les relations :

$$S_{ij}^* = S_{ij} - G_i \cdot G_j \quad (5.35)$$

$$S_{ij}''^* = S_{ij}'' - G_i \cdot H_j - G_j \cdot H_i \quad (5.36)$$

De cette manière la matrice de rigidité n'est jamais complètement formée et l'espace mémoire dont le rôle est le stockage de la partie triangulaire inférieure de la matrice de rigidité est utilisé d'une manière répétitive pour stocker les coefficients des différentes équations solutionnant le problème posé.

5.5. Conclusion

Dans le présent chapitre l'élément structural qui est l'objet de préoccupation de la présente recherche, notamment la plaque mince simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale, est modélisé moyennant un élément isoparamétrique quadrilatéral mince comportant huit nœuds pouvant subir aussi bien des actions membranaires que flexionnelles.

La formulation du problème de flambement de cette plaque est développée à partir d'une approche énergétique, approche sur laquelle est basée la méthode des éléments finis, méthode utilisée dans la présente étude. Cette formulation a abouti à une

solution du type valeurs et vecteurs propres qui a permis d'obtenir la valeur de la force critique qui provoque le flambement de la plaque.

Etant donné l'importance de l'envergure du problème, une réduction de variables s'est avérée nécessaire ; celle-ci moyennant la technique frontale a permis la récupération d'un espace mémoire de stockage important ainsi que la réduction du temps d'exécution des calculs automatiques.

Enfin, l'analyse présentée dans le présent chapitre est utilisée dans une série d'expériences numériques dont les résultats seront présentés et discutés dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 6

RESULTATS ET DISCUSSIONS

6.1. Préambule

Comme cela a été précisé précédemment, le but de la présente recherche est d'examiner le flambement linéaire élastique des plaques simplement appuyées et sollicitées par une compression non-uniformément répartie représentées sur les figures (1.1) et (1.2). Dans le présent chapitre des expériences numériques, les résultats atteints ainsi que les interprétations inhérents à ces derniers vont être présentés.

Connaissant l'importance de l'impact de l'épaisseur de la plaque sur la valeur de la charge de flambement [50-52], le rapport de la petite dimension en plan de la plaque avec son épaisseur est pris égal à 100 ce qui classe la plaque étudiée parmi les plaques minces. Le module d'élasticité du matériau considéré est $E=209 \times 10^9 \text{N/m}^2$ et le coefficient de Poisson est $\nu=0.3$. Une discrétisation appropriée à ce type d'analyse a été adoptée (voir paragraphe (4.5.)). En effet, les analyses sont conduites sur des maillages uniformément et finement quadrillés. Le modèle de la plaque est construit à partir de l'élément quadrilatéral mince comportant huit nœuds et sa subdivision est construite de manière à ce que les éléments relativement longs soient évités. Les différentes séries de plaques sont analysées au moyen du logiciel Pafec-fe présenté dans le paragraphe (4.2.).

Les déplacements transversaux u_z des nœuds maîtres sont considérés pour les trois premiers modes de flambement de la plaque (voir paragraphe (5.4.2.)). A la fin de chaque expérience numérique le coefficient de flambement K est enregistré, celui-ci correspond à la plus petite charge qui génère le changement de configuration de la plaque et provoque son flambement, toutes les autres charges, étant plus importantes, correspondent à des modes supérieurs de flambement.

Dans le cas classique de la plaque mince simplement appuyée et uniformément comprimée dans une direction la variation du coefficient de flambement K , obtenu au moyen d'un calcul analytique (équation (2.6)) [3], en fonction du rapport des dimensions de la plaque a/b (b étant le côté chargé de la plaque) est représentée par une courbe dont la forme est en guirlande [3,4]. Cette courbe de forme particulière, est en fait constituée par une série de courbes. La première de ces courbes est obtenue pour un ensemble de plaques qui flambent avec une seule demi-onde ; tout en augmentant la valeur du rapport a/b , la seconde courbe est obtenue pour un ensemble de plaques qui flambent avec deux demi-ondes et ainsi de suite. La courbe enveloppe permet de déterminer facilement pour chaque valeur du rapport a/b la charge critique et le nombre de demi-ondes avec lequel la plaque considérée va subir son flambement.

Dans la présente recherche, une démarche similaire a été conduite d'abord pour un chargement uniforme, ensuite pour différents chargements non-uniformément répartis. Dans le cas du premier type de chargement, la forme en guirlande de courbe représentative a été retrouvée avec des valeurs numériques tout à fait comparables, par contre dès que le chargement n'est plus uniforme la forme en guirlande est estompée laissant place à une branche faiblement croissante.

Avant d'effectuer les expériences numériques pour les différents cas de chargements sollicitant les séries de plaques étudiées, il est judicieux de procéder à

des essais de réduction de variables. Ces derniers ont fait l'objet d'investigations, comme cela a été mentionné dans le paragraphe (5.4.2.), dont le but est la détermination du pourcentage de degrés de liberté le plus adéquat à prendre en compte lors de l'analyse du flambement de la plaque.

6.2. Expériences Numériques dans la Recherche des Nœuds Maîtres

Dans le but de trouver le nombre de degrés de liberté maîtres le plus approprié à la présente analyse au flambement, le cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une compression uniforme dans la direction de sa longueur est considéré. Le rapport des dimensions a/b est égal à 5, celui de b/h est égal à 100.

La plaque est modélisée par trois différents maillages uniformes. Dans chaque modèle le nombre de degrés de liberté après réduction, ou nombre de degrés maîtres, est varié de manière à déterminer son influence relative sur la valeur de la charge critique minimale, autrement dit sur le coefficient de flambement minimal K dont la valeur exacte est quatre [4].

Le tableau 6.1 montre les résultats numériques obtenus à partir des trois différentes discrétisations. Celui-ci présente le nombre total d'éléments contenus dans chaque modèle, le nombre total de degrés de liberté du modèle, le nombre de degrés de liberté pris en considération (ou bien degrés maîtres), le rapport formé par le nombre de degrés maîtres et le nombre total des degrés de liberté, la valeur du coefficient de flambement minimal K et enfin l'erreur relative obtenue.

Tableau 6.1

Coefficient de flambement minimal K pour une plaque uniformément comprimée avec un rapport $a/b=5$

nombre d'éléments	nombre total de degrés de liberté	nombre de degrés maîtres	nombre de degrés maîtres / nombre total de degrés de liberté en %	coefficient de flambement minimal K	erreur relative en %
25x2	349	60	17.19	4.0806	2.02
		100	28.65	4.0802	2.01
20x5	640	60	9.38	4.0506	1.27
		100	15.63	4.0506	1.27
		200	31.25	4.0317	0.79
20x10	1260	60	4.76	4.4483	11.21
		80	6.35	4.2252	5.63
		100	7.94	4.0853	2.13
		130	10.32	4.0051	0.13
		200	15.87	4.0023	0.05

En général, il peut être constaté que la tendance des résultats obtenus suit les caractéristiques de la méthode des éléments finis. En effet, les valeurs de K obtenues sont légèrement surestimées [43] et les maillages les plus raffinés donnent les meilleurs résultats. Toutefois, il peut être noté que l'augmentation du nombre de nœuds maîtres, ceci de la valeur 60 à la valeur 100 dans les modèles présentant 50 et 100 éléments, a une influence minime sur le coefficient de flambement bien que des résultats légèrement meilleurs sont obtenus à partir du modèle contenant 100 éléments.

Il peut être remarqué également qu'il est plus judicieux d'utiliser 200 nœuds maîtres dans un maillage raffiné que d'utiliser ce même nombre de nœuds maîtres dans un maillage relativement épars. En effet, les 200 inconnues du deuxième modèle conduit à une valeur de $K=4.0317$, tandis que dans le troisième modèle le résultat enregistré est nettement amélioré avec une valeur de $K=4.0023$. En revanche, une quantité de 17% du nombre total des degrés de liberté représentative des degrés maîtres semble être la plus appropriée pour mener la présente analyse au flambement. En effet, dans les trois tests numériques ce pourcentage semble représenter le niveau à partir duquel les résultats deviennent intéressants. Par conséquent, lorsqu'une bonne précision est requise ce pourcentage, associé évidemment à un maillage raffiné, doit être utilisé comme valeur minimale.

Enfin, il peut être conclu que l'analyse au flambement nécessite un nombre important de degrés de liberté lorsqu'une bonne précision des résultats est requise et que la réduction des inconnues semble avoir un rôle dynamique dans la recherche de la solution de ce type de problème.

6.3. Interprétation et Comparaison des Résultats pour les Cas de Chargement $0 < l/b \leq 1$

Les résultats numériques obtenus à partir des travaux de la présente recherche donnent d'importantes informations aussi bien qualitatives que quantitatives concernant la stabilité des plaques minces simplement appuyées sollicitées par une compression non-uniforme dans une direction.

Les analyses sont effectuées pour six différents cas de chargement avec $l/b=1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ et 0.1 où l est la distance sur laquelle s'étend le chargement et b est la dimension du côté chargé de la plaque. Le coefficient de flambement K est représenté en fonction du rapport a/b (a est la longueur du côté non chargé de la plaque) sur les figures (6.1) et (6.2) pour les différents cas de chargement.

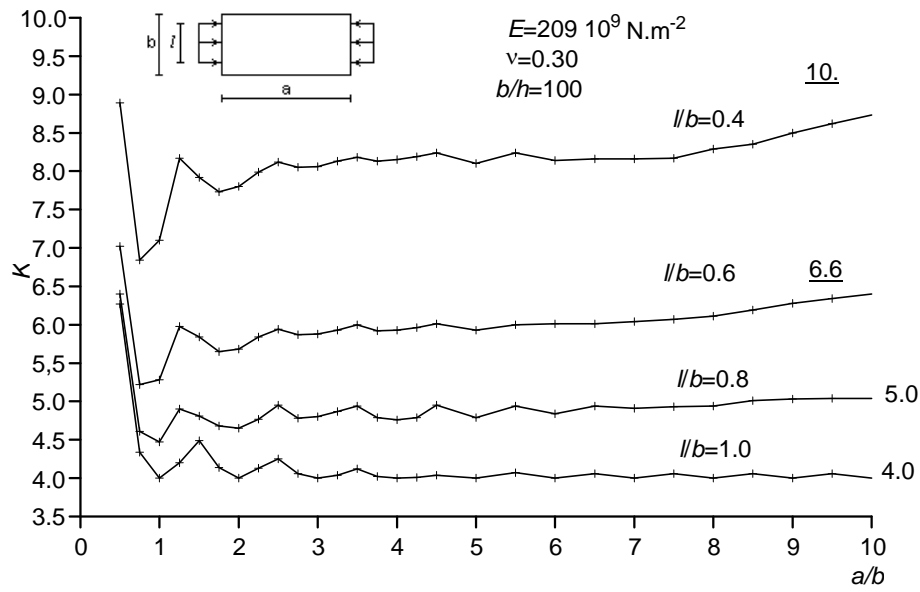


Figure (6.1) : variation de K en fonction de a/b pour $l/b=1.0 ; 0.8 ; 0.6 ; 0.4$

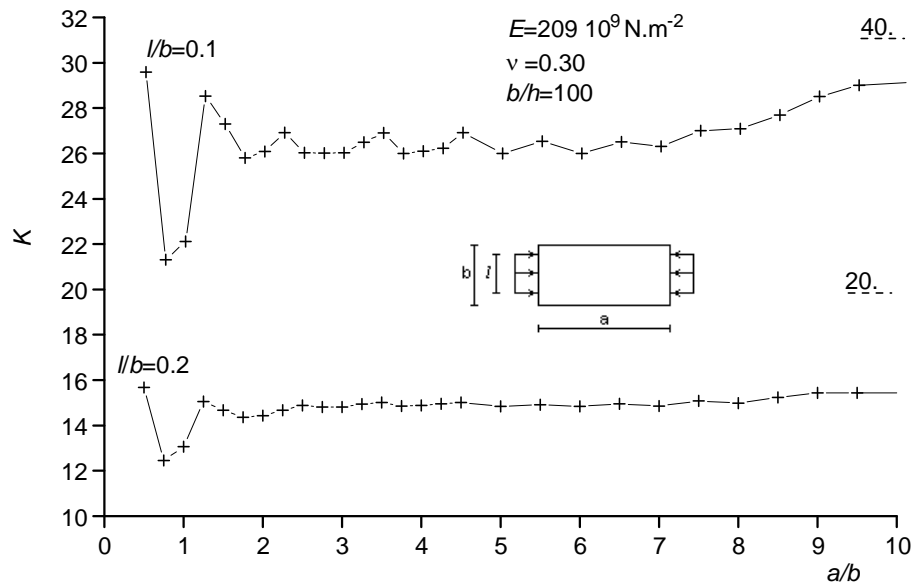


Figure (6.2) : variation de K en fonction de a/b pour $l/b=0.2$ et 0.1

Il peut être observé que la courbe en guirlandes représentative de la variation de K en fonction de a/b [3], relative à la compression uniforme d'une plaque simplement appuyée et qui est tracée entièrement par translation du cas particulier où le flambement se présente en une seule demi-onde, a été obtenue. De plus, il est immédiatement apparent que cette forme caractéristique de la courbe ne s'applique plus lorsque la compression n'est pas uniformément répartie.

Dans la présente recherche il peut être remarqué à partir des graphes que pour les plaques courtes (avec $a/b < 1$) une légère augmentation du rapport a/b conduit à une importante diminution de la valeur de K . Ce phénomène est beaucoup moins apparent lorsque $a/b \geq 1$.

Il peut être également observé que lorsque a/b prend des valeurs importantes, le coefficient K tend vers la valeur limite de $\frac{4}{l/b}$. Ce résultat est en corrélation avec le

principe de Saint Venant selon lequel lorsque des forces appliquées sur une petite surface sont remplacées par un autre système de forces ayant la même résultante, il s'ensuit une influence considérable dans la valeur des contraintes localement, mais un effet tout à fait négligeable dans des sections suffisamment éloignées. Autrement dit, lorsque le rapport a/b prend de grandes proportions, l'effet de bord peut être négligé et les plaques peuvent être considérées dans ce cas comme étant sollicitées par un chargement uniforme. Par contre, lorsque la valeur de l/b est très faible : 0.1 et 0.2, il peut être remarqué que cette tendance est difficilement atteinte. Ces deux derniers cas de chargement rejoignent le cas particulier de la compression ponctuelle qui sera discutée dans le prochain paragraphe. Les valeurs limites sont représentées sur la droite des figures (6.1) et (6.2).

Le tableau 6.2 contient les valeurs de K obtenues d'une part, à partir du présent travail ainsi que par Pavlovic et Baker [18] moyennant une distribution exacte du chargement, et d'autre part ceux obtenus par Yamaki [11] qui a utilisé une distribution simplifiée du chargement.

D'abord, il peut être observé à partir du tableau 6.2 que le chargement uniformément réparti donne des résultats tout à fait semblables bien que les chercheurs aient utilisé des méthodes de calcul différentes. Cependant, ces résultats ne sont plus les mêmes lorsque le chargement devient non uniforme. En effet, il peut être remarqué que si les résultats trouvés par Yamaki sont précis dans le cas de la compression uniforme, ils sous-évaluent K pour les plaques non-uniformément chargées ; de surcroît cette sous-évaluation devient plus prononcée lorsque $a/b > 1$.

Enfin, il ressort du tableau 6.2 que l'analyse du problème au moyen de la méthode des éléments finis a donné des valeurs de K qui se rapprochent de celles obtenues par la méthode analytique utilisant une distribution exacte du chargement.

Tableau 6.2

Valeurs de K relatives au problème représenté sur la figure (1.1). Comparaison des résultats obtenus à partir de l'utilisation de la distribution exacte du chargement (Pavlovic-Baker et le présent travail) avec une distribution approchée (Yamaki).

a/b	l/b	1.0			0.1		
		Yamaki	Pavlovic-Baker	présent travail	Yamaki	Pavlovic-Baker	présent travail
0.5		6.25	6.25	6.27	27.09	28.68	29.59
1.0		4.00	4.00	4.00	19.34	21.43	22.12
1.4		4.47	4.47	4.49	21.12	26.78	27.30
2.0		4.00	4.00	4.00	19.34	25.78	26.06

6.4. Interprétation et Comparaison des Résultats pour le Cas du Chargement $l/b=0$

Il est toujours intéressant d'observer le comportement des plaques étroites ainsi que celui des plaques particulièrement longues sous l'effet d'une compression ponctuelle (voir fig.(1.2)). Aussi, dans le présent travail la stabilité de ces éléments structuraux a également été examinée.

Les résultats découlant de cette investigation sont représentés sur les figures (6.3) et (6.4). Pour des raisons pratiques de présentation, un changement d'échelle a été effectué pour les plaques étroites ($a/b \leq 1$) dans la figure (6.3). Il peut être remarqué à partir de ce graphe que la valeur de K tend vers la valeur 1.45 lorsque a/b tend vers zéro, alors qu'elle se rapproche de la valeur 3 lorsque le rapport a/b est supérieur à 6. Ce dernier cas est le cas classique de la barre comprimée pour lequel K prend la valeur bien connue 4. L'explication plausible d'une telle sous-évaluation du résultat ne peut se rapporter qu'au fonctionnement de l'élément utilisé qui apparemment ne répond pas correctement au chargement ponctuel. La figure (6.3) montre que lorsque les points d'application des forces s'éloignent l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire pour les plaques assez longues, l'élément ne réussit pas à refléter correctement le comportement de la plaque.

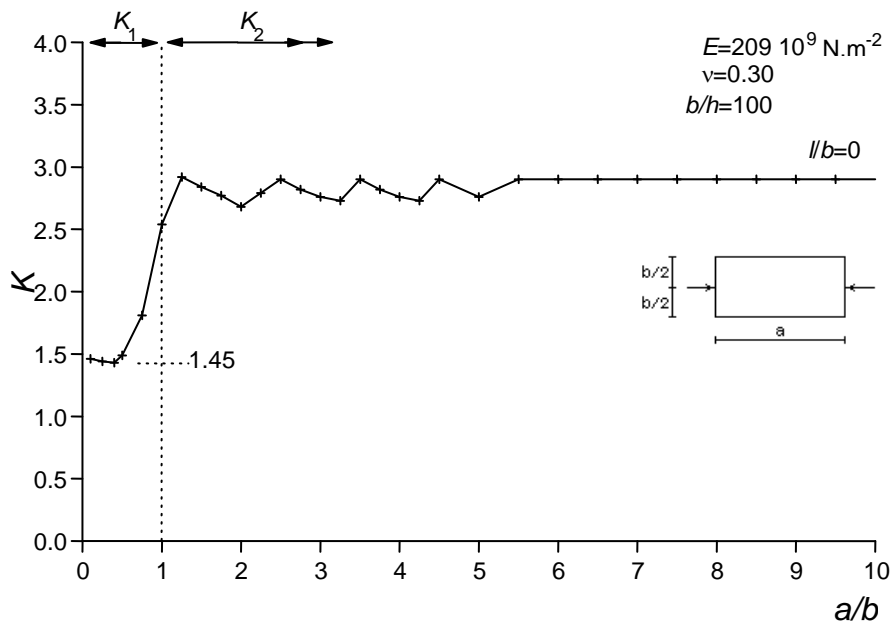


Figure 6.3): variation de K_1 (ou K_2) en fonction de a/b pour $l/b=0$

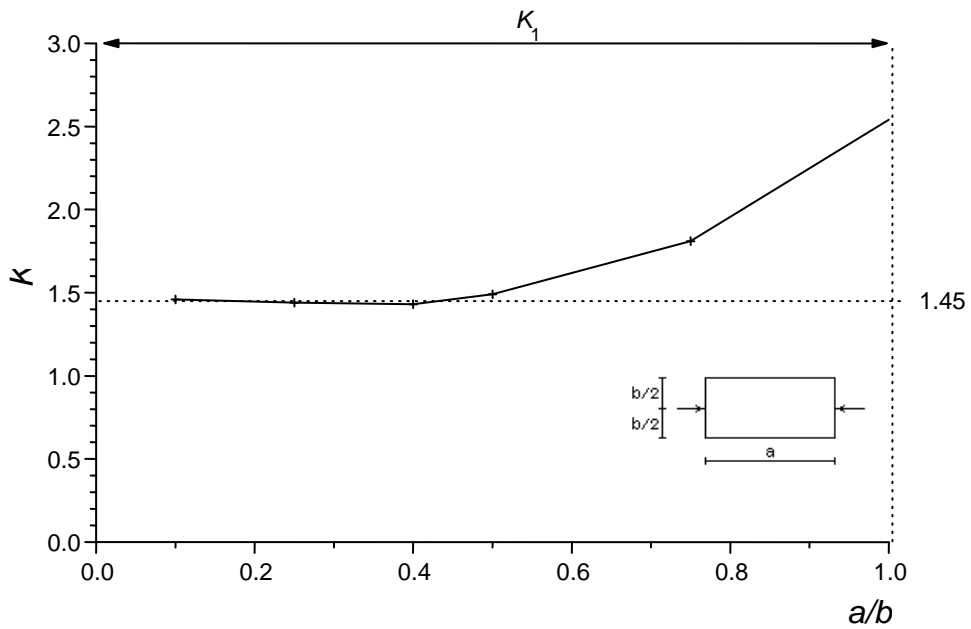


Figure 6.4): variation de K_1 en fonction de a/b pour $l/b=0$

Le tableau 6.3 présente des coefficients de flambement K relatifs au chargement ponctuel avec ($a/b \leq 1$). Celui-ci compare les résultats obtenus par la méthode analytique [18] dans laquelle une distribution exacte du chargement a été utilisée avec ceux obtenus dans la présente étude. Le tableau 6.3 compare également ces derniers résultats avec leurs homologues obtenus au moyen de calculs simplifiés employés par Leggett [13] et Timoshenko [16].

Tableau 6.3

Valeurs de K relatives au problème représenté sur la figure (1.2). Comparaison des résultats obtenus à partir de l'utilisation de la distribution exacte du chargement (Pavlovic-Baker et le présent travail) avec deux distributions approchées (Leggett et Timoshenko).

a/b	distribution simplifiée du chargement		distribution exacte du chargement	
	Timoshenko	Leggett	Pavlovic-Baker	présent travail
1.00	1.91	2.46	2.13	2.54
0.66	1.42	-----	1.47	1.75
0.50	1.31	1.51	1.42	1.49
0.40	1.28	1.47	1.45	1.45
0.33	1.28	1.46	1.47	1.47

Il peut être observé à partir de ce tableau qu'à l'exception du cas de la plaque carrée, les résultats obtenus à partir de la méthode des éléments finis sont proches des résultats de Pavlovic et Baker. Il se dégage également de ces résultats que pour les plaques carrées et les plaques étroites comprimées symétriquement par deux forces ponctuelles, l'erreur relative enregistrée dans l'évaluation du coefficient de flambement par rapport au calcul effectué par Pavlovic et Baker (utilisant une distribution exacte du chargement) n'est pas très importante. En effet, la valeur de cette dernière varie de 0% à la valeur maximale de 16%.

En général, les résultats obtenus dans le cas $l/b=0$ avec ($a/b \leq 1$) sont satisfaisantes. Donc, il peut être conclu que si l'élément utilisé dans la présente analyse ne reflète pas correctement le comportement des plaques longues ($a/b \geq 1$) sous l'effet de la compression ponctuelle, il répond correctement lorsque les plaques sont relativement étroites ($a/b \leq 1$).

6.5. Conclusion

Dans la présente étude, le phénomène de flambement des plaques minces, rectangulaires de dimensions variées, simplement appuyées et non-uniformément comprimées a été étudié.

Des analyses, moyennant la méthode des éléments finis, ont été effectuées dans le but de déterminer le coefficient de flambement pour différents cas de chargements : en commençant par la compression uniformément répartie jusqu'à la compression ponctuelle, ceci en veillant à ce qu'une distribution exacte du chargement soit appliquée.

Afin d'apporter plus d'efficacité dans les calculs, une technique de réduction de variables est appliquée. Cette technique consiste à évaluer le nombre de degrés de liberté à omettre sans enregistrer des pertes dans la précision des résultats voir même l'affecter. Associée à un maillage raffiné, une quantité de 17% du nombre total des degrés de liberté a été utilisée pour mener correctement la présente analyse.

Les expériences numériques réalisées ont montré que la plupart des plaques longues non-uniformément comprimées peuvent être considérées comme étant sollicitées par un chargement uniforme ce qui est en corrélation avec le principe de Saint Venant.

Dans la présente analyse une bonne précision a été obtenue dans l'évaluation du coefficient de flambement ceci aussi bien dans le cas de la compression uniforme et non-uniforme que dans celui de la compression ponctuelle des pièces courtes.

Une autre conclusion, non moins importante, qui se dégage du présent travail est qu'encore une fois, la distribution exacte du chargement doit être utilisée dans l'analyse au flambement des plaques si une bonne précision est requise.

Enfin, la méthode des éléments finis s'est révélée comme étant un outil efficace d'analyse pour résoudre le problème de stabilité des plaques non-uniformément comprimées, car les résultats obtenus dans la présente recherche sont en corrélation avec ceux trouvés antérieurement par d'autres auteurs utilisant une méthode analytique associée à une distribution exacte du chargement. Cette contribution originale permet d'affiner la méthodologie de résolution de la problématique de flambement des plaques minces essentiellement sous l'effet de la compression non-uniforme.

CHAPITRE 7
CONCLUSION GENERALE
ET
PERSPECTIVES DE RECHERCHE

7.1. Conclusion Générale

Dans la présente investigation le phénomène de flambement linéaire des plaques minces, rectangulaires de dimensions variées, simplement appuyées et subissant des compressions de longueurs variées, a été étudié au moyen de la méthode des éléments finis.

Les principales conclusions émergentes de la revue littéraire qui résume les principaux travaux menés dans le domaine de l'effet de la compression non-uniforme sur la stabilité des plaques sont les suivantes :

- très peu de travaux ont été menés dans ce domaine au moyen de méthodes numériques
- la distribution réelle du chargement doit être utilisée si une bonne précision est requise.

Dans la recherche d'une discrétisation optimale relative au problème posé, une étude des champs de contraintes et de déformations planes a été menée sur une plaque mince simplement appuyée et non-uniformément comprimée.

Les résultats obtenus à travers une série de maillages différemment subdivisés montrent que la zone devant être finement subdivisée pour atteindre rapidement la solution cherchée n'occupe pas le même espace de la plaque selon l'orientation des travaux.

En effet, si l'intérêt est porté sur le champ de contraintes, un maillage raffiné dans une zone relativement restreinte autour du point où le chargement s'arrête serait approprié. Par contre, si on s'intéresse particulièrement au champ de déplacements, comme c'est le cas de l'étude du flambement des plaques, un maillage uniforme et serré construit à partir d'éléments dont le rapport des dimensions n'est pas très important doit être utilisé.

Dans la présente recherche une série d'analyses numériques a été effectuée dans le but de déterminer le coefficient de flambement pour différent cas de chargements en commençant par la compression uniformément répartie jusqu'à la compression ponctuelle. Dans ces expériences numériques la méthode des éléments finis a été utilisée, ce qui a permis l'application d'une distribution exacte du chargement. La plaque est modélisée moyennant un élément quadrilatéral mince comportant huit nœuds pouvant subir aussi bien des actions membranaires que flexionnelles.

Etant donné l'importance de l'envergure du problème, une réduction de variables s'est avérée nécessaire. Celle-ci, moyennant la technique frontale, permet de récupérer de l'espace mémoire et de réduire le temps de calcul apportant ainsi plus d'efficacité dans ces derniers. Cette technique de réduction consiste à évaluer le nombre de degrés de liberté à éliminer dans la résolution du problème sans pour autant enregistrer une perte importante dans la précision de la solution cherchée voir même affecter totalement cette dernière. Une quantité de 17% du nombre total des degrés de liberté semble être suffisante pour mener correctement la présente analyse au flambement. Par conséquent, lorsqu'une bonne précision est requise cette valeur, associée évidemment à un maillage raffiné, doit être utilisée comme pourcentage minimal à appliquer.

Dans la présente analyse une bonne précision a été obtenue dans l'évaluation du coefficient de flambement ceci aussi bien dans le cas de la compression uniforme que dans celui de la compression non-uniforme. De plus, la compression ponctuelle a donné des résultats très satisfaisants sur les pièces courtes. Les expériences numériques réalisées ont montré que la plupart des plaques longues non-uniformément comprimées peuvent être considérées comme étant sollicitées par un chargement uniforme ce qui est en corrélation avec le principe de Saint Venant.

Une autre conclusion, non moins importante, qui se dégage du présent travail est qu'encore une fois, la distribution exacte du chargement doit être utilisée dans l'analyse au flambement des plaques si une bonne précision est requise.

Enfin, la méthode des éléments finis s'est révélée comme étant un outil d'analyse efficace pour résoudre le problème de stabilité des plaques car les résultats obtenus dans la présente recherche sont en corrélation avec ceux trouvés antérieurement par d'autres auteurs utilisant une méthode analytique associée à une distribution exacte du chargement.

Pour terminer, comme le phénomène de l'instabilité des structures est couramment rencontré dans les constructions de génie civil, il est vivement recommandé de tenir compte de l'effet du flambement ceci aussi bien dans la conception que dans le calcul des éléments structuraux notamment lors de l'étude de projets présentant des plaques minces métalliques soumises à l'effet d'un chargement non-uniforme statique (tel que celui dû au poids propre) ou bien dynamique (tel que celui résultant de l'effet d'un séisme). Aussi, l'auteur souhaiterait que l'aboutissement de ses investigations, récemment publié [53], soit considéré par d'autres chercheurs impliqués dans l'étude de la stabilité des plaques afin que les résultats atteints dans le présent travail puissent apporter l'impact nécessaire dans l'amélioration des codes de calcul des constructions métalliques existants.

7.2. Perspectives de Recherche

La présente recherche a été centrée autour des problèmes où la plaque est simplement appuyée et chargée partiellement dans la direction de son plan moyen et symétriquement par rapport à ses axes centraux. Cependant en pratique, les charge partielles ne sont pas forcément parallèles et peuvent être aussi bien des cisaillements dans le plan de la plaque que des compressions (ou traction). De plus, les conditions d'appuis peuvent être d'autant plus variées. Les exemples de chargement représentés sur la figure (7.1) pourraient faire l'objet d'une analyse au flambement d'une plaque mince partiellement chargée avec différentes conditions d'appuis. Pour des raisons pratiques, ce problème a reçu une attention particulière de la part de nombreux chercheurs, mais seulement quelques études ont été menées au moyen de techniques numériques telles que celles des éléments finis. Aussi, il serait intéressant d'utiliser la méthode présentée dans le présent travail pour rechercher des chargements partiels plus généraux et pratiques associés à des conditions d'appuis diverses.

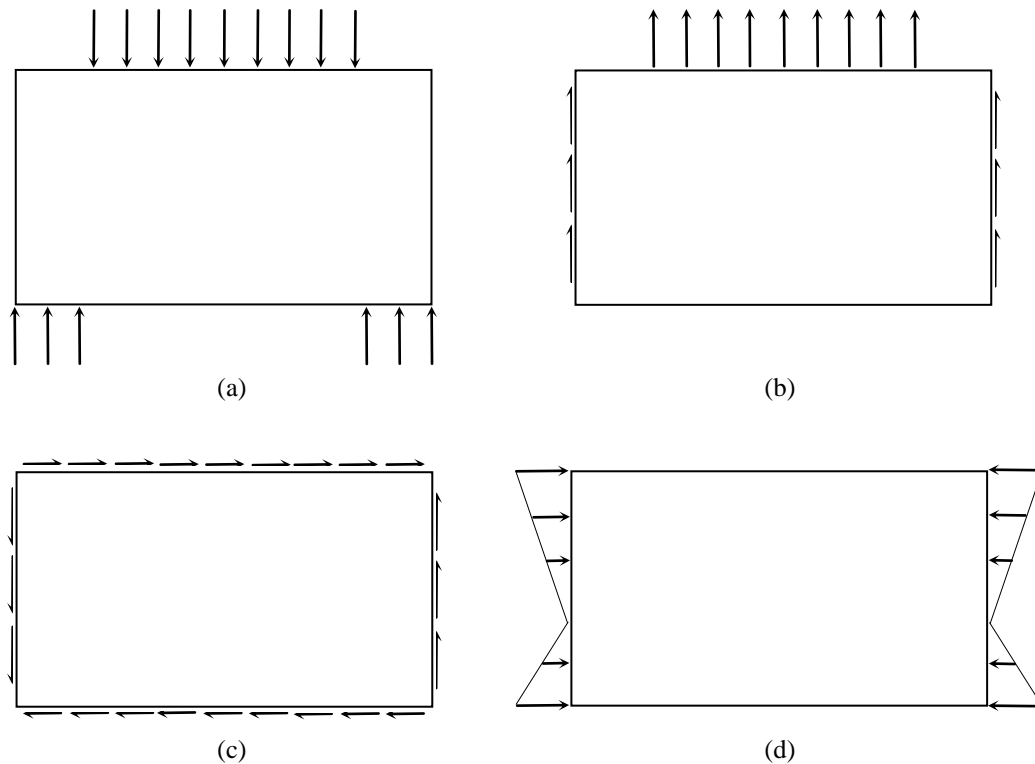


Figure (7.1) : Plaques minces sous l'action de différents types de chargements appliqués dans son plan moyen

Le coefficient de flambement élastique obtenu dans la présente recherche correspond à la valeur critique réelle de la charge qui provoque le flambement à condition que la limite d'élasticité du matériau ne soit pas dépassée. Au dessus de cette limite les calculs donnent des valeurs erronées et le coefficient de flambement ne peut être évalué qu'en tenant compte des déformations plastiques du matériau utilisé. De ce fait, une perspective d'investigation s'ouvre dans cette direction et la problématique peut être envisagée dans le domaine plastique.

Enfin, afin d'étayer et de valider les résultats obtenus dans la présente analyse une recherche complémentaire utilisant des expériences en laboratoire pourrait être envisagées.

ANNEXE

Résumé de la bibliographie des travaux effectués sur des plaques non-uniformément comprimées

Méthode des forces d'équilibre statique - résolution de l'équation différentielle	
<p>Equation différentielle d'une plaque comprimée dans une direction:</p> $\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)$ <p>L'application des conditions aux limites conduit à un système d'équations dont la solution non-triviale est obtenue pour un déterminant nul. L'équation caractéristique définit la stabilité de la plaque. La plus petite valeur de la solution de cette équation correspond à la force critique de flambement.</p>	<p>Sommerfeld [10] avec hypothèse* 1906</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Yamaki [12] 2^{ème} rapport 1953 avec hypothèse*</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Legget [13] 1937</p> <p>(plaques infiniment longues comprimées par deux forces concentrées)</p>
Méthodes énergétiques	
<p>Principe des déplacements virtuels :</p> $\frac{\partial W}{\partial A} \delta A = \frac{\partial U}{\partial A} \delta A$ <p>U énergie de déformation, W travail des forces extérieures, déplacements virtuel δA</p>	<p>Timoshenko [16] avec hypothèse* 1910</p>
<p>Conservation d'énergie :</p> $U = W$	<p>Hopkins [17,31] 1949,1945</p> <p>(plaques infiniment longues)</p>
<p>Principe de l'énergie minimum :</p> $\frac{\partial U}{\partial A} + \frac{\partial W}{\partial A} \leq 0$	<p>Solution analytique</p> <p>Yamaki [11] 1^{er} rapport 1953 avec hypothèse*</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Khan et Walker [38] avec hypothèse* 1972</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Pavlovic [14,15,18] et Baker 1983,1985</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Kapur et Hartz [36] 1966</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>Méthode des éléments finis</p> <p>Rockey et al [37,19] 1970,1979</p>

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

-
- [1] Djermane, M., Flambement Dynamique des Coques Minces en Zones Sismiques, Thèse de doctorat d'état, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène, Chelghoum, A., 2007.
- [2] Sennour, S., Etude des Effets de Site Induits à Corso Lors du Séisme de Boumerdès, Thèse de magistère, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène, Chelghoum, A., 2008.
- [3] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [4] Bulson, P.S., The Stability of Flat Plates, Chatto and Windus, London, 1970.
- [5] Yuan, S., Jin, Y., Computation of Elastic Buckling Loads of Rectangular Thin Plates Using the Extended Kantorovich Method, Computers and Structures Jour., 1998, Vol.66, pp 861-867.
- [6] Jianping Lu, Golam M. Newaz, Ronald F. Gibson, Buckling Strength Analysis of Adhesively Bonded Aluminium Hat Sections, Int. Jour. Solids and Structures, 2005, Vol.42, pp 4947-4957.
- [7] Brighenti, R., Buckling of Cracked Thin-Plates Under Tension or Compression, Thin Walled Structures Jour., 2005, Vol.43, pp 209-224.
- [8] Friedl, N., Rammerstorfer, F.G., Fisher, F.D., Buckling of Stretched Strips, Computers and Structures Jour., 2000, Vol.78, pp 185-190.
- [9] Gerard, G., Becker, H., Handbook of Structural Stability, Part 1: Buckling of Plates, NACA TN 3781, Washington, D.C., 1957.
- [10] Sommerfeld, A., Zeitschrift fur Mathematik und Physik, 1906, Vol.54, pp 113-153 and 318-324.
- [11] Yamaki, N., Buckling of Plate Under Locally Distributed Forces Applied on the Two Opposite Edges, Institute of High Speed Mechanics Reports, Tohoku University, 1953, Vol.3, N°26, pp 71-87.
- [12] Yamaki, N., Buckling of Plate Under Locally Distributed Forces Applied on the Two Opposite Edges, Institute of High Speed Mechanics Reports, Tohoku University, 1953, Vol.3, N°26, pp 89-98.
- [13] Leggett, D.M.A., The Effect of Two Isolated Forces on the Elastic Stability of a Flat Rectangular Plate, Proc. Cam. Philo. Soc., 1937, Vol.33, pp 325-339.
- [14] Baker, G., Pavlovic, N.M., Rectangular Plates Compressed by a Series of In-Plane Loads: Stability and Stress Distribution, The Aeron. Jour., 1983, Vol.27, pp 183-188.

-
- [15] Baker, G., Pavlovic, N.M., Stability of Wide Strips Under Locally Distributed Forces, *Jour. Appl. Mech.*, 1985, N°52, pp 232-234.
- [16] Timoshenko, S.P., Stabilitat Einer Rechteckigen Platta, Die Durch Einzelnekratte Gedruckt Wird, *Zeitschrift fur Mathematik und Physik*, 1910, Vol.58, p.343, pp 357-360.
- [17] Hopkins, H.G., Elastic Stability of Infinite Strips, *Proc. Cambr. Philo. Soc.*, 1949, Vol.45, pp 587-594.
- [18] Pavlovic, N.M., Baker, G., Buckling of Non-Uniformly Compressed Plates, *Theor. Appl. Mech.-Transaction of the Yugoslav Society of Mechanics*, 1983, Vol.9, pp 91-103.
- [19] Rockey, K.C., Samuelsson, A., Wennerstrom, H., The Buckling of Longitudinally Reinforced Web Plates Loaded by a Central In-Plane Patch Load, in *Stability Problem in Engineering Structures and Components*, edited by Richards and Standley, Applied Science, London, 1979, pp 75-88.
- [20] Stephen, D.B., Steven, G.P., Error Estimation for Plate Buckling Elements, *Computers and Structures Jour.*, 1996, Vol.61, N°4, pp 747-761.
- [21] Pafec-fe Ltd, Program for Automatic Finite Elements Calculations, Structural finite elements analysis software catering for: static, dynamic, non-linear, thermal analysis, Nottingham, NG8 6PE.
- [22] Navier, L., *Bulletin de la Société Phil.-Math.*, p.92, Paris, 1823.
- [23] Bryan, G.H., On the Stability of Plate Under Thrusts in Its Own Plane, With Application to the Buckling of the Sides of a Ship, *Proc. of London Math. Soc.*, 1891, Vol.22, pp 54-67.
- [24] Moe, J., The Finite Element Technique – A New Tool in Structural Analysis, *Finite Element Method in stress Analysis*, Editions Holland, I. and Bell, K., Trondheim Tech. Univ., 1970.
- [25] Norries, D.H. and Devries, G., *The Finite Element Method*, Academic Press, London, 1973.
- [26] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1967.
- [27] Melosh, R.J., *American Institute of Aeronautics and Astronautics (A.I.A.A) Jour.*, 1963, Vol.1, N°7, p. 1631.
- [29] Timoshenko, S.P., *Annales des Ponts et Chaussées*, 1913.
- [30] Rayleigh Lord, *Theory of Sound*, Second American Edition, Dover Publication, New York, 1945.

-
- [31] Hopkins, H.G., Rep. Memor. Aero. Res. Comm., 1945, N°2234, London.
- [32] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [33] Ritz, W., Jour. fur Reine und Angewandte Mathematik, 1909, Vol.135, N°1, p.1.
- [34] Pavlovic, N.M., Sapountzakis, E.J., Computers and Structures: Non-Numerical Applications, Computers and Structures Jour., 1986, Vol.24, N°3, pp 455-474.
- [35] Pavlovic, N.M., Poulton, S.M., On the Computation of Slab Effective Widths, Jour. Struct. Enging., Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs., 1985, Vol.111, N°2, pp 363-377.
- [36] Kapur, K.K., Hartz, B.J., Stability of Plates Using the Finite Element Method, Jour. Enging. Mech. Div. Amer. Soc. Civ. Engrs., April 1966.
- [37] Rockey, K.C., Bagchi, D.K., Buckling of Plate Girder Webs Under Partial Edge Loadings, Inter. Jour. Mech. Sci., 1970, Vol.12, N°1, pp 61-76.
- [38] Khan, M.Z., Walker, A.C., Buckling of Plates Subjected to Localised Edge Loading, The Inter. Jour. of Institution of Structural Engineers, 1972, Vol.50, N°6, pp 225-232.
- [39] Szabo, B.A., Estimation and Control of Error Based on P-Convergence, Proc. Int. Conf., Accuracy Estimates and adaptive Refinements in Finite Element Computations (ARFEC), Keynote Address, Lisbon, Portugal, 1984.
- [40] Borg, S.F., Matrix–Tensor Method in Continuum Mechanics, Van Nostrand, 1963.
- [41] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Second Edition, Pergamon, 1975.
- [42] Weinstock, R., Calculus of Variations, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [43] Irons, B., Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables, A.I.A.A. Jour., 1965, Vol.3, N°5, pp 961-962.
- [44] Guyan, R.J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, American Institute of Aeronautics and Astronautics (A.I.A.A) Jour., 1965, Vol.3, N°2, p 380.
- [45] Anderson, R.G., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C, Vibrations and Stability of Plates Using Finite Elements, Int. Jour. Solids and Structures, 1968, Vol.4, pp 1031- 1055.

-
- [46] Irons, B.M., A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, Int. Jour. Num. Meth. Enging., 1970, Vol.2, pp 5-32.
- [47] Menken, C.M., Groot, W.J., Stallenberg, G.A.J., Interactive Buckling of Beams in Bending, Thin Walled Structures Jour., 1991, Vol.12, pp 415-434.
- [48] Menken, C.M., Schreppers, G.M.A., Groot, W.J., Petterson, G., Analysing Buckling Mode Interactions in Elastic Structures Using an Asymptotic Approach; Theory and Experiments, Computers and Structures Jour., 1997, Vol.64, N°1-4, pp 473-480.
- [49] Lopez, S., Fortino, S., Casciaro, R., An Adaptative Multigrid Solver for Plate Vibration and Buckling Problems, Computers and Structures Jour., 1998, Vol.69, pp 625-637.
- [50] Nguyen Thi Hien Luong, Tran Huu Tri, Influence of Variable Thickness on Stability of Rectangular Plate Under Compression, Mech. Resear. Comm., 2005, Vol.32, pp 139-146.
- [51] Chattopadhyay, A., Radu, A.G., Dynamic Instability of Composite Laminates Using a Higher Order Theory, Computers and Structures Jour., 2000, Vol.77, pp 453-460.
- [52] Liang, Q.Q., Uy, B., Theoretical Study on the Post-Local Buckling of Steel Plates in Concrete-Filled Box Columns, Computers and Structures Jour., 2000, Vol.75, pp 479-490.
- [53] Ikhenazen, G., Chelghoum, A., Saidani, M., Finite Element Analysis of Linear Plates Buckling Under In-Plane Patch Loading, Journal of Constructional Steel Research, 2010, Vol.66, pp 1112-1117.