

N^o d'ordre □ 28/2004-M/MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en mathématiques

Spécialité : Analyse - Équations aux dérivées partielles

Par

LAADJ Toufik

THÈME

**APPROXIMATION DE L'OPÉRATEUR D'IMPÉDANCE
DE COUCHES MINCES SUPERPOSÉES**

Soutenu publiquement, le 06/12/2004 devant le jury composé de :

Mr. D. E. TENIOU	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. K. LEMRABET	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. A. MOKRANE	Professeur	E.N.S. Kouba	Examineur.
Mr. A. HEMINNA	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **K. Lemrabet** mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **D. E. Teniou**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je remercie vivement Messieurs **A. Mokrane**, Professeur à l'E.N.S. Kouba et **A. Heminna**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

*Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère **Zaid** pour leur soutien tout au long de mes études.*

Approximation de l'opérateur d'impédance de couches minces superposées

Résumé

Nous nous intéressons ici au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique harmonique par un obstacle bidimensionnel parfaitement conducteur revêtu de fines couches de matériaux diélectriques homogènes. Le but poursuivi est l'obtention de conditions aux limites, de type conditions d'impédance, qui prennent en compte l'effet des couches minces diélectriques. Nous donnons un procédé de construction et d'analyse de différentes conditions aux limites. Des tests numériques ont été effectués pour démontrer l'efficacité de la méthode des conditions d'impédance.

Mots-clés : Équations de Maxwell, équation de Helmholtz, diffraction, couches minces diélectriques, condition d'impédance, opérateur d'impédance.

Table des matières

Liste des figures	v
Liste des principales notations	vi
Introduction	1
1 Électromagnétisme et équations de Maxwell	3
1.1 Équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)	3
1.2 Équations de Maxwell dans les milieux continus	5
1.2.1 Les conditions de transmission	7
1.2.2 Les conditions aux limites	8
1.3 Propagation dans un diélectrique anisotrope	9
1.4 Le problème de Maxwell en régime harmonique	10
1.4.1 Le cas des équations de Maxwell bidimensionnelles	12
2 Position du problème	15
2.1 Présentation du problème	15
2.1.1 Description physique	15
2.1.2 Présentation mathématique du problème	18
2.2 Réduction à une équation sur Ω^-	21
2.2.1 Opérateur d'impédance	21
2.2.2 Construction de l'opérateur d'impédance	23
2.3 Étude de l'unicité	25
2.3.1 Formulation variationnelle	26
2.3.2 Unicité	27
2.4 Existence de la solution	30

3	L'opérateur d'impédance pour des géométries planes	33
3.1	Approximation de l'opérateur d'impédance par développement de Taylor	35
3.1.1	Le cas de la polarisation TE	35
3.1.2	Le cas de la polarisation TM	41
3.2	Analyse par ondes planes	44
3.2.1	Ondes planes dans le vide et les diélectriques	44
3.2.2	Détermination de la solution analytique	46
3.2.3	Analyse par transformée de Fourier	52
3.2.4	Construction de l'opérateur d'impédance	53
3.3	Analyse asymptotique	59
3.3.1	Changement d'échelle	59
3.3.2	Développement asymptotique et identification formelle	60
3.3.3	Calcul des premiers termes	62
4	Effets de courbure	64
4.1	L'opérateur d'impédance pour une frontière circulaire	64
4.1.1	Le problème de diffraction	65
4.1.2	Le cas de la polarisation TE	66
4.1.3	Le cas de la polarisation TM	73
4.2	Extension aux géométries arbitraires	75
4.2.1	Construction heuristique	75
4.2.2	Construction du développement asymptotique	77
5	Étude de la stabilité	83
5.1	Le problème aux limites extérieur avec condition d'impédance	83
5.2	Étude de la stabilité de la condition d'impédance d'ordre $((2, 2))$	85
5.2.1	Estimation d'erreur	86
5.3	Résultats numériques	86
5.3.1	Résultats obtenus en utilisant la condition d'impédance	87
5.3.2	Résultats sur le domaine extérieur global	89
	Conclusion générale	92
	Bibliographie	93
	Index	96

Liste des Figures

1.2.1 Conditions de transmission.	7
2.1.1 Schématisation du problème initial : diffraction par un obstacle métallique recouvert par des couches minces de diélectriques.	17
2.3.1 La fonction de troncature θ	27
2.4.1 Définition du domaine borné Ω_Σ et de sa frontière Σ	31
3.0.1 Géométrie du problème plan.	34
3.2.1 Réflexion sur une surface de séparation de deux diélectriques.	46
3.2.2 Diffraction d'une onde plane par un conducteur plan, recouvert par deux couches minces de diélectriques.	47
4.1.1 Diffraction par un cylindre parfaitement conducteur recouvert par deux couches minces de diélectriques.	65
5.3.1 Maillage utilisé pour le cas test n ⁰ 2a.	88
5.3.2 Solution avec la condition d'impédance.	88
5.3.3 Maillage utilisé pour le cas test n ⁰ 2b.	90
5.3.4 Solution calculée dans le domaine global.	91

Liste des principales notations

$\alpha_i(\xi) = \sqrt{k^2 n_i^2 - \xi^2}$ $i = 1, 2$ Coefficient intervenant dans le symbole σ_S , page 51

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω , page 25

$\mathcal{D}'(\Omega)$ Espace des distributions sur Ω , page 20

Δ Opérateur laplacien, page 11

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ Espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact contenu dans \mathbb{R}^d , page 26

$\mathcal{D}(\Omega)$ Espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact contenu dans Ω , page 84

η Variable dilatée, page 59

$\Gamma := \partial\Omega^-$ Frontière du domaine extérieur Ω^- , page 16

$\Gamma_1 := \partial\Omega^+$ Frontière de l'obstacle métallique Ω^+ , page 16

Γ_j ($2 \leq j \leq p$) Interface entre deux couches minces, page 16

κ Courbure de la frontière Γ , page 75

Λ_i $i = 1, 2$ Opérateurs intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 40

λ Longueur d'onde de l'onde incidente, page 17

$\|\varphi\|$ Norme de φ , page 23

(E_{inc}, H_{inc}) Onde incidente, page 17

(r, θ) Coordonnées polaires, page 65

(s, δ) Coordonnées locales dans Ω , s est l'abscisse curviligne et δ la variable normale, page 78

- $[\psi]$ Saut de ψ , page 19
- $\mathcal{L} (X, Y)$ Ensemble des applications linéaires continues de X à valeurs dans Y , page 31
- $\mathcal{L}_i := (\partial_s^2 + k^2 n_1^2)$ $i = 1, 2$ Opérateurs intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 82
- \mathcal{R} Coefficient de réflexion, page 46
- \mathcal{S}_r Sphère unité de \mathbb{R}^d de rayon r , page 26
- \mathcal{T} Amplitude du champ magnétique, page 46
- μ Perméabilité magnétique relative, page 6
- μ_0 Perméabilité magnétique du vide, page 16
- ∇ Opérateur gradient, page 22
- Ω_Σ Domaine borné limité par Σ et Γ , page 30
- Ω_j^+ Couche mince uniforme autour du domaine intérieur d'épaisseur h_j , page 16
- ω Pulsation de l'onde électromagnétique, page 1
- Ω^+ Obstacle de diffraction (ouvert intérieur), page 16
- Ω^- Espace libre de propagation associé à l'obstacle de diffraction Ω^+ , page 16
- Ω_∞ Intérieur du domaine extérieur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega^+$ $d = 2$ ou 3 , page 16
- ρ Densité de charge électrique, page 4
- ρ_m Densité de charge magnétique, page 4
- Σ Frontière artificielle, page 30
- σ Conductivité électrique, page 7
- σ_P Symbole complet de l'opérateur pseudodifférentiel P , page 51
- τ Vecteur tangent unitaire à Γ , page 20
- $\tilde{\Omega}^+$ Domaine borné limité par Γ_1 et Γ , page 30

- $\tilde{\Omega}_\Sigma$ Domaine borné limité par Γ_1 et Σ , page 30
- ε Permittivité électrique relative, page 6
- ε_0 Permittivité électrique du vide, page 16
- $\hat{\varphi}$ Transformée de Fourier de φ , page 52
- $A \cdot B$ Produit scalaire usuel de deux vecteurs A et B , page 8
- $A \wedge B$ Produit vectoriel de deux vecteurs A et B , page 8
- $A_{l,n-l}^1, A_l^2$ Opérateurs intervenant dans le développement en puissances de h_1 et h_2 du laplacien dans les couches minces, page 79
- B Induction magnétique, page 3
- c Vitesse de propagation de l'onde dans le vide, page 17
- D Induction électrique, page 6
- E Champ électrique, page 3
- G Fonction de Green, page 14
- H Champ magnétique, page 6
- $H^s(\Omega)$ Espace de Sobolev d'ordre s sur le domaine Ω , page 20
- $H_0^{(1)}$ Fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0, page 14
- h_j Épaisseur de la couche mince, destinée à tendre vers 0, page 15
- $H_{loc}^1(\Omega)$ Espace des distributions f de Ω telles que $\varphi f \in H^1(\Omega)$ pour toute fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, page 20
- Im Partie imaginaire, page 21
- J Densité de courant électrique, page 4
- J_m Fonction de Bessel d'ordre m , page 67
- k Nombre d'onde, page 17

- $L(\varepsilon_2) := \varepsilon_{2,2} \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x + k^2 \mu_{2,3} \right)$ Opérateur intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 39
- $L(\varepsilon'_2) := \varepsilon_{2,2} \left[\partial_x \left(\partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \right) \partial_x + k^2 (\partial_y \mu_{2,3}) \right]$ Opérateur intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 39
- $L^2(\Omega)$ Espace des classes de fonctions mesurables sur Ω telles que $x \mapsto |u(x)|^2$ soit intégrable sur Ω , page 26
- $L_i = \partial_x^2 + k^2 n_i^2$ $i = 1, 2$ Opérateurs intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 56
- M Densité de courant magnétique, page 4
- n Normale unitaire extérieure à Ω , page 8
- $n_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ $i = 1, 2$ Indice du milieu, page 45
- P Opérateur intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 40
- Q Opérateur intervenant dans l'opérateur d'impédance approché, page 38
- r Variable radiale, page 19
- Re Partie réelle, page 10
- S Opérateur d'impédance, page 22
- s Variable curviligne dans \mathbb{R} , page 37
- T Opérateur d'admittance, page 22
- TE Polarisation transverse électrique, page 12
- TM Polarisation transverse magnétique, page 12
- Y_m Fonction de Neumann d'ordre m , page 67
- Z_0 Impédance du vide, page 17
- div** Opérateur divergence, page 4
- rot** Opérateur rotationnel vectoriel d'une fonction vectorielle, page 4

Introduction

La diffraction d'ondes acoustiques ou électromagnétiques par un obstacle métallique recouvert de fines couches de diélectrique représente de façon certaine un grand pôle d'intérêt dans le monde industriel, puisque intervenant dans des applications de plus en plus nombreuses et variées. Citons à titre d'exemples et de manière non exhaustive les problèmes de compatibilité électromagnétique dans les systèmes embarqués, les antennes et les satellites, les télécommunications, ou encore les applications concernent la détection d'objets enfuis et la furtivité radar des avions dont le but est de minimiser leur réponse aux ondes incidentes. Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce travail au problème de diffraction d'une onde électromagnétique en régime harmonique. Cela correspond au cas où les solutions ont une dépendance temporelle en $e^{i\omega t}$ avec ω représentant la pulsation de l'onde électromagnétique. Pour certaines polarisations particulières du champ électromagnétique (cf. [12], [25]), on peut réduire le système de Maxwell tridimensionnel et vectoriel à l'étude de l'équation d'Helmholtz scalaire en dimension deux, plus simple à manipuler.

La résolution numérique de l'équation d'Helmholtz posé dans un domaine avec **couches minces est difficile et coûteuse** [4], [9], [1] car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur des couches. Le maillage est très fin et comporte alors un nombre de nœuds très important, ce qui rend les calculs longs et parfois peu précis.

De ce fait, il nous a paru important de trouver un moyen pour pallier à ce problème, tout en pouvant conserver entièrement les effets sur l'onde incidente des couches qui revêtent l'obstacle ; c'est ce qu'on appelle une condition d'impédance [4], [6], [17], [18], [27]. Il s'agit de remplacer le revêtement de l'obstacle par une condition aux limites qui lui serait équivalente au sens qu'elle contiendrait les mêmes informations, lorsqu'on se place à l'extérieur de ce revêtement. Nous ramenons l'effet des couches minces à une condition posée par l'opérateur d'impédance relatif à cette dernière. Toute la difficulté repose sur **la connaissance de cet opérateur qui est en général non-local et non-explicite**. Heureusement, il est possible **de l'explicitier et de l'approcher pour deux géométries**

particulières, le cas plan et le cas circulaire [4]. Nous sommes alors en mesure de construire des conditions d'impédance dans ces deux cas de figure. Un développement asymptotique permet **d'étendre le processus de construction au cas des géométries arbitraires.** Il est cependant nécessaire de considérer une approximation d'ordre suffisamment élevé pour prendre en compte les effets de courbure.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

Dans un premier chapitre, nous commençons par rappeler brièvement les équations de Maxwell - telles qu'elles ont été présentées dans [14] - qui régissent les phénomènes électromagnétiques.

Le second chapitre est consacré à la description du problème modèle appelé problème de transmission, consiste à résoudre l'équation d'Helmholtz dans un domaine non borné (extérieur) avec une condition de radiation à l'infini et dans un domaine borné (intérieur) relatif à deux fines couches de diélectrique. Les équations sont couplées par des conditions de raccord posées sur l'interface commune entre les domaines extérieur et intérieur. Pour résoudre ce problème, nous le récrivons sous forme de deux problèmes complètement découplés : un problème posé dans le domaine extérieur et un second posé dans les couches minces. Cette approche est basée sur l'introduction de l'opérateur d'impédance qui permet de traiter le problème de manière unifiée en tenant compte des effets des couches minces. Puis on s'intéresse aux questions d'existence et d'unicité de solutions du problème de transmission (cf. [6], [27]...).

Dans les chapitres 3 et 4, nous allons exploiter le fait que les épaisseurs des couches minces, tendent vers zéro. Nous en déduisons divers procédés d'approximation de l'opérateur d'impédance donnant chacun une condition aux limites approchée prenant en compte les effets des couches minces. Le chapitre 3 présente l'approche pour une géométrie plane. Ce cas simple permet de dégager un procédé simple de construction et d'analyse des conditions limites approchées. Le chapitre 4 développe la même analyse dans le cas circulaire. Ce même chapitre étend cette approche au cas des géométries arbitraires.

Enfin, un cinquième et dernier chapitre présente quelques résultats numériques, visant à valider la méthode des conditions d'impédance.

1

Électromagnétisme et équations de Maxwell

Sommaire

1.1	Équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)	3
1.2	Équations de Maxwell dans les milieux continus	5
1.2.1	Les conditions de transmission	7
1.2.2	Les conditions aux limites	8
1.3	Propagation dans un diélectrique anisotrope	9
1.4	Le problème de Maxwell en régime harmonique	10
1.4.1	Le cas des équations de Maxwell bidimensionnelles	12

Le but de ce chapitre préliminaire introductif est de présenter brièvement le modèle physique motivant le travail mathématique de ce mémoire.

1.1 Équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)

Les phénomènes physiques liés à l'électromagnétisme dans un milieu de propagation sont décrits à l'aide de deux fonctions ou distributions E (le champ électrique) et B (l'induction

magnétique), définies sur $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^{3(1)}$, définissant le champ électromagnétique, noté $\{E, B\}$.

Les champs E et B sont reliés à quatre fonctions (ou distributions) : la densité de charge électrique ρ , la densité de charge magnétique ρ_m , la densité de courant électrique \mathbf{J} et la densité de courant magnétique \mathbf{M} .

L'apparition de courants induits dans un conducteur⁽²⁾ fixe, placé dans un champ électrique non stationnaire, est traduite par l'équation de Maxwell-Faraday⁽³⁾ et la conservation du flux du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} &= -\mathbf{M}, \\ \mathbf{div}B &= \rho_m. \end{aligned}$$

En régime variable, le courant volumique \mathbf{J} n'est plus à flux conservatif compte tenu de la loi de conservation et de la variation de la charge volumique ρ au cours du temps.

L'équation de continuité (ou de la conservation de l'électricité) est alors définie par

$$\mathbf{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.1.1}$$

qui traduit le fait que, si il y a variation au cours du temps de la charge contenue dans un volume alors il existe un courant entre l'intérieur et l'extérieur de ce volume.

Identiquement, l'équation de conservation de la charge magnétique est définie par

$$\mathbf{div}\mathbf{M} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \tag{1.1.2}$$

L'expression locale du théorème de Gauss⁽⁴⁾ pour les régimes stationnaire s'exprime par :

$$\mathbf{div} E = \rho.$$

Des expériences ont montré que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque ne dépendait pas de l'état du mouvement des charges, ainsi le théorème de Gauss se généralise aux régimes variables. Cependant, en appliquant le théorème de Gauss généralisé et en utilisant les propriétés géométriques du champ électrique, il est aisé d'établir l'équation de Maxwell-Ampère⁽⁵⁾ :

$$\mathbf{rot}B - \frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{J}.$$

⁽¹⁾ Ou le plus souvent $\mathbb{C}_x^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{C}^3$.

⁽²⁾ Corps contenant une population de charges libres, qui sous l'action d'un champ électrique, se déplace créant ainsi une densité de courant macroscopique.

⁽³⁾ James Clerk Maxwell (1831-1879) - Michael Faraday (1791-1867).

⁽⁴⁾ Johann Karl (Carl) Friedrich Gauss (1777-1855).

⁽⁵⁾ André Marie Ampère (1775-1836).

Ainsi dans un milieu de propagation, en présence de charge, le champ électromagnétique $\{E, B\}$ satisfait les quatre équations suivantes :

$$\mathbf{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = -\mathbf{M} \quad (\text{Maxwell-Faraday}), \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{div}B = \rho_m \quad (\text{Gauss-magnétique}), \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{div}E = \rho \quad (\text{Gauss-électrique}), \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{rot}B - \frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{Maxwell-Ampère}). \quad (1.1.6)$$

On remarque que

- i.* Ces équations sont de type hyperbolique en E et en B .
- ii.* Par dérivation par rapport au temps de l'équation de Gauss-électrique (1.1.5) et en appliquant l'opérateur \mathbf{div} à l'équation (1.1.6), on retrouve la relation dite de continuité ou de conservation de l'électricité (1.1.1). Une démonstration identique permet d'obtenir l'équation de conservation de la charge magnétique (1.1.2).
- iii.* L'évolution de $\{E, B\}$ est donnée par les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday.
- iv.* Si ρ, ρ_m, \mathbf{M} et \mathbf{J} sont nuls, alors E et B vérifient l'équation des ondes.

1.2 Équations de Maxwell dans les milieux continus

Dans les problèmes rencontrés en électromagnétisme des milieux continus, les densités de charges et de courant ne sont pas connues, ou plutôt ne le sont que partiellement. En effet, $\{E, B\}$ crée une densité de charge ρ^* et une densité de courant \mathbf{J}^* créant à leur tour un champ électrique E^* et un champ magnétique B^* qui sont inconnus.

Ainsi, on peut décomposer ρ et \mathbf{J} :

$$\rho = \rho^* + \varrho \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}^* + J,$$

où ϱ et J représentent respectivement les densités de charge et de courant données dites "extérieures".

Le système devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = -\mathbf{M}, \\ \mathbf{div} B = \rho_m, \\ \mathbf{div} E - \rho^* = \varrho, \\ \mathbf{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t} - \mathbf{J}^* = J. \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

Introduisons, maintenant, deux champs de vecteurs P et M de $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ liés à ρ^* et \mathbf{J}^* par

$$\begin{cases} \mathbf{div}(-P) = \rho^*, \\ \mathbf{rot}(M) - \frac{\partial(-P)}{\partial t} = \mathbf{J}^*. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

P appelé le vecteur de polarisation et M le vecteur de magnétisation. De (1.2.2), on peut déduire que \mathbf{J}^* et ρ^* vérifient aussi l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \mathbf{div}(\mathbf{J}^*) = 0.$$

Enfin, en posant :

$$\begin{cases} D = E + P, \\ H = B - M, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

où D est appelé l'induction électrique⁽¹⁾ et H le champ magnétique.

On peut vérifier que les champs D et H satisfont les équations

$$\begin{cases} \mathbf{div}D = \varrho, \\ \mathbf{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} = J. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Finalement, on obtient le nouveau système dans $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$

$$\begin{cases} -\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{rot}H = J, \\ \mathbf{div}D = \varrho, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{rot}E = -\mathbf{M}, \\ \mathbf{div}B = \rho_m. \end{cases}$$

– E, B, D et H sont les inconnues.

– Si ϱ et J sont supposées données, il y a donc douze inconnues scalaires⁽²⁾ pour huit équations scalaires (dont seulement six indépendantes).

Il est donc nécessaire de rajouter des conditions supplémentaires afin d'avoir autant d'équations que d'inconnues, pour pouvoir résoudre le problème. Ces conditions dites constitutives, sont des lois de comportement, entre E et D , B et H , elles dépendent des considérations physiques et décrivent les propriétés du matériau considéré. Sans elles, le problème d'évolution serait indéterminé.

Ces relations sont données dans le cas d'un milieu linéaire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon E + \xi H & \varepsilon : \text{permittivité électrique du milieu,} \\ B &= \mu H + \zeta E & \mu : \text{perméabilité magnétique du milieu.} \end{aligned}$$

⁽¹⁾Ou déplacement électrique.

⁽²⁾Les trois composantes des quatre vecteurs E, H, B et D .

\mathbf{J}^* et E sont liés par la relation : $\mathbf{J}^* = \sigma E$, σ appelée la conductivité électrique.

Ces lois de comportement sont caractéristiques du milieu dans lequel les champs se propagent. En général, $\varepsilon, \mu, \xi, \zeta, \sigma$ ont un caractère tensoriel et leur valeur n'est pas forcément constante (saturation, phénomène d'hystérésis, dépendance vis à vis de la température...).

Remarque 1.2.1 – Si les matériaux sont bianisotropes (cas le plus général), les quatre tenseurs sont non nuls.

– Si les matériaux sont **anisotropes**, les **tenseurs** ξ et ζ sont nuls, d'où $B = \mu H$ et $D = \varepsilon E$ ⁽¹⁾.

– Si les matériaux sont **isotropes** alors les tenseurs ε et μ sont diagonaux et s'écrivent $\varepsilon \equiv \varepsilon I$ et $\mu \equiv \mu I$ où I est le tenseur diagonal unité.

– Dans les milieux linéaires, ε et μ sont indépendants de la "puissance" des champs H et E .

– Dans les corps conducteurs, la conductivité électrique σ est strictement positive, tandis que σ est nulle dans les isolants⁽²⁾ (corps non conducteur).

– Un conducteur parfait correspond à la limite $\sigma \rightarrow \infty$. On doit avoir $E = B = 0$ sinon la puissance dissipée par effet Joule, $\sigma E \cdot E$, serait infinie, ce qui est absurde. Les équations de Maxwell restent valables dans un métal.

1.2.1 □ Les conditions de transmission

Lors de la traversée de l'interface séparant deux milieux, le champ électromagnétique subit des discontinuités. Il est toutefois possible de considérer ces discontinuités. En effet, soient Ω_1 et Ω_2 deux milieux continus et Γ l'interface qui les sépare (Fig 1.2.1).

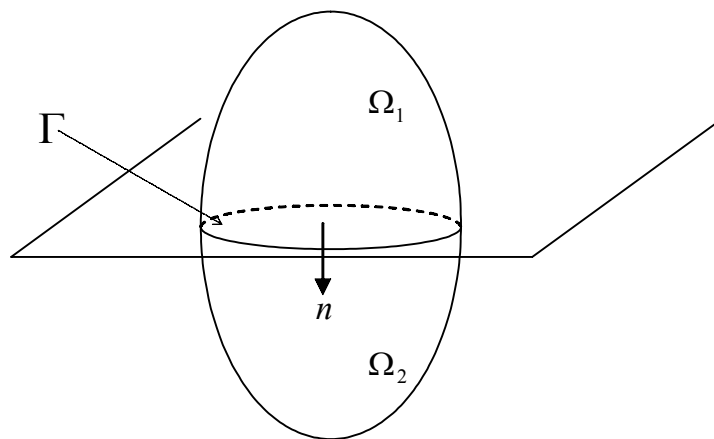


Figure 1.2.1 : Conditions de transmission.

⁽¹⁾Un milieu dans lequel ces relations sont vérifiées, avec μ et ε constantes, appelé milieu parfait.

⁽²⁾Un isolant "parfait" sera un milieu dans lequel $\sigma = 0$.

Où n est le vecteur unitaire normal à Γ dirigé de Ω_1 vers Ω_2 . On note par ϱ_Γ (*resp.*⁽¹⁾ $\rho_{m\Gamma}$) et J_Γ (*resp.* M_Γ) la densité de charge et de courant électrique (*resp.* magnétique) se créant à l'interface des deux domaines.

Les équations (1.1.3, 1.1.4, 1.1.5 et 1.1.6) intégrées sur des volumes incluant des portions de la surface Γ , l'application du théorème de la divergence donnent alors les conditions de transmissions [14] :

$$\begin{cases} (D^2 - D^1) \cdot n = \varrho_\Gamma, \\ (H^2 - H^1) \wedge n = -J_\Gamma, \\ (B^2 - B^1) \cdot n = \rho_{m\Gamma}, \\ (E^2 - E^1) \wedge n = -M_\Gamma, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

où \cdot désignant le produit scalaire et \wedge le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 , et l'exposant i , $i = 1, 2$ la restriction du champ ou l'induction au domaine Ω_i .

Dans le cas classique $M_\Gamma = 0$ et $\rho_{m\Gamma} = 0$, les relations de continuité bien connues sont retrouvées :

- continuité de la composante tangentielle du champ électrique E et de la composante normale de l'induction magnétique B ,
- discontinuité de la composante normale de l'induction électrique D mesurée par la densité de charges de surface Γ et de la composante tangentielle du champ magnétique H mesurée par la densité de courant superficielle J_Γ .

Remarque 1.2.2 *Quelques cas particuliers sont intéressants :*

- Γ est un conducteur électrique parfait, alors $M_\Gamma = 0$ et $\rho_{m\Gamma} = 0$,
- Γ est un conducteur magnétique parfait, alors $J_\Gamma = 0$ et $\varrho_\Gamma = 0$,
- les milieux Ω_1 et Ω_2 sont des diélectriques parfaits⁽²⁾, alors $M_\Gamma = 0$, $\rho_{m\Gamma} = 0$, $J_\Gamma = 0$ et $\varrho_\Gamma = 0$.

1.2.2 Les conditions aux limites

On se place dans un domaine extérieur Ω de \mathbb{R}^3 ayant pour frontière Γ . Si on suppose de plus que $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ est un conducteur parfait : $D = E = 0$ et $B = H = 0$ ⁽³⁾ dans $(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \times \mathbb{R}_t$.

⁽¹⁾resp. \equiv respectivement.

⁽²⁾Un diélectrique parfait est un matériau comportant des charges qui peuvent osciller autour d'une position d'équilibre mais qui ne contient pas de charge susceptible de se déplacer librement dans le milieu. De ce fait, les charges ne peuvent pas se concentrer en certains points, et en particulier sur la surface de séparation qui n'est pas chargée et n'est pas parcourue par un courant.

⁽³⁾Voir remarque 1.2.1.

En utilisant cette propriété, et les conditions de transmission, ainsi que la condition sur l'interface entre deux domaines du paragraphe 1.2.1, on en déduit sur Γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} D \cdot n = -\rho_\Gamma, \\ H \wedge n = J_\Gamma, \\ B \cdot n = \rho_{m\Gamma}, \\ E \wedge n = -M_\Gamma. \end{array} \right. \quad (1.2.6)$$

Remarque 1.2.3 Dans le cas d'un milieu parfait occupant Ω , les conditions précédentes (1.2.6) se réduisent aux suivantes (cf. [14], page 85):

$$\left\{ \begin{array}{l} B \cdot n = 0, \\ E \wedge n = 0. \end{array} \right. \quad (1.2.7)$$

1.3 Propagation dans un diélectrique anisotrope

L'anisotropie peut être intrinsèque (c'est-à-dire causée par la structure cristalline du milieu) ou extrinsèque (c'est-à-dire causée par l'imposition d'un champ électrique ou magnétique externe).

Dans un milieu diélectrique linéaire anisotrope, la relation entre l'induction électrique D et le champ électrique E est la suivante :

$$D = \varepsilon E,$$

où ε est un tenseur de rang 2 appelé tenseur diélectrique. Les composantes de ce tenseur dépendent généralement de la fréquence. On peut montrer (à l'aide des équations de Maxwell) que ce tenseur est symétrique⁽¹⁾ (cf. [25]).

Comme ε est symétrique, il est possible de le diagonaliser par une transformation orthogonale, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir trois axes mutuellement perpendiculaires, appelés axes principaux, tels que le tenseur diélectrique est diagonal selon ces axes. Autrement dit, si on désigne par Ox_1, Oy_1, Oz_1 les axes principaux, le tenseur diélectrique prend la forme

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont les valeurs propres de la matrice du tenseur diélectrique.

Si on se place dans ce référentiel, on peut définir trois indices de réfraction différents n_1, n_2 et n_3 , selon x_1, y_1 et z_1

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}, n_3 = \sqrt{\varepsilon_3}.$$

⁽¹⁾Ou hermitien, lorsque ce tenseur est complexe.

On distingue trois caractères différents de systèmes cristallins selon le degré de dégénérescence du tenseur diélectrique :

1. Dans un cristal **isotrope**, tous les axes principaux sont arbitraires. Les trois valeurs propres du tenseur diélectrique sont égales. C'est le cas du système cubique seulement. Même si un cristal cubique n'est pas du tout isotrope dans l'espace, ses propriétés diélectriques le sont entièrement, comme si le milieu était un liquide ou un verre.
2. Dans un cristal **uniaxe**, deux des valeurs propres du tenseur diélectrique sont égales. Il existe un axe de symétrie par rapport auquel une rotation des axes ne change pas le tenseur diélectrique. Les systèmes trigonal, tétragonal et hexagonal sont de ce type.
3. Dans un cristal **biaxe**, les trois valeurs propres sont distinctes et le tenseur diélectrique ne comporte aucun axe de symétrie. C'est le cas des systèmes triclinique, monoclinique et orthorhombique.

Soit maintenant \mathbf{P} la matrice qui transforme le système de coordonnées $Oxyz$ vers le système des axes principaux $Ox_1y_1z_1$

$$Ox_1 = \mathbf{P}Ox ; Oy_1 = \mathbf{P}Oy ; Oz_1 = \mathbf{P}Oz.$$

Si $E = (E_x, E_y, E_z)$ le champ électrique donné dans le système de coordonnées $Oxyz$, on peut exprimer les nouvelles coordonnées $E_1 = (E_{x_1}, E_{y_1}, E_{z_1})$ par $E_1 = \mathbf{P}E$.

Nous pouvons également réécrire la condition constitutive $D = \varepsilon E$ dans les nouvelles coordonnées

$$D_1 = \mathbf{P}\varepsilon\mathbf{P}^{-1}E_1 = \varepsilon_1 E_1,$$

où $\varepsilon_1 = \mathbf{P}\varepsilon\mathbf{P}^{-1}$ est une matrice diagonale.

1.4 Le problème de Maxwell en régime harmonique

On se place maintenant en régime harmonique où chaque grandeur physique varie périodiquement en temps sous la fréquence ω , avec ε et μ des tenseurs dépendant du milieu :

$$F(x, t) = \text{Re} (F(x) e^{i\omega t}),$$

où F est l'une des grandeurs physiques B, H, E, D, J, ρ .

Dans le cas des milieux parfaits, le système se ramène dans Ω aux équations suivantes :

$$\mathbf{rot}H - i\varepsilon\omega E = J, \quad (1.4.1a)$$

$$\mathbf{div}(\varepsilon E) = \varrho, \quad (1.4.1b)$$

$$\mathbf{rot}E + i\omega\mu H = 0, \quad (1.4.1c)$$

$$\mathbf{div}(\mu H) = 0, \quad (1.4.1d)$$

définissant le problème de Maxwell en régime harmonique, les conditions sur Γ étant celles définies au paragraphe 1.2.2.

On peut remarquer que

i. L'équation (1.4.1d) est redondante. En effet, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (1.4.1c), on retrouve la condition de conservation du flux (1.4.1d).

ii. La condition sur Γ pour le champ électrique combinée à l'équation (1.4.1a) donne

$$\mathbf{rot}H \wedge n = J \wedge n \quad \text{sur } \Gamma.$$

De plus en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (1.4.1a) puis en la combinant avec (1.4.1c), on obtient l'équation du second ordre suivante :

$$\mathbf{rot}(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}H) - \omega^2\mu H = \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1}J), \quad (1.4.2)$$

permettant de découpler le problème, on peut alors s'intéresser au problème du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}H) - \omega^2\mu H = \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1}J), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{rot}H \wedge n = J \wedge n, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Le champ électrique E se déduit directement à partir de H en utilisant l'équation (1.4.1a)

$$E = (i\omega\mu)^{-1}(\mathbf{rot}H - J) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.4.4)$$

De manière symétrique, le problème se ramène à la seule inconnue E

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot}E) - \omega^2\varepsilon E = -i\omega J, & \text{dans } \Omega, \\ E \wedge n = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Remarque 1.4.1 – Dans le cas où ε est constant scalaire, en utilisant la formule $\mathbf{rot} \mathbf{rot}H = -\Delta H + \text{grad} \mathbf{div}H$ et en tenant compte de (1.4.1d), on voit que H satisfait à l'équation de Helmholtz⁽¹⁾ vectorielle

$$\Delta H + \omega^2\varepsilon\mu H = -\mathbf{rot}J \quad \text{dans } \Omega.$$

⁽¹⁾Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz (1821-1894).

Lorsque la surface est invariante par translation le long d'un axe, il est possible de réduire le système vectoriel en dimension 3 à un problème scalaire en dimension 2. C'est le but du paragraphe suivant.

1.4.1 Le cas des équations de Maxwell bidimensionnelles

On s'intéresse à un problème de propagation de nature "cylindrique", c'est-à-dire :

- le domaine de propagation est de la forme :

$$\Omega \times \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

- les coefficients sont indépendants de la coordonnée x_3 :

$$\varepsilon = \varepsilon(x_1, x_2) \quad \mu = \mu(x_1, x_2) \quad \sigma = \sigma(x_1, x_2),$$

- les sources sont indépendantes de x_3 :

$$E_0 = E_0(x_1, x_2) \quad H_0 = H_0(x_1, x_2) \quad J_0 = J_0(x_1, x_2).$$

La notion de polarisation

On définit le vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\nu$ à partir du vecteur unitaire ν donnant le sens de propagation. En approximation bidimensionnelle, l'axe d'invariance par translation est Oz et le plan de propagation qui contient le vecteur \mathbf{k} est défini par (Ox_1, Ox_2) . La polarisation est dite transverse électrique (TE) si le champ électrique E appartient au plan de propagation et par conséquent H est colinéaire à l'axe d'invariance. Si le champ E est perpendiculaire à ce plan, la polarisation est transverse magnétique (TM).

Notons que la direction x_3 joue un rôle tout à fait privilégié. On peut "montrer" (cf. [12]) que les solutions (E, H) de (1.4.1) sont, dans ce contexte, indépendantes de x_3 et que le système (1.4.1) se découple en deux sous-systèmes d'équations posées dans Ω , à savoir (dans ce qui suit (E_x, E_y, E_z) sont les coordonnées de E dans le repère (O, x, y, z) , (H_x, H_y, H_z) sont celles de H et (J_x, J_y, J_z) sont celles de J) :

- Un système en (E_x, E_y, H_z) : Polarisation TE

$$\begin{cases} i\varepsilon\omega E_x - \partial_y H_z + J_x = 0, \\ i\varepsilon\omega E_y + \partial_x H_z + J_y = 0, \\ i\mu\omega H_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0. \end{cases}$$

C'est le système des ondes transverses électriques. (En effet, le champ électrique E reste dans le plan "transverse" Oxy orthogonal à la direction d'invariance Ox_3).

– **Un système en (H_x, H_y, E_z) : Polarisation TM**

$$\begin{cases} i\mu\omega H_x + \partial_y E_z = 0, \\ i\mu\omega H_y - \partial_x E_z = 0, \\ i\varepsilon\omega E_z - (\partial_x H_y - \partial_y H_x) = 0. \end{cases}$$

C'est le système des ondes transverses magnétiques.

Tous les autres cas de polarisation sont des combinaisons linéaires de ces deux états. Il n'y a pas de dépolarisation de l'onde incidente lors du phénomène de diffraction [22]. Il ne sera donc étudié ici que ces deux cas.

Remarque 1.4.2 – *Cas TE , seules les composantes H_z, E_x et E_y sont non nulles. La connaissance de H_z suffit à déterminer les composantes E_x et E_y .*

– *Cas TM , seules les composantes H_x, H_y et E_z sont non nulles. La connaissance de E_z suffit à déterminer les composantes H_x et H_y .*

Rayonnement d'ondes électromagnétiques

Deux types de source vont être utilisés pour caractériser le rayonnement d'objets dans le milieu extérieur : une onde plane ou un dipôle.

Ondes planes : En utilisant la méthode classique de séparation des variables -ou encore ce qui est équivalent en utilisant une transformation de Fourier⁽¹⁾-, une solution générique de l'équation des ondes est une onde plane monochromatique de la forme :

$$u(x, y) = e^{-ik\nu \cdot \mathbf{x}} \quad (1.4.6)$$

où ν est le vecteur unitaire $\nu = [\cos \theta, \sin \theta]^T$, \mathbf{x} le vecteur position $\mathbf{x} = [x, y]^T$ et θ l'angle d'incidence.

Remarque 1.4.3 *L'onde plane définie par (1.4.6) est une onde d'amplitude 1. Il est évident que tout multiple de cette solution définit également une onde plane.*

⁽¹⁾Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Rayonnement dipolaire : Un dipôle est modélisé par une ligne de courant magnétique en polarisation TE ou une ligne de courant électrique en polarisation TM . Dans ces deux configurations, lorsque cette ligne de courant est appliquée en un point \mathbf{x}_0 , le champ créé en un point \mathbf{x} est donnée par

$$u(\mathbf{x}) = G(\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|).$$

G est la fonction de Green⁽¹⁾ et $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel⁽²⁾ de première espèce et d'ordre 0.

⁽¹⁾George Green (1793-1841).

⁽²⁾Hermann Hankel (1839-1873).

2

Position du problème

Sommaire

2.1	Présentation du problème	15
2.1.1	Description physique	15
2.1.2	Présentation mathématique du problème	18
2.2	Réduction à une équation sur Ω^-	21
2.2.1	Opérateur d'impédance	21
2.2.2	Construction de l'opérateur d'impédance	23
2.3	Étude de l'unicité	25
2.3.1	Formulation variationnelle	26
2.3.2	Unicité	27
2.4	Existence de la solution	30

2.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous allons définir le sujet exact de notre étude.

2.1.1 Description physique

On considère le cas d'un obstacle parfaitement conducteur (constitué de métal) recouvert de p fines couches⁽¹⁾ de diélectrique anisotrope⁽²⁾ d'épaisseur h_j ($1 \leq j \leq p$). À l'intérieur

⁽¹⁾ p un entier ≥ 1 , éventuellement $p = 2$.

⁽²⁾Voir la remarque 1.2.1.

de l'obstacle, les champs sont considérés comme nuls. Le diélectrique d'épaisseur h_j est caractérisé par une permittivité relative ε_j et une perméabilité relative $\mu_j^{(1)}$, $1 \leq j \leq p$. On s'intéresse au cas où ε_j et μ_j sont des matrices diagonales⁽²⁾.

$$\varepsilon_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{j,1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{j,2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{j,3} \end{bmatrix} ; \mu_j = \begin{bmatrix} \mu_{j,1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{j,2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{j,3} \end{bmatrix}.$$

L'obstacle métallique recouvert de fines couches de diélectrique est placé dans un milieu diélectrique (milieu de propagation) que l'on suppose parfait (i.e. de conductivité $\sigma = 0$, homogène, isotrope⁽³⁾). Ce milieu peut éventuellement être le vide et il est caractérisé par une permittivité $\varepsilon_0^{(4)}$ et une perméabilité $\mu_0^{(5)}$.

On éclaire ce système par une onde incidente harmonique caractérisée par sa pulsation $\omega > 0$. Cette donnée traduit la dépendance sinusoïdale du champ électromagnétique à travers le facteur multiplicatif $e^{i\omega t}$. Lorsque cette onde rencontre l'obstacle, elle génère une onde diffractée par ce dernier.

Dans le cas de problème de furtivité radar, l'objectif est de connaître la nature de l'onde diffractée par ce type de structure.

L'obstacle métallique occupe le domaine Ω^+ de \mathbb{R}^d en dimension $d = 2$ ou 3 ; l'intérieur du domaine extérieur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega^+$ est noté Ω_∞ , les domaines

$$\Omega_j^+ = \left\{ x \in \Omega_\infty ; \sum_{0 \leq l \leq j-1} h_l < d(x, \partial\Omega^+) < \sum_{0 \leq l \leq j} h_l \right\}, 1 \leq j \leq p, \text{ avec } h_0 = 0$$

caractérisent les couches minces, enfin le milieu extérieur de propagation est représenté par Ω^- . L'interface entre Ω^- et Ω_p^+ est appelée Γ , la frontière métallique est notée Γ_1 , les interfaces entre les couches minces sont notées Γ_j ($2 \leq j \leq p$) où

$$\Gamma_j = \left\{ y \in \Omega_\infty ; y = x - \sum_{j \leq l \leq p} h_l n(x), x \in \Gamma \right\}. \quad (2.1.1)$$

d est la fonction distance d'un point x à la frontière $\partial\Omega^+$.

La normale unitaire à Γ , orientée vers l'extérieur de Ω_p^+ , est désignée par n .

⁽¹⁾Les ε_j et μ_j sont des matrices 3×3 .

⁽²⁾Voir section 1.3.

⁽³⁾Voir la remarque 1.2.1.

⁽⁴⁾Permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 \simeq 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

⁽⁵⁾Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$

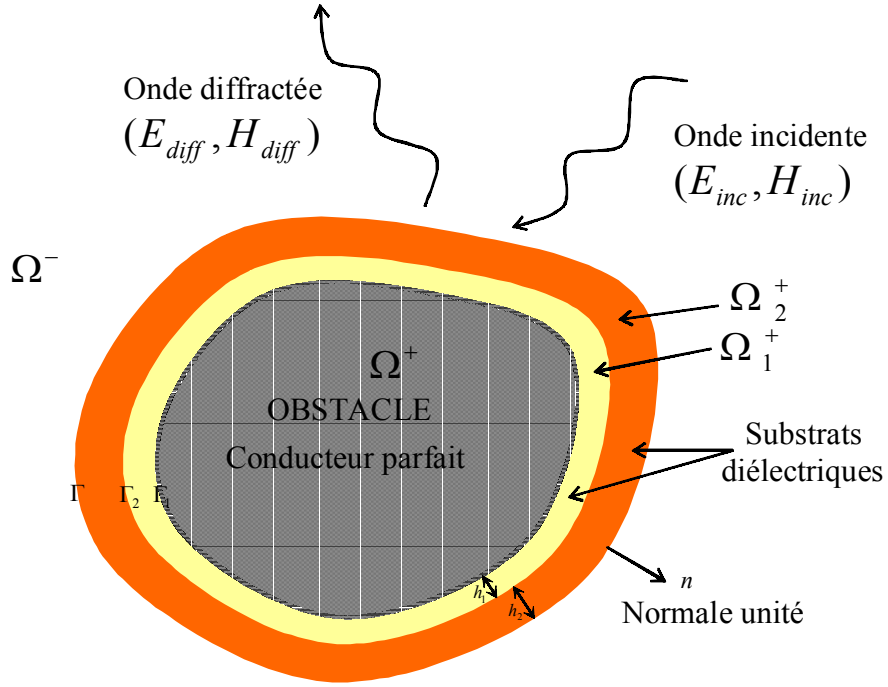


Figure 2.1.1 : Schématisation du problème initial : diffraction par un obstacle métallique recouvert par des couches minces de diélectriques.

On rappelle que la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide est⁽¹⁾

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

La racine carrée du rapport de ces deux constantes est l'impédance du vide

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

La longueur d'onde est associée à la pulsation et à la vitesse par

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Le nombre d'onde k sera une donnée essentielle du problème pour caractériser la fréquence

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Les paramètres précédents sont liés au domaine de propagation.

⁽¹⁾ $c \simeq 3,1 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

2.1.2 □Présentation mathématique du problème

L'onde totale décrite par le couple électromagnétique (E, H) vérifie les équations de Maxwell en régime harmonique. Dans le milieu diélectrique, ces équations sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{rot}E + ikZ_0\mu_j H = 0, \\ \mathbf{rot}H - ikZ_0^{-1}\varepsilon_j E = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

En polarisation TE , des simplifications s'opèrent sur les composantes des champs

$$E = \begin{bmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Dans cette polarisation TE , l'équation de Maxwell-Faraday est scalaire et est donnée dans chacun des $p + 1$ milieux par

$$\begin{cases} \mathbf{rot}E + ikZ_0 u = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathbf{rot}E + ikZ_0\mu_j u = 0 & \text{dans } \Omega_j^+. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

En revanche, l'équation de Maxwell-Ampère reste vectorielle

$$\begin{cases} \mathbf{rot}u - ikZ_0^{-1}E = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathbf{rot}u - ikZ_0^{-1}\varepsilon_j E = 0 & \text{dans } \Omega_j^+ \end{cases} \quad (2.1.5)$$

où l'expression du rotationnel vecteur \mathbf{rot} appliqué à une fonction $\varphi(x, y)$ est donnée par

$$\mathbf{rot}\varphi = \begin{bmatrix} \partial_y\varphi \\ -\partial_x\varphi \end{bmatrix}.$$

Les conditions d'interface et aux limites

Pour pouvoir résoudre le système d'équations (2.1.4) -(2.1.5), il est nécessaire de rajouter des conditions sur les interfaces Γ et Γ_j ($1 \leq j \leq p$) que l'on peut classer en trois groupes.

- Les conditions de transmission à la traversée des frontière Γ et Γ_j ($2 \leq j \leq p$). Elles imposent le raccord des composantes du champ électromagnétique

$$\begin{aligned} a) & [E \wedge n]_{\Gamma} = 0, \quad [E \wedge n]_{\Gamma_j} = 0, \\ b) & [\varepsilon E \cdot n]_{\Gamma} = 0, \quad [\varepsilon E \cdot n]_{\Gamma_j} = 0, \\ c) & [H \wedge n]_{\Gamma} = 0, \quad [H \wedge n]_{\Gamma_j} = 0, \\ d) & [\mu H \cdot n]_{\Gamma} = 0, \quad [\mu H \cdot n]_{\Gamma_j} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Le crochet $[\psi]$ désigne le saut de la trace de la fonction ψ à travers la frontière Γ . Cette quantité est donnée par

$$[\psi] = \psi_{|\Gamma}^+ - \psi_{|\Gamma}^-$$

où la fonction ψ^- (respectivement ψ^+) désigne la restriction de la fonction ψ au domaine Ω^- (respectivement Ω_p^+).

- Une condition de conducteur parfait sur la frontière Γ_1 ⁽¹⁾

$$E \wedge n = 0.$$

- Une condition de radiation à l'infini vérifiée par chaque élément du couple $\{E - E_{inc}, H - H_{inc}\}$ qui est de la forme

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r (u^- - u_{inc}) - ik (u^- - u_{inc})) = 0, \quad (2.1.7)$$

traduisant la propagation de l'énergie portée par l'onde diffractée de l'obstacle vers l'infini.

Il est possible de réduire le système vectoriel (2.1.5) à un problème scalaire en dimension deux. Rappelons les deux étapes de calcul. Par exemple dans le domaine Ω^- , il s'agit de multiplier l'équation de Maxwell-Faraday par ikZ_0^{-1} et d'appliquer le rotationnel vecteur à la relation de Maxwell-Ampère ; il vient alors l'équation d'Helmholtz pour le champ magnétique

$$\Delta u + k^2 u = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^-. \quad (2.1.8)$$

De la même manière, nous avons

$$\mathbf{div}(\mathcal{A}_j \nabla u) + k^2 \mu_{j,3} u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j^+,$$

où \mathcal{A}_j est une matrice 2×2

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{j,1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_{j,2}} \end{bmatrix}.$$

En notant le champ magnétique u^- dans Ω^- et u_j^+ dans Ω_j^+ , les conditions à la frontière (2.1.6) -en mode *TE*- se traduisent par les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \partial_n u^- &= (\mathcal{A}_p \nabla u_p^+) \cdot n ; u^- = u_p^+ && \text{sur } \Gamma, \\ (\mathcal{A}_j \nabla u_j^+) \cdot n &= (\mathcal{A}_{j-1} \nabla u_{j-1}^+) \cdot n ; u_j^+ = u_{j-1}^+ && \text{sur } \Gamma_j \quad (2 \leq j \leq p), \\ (\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

⁽¹⁾Voir remarque 1.2.3.

en effet, par exemple sur Γ_p , les équations (2.1.6 a et c) s'écrivent sous la forme

$$E_p^+ \cdot \tau = E_{p-1}^+ \cdot \tau ; u_p^+ = u_{p-1}^+,$$

où

$$\tau = \begin{bmatrix} n_y \\ -n_x \end{bmatrix}, E^{p-1} = \begin{bmatrix} (E_x^+)_{p-1} \\ (E_y^+)_{p-1} \end{bmatrix} \text{ et } E_p^+ = \begin{bmatrix} (E_x^+)_p \\ (E_y^+)_p \end{bmatrix}.$$

Ensuite, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère (2.1.5), on obtient

$$(\varepsilon_p^{-1} \mathbf{rot} u_p^+) \cdot \tau = (\varepsilon_{p-1}^{-1} \mathbf{rot} u_{p-1}^+) \cdot \tau ; u_p^+ = u_{p-1}^+.$$

Or :

$$\mathbf{rot} u_{p-1}^+ = \begin{bmatrix} \partial_y u_{p-1}^+ \\ -\partial_x u_{p-1}^+ \end{bmatrix} ; \mathbf{rot} u_p^+ = \begin{bmatrix} \partial_y u_p^+ \\ -\partial_x u_p^+ \end{bmatrix}$$

nous obtenons les conditions suivantes sur Γ_p

$$(\mathcal{A}_p \nabla u_p^+) \cdot n = (\mathcal{A}_{p-1} \nabla u_{p-1}^+) \cdot n ; u_p^+ = u_{p-1}^+.$$

Remarque 2.1.1 Si l'inconnue u est cherchée dans l'espace de Fréchet⁽¹⁾ $H_{loc}^1(\overline{\Omega^-})$, sa trace sur Γ est dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Alors la trace de $(\mathcal{A} \nabla u) \cdot n$ sur Γ est dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, pour donner un sens à la condition aux limites.

Finalement, il s'agit de

trouver le champ total $u = (u^-, (u_j^+)_{1 \leq j \leq p})$ dans $H_{loc}^1(\overline{\Omega^-}) \cap_{1 \leq j \leq p} H^1(\Omega_j^+)$ tel que

$$\Delta u^- + k^2 u^- = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-), \quad (2.1.10a)$$

$$\mathbf{div}(\mathcal{A}_j \nabla u_j^+) + k^2 \mu_{j,3} u_j^+ = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_j^+), \quad (2.1.10b)$$

- avec les conditions de transmission sur Γ et Γ_j ($2 \leq j \leq p$)

$$\partial_n u^- = (\mathcal{A}_p \nabla u_p^+) \cdot n \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (2.1.10c)$$

$$u^- = u_p^+ \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (2.1.10d)$$

$$(\mathcal{A}_j \nabla u_j^+) \cdot n = (\mathcal{A}_{j-1} \nabla u_{j-1}^+) \cdot n \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \quad (2 \leq j \leq p), \quad (2.1.10e)$$

$$u_j^+ = u_{j-1}^+ \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \quad (2 \leq j \leq p), \quad (2.1.10f)$$

- avec la condition de conducteur parfait sur Γ_1

$$(\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \quad (2.1.10g)$$

- avec la condition de radiation à l'infini

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r (u^- - u_{inc}) - ik (u^- - u_{inc})) = 0. \quad (2.1.10h)$$

⁽¹⁾Maurice René Fréchet (1878-1973).

Si la polarisation est choisie TM , on se ramène au même problème avec la condition $u_1^+ = 0$ sur Γ_1 au lieu de $(\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n = 0$ et en substituant μ à ε .

Les données ε_j et μ_j vérifient

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_j) \xi \cdot \bar{\xi} \geq c_1 |\xi|^2, \quad \operatorname{Im}(\varepsilon_j) \xi \cdot \bar{\xi} \leq 0, \quad \operatorname{Re}(\mu_j) \xi \cdot \bar{\xi} \geq c_2 |\xi|^2, \quad \operatorname{Im}(\mu_j) \xi \cdot \bar{\xi} \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1.11)$$

Dans le cas où l'une des inégalités sur les parties imaginaires est stricte, il y a dissipation de l'énergie. Cela se traduit par une propriété de coercivité, éventuellement partielle, sur le problème variationnel du système (2.1.10).

2.2 Réduction à une équation sur Ω^-

La résolution numérique d'un problème posé dans un domaine avec couches minces est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur des couches. Le maillage comporte alors un très grand nombre d'éléments, ce qui rend les calculs longs et parfois peu précis. Pour cette raison, on cherche à remplacer le problème initial par un autre problème, dont la solution est proche de celle qu'on recherche, et qui ne fait plus intervenir de couches minces. L'utilisation de l'opérateur d'impédance, relativement à l'équation aux dérivées partielles posée dans les couches minces, permet de ramener la résolution de notre problème initial à celle d'un problème posé uniquement dans le milieu de propagation. Une telle formulation est possible en posant une condition aux limites (condition d'impédance) sur l'interface entre le milieu de propagation et les couches minces.

2.2.1 Opérateur d'impédance

Le but de ce paragraphe est de réécrire le problème de transmission (2.1.10) sous la forme d'un problème de diffraction dans le domaine extérieur de propagation Ω^- avec une condition aux limites appropriée sur la frontière Γ . Cette condition aux limites, appelée encore condition d'impédance lie les composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique. Pour exprimer cette condition de manière exacte, nous introduisons l'opérateur de Steklov-Poincaré⁽¹⁾. Cette approche est caractéristique d'une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement.

Commençons par définir ce nouvel opérateur, appelé aussi (à un facteur multiplicatif près)

⁽¹⁾Vladimir Andreevich Steklov (1864–1926) - Poincaré Jules Henri (1854-1912).

opérateur d'impédance ou d'admittance par les physiciens. En électromagnétisme, la relation est souvent donnée sous la forme

$$E_t = SH_t$$

où E_t et H_t représentent les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique, et S l'opérateur d'impédance, $S^{-1} = T$ est alors l'opérateur d'admittance⁽¹⁾.

Pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Γ , on considère $u^+ = (u_1^+, u_2^+)$ la solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) + k^2 \mu_{1,3} u_1^+ &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_1^+), \\ \operatorname{div}(\mathcal{A}_2 \nabla u_2^+) + k^2 \mu_{2,3} u_2^+ &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_2^+), \\ (\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \text{ en polarisation } TE, \\ (\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n &= (\mathcal{A}_2 \nabla u_2^+) \cdot n; u_1^+ = u_2^+ && \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \\ u_2^+ &= \varphi && \text{sur } \Gamma \text{ avec } \varphi \in H^s(\Gamma). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

En polarisation TM , u^+ est solution du même problème avec la condition sur Γ_1 : $u_1^+ = 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, au lieu de $(\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) \cdot n = 0$ et en substituant μ à ε .

Quelque soit la polarisation étudiée, l'opérateur S sur le domaine borné $\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \Gamma_2$, encore appelé opérateur Dirichlet-to-Neumann⁽²⁾ [3] et noté de manière abrégée DtoN , est défini par l'application

$$\begin{aligned} S : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto S\varphi = (\mathcal{A}_2 \nabla u_2^+) \cdot n|_{\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Le problème extérieur devient

$$\begin{aligned} \Delta u^- + k^2 u^- &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-), \\ \partial_n u^- &= S u^- && \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r (u - u_{inc}) - ik(u - u_{inc})) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Il est bien connu que S est un opérateur pseudo-différentiel (non local). Cet opérateur rend compte de l'effet des couches minces sur le rayonnement et donne lieu ainsi à une condition aux limites de type condition d'impédance. Cette condition d'impédance est associée à l'équation d'Helmholtz et à la condition de radiation pour formuler le problème de transmission initial sous la forme d'un problème aux limites dont la difficulté essentielle vient de la condition aux limites. Par ailleurs cet opérateur assure une deuxième fonctionnalité

⁽¹⁾ Et parfois appelé également opérateur d'impédance.

⁽²⁾ Dirichlet Peter Gustav (1805-1859) - Carl Gottfried Neumann (1832-1925).

utile si nous sommes intéressés par la valeur du champ à l'intérieur du substrat diélectrique. À partir de l'opérateur de Steklov-Poincaré et de la solution propagative déterminée sur la frontière Γ , nous pouvons écrire une relation étroite entre le problème extérieur et le problème intérieur. Cette relation couplée à Helmholtz et à la condition de conducteur parfait, détermine le champ à l'intérieur des couches minces.

Théorème 2.2.1 *L'opérateur S est bien défini, linéaire et continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

De façon analogue, on définit l'opérateur de Steklov-Poincaré \mathcal{N}_k posé dans le domaine extérieur.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{N}_k\varphi = \partial_n w \end{aligned}$$

où w est l'unique solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega'_\infty), \\ w = \varphi & \text{sur } \Gamma, \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_{|x|} w - ikw) = 0. \end{cases}$$

Théorème 2.2.2 *L'opérateur \mathcal{N}_k est bien défini, linéaire et continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

En outre, il existe un opérateur $\tilde{\mathcal{N}}_k$ linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tel que:

(i) \mathcal{N}_k est coercif dans le sens suivant :

$$\exists c > 0; \left\langle \tilde{\mathcal{N}}_k \varphi, \overline{\varphi} \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \geq c \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2; \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (2.2.4)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ désigne le crochet de dualité $H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}$.

(ii) L'opérateur $\mathcal{R}_k = \mathcal{N}_k - \tilde{\mathcal{N}}_k$ est linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et par conséquent \mathcal{R}_k est un opérateur compact de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [27].

2.2.2 Construction de l'opérateur d'impédance

Une approximation de l'opérateur d'impédance S correspond à l'écriture d'une condition d'impédance sur la frontière Γ . En ce qui concerne la construction de ces conditions, nous pouvons citer :

L'approche de Engquist et Nédélec

Dans le cas où l'obstacle est recouvert de fines couches de matériaux diélectriques homogènes, Engquist B. et Nédélec J. C. [18] ont établi des conditions d'impédance valables sur l'obstacle ou sur le bord extérieur de la couche. La première méthode alors utilisée permet, à partir de l'écriture en coordonnées curvilignes de l'équation principale et d'un développement de Taylor⁽¹⁾ à l'ordre k de la solution suivant la variable normale, d'établir une condition d'impédance d'ordre k . La seconde méthode présentée consiste, à partir de la formulation variationnelle du problème initial, à établir un problème variationnel approché en utilisant également des développements de Taylor. Ils retrouvent ainsi, à l'ordre 1 et 2, les conditions d'impédance établies par la première méthode. À noter que les conditions d'impédance ainsi établies peuvent également s'appeler "conditions aux limites approchées ou équivalentes" ou encore "conditions d'impédance généralisées" en référence à la condition aux limites dite de Léontovitch. En effet, Léontovitch M. A. a établi, en 1948, une condition dite "d'impédance de surface" qui lie le champ magnétique par un coefficient de proportionnalité faisant intervenir l'impédance de la surface considérée.

L'approche de Bendali et Lemrabet

Bendali et Lemrabet ont proposé dans [6] des conditions différentielles à la frontière, et ce jusqu'au troisième ordre. Leur approche est basée sur une analyse asymptotique du problème relativement à l'épaisseur. Par cette analyse, ils retrouvent les conditions classiques jusqu'à l'ordre 2 et proposent une nouvelle condition d'ordre 3. Cette condition d'ordre élevé contient un opérateur différentiel d'ordre 4.

L'approche de Senior et Volakis

L'approche de Senior et Volakis basée sur l'approximation d'un coefficient dit coefficient de réflexion, déterminé de manière exacte dans le cas plan. En effet, ils commencent par modéliser la diffraction d'une couche mince sur un plan métallique. La solution est alors explicite et le coefficient de réflexion qui permet de déterminer le champ diffracté est alors entièrement caractérisé : une première condition d'impédance plane est déduite à partir d'un opérateur différentiel. Leur approximation du coefficient de réflexion est étendu au cas des géométries cylindriques et la première condition d'impédance classique est ainsi retrouvée.

⁽¹⁾Taylor Brook (1685-1731).

L'approche par décomposition de domaine

Cette approche est basée sur le même principe que l'étude de Senior et Volakis dans le cas de la géométrie plane, mais c'est l'opérateur de Steklov-Poincaré qui va en quelque sorte remplacer le coefficient de réflexion.

Le but du chapitre suivant est donc de décrire le procédé de dérivation des conditions d'impédance que nous avons mis en place à partir de géométries canoniques. De ce procédé, nous pourrions déduire les techniques d'approximation de l'opérateur d'impédance et ainsi étendre sa construction aux géométries plus complexes. Dans un premier temps, la géométrie plane va nous permettre de développer plusieurs types de conditions limites et d'analyser rapidement la propriété d'approximation. Une première approche très simple consiste à utiliser un développement de Taylor dans les couches minces à partir de la condition de conducteur parfait. De ce développement peuvent être déduites les premières conditions aux limites. Une deuxième approche, toujours dans le cas plan, concerne l'analyse de la réflexion des ondes planes et permet d'explicitier S exactement à partir de son symbole. Par un développement limité, on construit les conditions d'impédance approchées. Ces deux procédés de construction sont très limités du fait de la simplicité de la géométrie et notamment, rien ne permet de prendre en compte la courbure. Pour cette raison, nous avons été amenés à considérer un modèle de géométrie circulaire, modèle qui reste canonique mais qui a l'avantage de faire apparaître des termes de courbure dans l'expression exacte de S .

2.3 Étude de l'unicité

L'unicité de la solution du problème (2.1.10) découle directement du lemme de Rellich ([13], [29]) en utilisant la condition de radiation à l'infini et le théorème de Cauchy-Kawaleskaya⁽¹⁾ [24].

Remarque 2.3.1 *Si la fonction u est solution du système (2.1.10), alors la régularité intérieure des systèmes elliptiques [2] donne $u^- - u_{inc} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\infty)$. La condition de radiation de Sommerfeld⁽²⁾ (2.1.10h) a donc un sens.*

⁽¹⁾Cauchy Augustin-Louis (1789-1857) - Sofia Vasilyevna Kawalevskaya (1850-1891).

⁽²⁾Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951).

Lemme 2.3.1 (de Rellich)

Soit $k > 0$ et u solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } |x| > R_0 > 0. \quad (2.3.1)$$

Alors, ou bien

$$u = 0 \quad \text{sur } |x| > R_0,$$

ou bien, pour tout $R_1 > R_0$ ils existent $M > 0$ et $R_2 > R_1$, tels que

$$\int_{R_1 < |x| < r} |u(x)|^2 dx \geq Mr; \quad \forall r > R_2.$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1 Soit u solution de (2.3.1) Alors :

- i) Si $u \in L^2(|x| > R_0)$, alors $u = 0$ sur $|x| > R_0$.
- ii) Si $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}_r} |u(x)|^2 d\mathcal{S}_r = 0$, alors $u = 0$ sur $|x| > R_0$,
où $\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| = r\}$.

2.3.1 □ Formulation □ variationnelle

On suppose que les frontières Γ et Γ_j ($1 \leq j \leq p$) sont lipchitziennes⁽¹⁾. On peut alors formuler le problème (2.1.10) sous la forme variationnelle précise suivante. On est conduit à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ u^- = u|_{\Omega^-}, \quad u_j^+ = u|_{\Omega_j}, \\ i) a_\infty^-(u^-, v^-) + \sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+(u_j^+, v_j^+) = 0, \quad \forall v \in H_{comp}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ ii) \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r(u^- - u_{inc}) - ik(u^- - u_{inc})) = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

avec $v^- = v|_{\Omega^-}$, $v_j^+ = v|_{\Omega_j}$ et

$$H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_\infty); \varphi v \in H^1(\Omega_\infty), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}, \quad (2.3.3)$$

$$H_{comp}^1(\overline{\Omega_\infty}) = \{v \in H^1(\Omega_\infty); \exists \mathcal{R}_\nu \text{ tel que } v(x) = 0 \text{ pour } |x| > \mathcal{R}_\nu\}, \quad (2.3.4)$$

$$a_\infty^-(u^-, v^-) = \int_{\Omega^-} (\nabla u^- \cdot \overline{\nabla v^-} - k^2 u^- \overline{v^-}) d\Omega^-, \quad (2.3.5)$$

$$a_j^+(u_j^+, v_j^+) = \int_{\Omega_j} (\mathcal{A}_j \nabla u_j^+ \cdot \overline{\nabla v_j^+} - k^2 \mu_{j,3} u_j^+ \overline{v_j^+}) d\Omega_j. \quad (2.3.6)$$

⁽¹⁾Rudolf Otto Sigismund de Lipschitz (1832-1903).

2.3.2 □ Unicité

Nous allons adapter une technique de Wilcox [29] qui, sans utiliser les formules de Green, permet d'établir l'unicité pour le problème (2.3.2), avec une hypothèse de régularité faible sur Γ . La technique de Wilcox est contenue dans la pseudo-formule de Green suivante.

Lemme 2.3.2 *Soit u solution du problème (2.3.2), alors pour tout $R > 0$ suffisamment grand*

$$\sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+ (u_j^+, u_j^+) + \int_{\Omega_R^-} (|\nabla u^-|^2 - k^2 |u^-|^2) d\Omega_R^- = \int_{\mathcal{S}_R} \partial_r u^- \overline{u^-} d\mathcal{S}_R, \quad (2.3.7)$$

où $\Omega_R^- = \{x \in \Omega^-, |x| < R\}$ et \mathcal{S}_R est la sphère de centre O et de rayon R .

Remarque 2.3.2 *On multiplie (2.1.10a) (respectivement (2.1.10b)) par $\overline{u^-}$ (respectivement $\overline{u_j^+}$) et on intègre sur Ω_R^- (respectivement Ω_j^+). En utilisant la formule de Green, on obtient à l'aide de (2.1.10c), (2.1.10d), (2.1.10e), (2.1.10f) et (2.1.10g), l'équation (2.3.7).*

Preuve. On construit d'abord la fonction de troncature en choisissant comme Wilcox une fonction θ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta'(t) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, et

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq 0, \\ 0 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

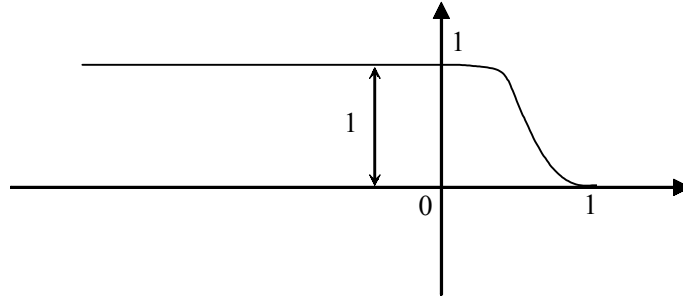


Figure 2.3.1 : La fonction de troncature θ .

On considère alors pour $\delta > 0$, la fonction $\theta_{\delta,R}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\theta_{\delta,R}(x) = \theta\left(\frac{|x| - R}{\delta}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

En prenant $v = \theta_{\delta,R}u$ dans le problème (2.3.2), on obtient alors

$$\sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+ (u_j^+, u_j^+) + \int_{\Omega^-} (\nabla u^- \cdot \nabla (\theta_{\delta,R} \overline{u^-}) - k^2 \theta_{\delta,R} |u^-|^2) d\Omega^- = 0, \quad (2.3.8)$$

car $\theta_{\delta,R}$ est identique à 1 sur Ω_j^+ . D'autre part, on a

$$\nabla (\theta_{\delta,R} \overline{u^-}) = \overline{u^-} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \frac{x}{|x|} + \theta_{\delta,R} \nabla \overline{u^-}. \quad (2.3.9)$$

Comme la fonction $x \mapsto \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right)$ est à support contenu dans la couronne

$$\{x \in \mathbb{R}^d, R \leq |x| \leq R + \delta\},$$

il vient que

$$\int_{\Omega^-} \overline{u^-} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \nabla u^- \cdot \frac{x}{|x|} d\Omega^- = \int_{R \leq |x| \leq R + \delta} \overline{u^-} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \nabla u^- \cdot \frac{x}{|x|} dx.$$

En fait, la régularité intérieure des problèmes elliptiques assure que u^- est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de la couronne précédente.

En posant $x = |x|\omega = |x|(\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-1})$, On écrit

$$\begin{aligned} \int_{R \leq |x| \leq R + \delta} \overline{u^-} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \nabla u^- \cdot \frac{x}{|x|} dx \\ = \int_R^{R+\delta} \frac{1}{\delta} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \left(\int_{S_{|x|}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} |x|^{d-1} d\omega \right) d|x| \\ = \int_R^{R+\delta} \frac{1}{\delta} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \left(\int_{S_{|x|}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} dS_{|x|} \right) d|x|. \end{aligned}$$

Comme θ garde un signe constant, le théorème de la moyenne assure qu'il existe R_δ vérifiant $R \leq R_\delta \leq R + \delta$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \overline{u^-} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \nabla u^- \cdot \frac{x}{|x|} d\Omega^- &= \left(\int_{S_{R_\delta}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} dS_{R_\delta} \right) \int_R^{R+\delta} \frac{1}{\delta} \theta' \left(\frac{|x| - R}{\delta} \right) d|x| \\ &= \left(\int_{S_{R_\delta}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} dS_{R_\delta} \right) (\theta(1) - \theta(0)) \\ &= - \int_{S_{R_\delta}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} dS_{R_\delta}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Combinant (2.3.8), (2.3.9) et (2.3.10) on aboutit à

$$\sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+ (u_j^+, u_j^+) + \int_{\Omega^-} \theta_{\delta,R} (|\nabla u^-|^2 - k^2 |u^-|^2) d\Omega^- = \int_{S_{R_\delta}} \overline{u^-} \partial_{|x|} \overline{u^-} dS_{R_\delta}.$$

Comme $\theta_{\delta,R}$ tend presque partout vers la fonction caractéristique de la boule B_R de centre O et de rayon R lorsque δ tend vers 0, on obtient directement le résultat. ■

On peut alors démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 *Le problème (2.3.2) admet au plus une solution.*

Preuve. Nous allons faire la démonstration de ce théorème dans le cas où les matrices ε et μ sont constantes mais la démonstration s'adapte au cas où les coefficients de ε et μ sont des fonctions analytiques par morceaux dans un sens assez général permettant d'appliquer le principe du prolongement analytique. Il suffit ainsi de démontrer que l'unique solution qui correspond à une donnée $u_{inc} = 0$ est $u = 0$. En prenant les parties imaginaires dans (2.3.7), on obtient pour tout $R > 0$ assez grand

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathcal{S}_R} \partial_r u^- \overline{u^-} d\mathcal{S}_R \right) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+ (u_j^+, u_j^+) \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq p} \int_{\Omega_j} \left(\operatorname{Im} \left(\mathcal{A}_j \nabla u_j^+ \cdot \overline{\nabla v_j^+} \right) - k^2 \operatorname{Im} (\mu_{j,3}) |u_j^+|^2 \right) d\Omega_j \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \int_{\mathcal{S}_R} |u^-|^2 d\mathcal{S}_R &= \frac{1}{2k} \left\{ k^2 \int_{\mathcal{S}_R} |u^-|^2 d\mathcal{S}_R + \int_{\mathcal{S}_R} |\partial_r u^-|^2 d\mathcal{S}_R - 2k \operatorname{Im} \left(\int_{\mathcal{S}_R} \partial_r u^- \overline{u^-} d\mathcal{S}_R \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2k} \int_{\mathcal{S}_R} |\partial_r u^-|^2 d\mathcal{S}_R + \operatorname{Im} \left(\int_{\mathcal{S}_R} \partial_r u^- \overline{u^-} d\mathcal{S}_R \right), \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\frac{k}{2} \int_{\mathcal{S}_R} |u^-|^2 d\mathcal{S}_R \leq \frac{1}{2k} \int_{\mathcal{S}_R} |\partial_r u^- - iku^-|^2 d\mathcal{S}_R.$$

La condition de radiation de Sommerfeld (2.3.2 ii) permet donc d'écrire pour tout $\delta > 0$ et $R > R_\delta$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_R} |u^-|^2 d\mathcal{S}_R &\leq \left(\delta \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) k^2}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \right) \frac{1}{k^2} \int_{\mathcal{S}_R} \frac{1}{|x|^{d-1}} d\mathcal{S}_R \\ &\leq \left(\delta \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) k^2}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \right) \frac{R^{d-1}}{k^2} \operatorname{mes}(\mathcal{S}_R) = \delta, \end{aligned}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction d'Euler⁽¹⁾. D'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}_R} |u^-|^2 d\mathcal{S}_R = 0.$$

⁽¹⁾Leonhard Euler (1707-1783).

Le point *ii*) du corollaire 2.3.1 assure alors que

$$u^-(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > R_0,$$

où $R_0 > 0$ fixé assez grand. Il vient alors que u vérifie

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathcal{A}_j \nabla u_j^+) + k^2 \mu_{j,3} u_j^+ &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_j^+), \\ \operatorname{div}(\nabla u^-) + k^2 u^- &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_R^-). \end{aligned}$$

Le théorème du prolongement analytique pour des coefficients irréguliers [9] montre qu'elle s'annule sur tout Ω_∞ . ■

2.4 Existence de la solution

On va maintenant adapter une technique de Bendali-Lemrabet [6] pour montrer l'existence d'une solution. Cette technique ramène le problème à un problème posé en domaine borné et est plus directe. Nous avons besoin auparavant de transformer la condition de radiation en une "condition homogène". On peut bien sûr travailler avec l'onde diffractée mais cela a pour inconvénient de rendre "non-homogène" les conditions de transmission.

On introduit une fonction de troncature $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur un voisinage de $\bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{\Omega_j^+}$. On fait le changement de fonction inconnue dans le problème (2.3.2)

$$w = u - (1 - \theta) u_{inc}. \quad (2.4.1)$$

Clairement, on est ramené au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ a_\infty^-(w^-, v^-) + \sum_{1 \leq j \leq p} a_j^+(w_j^+, v_j^+) = \int_{\Omega^-} f v^- d\Omega^-, \quad \forall v \in H_{comp}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r w^- - i k w^-) = 0, \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

où $f \in L^2(\Omega^-)$ et $\operatorname{supp} f$ est un compact de Ω^- avec les notations pour w^- et w_j^+ analogues à celles introduites ci-dessus pour u .

Soit alors Σ une courbe fermée de classe \mathcal{C}^∞ entourant le support de f et de Γ (fig 2.4.1). Notons Ω_Σ le domaine borné limité par Σ et Γ , $\tilde{\Omega}^+$ le domaine borné limité par Γ_1 et Γ , et $\tilde{\Omega}_\Sigma$ le domaine borné limité par Γ_1 et Σ .

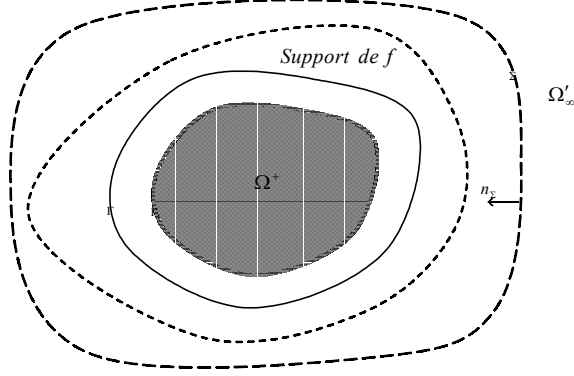


Figure 2.4.1 : Définition du domaine borné Ω_Σ et de sa frontière Σ .

Toujours par la régularité intérieure des problèmes elliptiques, on a $w^- \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega'_\infty})$. La formule de Green montre alors que $a_\infty^-(w^-, v^-)$, pour $v \in H_{\text{copm}}^1(\overline{\Omega'_\infty})$ ne dépend que des valeurs de v^- à l'intérieur de Ω^- . En effet, comme $\Delta w^- + k^2 w^- = 0$ dans Ω^- , on a

$$a_\infty^-(w^-, v^-) = \int_{\Omega_\Sigma} (\nabla w^- \cdot \nabla v^- - k^2 w^- v^-) d\Omega_\infty + \int_\Sigma \partial_{n_\Sigma} w^- v^- d\Sigma, \quad (2.4.3)$$

où n_Σ est la normale unitaire à Σ orientée vers l'extérieur de Ω'_∞ .

De même, $\partial_{n_\Sigma} w^-$ ne dépend que de $w^-|_\Sigma$. En effet, on utilise le fait qu'on peut décomposer \mathcal{N}_k (introduit dans le paragraphe 2.2.1) sous la forme d'un opérateur coercif et d'un opérateur compact.

Lemme 2.4.1 *L'opérateur \mathcal{N}_k s'écrit sous la forme*

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + \mathcal{R}_k,$$

où $\mathcal{N} \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)\right)$, vérifie

$$\exists \gamma > 0 : \langle \mathcal{N}\varphi, \overline{\varphi} \rangle \geq \gamma \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2 \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad (2.4.4)$$

et \mathcal{R}_k est compact de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Une démonstration de ce est donnée dans [9].

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2.4.1 *Le problème (2.3.2) admet au moins une solution.*

Preuve. Clairement, il suffit de montrer que le problème (2.4.2) admet une solution. Pour cela, on utilise la relation (2.4.3) et l'opérateur \mathcal{N}_k pour ramener l'étude de l'existence d'une solution à celle du problème

$$\begin{cases} w \in H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma), \quad \forall v \in H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma), \\ a(w, v) + b(w, v) = L(v), \end{cases} \quad (2.4.5)$$

où

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_{\tilde{\Omega}^+} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} \mathcal{A}_j \nabla w_j^+ \cdot \overline{\nabla v_j^+} \right) d\tilde{\Omega}^+ + \int_{\Omega_\Sigma} \nabla w^- \cdot \overline{\nabla v^-} d\Omega_\Sigma + \langle \mathcal{N}w^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \\ b(w, v) &= - \int_{\tilde{\Omega}^+} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} k^2 \mu_{j,3} w_j^+ \overline{v_j^+} \right) d\tilde{\Omega}^+ + \int_{\Omega_\Sigma} k^2 w^- \overline{v^-} d\Omega_\Sigma + \langle \mathcal{R}_k w^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \\ L(v) &= \int_{\Omega_\Sigma} f v^- d\Omega_\Sigma. \end{aligned}$$

à partir des hypothèses sur les coefficients ε_j , on obtient clairement l'existence d'une constante α telle que

$$\operatorname{Re}(a(w, v)) \geq \alpha \left\{ \int_{\tilde{\Omega}_\Sigma} |\nabla w|^2 d\tilde{\Omega}_\Sigma + \|w\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}^2 \right\}. \quad (2.4.6)$$

Comme le second membre de (2.4.6) est une norme sur $H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma)$ équivalente à la norme usuelle, la forme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma)$. La fin de la démonstration s'obtient par l'alternative de Fredholm sachant que le problème (2.4.5) a au plus une solution, et que l'opérateur de $H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma)$ dans son dual $(H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma))'$ associé à la forme $b(\cdot, \cdot)$ est compact suite à la compacité de l'injection de $H^1(\tilde{\Omega}_\Sigma)$ dans $L^2(\tilde{\Omega}_\Sigma)$ et à celle de \mathcal{R}_k (Lemme 2.4.1).

■

Remarque 2.4.1 *La régularité de la solution est donnée par les résultats généraux sur les systèmes elliptiques.*

3

L'opérateur d'impédance pour des géométries planes

Sommaire

3.1	Approximation de l'opérateur d'impédance par développement de Taylor	35
3.1.1	Le cas de la polarisation TE	35
3.1.2	Le cas de la polarisation TM	41
3.2	Analyse par ondes planes	44
3.2.1	Ondes planes dans le vide et les diélectriques	44
3.2.2	Détermination de la solution analytique	46
3.2.3	Analyse par transformée de Fourier	52
3.2.4	Construction de l'opérateur d'impédance	53
3.3	Analyse asymptotique	59
3.3.1	Changement d'échelle	59
3.3.2	Développement asymptotique et identification formelle	60
3.3.3	Calcul des premiers termes	62

Suite aux résultats de Engquist et Majda [17] et aux travaux de Engquist et Nedelec [18], Bendali et Lemrabet [6], la construction des approximations de l'opérateur d'impédance d'une couche mince pour le système de Maxwell harmonique a été réexaminée par Bartoli

& Bendali [4] qui ont exprimé des approximations d'ordres 2 et 3 à l'aide d'un opérateur quasi-local⁽¹⁾. Les travaux de Bartoli & Bendali concernent le cas d'un obstacle recouvert d'une couche mince de diélectrique isotrope. Nous souhaitons nous traiter ici de façon analogue le cas d'un obstacle recouvert de deux couches minces superposées.

On commence la construction des approximations de l'opérateur d'impédance de couches minces par le cas de la géométrie plane. Cette géométrie modèle permet de décrire le problème de couches minces très simplement en s'affranchissant notamment des termes de courbure.

Considérons un diélectrique anisotrope constitué de deux couches minces d'épaisseur h_1 (resp. h_2) et de permittivité ε_1 (resp. ε_2) recouvre un plan conducteur et supposé infini dans le plan (x, y) , voir figure 3.0.1 .

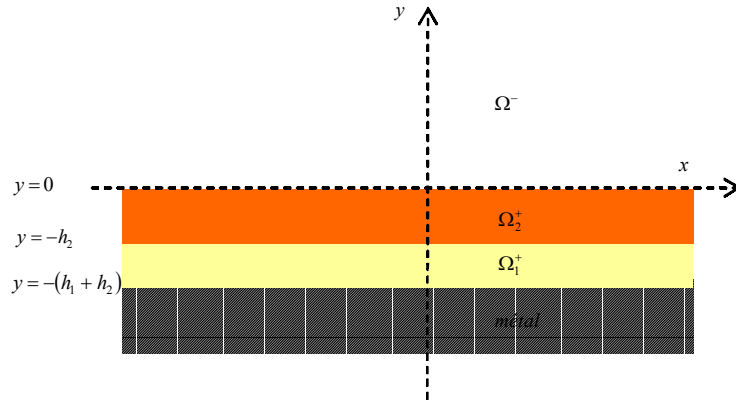


Figure 3.0.1 : Géométrie du problème plan.

La dérivation des conditions d'impédance est basée sur l'approximation de l'opérateur qui à $u^+(x, 0)$ associe le terme $\partial_y u_2^+(x, 0)$, sachant que u^+ est solution du problème suivant :

En polarisation TE

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} (\mathcal{A}_1 \nabla u_1^+) + k^2 \mu_{1,3} u_1^+ = 0 & \text{pour } -h = -(h_1 + h_2) < y < -h_1 \\ \mathbf{div} (\mathcal{A}_2 \nabla u_2^+) + k^2 \mu_{2,3} u_2^+ = 0 & \text{pour } -h_1 < y < 0 \\ \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) \\ u_2^+(x, -h_2) = u_1^+(x, -h_2) \\ \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) = \partial_y u^-(x, 0) ; u_2^+(x, 0) = u^-(x, 0). \end{array} \right.$$

⁽¹⁾Voir la définition page 38

En polarisation TM , u^+ est solution du même problème, avec la condition $u_1^+ = 0$ sur $y = -(h_1 + h_2)$ au lieu de $\partial_y u_1^+ = 0$ et en substituant μ à ε .

Le problème aux limites dans le domaine Ω^- s'écrit à l'aide de l'opérateur d'impédance S .

En polarisation TE

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{pour } y > 0 \\ \partial_y u^-(x, 0) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} S u^-(x, 0) \\ u^- - u_{inc} \text{ vérifie une condition de radiation à l'infini.} \end{cases}$$

En polarisation TM

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{pour } y > 0 \\ u^-(x, 0) = \frac{1}{\mu_{2,2}} S u^-(x, 0) \\ u^- - u_{inc} \text{ vérifie une condition de radiation à l'infini.} \end{cases}$$

Il est possible de donner un procédé récurrent de construction de l'opérateur d'impédance exact ou approché à partir de sa définition

$$\partial_y u^+(x, 0) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} S(u^+(\cdot, 0))(x, 0).$$

Nous commençons par approcher l'opérateur d'impédance à l'aide d'un développement de Taylor dans les couches minces.

3.1 Approximation de l'opérateur d'impédance par développement de Taylor

On part de la condition de conducteur parfait en $y = -(h_1 + h_2)$ et on écrit un développement de Taylor aux points $(x, y = -h_2)$ et $(x, y = 0)$. En utilisant le fait que u_1^+ (*resp.* u_2^+) vérifie l'équation de Helmholtz dans Ω_1^+ (*resp.* Ω_2^+) et en tenant compte des conditions de transmission, on obtient une formule permettant de relier $\partial_y u^+(x, 0)$ et $u^+(x, 0)$.

On pourra ensuite facilement en déduire une approximation de l'opérateur d'impédance ; l'ordre du développement donnera l'ordre de l'approximation.

Examinons maintenant en détail les deux cas de polarisation.

3.1.1 Le cas de la polarisation TE

Nous commençons les calculs par ce qu'il y a de plus simple, c'est à dire un développement à l'ordre 0 des conditions $\partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2))$ et $\partial_y u_2^+(x, -h_2)$.

- Condition d'ordre $(0, 0)^{(1)}$ par développement de Taylor

$$\partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1),$$

$$\partial_y u_2^+(x, -h_2) = \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2).$$

Utilisons les conditions de raccord

$$u_2^+(x, -h_2) = u_1^+(x, -h_2),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2),$$

et la condition de conducteur parfait

$$\partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = 0,$$

nous avons l'approximation d'ordre $(0, 0)$ qui est donnée par

$$S(u^+(\cdot, 0))(x, 0) = \varepsilon_{2,2} \partial_y u^+(x, 0) = 0. \quad (3.1.1)$$

La condition d'impédance associée s'étend au cas général en remplaçant ∂_y par ∂_n

$$\partial_n u^-(x, 0) = 0. \quad (3.1.2)$$

Cette condition est en fait naturelle, elle consiste à enlever tout simplement les deux couches minces. Elle est toutefois inintéressante puisqu'elle ne prend pas en compte l'effet des couches. Elle n'est satisfaisante que lorsque les épaisseurs des couches deviennent presque nulles. Il nous faut donc aller plus loin dans notre développement pour aboutir à des conditions d'ordres supérieurs plus utiles.

Cette condition d'ordre $(0, 0)$, elle devra être retrouvée à tous les ordres supérieurs en faisant tendre les épaisseurs h_1 et h_2 vers zéro.

- Condition d'ordre $(1, 0)^{(2)}$ par développement de Taylor.

Nous voyons apparaître ici un terme supplémentaire

$$\frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^2)^{(3)},$$

$$\partial_y u_2^+(x, -h_2) = \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2).$$

⁽¹⁾D'ordre 0 par rapport à h_1 et d'ordre 0 par rapport à h_2 .

⁽²⁾D'ordre 1 par rapport à h_1 et d'ordre 0 par rapport à h_2 .

⁽³⁾Nous utiliserons la notations allégée $\partial_y \frac{1}{\varepsilon} \partial_y u$ au lieu de $\partial_y \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_y u \right)$.

Notre but, rappelons le, est d'exprimer $\partial_y u_2^+(x, 0)$ à l'aide de $u_2^+(x, 0)$. Il faut alors exprimer la dérivée $\partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y$ en fonction de termes relatifs à la dérivation par rapport à x . Avec l'équation qui est vérifiée dans la couche mince Ω_1^+ , il vient

$$\begin{aligned} \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) &= - \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x u_1^+(x, -h_2) + k^2 \mu_{1,3} u_1^+(x, -h_2) \right) \\ &= - \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x u_2^+(x, -h_2) + k^2 \mu_{1,3} u_2^+(x, -h_2) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de raccord sur $y = -h_2$ nous obtenons l'approximation de l'opérateur S

$$S\varphi = -\varepsilon_{2,2} h_1 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x \varphi + k^2 \mu_{1,3} \varphi \right)^{(1)}.$$

Ensuite, nous donnons la condition d'impédance d'ordre (1, 0) correspondante

$$\partial_y u^-(x, 0) + h_1 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x u^-(x, 0) + k^2 \mu_{1,3} u^-(x, 0) \right) = 0. \quad (3.1.3)$$

Cette condition d'ordre (1, 0) revient à négliger la deuxième couche mince.

- Condition d'ordre (0, 1) par développement de Taylor.

On écrit

$$\begin{aligned} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1), \\ \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) &= \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^2). \end{aligned}$$

Un calcul identique au précédent conduit à l'approximation suivante de S

$$S\varphi = -\varepsilon_{2,2} h_2 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x \varphi + k^2 \mu_{2,3} \varphi \right).$$

Et ainsi, la condition d'impédance s'écrit

$$\partial_y u^-(x, 0) + h_2 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x u^-(x, 0) + k^2 \mu_{2,3} u^-(x, 0) \right) = 0. \quad (3.1.4)$$

Afin de retrouver la condition d'ordre 1 d'Engquist-Nédélec, il suffit d'opérer les substitutions suivantes

$$\partial_x \longleftrightarrow \partial_s ; \quad \partial_y \longleftrightarrow \partial_n,$$

où s est l'abscisse curviligne sur Γ orientée dans le sens direct. On obtient

$$\partial_n u^-(x, 0) + h_2 \left(\partial_s \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_s u^-(x, 0) + k^2 \mu_{2,3} u^-(x, 0) \right) = 0. \quad (3.1.5)$$

⁽¹⁾ $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{1,1}(x, -h_2)$; $\varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{2,2}(x, 0)$.

- Condition d'ordre (1, 1) par développement de Taylor.

Examinons maintenant la condition d'ordre (1, 1)

$$\frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^2),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^2).$$

L'approximation de l'opérateur d'impédance donnée dans ce cas par

$$S\varphi = -Q^{-1} \left\{ \varepsilon_{2,2} h_1 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x \varphi + k^2 \mu_{1,3} \varphi \right) + h_2 \varepsilon_{2,2} \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x \varphi + k^2 \mu_{2,3} \varphi \right) \right\}$$

où Q est l'opérateur qui associe à une fonction φ

$$Q\varphi = \left\{ 1 - \varepsilon_{2,2} h_1 h_2 \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_x + k^2 \mu_{1,3} \right) \right\} \varphi.$$

Alors, on écrit la condition d'impédance pour le problème extérieur sous forme

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} Q^{-1} \left\{ \varepsilon_{2,2} h_1 \left(\partial_s \frac{1}{\varepsilon_{1,1}} \partial_s + k^2 \mu_{1,3} \right) + h_2 \varepsilon_{2,2} \left(\partial_s \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_s + k^2 \mu_{2,3} \right) \right\} u^-(x, 0) = 0. \quad (3.1.6)$$

Cette condition d'ordre (1, 1) s'exprime à l'aide d'un opérateur quasi-local, c'est à dire à partir d'un opérateur différentiel et de l'inverse d'un opérateur différentiel.

Définition 3.1.1 (Opérateur quasi-local)

Formellement, un opérateur quasi-local $R(\partial_s)$ se définit par

$$R(\partial_s) = \frac{P(\partial_s)}{Q(\partial_s)} \quad (3.1.7)$$

où $P(\partial_s)$ et $Q(\partial_s)$ sont deux opérateurs différentiels.

La condition (3.1.6) se réécrit de manière équivalente sous la forme d'un système

$$\partial_n u^-(x, 0) + R(\partial_s) u^-(x, 0) = 0 \iff \begin{cases} \partial_n u^-(x, 0) + P(\partial_s) w^-(x, 0) = 0 \\ Q(\partial_s) w^-(x, 0) = u^-(x, 0) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

où la fonction $w^-(x, 0)$ est une inconnue auxiliaire définie seulement sur Γ .

- Condition d'ordre (0, 2) par développement de Taylor

$$\partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

La présence de l'opérateur $\partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0)$ dans le développement de Taylor ajoute une difficulté supplémentaire consiste à exprimer cet opérateur en fonction du terme $u_2^+(x, 0)$.

En dérivant par rapport à y l'équation vérifiée par u_2^+ , on en déduit

$$\begin{aligned} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) = \\ - \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x + k^2 \mu_{2,3} \right) \partial_y u_2^+(x, 0) - \left(\partial_x \left(\partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \right) \partial_x + k^2 (\partial_y \mu_{2,3}) \right) u_2^+(x, 0). \end{aligned}$$

En reprenant le développement de Taylor, nous avons

$$\partial_y u_2^+(x, 0) + h_2 \varepsilon_{2,2} \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x + k^2 \mu_{2,3} \right) u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \varepsilon_{2,2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) = 0$$

ou encore

$$\partial_y u_2^+(x, 0) + h_2 L(\varepsilon_2) u_2^+(x, 0) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon_2) \partial_y u_2^+(x, 0) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon'_2) u_2^+(x, 0) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} L(\varepsilon_2) &= \varepsilon_{2,2} \left(\partial_x \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \partial_x + k^2 \mu_{2,3} \right), \\ L(\varepsilon'_2) &= \varepsilon_{2,2} \left[\partial_x \left(\partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \right) \partial_x + k^2 (\partial_y \mu_{2,3}) \right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir une approximation de l'opérateur S , il faut regrouper les termes $\partial_y u_2^+(x, 0)$, ce qui donne

$$S\varphi = -Q^{-1} \left(h_2 L(\varepsilon_2) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon'_2) \right) \varphi$$

où

$$Q\varphi = \left(1 - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon_2) \right) \varphi.$$

À l'aide des conditions de raccord, nous écrivons la condition d'impédance relative à la solution u^- dans le domaine de propagation sous la forme $\partial_y u^- - S u^-$

$$\partial_y u^-(x, 0) + \frac{h_2}{\varepsilon_{2,2}} Q^{-1} \left(h_2 L(\varepsilon_2) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon'_2) \right) u^-(x, 0) = 0 \quad (3.1.9)$$

ou encore

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{h_2}{\varepsilon_{2,2}} Q^{-1} \left(h_2 L(\varepsilon_2) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon'_2) \right) u^-(x, 0) = 0. \quad (3.1.10)$$

- Condition d'ordre (1, 2) par développement de Taylor

$$\frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^2),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

Posons

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= 1 - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon_2), \\ P &= h_2 L(\varepsilon_2) - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon_2') + \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 \Lambda_2 L(\varepsilon_1), \\ Q &= \Lambda_2 - \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 h_2 L(\varepsilon_1) - h_1 \frac{h_2^2}{2} \varepsilon_{2,2} \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,1}}. \end{aligned}$$

On a alors l'approximation de l'opérateur d'impédance

$$S\varphi = -Q^{-1}P\varphi.$$

La condition d'impédance pour le problème extérieur s'écrit

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} Q^{-1} P u^-(x, 0) = 0.$$

- Condition d'ordre (2, 1) par développement de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) \\ &\quad + \frac{h_1^2}{2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^3), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^2).$$

Nous obtenons une approximation de S donnée par

$$S\varphi = -Q^{-1}P\varphi.$$

Où

$$\begin{aligned} P &= h_2 \Lambda_1 L(\varepsilon_2) + \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 \left(L(\varepsilon_1) - \frac{h_1}{2} L(\varepsilon_1') \right), \\ Q &= \Lambda_1 - \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 h_2 \left(L(\varepsilon_1) - \frac{h_1}{2} L(\varepsilon_1') \right), \\ \Lambda_1 &= 1 - \frac{h_1^2}{2} L(\varepsilon_1). \end{aligned}$$

- Condition d'ordre (2, 2) par développement de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) \\ &\quad + \frac{h_1^2}{2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^3), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

Posons

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1 - \frac{h_1^2}{2} L(\varepsilon_1), \\ \Lambda_2 &= 1 - \frac{h_2^2}{2} L(\varepsilon_2), \\ P &= h_2 \Lambda_1 \left(L(\varepsilon_2) - \frac{h_2}{2} L(\varepsilon_2') \right) + \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 \left(L(\varepsilon_1) - \frac{h_1}{2} L(\varepsilon_1') \right) \Lambda_2, \\ Q &= \Lambda_1 \Lambda_2 - \frac{\varepsilon_{2,2}}{\varepsilon_{1,2}} h_1 h_2 \left(L(\varepsilon_1) - \frac{h_1}{2} L(\varepsilon_1') \right) \left(1 + \frac{h_2}{2} \varepsilon_{2,2} \left(\partial_y \frac{1}{\varepsilon_{2,1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$S\varphi = -Q^{-1}P\varphi.$$

Et ainsi, la condition d'impédance s'écrit

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{1}{\varepsilon_{2,2}} Q^{-1} P u^-(x, 0) = 0. \quad (3.1.11)$$

Cette première approche permet de construire simplement les premières conditions d'impédance à partir d'un développement de Taylor. Nous avons pu ainsi identifier l'opérateur d'impédance au travers de son approximation par des opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels.

Nous examinons maintenant le développement de Taylor pour la polarisation TM .

3.1.2 Le cas de la polarisation TM

- Condition d'ordre (0, 0) par développement de Taylor

$$u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1),$$

$$u_2^+(x, -h_2) = u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2).$$

L'opérateur d'impédance approché d'ordre (0, 0) est alors donné par

$$S(u^+(\cdot, 0))(x, 0) = \mu_{2,2} u^+(x, 0) = 0.$$

La condition d'impédance associée : c'est la condition aux limites de Dirichlet et qui traduit ici que l'on néglige complètement les couches minces.

- Condition d'ordre (0, 1) par développement de Taylor

$$\begin{aligned} u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1), \\ u_2^+(x, -h_2) &= u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^2). \end{aligned}$$

La relation entre $u_2^+(x, 0)$ et $\partial_y u_2^+(x, 0)$ se déduit immédiatement

$$u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) = 0$$

ou encore, avec les conditions de raccord,

$$u^-(x, 0) - h_2 \varepsilon_{2,2} \partial_y u^-(x, 0) = 0.$$

En substituant ∂_n à ∂_y on retrouve la condition d'Engquist-Nédélec d'ordre 1

$$u^-(x, 0) - h_2 \mu_{2,2} \partial_n u^-(x, 0) = 0.$$

- Condition d'ordre (1, 1) par développement de Taylor

$$\begin{aligned} u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^2), \\ u_2^+(x, -h_2) &= u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^2). \end{aligned}$$

L'approximation de l'opérateur d'impédance est

$$S\varphi = \left(1 + \frac{\mu_{2,2} h_2}{\mu_{1,2} h_1}\right)^{-1} \left(\frac{\mu_{2,2}}{\mu_{1,2} h_1} - h_2 L(\mu_2)\right) \varphi.$$

Où

$$\begin{aligned} L(\mu_2) &= \mu_{2,2} \left(\partial_x \frac{1}{\mu_{2,1}} \partial_x + k^2 \varepsilon_{2,3} \right), \\ L(\mu'_2) &= \mu_{2,2} \left[\partial_x \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) \partial_x + k^2 (\partial_y \varepsilon_{2,3}) \right]. \end{aligned}$$

La condition d'impédance est donnée par

$$\partial_n u^-(x, 0) - \left(1 + \frac{\mu_{2,2} h_2}{\mu_{1,2} h_1}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\mu_{1,2} h_1} - \frac{h_2}{\mu_{2,2}} L(\mu_2)\right) u^-(x, 0) = 0.$$

- Condition d'ordre (0, 2) par développement de Taylor

Le développement de Taylor est donné par

$$u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1),$$

$$u_2^+(x, -h_2) = u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

Comme pour la polarisation TE , on utilise la relation vérifiée dans la couche mince pour remplacer le terme $\partial_y^2 u_2^+(x, 0)$. On obtient

$$\Lambda_2 \varphi - h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2} \mu_{2,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) \right) T \varphi = 0.$$

Ainsi, la condition d'impédance est

$$\Lambda_2 u^-(x, 0) - \mu_{2,2} h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2} \mu_{2,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) \right) \partial_y u^-(x, 0) = 0.$$

- Condition d'ordre (1, 2) par développement de Taylor

Le développement de Taylor est donné par

$$u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^2),$$

$$u_2^+(x, -h_2) = u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

Alors, l'approximation de l'opérateur d'impédance s'écrit

$$S \varphi = -Q^{-1} P \varphi,$$

où

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\mu_{2,2}}{\mu_{1,2}} \Lambda_2 + h_1 h_2 \left(L(\mu_2) - \frac{h_2}{2} L(\mu_2') \right), \\ Q &= h_1 \Lambda_2 + \frac{\mu_{2,2}}{\mu_{1,2}} h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2} \mu_{2,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) \right), \\ \Lambda_2 &= 1 - \frac{h_2^2}{2} L(\mu_2). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de radiation, nous pouvons écrire la condition d'impédance

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{1}{\mu_{2,2}} Q^{-1} P u^-(x, 0) = 0.$$

- Condition d'ordre (2, 2) par développement de Taylor

Le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 est donné par

$$u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = u_1^+(x, -h_2) - h_1 \partial_y u_1^+(x, -h_2) + \frac{h_1^2}{2} \partial_y^2 u_1^+(x, -h_2) + \mathcal{O}(h_1^3),$$

$$u_2^+(x, -h_2) = u_2^+(x, 0) - h_2 \partial_y u_2^+(x, 0) + \frac{h_2^2}{2} \partial_y^2 u_2^+(x, 0) + \mathcal{O}(h_2^3).$$

On utilise la relation vérifiée dans les couches minces pour remplacer les deux termes $\partial_y^2 u_2^+(x, 0)$ et $\partial_y^2 u_1^+(x, -h_2)$. On obtient

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_{2,2}}{\mu_{1,2}} \Lambda_1 \Lambda_2 - h_1 h_2 \left(1 + \frac{h_1}{2} \mu_{1,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{1,1}} \right) \right) \left(L(\mu_2) - \frac{h_2}{2} L(\mu_2') \right), \\ Q &= -\frac{\mu_{2,2}}{\mu_{1,2}} h_2 \Lambda_1 \left(1 + \frac{h_2}{2} \mu_{2,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) \right) - h_1 \left(1 + \frac{h_1}{2} \mu_{1,2} \left(\partial_y \frac{1}{\mu_{1,2}} \right) \right) \Lambda_2, \\ S\varphi &= -Q^{-1} P \varphi. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de raccord, nous obtenons la condition d'impédance

$$\partial_n u^-(x, 0) + \frac{1}{\mu_{2,2}} Q^{-1} P u^-(x, 0) = 0.$$

3.2 Analyse par ondes planes

Nous allons introduire une autre approche utilisée par les physiciens pour décrire, les effets des couches minces diélectriques recouvrant un conducteur parfait. Dans le cas où le champ incident est une onde plane décomposée en mode de Fourier-Hankel, l'opérateur d'impédance est déterminé explicitement à travers son symbole⁽¹⁾. L'approximation de ce symbole par un polynôme ou une fraction rationnelle nous permet de construire les différentes conditions d'impédance.

Nous nous limitons ici au cas où les couches minces diélectriques sont isotropes homogènes (*i.e.* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1$ et μ_2 sont des scalaires constants).

3.2.1 Ondes planes dans le vide et les diélectriques

On étudie dans cette sous-section les principales caractéristiques de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire et isotrope homogène.

⁽¹⁾Voir la définition 3.2.2.

Notion d'onde plane harmonique

Il est bien connu qu'il existe deux types d'ondes planes électromagnétiques, c'est-à-dire de solutions particulières des équations de Maxwell s'écrivant sous la forme

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} e^{i(K\mathbf{x}-\omega t)} \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad K \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ces deux familles d'ondes sont toutes deux associées à la même relation de dispersion

$$\omega^2 = |K|^2 \tag{3.2.1}$$

et ne se distinguent qu'au niveau de la polarisation c'est-à-dire au niveau de la direction du vecteur (E_0, H_0) . Notons que dès à présent que l'équation (3.2.1) nous permet d'écrire

$$K = \omega \mathbf{k}, \quad |\mathbf{k}|^2 = 1.$$

où \mathbf{k} désigne la direction de propagation de l'onde.

Pour notre classification des ondes, il est naturel, vu la géométrie du problème qui nous intéresse, de faire jouer un rôle particulier à la direction \vec{Oz} . Nous distinguons donc :

- les ondes transverses électriques *TE* qui correspondent à $E_0 \perp \vec{Oz}$ ce qui entraîne que

$$E_0 \equiv E_0 \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad H_0 = \mathbf{k}_\Lambda E_0.$$

- les ondes transverses magnétiques *TM* qui correspondent à $H_0 \perp \vec{Oz}$ ce qui entraîne que

$$H_0 \equiv H_0 \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_0 = -\mathbf{k}_\Lambda H_0.$$

Réflexion sur la surface de séparation de deux diélectriques

Soit une onde électromagnétique plane polarisée arrivant, comme le montre la figure 3.2.1, sur la surface $S(\vec{Ox}, \vec{Oz})$ séparant deux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2 , de perméabilités μ_1 et μ_2 .

L'onde incidente est caractérisée par

$$u_{inc} = \mathcal{T} e^{-ikn_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} \tag{1}$$

⁽¹⁾ $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ est l'indice du milieu.

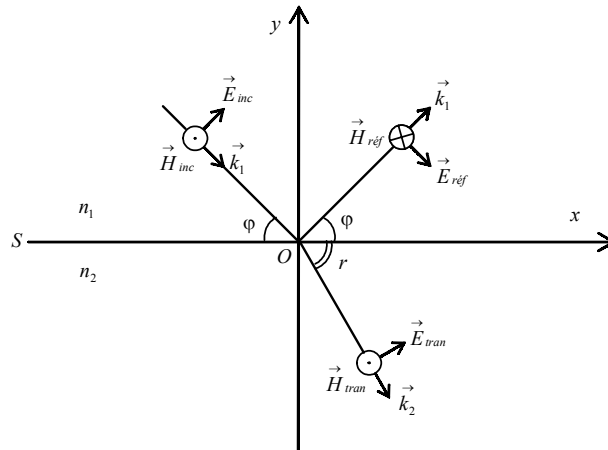


Figure 3.2.1 : Réflexion sur une surface de séparation de deux diélectriques.

où \mathcal{T} est l'amplitude du champ magnétique en polarisation TE , du champ électrique en polarisation TM .

Une partie de l'onde est transmise dans le milieu 2,

$$u_{tran} = \mathcal{T} e^{-ikn_2(x \cos r + y \sin r)}$$

l'autre est réfléchi et retourne dans le milieu 1. Si l'on suppose que le champ électrique de l'onde réfléchi garde le même sens, on peut écrire

$$u_{ref} = U_R e^{-ikn_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}.$$

Définition 3.2.1 On définit le coefficient de transmission par l'amplitude \mathcal{T} et le coefficient de réflexion par $\mathcal{R} = \frac{U_R}{\mathcal{T}}$.

Remarque 3.2.1 À la surface d'un conducteur parfait, il y a réflexion totale avec un changement de signe. (Le champ électrique change de sens après réflexion, par contre le champ magnétique garde le même sens).

3.2.2 Détermination de la solution analytique

Dans le cadre très simple d'une géométrie plane, le problème exact est résolu explicitement. On peut alors déduire une expression exacte de l'opérateur d'impédance à l'aide d'un symbole. Les conditions d'impédance sont alors construites en approchant cet opérateur.

Expressions des ondes

Comme le montre la figure 3.2.2, l'onde plane incidente est fixée par l'angle d'incidence φ

$$u_{inc} = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}. \quad (3.2.2)$$

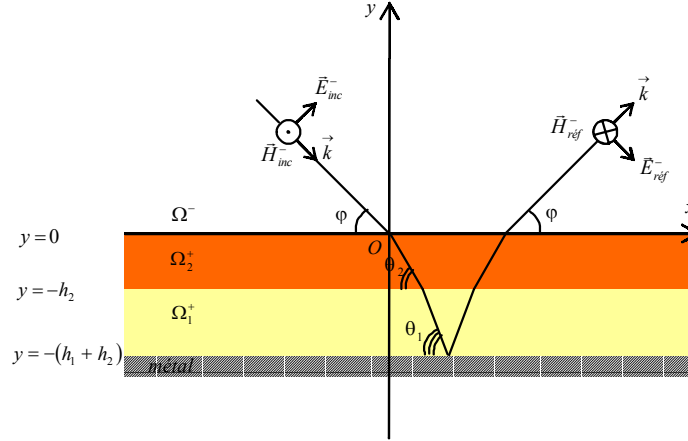


Figure 3.2.2 : Diffraction d'une onde plane par un conducteur plan, recouvert par deux couches minces de diélectriques.

L'onde totale dans le milieu de propagation est donnée sous forme d'une superposition de deux ondes planes : l'onde incidente et l'onde réfléchie. Son expression est caractérisée par le coefficient de réflexion \mathcal{R} et sa détermination se ramène à celle de \mathcal{R}

$$u^-(x, y) = (e^{-iky \sin \varphi} + \mathcal{R}e^{iky \sin \varphi}) e^{-ikx \cos \varphi}. \quad (3.2.3)$$

Ainsi, dans les couches minces, on cherche l'onde sous forme d'une superposition de deux ondes planes : une onde transmise caractérisée par des coefficients de transmission \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2) pour Ω_1^+ (resp. Ω_2^+) et des angles de réfraction θ_1 (resp. θ_2).

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 e^{-ikn_1 y \sin \theta_1} e^{-ikn_1 x \cos \theta_1}, \\ \mathcal{T}_2 e^{-ikn_2 y \sin \theta_2} e^{-ikn_2 x \cos \theta_2} \end{aligned}$$

et une onde réfléchie par le fond métallique $y = -(h_1 + h_2)$ (resp. la surface $y = -h_1$) caractérisée par des coefficients de réflexion \mathcal{R}_1 (resp. \mathcal{R}_2)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \mathcal{R}_1 e^{ikn_1 y \sin \theta_1} e^{-ikn_1 x \cos \theta_1}, \\ \mathcal{T}_2 \mathcal{R}_2 e^{ikn_2 y \sin \theta_2} e^{-ikn_2 x \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

L'onde totale dans les couches minces est alors donnée par

$$u_1^+(x, y) = (\mathcal{T}_1 e^{-ikn_1 y \sin \theta_1} + \mathcal{T}_1 \mathcal{R}_1 e^{ikn_1 y \sin \theta_1}) e^{-ikn_1 x \cos \theta_1}, \quad (3.2.4)$$

$$u_2^+(x, y) = (\mathcal{T}_2 e^{-ikn_2 y \sin \theta_2} + \mathcal{T}_2 \mathcal{R}_2 e^{ikn_2 y \sin \theta_2}) e^{-ikn_2 x \cos \theta_2}. \quad (3.2.5)$$

On peut, à l'aide de la loi de Snell-Descartes, déterminer les angles θ_1 et θ_2 en fonction de l'angle d'incidence φ . La détermination de l'onde dans les couches minces se ramène à celle des coefficients de transmission \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , et des coefficients de réflexion de l'onde transmise \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Ainsi, les cinq coefficients \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{R} suffisent à déterminer l'onde totale dans les trois milieux Ω^- , Ω_1^+ et Ω_2^+ . Pour les expliciter, il suffit de traduire les conditions de transmission en $y = 0$ et $y = -h_1$ et de la condition de conducteur parfait en $y = -(h_1 + h_2)$.

Loi de Snell-Descartes :

Les angles θ_1, θ_2 et φ vérifient la relation

$$\cos \varphi = n_2 \cos \theta_2 = n_1 \cos \theta_1. \quad (3.2.6)$$

Si les indices n_1 et n_2 sont tels que $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$ (ce qui est toujours le cas en pratique) la relation de Snell-Descartes possède toujours une solution $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ pour $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Comme nous avons $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, il découle de cette loi une deuxième égalité relative au sinus

$$\sin \theta_i = f_i(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{n_i^2}} \quad i = 1, 2.$$

Détermination des coefficients de réflexion et de transmission

La condition du conducteur parfait $\partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = 0$ en polarisation TE et $u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = 0$ en polarisation TM , s'écrit

$$\begin{aligned} -e^{ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} + \mathcal{R}_1 e^{-ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} &= 0 && \text{en polarisation } TE, \\ e^{ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} + \mathcal{R}_1 e^{-ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} &= 0 && \text{en polarisation } TM, \end{aligned}$$

et le coefficient de réflexion \mathcal{R}_1 est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= e^{2ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} = e^{2ikn_1(h_1+h_2)f_1(\varphi)} && \text{en polarisation } TE, \\ \mathcal{R}_1 &= -e^{2ikn_1(h_1+h_2)\sin\theta_1} = -e^{2ikn_1(h_1+h_2)f_1(\varphi)} && \text{en polarisation } TM, \end{aligned}$$

À partir des relations de Snell-Descartes (3.2.6), en utilisant les conditions de raccord des traces $u_1^+(x, -h_2) = u_2^+(x, -h_2)$ et $u_2^+(x, 0) = u^-(x, 0)$, on trouve facilement les deux relations

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2} = \frac{e^{ikh_2 n_2 \sin \theta_2} + \mathcal{R}_2 e^{-ikh_2 n_2 \sin \theta_2}}{e^{ikh_2 n_1 \sin \theta_1} + \mathcal{R}_1 e^{-ikh_2 n_1 \sin \theta_1}}, \quad (3.2.7)$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1 + \mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}_2}. \quad (3.2.8)$$

Les conditions de raccord $\frac{1}{\varepsilon_1} \partial_y u_1^+(x; -h_2) = \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_y u_2^+(x; -h_2)$ et $\frac{1}{\varepsilon_2} \partial_y u_2^+(x; 0) = \partial_y u^-(x; 0)$ nous donnent des autres relations liant les cinq coefficients $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ et \mathcal{R}

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2} = \frac{(e^{ikh_2 n_2 \sin \theta_2} - \mathcal{R}_2 e^{-ikh_2 n_2 \sin \theta_2}) \varepsilon_1 n_2 \sin \theta_2}{(e^{ikh_2 n_1 \sin \theta_1} - \mathcal{R}_1 e^{-ikh_2 n_1 \sin \theta_1}) \varepsilon_2 n_1 \sin \theta_1}, \quad (3.2.9)$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{(1 - \mathcal{R}) \varepsilon_2 \sin \varphi}{(1 - \mathcal{R}_2) n_2 \sin \theta_2}. \quad (3.2.10)$$

Pour déterminer les deux inconnues \mathcal{R}_2 et \mathcal{R} , nous utilisons les relations (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) et (3.2.10). Nous obtenons

$$\frac{1 - \mathcal{R}_2 e^{-2ikh_2 n_2 \sin \theta_2}}{1 + \mathcal{R}_2 e^{-2ikh_2 n_2 \sin \theta_2}} = \frac{1 - \mathcal{R}_1 e^{-2ikh_2 n_1 \sin \theta_1}}{1 + \mathcal{R}_1 e^{-2ikh_2 n_1 \sin \theta_1}} \cdot \frac{\varepsilon_2 n_1 \sin \theta_1}{\varepsilon_1 n_2 \sin \theta_2},$$

$$\frac{1 - \mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}} = \frac{1 - \mathcal{R}_2}{1 + \mathcal{R}_2} \cdot \frac{n_2 \sin \theta_2}{\varepsilon_2 \sin \varphi}.$$

Si nous définissons les deux facteurs

$$\tau_1 = \frac{1 - \mathcal{R}_1 e^{-2ikh_2 n_1 \sin \theta_1}}{1 + \mathcal{R}_1 e^{-2ikh_2 n_1 \sin \theta_1}} \cdot \frac{\varepsilon_2 n_1 \sin \theta_1}{\varepsilon_1 n_2 \sin \theta_2}$$

et

$$\tau_2 = \frac{1 - \mathcal{R}_2}{1 + \mathcal{R}_2} \cdot \frac{n_2 \sin \theta_2}{\varepsilon_2 \sin \varphi},$$

nous pouvons réécrire le système précédent et obtenir les relations

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_1} e^{2ikh_2 n_2 \sin \theta_2}$$

et

$$\mathcal{R} = \frac{1 - \tau_2}{1 + \tau_2}.$$

Il est facile à déterminer τ_1 à partir de \mathcal{R}_1

$$\tau_1 = \frac{1}{i} \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi)) \frac{\varepsilon_2 n_1 f_1(\varphi)}{\varepsilon_1 n_2 f_2(\varphi)} \quad \text{en polarisation } TE,$$

$$\tau_1 = \frac{i}{\tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))} \cdot \frac{\varepsilon_2 n_1 f_1(\varphi)}{\varepsilon_1 n_2 f_2(\varphi)} \quad \text{en polarisation } TM.$$

Le coefficient de réflexion \mathcal{R}_2 s'écrit

En polarisation TE par

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{f_1(\varphi) - i \frac{\varepsilon_1 n_2}{\varepsilon_2 n_1 \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))} f_2(\varphi)}{f_1(\varphi) + i \frac{\varepsilon_1 n_2}{\varepsilon_2 n_1 \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))} f_2(\varphi)} e^{2ikh_2 n_2 f_2(\varphi)}. \quad (3.2.11)$$

On a alors

$$\tau_2 = -i \frac{\tan(kh_2 n_2 f_2(\varphi)) + \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi)) g(\varphi)}{1 - \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi)) \tan(kh_2 n_2 f_2(\varphi))} \frac{n_2 f_2(\varphi)}{\varepsilon_2 \sin \varphi}$$

où

$$g(\varphi) = \frac{\varepsilon_2 n_1 f_1(\varphi)}{\varepsilon_1 n_2 f_2(\varphi)}.$$

En polarisation TM , nous avons

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{f_1(\varphi) + i \frac{\varepsilon_1 n_2 \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))}{\varepsilon_2 n_1} f_2(\varphi)}{f_1(\varphi) - i \frac{\varepsilon_1 n_2 \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))}{\varepsilon_2 n_1} f_2(\varphi)} e^{2ikh_2 n_2 f_2(\varphi)},$$

$$\tau_2 = i \frac{g(\varphi) - \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi)) \tan(kh_2 n_2 f_2(\varphi))}{g(\varphi) \tan(kh_2 n_2 f_2(\varphi)) + \tan(kh_1 n_1 f_1(\varphi))} \frac{n_2 f_2(\varphi)}{\varepsilon_2 \sin \varphi}.$$

Finalement le coefficient de réflexion \mathcal{R} est donné explicitement par

$$\mathcal{R} = \frac{1 - \tau_2}{1 + \tau_2}. \quad (3.2.12)$$

Détermination de l'opérateur d'impédance exact

En polarisation TE , les conditions d'impédance vérifient l'équation

$$\partial_y u_2^+(x, 0) = S(u^+(\cdot, 0))(x). \quad (3.2.13)$$

En remplaçant $u_2^+(x; 0)$ par son expression (3.2.5), nous obtenons

$$-ikn_2 \sin \theta_2 \frac{1 - \mathcal{R}_2}{1 + \mathcal{R}_2} e^{-ikn_2 x \cos \theta_2} = S(e^{-(\cdot)ik \cos \varphi})(x).$$

Les relations (3.2.8), (3.2.10) et la loi de Snell-Descartes nous permettent d'écrire cette dernière équation en fonction de l'angle φ et du coefficient de réflexion \mathcal{R}

$$S(e^{-(\cdot)ik \cos \varphi})(x) = -ik\varepsilon_2 \frac{1 - \mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}} \sin \varphi e^{-ikx \cos \varphi}. \quad (3.2.14)$$

Nous rappelons brièvement la définition du symbole complet d'un opérateur pseudo-différentiel [21], [11].

Définition 3.2.2 (Le symbole complet d'un opérateur pseudo-différentiel)

Soit P un opérateur pseudo-différentiel⁽¹⁾ donné sous la forme

$$Pf(x) = \iint e^{i(x-y)\xi} p(x, y, \xi) f(y) dy d\xi$$

où $p(x, y, \xi)$ est le symbole de P .

Le symbole complet de P est défini par

$$\sigma_P(x, \xi) = e^{-ix\xi} P(e^{ix\xi}).$$

L'opérateur P est caractérisé par une intégrale oscillante

$$Pf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \sigma_P(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

La relation d'impédance (3.2.14) est très importante, elle signifie que

$$\sigma_S(x, -k \cos \varphi) = -ik \frac{1 - \mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}} \varepsilon_2 \sin \varphi = -ik \tau_2 \varepsilon_2 \sin \varphi \quad (3.2.15)$$

est le symbole complet de l'opérateur S . En remplaçant $-k \cos \varphi$ par ξ , nous obtenons une expression de σ_S en ξ ⁽²⁾ donnée par

$$\sigma_S(\xi) = -\frac{\alpha_2(\xi) \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) + \alpha_1(\xi) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{1 - \frac{\alpha_1(\xi) \varepsilon_2}{\alpha_2(\xi) \varepsilon_1} \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) \tan(h_1 \alpha_1(\xi))} \quad \text{en polarisation } TE \quad (3.2.16a)$$

$$\sigma_S(\xi) = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \alpha_2(\xi) \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) \frac{\tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{\alpha_1(\xi)}}{\varepsilon_2 \frac{\tan(h_2 \alpha_2(\xi))}{\alpha_2(\xi) \varepsilon_1} + \frac{\tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{\alpha_1(\xi)}} \quad \text{en polarisation } TM, \quad (3.2.16b)$$

où

$$\alpha_i(\xi) = \sqrt{k^2 n_i^2 - \xi^2} \quad i = 1, 2.$$

Le symbole complet σ_S détermine l'opérateur d'impédance S par la formule

$$S\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \sigma_S(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (3.2.17)$$

⁽¹⁾Un rappel sur la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est donné dans [10].

⁽²⁾ σ_S dépend seulement de ξ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, n_1$ et n_2 sont des constantes).

Remarque 3.2.2 Dans le cas où l'une des épaisseurs h_1 ou h_2 tend vers 0, par exemple $h_1 \rightarrow 0$, le symbole complet σ_S est donné par

$$\begin{aligned}\sigma_S(\xi) &= -\sqrt{k^2 n_2^2 - \xi^2} \tan\left(h_2 \sqrt{k^2 n_2^2 - \xi^2}\right) && \text{en polarisation TE,} \\ \sigma_S(\xi) &= \frac{\sqrt{k^2 n_2^2 - \xi^2}}{\tan\left(h_2 \sqrt{k^2 n_2^2 - \xi^2}\right)} && \text{en polarisation TM.}\end{aligned}$$

On retrouve exactement le symbole noté $\sigma(Z)$ donné page 484 de [4].

Remarque 3.2.3 1) Comme le symbole complet σ_S ne dépend pas de x , l'opérateur d'impédance S est donné par sa transformée de Fourier par

$$\widehat{S}\widehat{\varphi}(\xi) = \sigma_S(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \quad (3.2.18)$$

et on a

$$\sigma_{S^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\sigma_S(\xi)}. \quad (3.2.19)$$

2) Si le symbole complet $\sigma_S(\xi) = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$, P et Q deux polynômes en ξ , l'opérateur d'impédance S s'écrit

$$S\varphi(x) = \frac{P(-i\partial_x)}{Q(-i\partial_x)}\varphi(x) = Q^{-1}(-i\partial_x)P(-i\partial_x)\varphi(x). \quad (3.2.20)$$

3.2.3 □ Analyse □ par □ transformée □ de □ Fourier

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de retrouver le symbole complet de l'opérateur d'impédance en utilisant la transformée de Fourier.

Soit $u^+ = (u_1^+, u_2^+)$ solution du problème

$$\begin{aligned}\Delta u_1^+ + k^2 n_1^2 u_1^+ &= 0 && \text{pour } -h = -(h_1 + h_2) < y < -h_1 \\ \Delta u_2^+ + k^2 n_2^2 u_2^+ &= 0 && \text{pour } -h_1 < y < 0 \\ \partial_y u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) &= 0 && \text{en polarisation TE}^{(1)} \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_y u_2^+(x, -h_2) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_y u_1^+(x, -h_2) && \\ u_2^+(x, -h_2) &= u_1^+(x, -h_2) && \\ u_2^+(x, 0) &= \varphi(x) && \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x).\end{aligned} \quad (3.2.21)$$

⁽¹⁾En polarisation TM : $u_1^+(x, -(h_1 + h_2)) = 0$.

Trouver l'expression de l'opérateur d'impédance S revient à chercher la trace de u_2^+ sur $\mathbb{R}_x \times \{0\}$.

Par transformation de Fourier par rapport à la seule variable x , le problème (3.2.21) devient

$$\begin{aligned} \partial_y^2 \widehat{u}_1^+(\xi, y) + (\alpha_1(\xi))^2 \widehat{u}_1^+(\xi, y) &= 0 \quad \text{pour } -h = -(h_1 + h_2) < y < -h_1 \\ \partial_y^2 \widehat{u}_2^+(\xi, y) + (\alpha_2(\xi))^2 \widehat{u}_2^+(\xi, y) &= 0 \quad \text{pour } -h_1 < y < 0 \\ \partial_y \widehat{u}_1^+(\xi, -(h_1 + h_2)) &= 0 \quad \text{en polarisation } TE^{(1)} \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_y \widehat{u}_2^+(\xi, -h_2) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_y \widehat{u}_1^+(\xi, -h_2) \\ \widehat{u}_2^+(\xi, -h_2) &= \widehat{u}_1^+(\xi, -h_2) \\ \widehat{u}_2^+(\xi, 0) &= \widehat{\varphi}(\xi) \quad \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x). \end{aligned}$$

Où on a posé

$$\alpha_i(\xi) = \sqrt{k^2 n_i^2 - \xi^2} \quad i = 1, 2.$$

Ce système admet une unique solution, sa trace sur $y = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_y \widehat{u}_2^+(\xi, 0) &= -\frac{\alpha_2(\xi) \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) + \alpha_1(\xi) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{1 - \frac{\alpha_1(\xi) \varepsilon_2}{\alpha_2(\xi) \varepsilon_1} \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) \tan(h_1 \alpha_1(\xi))} \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{en polarisation } TE, \\ \partial_y \widehat{u}_2^+(\xi, 0) &= \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \alpha_2(\xi) \tan(h_2 \alpha_2(\xi)) \frac{\tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{\alpha_1(\xi)}}{\varepsilon_2 \frac{\tan(h_2 \alpha_2(\xi))}{\alpha_2(\xi) \varepsilon_1} + \frac{\tan(h_1 \alpha_1(\xi))}{\alpha_1(\xi)}} \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{en polarisation } TM. \end{aligned}$$

De plus, par bijectivité de la transformation de Fourier, l'opérateur d'impédance S est donné par

$$S\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \partial_y \widehat{u}_2^+(\xi, 0) d\xi.$$

On retrouve les mêmes résultats obtenus par les formules (3.2.17) et (3.2.16).

3.2.4 Construction de l'opérateur d'impédance

Le symbole σ_S de l'opérateur d'impédance (pseudo-différentiel) S est donné à l'aide d'une fraction trigonométrique par les formules (3.2.16). Comme il ne s'agit pas d'une fraction rationnelle en ξ , ce symbole ne correspond pas à un opérateur différentiel. Notre but est maintenant d'approcher le symbole σ_S par un symbole correspondant à un opérateur local ou quasi-local, en pratique une fraction rationnelle par rapport à ξ .

⁽¹⁾En polarisation TM : $\widehat{u}_1^+(\xi, -(h_1 + h_2)) = 0$.

Le cas de la polarisation TE

Pour écrire une approximation de l'opérateur d'impédance, l'idée la plus simple consiste à approcher le symbole (3.2.16) par un développement de Taylor.

Nous pouvons approcher le symbole complet $\sigma_S(\xi)$

$$\sigma_S = -\frac{\alpha_2 \tan(\alpha_2 h_2) + \alpha_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan(\alpha_1 h_1)}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1 \tan(\alpha_1 h_1) \frac{\tan(\alpha_2 h_2)}{\alpha_2}} \quad (3.2.22)$$

à l'aide des séries de Taylor⁽¹⁾ par une fonction s'écrivant sous la forme

$$\sigma_S(j_1, j_2) = -\frac{P(h_1, h_2)}{Q(h_1, h_2)}.$$

Cela revient à approcher les fonctions $\alpha_2 \tan(\alpha_2 h_2)$, $\frac{\tan(\alpha_2 h_2)}{\alpha_2}$ et $\alpha_1 \tan(\alpha_1 h_1)$. Ces termes ont un développement en puissances paires de α_2 et α_1 respectivement. Le symbole exact σ_S peut se développer alors sous la forme

$$\sigma_S = -\frac{P(\alpha_1^2, \alpha_2^2)}{Q(\alpha_1^2, \alpha_2^2)} + \mathcal{O}(h_1^{j_1+1}, h_2^{j_2+1}).$$

À l'ordre $(j_1 = 2l_1 - 1, j_2 = 2l_2 - 1)$ le symbole approché s'exprime par

$$\sigma_S(\xi)(j_1, j_2) = -\frac{P(k^2 n_1^2 - \xi^2, k^2 n_2^2 - \xi^2)}{Q(k^2 n_1^2 - \xi^2, k^2 n_2^2 - \xi^2)}.$$

et en utilisant la remarque 3.2.3, l'approximation de S associée s'écrit

$$S\varphi = -\frac{P(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)}{Q(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)}\varphi.$$

Cette formule permet d'écrire une approximation de l'opérateur d'impédance à l'ordre (j_1, j_2) souhaité.

- Approximation d'ordre $(0, 0)$ par analyse ondes planes
 $\sigma_S(\xi)$ correspond au cas où les deux couches minces sont complètement négligées. On retrouve la condition d'impédance d'ordre 0 de Neumann.
- Approximation par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(\alpha_1 h_1), \tan(\alpha_2 h_2))$ à l'ordre $(1, 0)$

$$\sigma_S(\xi)(1, 0) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (k^2 n_1^2 - \xi^2). \quad (3.2.23)$$

⁽¹⁾Un développement de Taylor par rapport à h_1 et h_2 à l'ordre (j_1, j_2) .

L'opérateur d'impédance approché à l'ordre $(1, 0)$ est

$$S = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (\partial_x^2 + k^2 n_1^2).$$

La condition d'impédance d'ordre $(1, 0)$ associée s'écrit

$$\partial_y u^-(x, 0) + \frac{h_1}{\varepsilon_1} (\partial_x^2 + k^2 n_1^2) u^-(x, 0) = 0. \quad (3.2.24)$$

On retrouve la condition d'Engquist-Nédélec d'ordre 1.

- Approximation par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(\alpha_1 h_1), \tan(\alpha_2 h_2))$ à l'ordre $(0, 1)$

$$\sigma_S(\xi)(0, 1) = -h_2 (\alpha_2(\xi))^2.$$

La condition d'impédance d'ordre $(0, 1)$ est

$$\partial_y u^-(x, 0) + \frac{h_2}{\varepsilon_2} (\partial_x^2 + k^2 n_2^2) u^-(x, 0) = 0. \quad (3.2.25)$$

À l'ordre $(1, 0)$ et $(0, 1)$, on retrouve les mêmes conditions dans la sous-section 3.1.1.

- Approximation par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(\alpha_1 h_1), \tan(\alpha_2 h_2))$ à l'ordre $(1, 1)$

$$\sigma_S(\xi)(1, 1) = -\frac{h_2 (\alpha_2(\xi))^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (\alpha_1(\xi))^2}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_2 h_1 (\alpha_1(\xi))^2}.$$

Ainsi en développant cette dernière équation à l'ordre $(1, 1)$, nous obtenons

$$\sigma_S(\xi)(1, 1) = -h_2 (\alpha_2(\xi))^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (\alpha_1(\xi))^2.$$

La condition d'impédance d'ordre $(1, 1)$ est

$$\partial_y u^-(x, 0) + \left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} (\partial_x^2 + k^2 n_1^2) + \frac{h_2}{\varepsilon_2} (\partial_x^2 + k^2 n_2^2) \right) u^-(x, 0) = 0. \quad (3.2.26)$$

- Approximation par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(\alpha_1 h_1), \tan(\alpha_2 h_2))$ à l'ordre $(2, 2)$

$$\sigma_S(\cdot)(2, 2) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 \alpha_1^2 - h_2 \alpha_2^2.$$

L'opérateur d'impédance approché est donné par

$$S = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 L_1 - h_2 L_2, \quad (3.2.27)$$

où on a posé

$$L_i = \partial_x^2 + k^2 n_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Les conditions d'ordre (1, 1) et (2, 2) sont identiques, puisque les termes de courbure sont négligés.

En prenant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2, n_1 = n_2 = n$ et $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ dans l'équation (3.2.27), on obtient alors l'approximation

$$S = -h (\partial_x^2 + k^2 n^2). \quad (3.2.28)$$

- Approximation par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(\alpha_1 h_1), \tan(\alpha_2 h_2))$ à l'ordre (3, 3)

Ainsi en développant le symbole complet approché à l'ordre (3, 3), on aboutit à l'approximation

$$S = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 \left(1 + h_2^2 L_2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 h_2 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) L_1 \right) L_1 - h_2 \left(1 + \frac{1}{3} h_2^2 L_2 \right) L_2. \quad (3.2.29)$$

En faisant tendre h_1 vers 0, on obtient une approximation de l'opérateur S

$$S = -h_2 (\partial_x^2 + k^2 n_2^2) - \frac{h_2^3}{3} (\partial_x^2 + k^2 n_2^2)^2. \quad (3.2.30)$$

La condition d'impédance associée est identique à celle obtenue par Bendali & Lemrabet [6] et Bartoli & Bendali [4]. Cette condition comporte un opérateur d'ordre 4 difficile à discrétiser [4].

Une idée pour éviter ces opérateurs d'ordre élevé [4] est de réécrire le symbole complet σ_S sous la forme

$$\sigma_S = -\frac{P}{Q},$$

où

$$P = \alpha_2 \sin(\alpha_2 h_2) \cos(\alpha_1 h_1) + \alpha_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin(\alpha_1 h_1) \cos(\alpha_2 h_2),$$

$$Q = \cos(\alpha_1 h_1) \cos(\alpha_2 h_2) - \frac{\varepsilon_2 \alpha_1}{\varepsilon_1 \alpha_2} \sin(\alpha_1 h_1) \sin(\alpha_2 h_2).$$

Un développement de Taylor de P et Q à l'ordre (3, 3) donne

$$P = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 L_1 + h_2 L_2 - \frac{1}{2} \left(h_2 h_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 h_2^2 \right) L_1 L_2,$$

$$Q = 1 - \frac{1}{2} h_2^2 L_2 - \left(\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 h_2 \right) L_1 + \frac{1}{4} h_2^2 h_1^2 L_1 L_2.$$

En utilisant la remarque 3.2.3, la condition d'impédance associée s'écrit à l'aide d'un opérateur **quasi-local**

$$\partial_y u^-(x, 0) + \frac{1}{\varepsilon_2} Q^{-1} P u^-(x, 0) = 0.$$

En prenant $h_1 = 0$, on retrouve la condition de Bartoli & Bendali [4]

$$\partial_y u^-(x, 0) + \frac{h}{\varepsilon_2} (\partial_x Q^{-1} \partial_x + k^2 n_2^2 Q^{-1}) = 0. \quad (3.2.31)$$

Si on emploie les substitutions formelles suivantes :

$$\partial_y \longleftrightarrow \partial_n ; \partial_x \longleftrightarrow \partial_s,$$

on s'aperçoit que certains termes sont manquants pour retrouver les conditions générales données par Engquist et Nédélec [18]. Ces termes sont des termes de courbure que le cas plan ne permet pas de prendre en compte. Passons maintenant au cas de la polarisation *TM*.

Le cas de la polarisation *TM*

Dans cette polarisation, nous nous intéressons à l'approximation de l'opérateur d'admittance T . Son symbole complet est donné par

$$\sigma_T = \frac{1}{\sigma_S} = \frac{\frac{\mu_2 \tan(h_2 \alpha_2)}{\mu_1 \alpha_2} + \frac{\tan(h_1 \alpha_1)}{\alpha_1}}{\frac{\mu_2 - \alpha_2 \tan(h_2 \alpha_2)}{\mu_1} \frac{\tan(h_1 \alpha_1)}{\alpha_1}} = \frac{Q(\alpha_1^2, \alpha_2^2)}{P(\alpha_1^2, \alpha_2^2)} + \mathcal{O}\left(h_1^{2(l_1-1)}, h_2^{2(l_2-1)}\right).$$

Une approximation à l'ordre (l_1, l_2) de ce symbole s'écrit

$$\sigma_T = \frac{Q(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)}{P(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)},$$

et la condition aux limites associée s'écrit

$$u^-(x, 0) = \mu_2 \frac{Q(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)}{P(\partial_x^2 + k^2 n_1^2, \partial_x^2 + k^2 n_2^2)} \partial_y u^-(x, 0).$$

Examinons maintenant les différents ordres pour retrouver les conditions classiques associées à cette polarisation.

- Condition d'ordre $(0, 0)$ par analyse ondes planes
 $\sigma_T = 0$ correspond au cas où les deux couches minces sont complètement négligées.
 On retrouve la condition d'impédance d'ordre 0 de Dirichlet.

- Condition par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(h_1\alpha_1), \tan(h_2\alpha_2))$ à l'ordre $(1, 1)$

$$\sigma_T = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}h_2 + h_1}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - h_1h_2\alpha_2^2} + \mathcal{O}(h_1^2, h_2^2),$$

puis en développant cette fraction rationnelle, nous obtenons l'approximation

$$T = \frac{\mu_1}{\mu_2}h_1 + h_2.$$

La condition d'impédance associée s'écrit

$$u^-(x, 0) = (\mu_1h_1 + \mu_2h_2) \partial_y u^-(x, 0).$$

En faisant tendre h_1 vers 0, nous obtenons la condition d'Engquist-Nédélec d'ordre 1.

- Condition par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(h_1\alpha_1), \tan(h_2\alpha_2))$ à l'ordre $(2, 2)$

$$T = \frac{\mu_1}{\mu_2}h_1 + h_2.$$

La condition d'ordre $(2, 2)$ est identique à la condition d'ordre $(1, 1)$ puisque les termes de courbure sont nuls dans ce cas de figure.

- Condition par analyse ondes planes construite à partir d'un développement de $(\tan(h_1\alpha_1), \tan(h_2\alpha_2))$ à l'ordre $(3, 3)$

$$\sigma_T = \frac{\mu_1}{\mu_2}h_1 \left(1 + \frac{1}{3}h_1^2\alpha_1^2\right) + h_2 \left(1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}h_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}h_1 + h_2\right) + \frac{1}{3}h_2^2\right) \alpha_2^2\right).$$

En prenant $h_1 = 0$, on retrouve la condition de Bendali-Lemrabet d'ordre 3 lorsque les termes de courbure sont négligés, cette condition est donnée par

$$u^-(x, 0) = h_2\mu_2 \left(1 + \frac{h_2^2}{3}(\partial_x^2 + k^2n_2^2)\right) \partial_y u^-(x, 0).$$

Cette condition d'ordre 3 s'exprime à l'aide d'un opérateur différentiel d'ordre 2 et ne pose donc aucun problème lors de la discrétisation [4].

La nature particulière de l'onde incidente nous a permis d'explicitier l'opérateur d'impédance exact à l'aide de son symbole. Nous avons pu construire simplement les premières conditions d'impédance en faisant un développement de Taylor du symbole.

Par ailleurs, nous avons remarqué qu'il ne suffit pas de faire les transpositions naturelles $\partial_y \longleftrightarrow \partial_n$; $\partial_x \longleftrightarrow \partial_s$ pour retrouver les conditions d'impédance générale de la polarisation TE ou TM . Pour inclure les effets de courbure, nous allons considérer dans le chapitre suivant, un autre cas canonique : la géométrie circulaire.

3.3 Analyse asymptotique

Nous présentons dans cette section, une autre approche de construction des approximations de l'opérateur d'impédance basée sur la construction d'un développement asymptotique relativement aux petits paramètres du problème.

3.3.1 Changement d'échelle

La détermination des conditions aux limites approchées par développement asymptotique repose d'abord sur un changement d'échelle du problème (3.2.21) qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis-à-vis des petits paramètres h_1 et h_2 . Cela se traduit par le changement de variable :

$$\eta = \begin{cases} \frac{y}{h_1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1} & -h_1 - h_2 \leq y \leq -h_2, \\ \frac{y}{h_2} & -h_2 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Nous posons alors :

$$v(x, \eta) = \begin{cases} v_1(x, \eta) = u_1^+(x, y) & -2 \leq \eta \leq -1, \\ v_2(x, \eta) = u_2^+(x, y) & -1 \leq \eta \leq 0. \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations du problème vérifiées par les nouvelles inconnues $(v_1(x, \eta), v_2(x, \eta))$.

Les dérivées de v par rapport à la variable η s'écrivent

$$\partial_\eta^i v(x, \eta) = \begin{cases} \partial_\eta^i v_1(x, \eta) = h_1^i \partial_y^i u_1^+(x, y) & -2 \leq \eta \leq -1 \\ \partial_\eta^i v_2(x, \eta) = h_2^i \partial_y^i u_2^+(x, y) & -1 \leq \eta \leq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3.3.1)$$

La deuxième dérivée de v par rapport à variables x reste inchangée et s'écrit

$$\partial_x^2 v(x, \eta) = \begin{cases} \partial_x^2 v_1(x, \eta) = \partial_x^2 u_1^+(x, y) & -2 \leq \eta \leq -1 \\ \partial_x^2 v_2(x, \eta) = \partial_x^2 u_2^+(x, y) & -1 \leq \eta \leq 0. \end{cases}$$

En injectant ces relations dans le problème (3.2.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \partial_\eta^2 v_1 + h_1^2 (\partial_x^2 v_1 + k^2 n_1^2 v_1) &= 0 && \text{pour } -2 < \eta < -1 \\
 \partial_\eta^2 v_2 + h_2^2 (\partial_x^2 v_2 + k^2 n_2^2 v_2) &= 0 && \text{pour } -1 < \eta < 0 \\
 \partial_\eta v_1(x, -2) &= 0 && \text{en polarisation } TE^{(1)} \\
 \frac{1}{h_2 \varepsilon_2} \partial_\eta v_2(x, -1) &= \frac{1}{h_1 \varepsilon_1} \partial_\eta v_1(x, -1) \\
 v_2(x, -1) &= v_1(x, -1) \\
 v_2(x, 0) &= \varphi(x) && \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x).
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Remarque 3.3.1 – À l'intérieur de la bande $\mathbb{R} \times [-2, -1]$ la solution v dépend des paramètres h_1 et h_2 .

– À l'intérieur de la bande $\mathbb{R} \times [-1, 0]$ la solution v dépend aussi des paramètres h_1 et h_2 .

3.3.2 Développement asymptotique et identification formelle

Les épaisseurs h_1 et h_2 des couches minces sont supposées petites que l'on souhaite. Cela nous permet de postuler l'existence d'un développement asymptotique de la solution du problème (3.3.2) de la forme suivante :

$$v_1 = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq p \leq n} v_1^{n,p} h_1^p h_2^{n-p} \quad \text{et} \quad v_2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq p \leq n} v_2^{n,p} h_1^p h_2^{n-p},$$

où les fonctions $v_1^{n,p}$ et $v_2^{n,p}$ sont indépendantes de h_1 et de h_2 . En injectant ces expressions dans notre problème (3.3.2) et en identifiant formellement les mêmes puissances en $h_1^p h_2^{n-p}$, on aboutira à des systèmes d'équations indépendants de h_1 et de h_2 . Ils permettent de déterminer de façon itérative les termes de notre développement asymptotique.

Nous allons commencer par écrire les problèmes auxiliaires issues de cette identification formelle dans les équations du problème (3.3.2). Soit n et p deux entiers positifs ou nuls vérifiant ($p \leq n$). Les monômes $h_1^p h_2^{n-p}$ désignent les termes du développement asymptotique, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \partial_\eta v_1^{n,p}(x, -2) &= 0 && \text{en polarisation } TE^{(2)} \\
 \partial_\eta v_2^{n,p}(x, -1) &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \partial_\eta v_1^{n,p+1}(x, -1) && p \neq n \\
 \partial_\eta v_1^{n,0}(x, -1) &= 0 ; \partial_\eta v_2^{n,n}(x, -1) = 0 \\
 v_2^{n,p}(x, -1) &= v_1^{n,p}(x, -1) \\
 v_2^{0,0}(x, 0) &= \varphi(x) ; v_2^{n,p}(x, 0) = 0 && p \neq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

⁽¹⁾ En polarisation TM : $v_1(x, -2) = 0$.

⁽²⁾ En polarisation TM : $v_1^{n,p}(x, -2) = 0$.

Les fonctions $v_1^{n,p}$ et $v_2^{n,p}$ sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 v_1^{n,0}(x, \eta) &= 0 ; \quad \partial_\eta^2 v_1^{n,1}(x, \eta) = 0, \\ \partial_\eta^2 v_1^{n+2,p+2}(x, \eta) + L_1 v_1^{n,p}(x, \eta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 v_2^{n,n-1}(x, \eta) &= 0 ; \quad \partial_\eta^2 v_2^{n,n}(x, \eta) = 0, \\ \partial_\eta^2 v_2^{n+2,p}(x, \eta) + L_2 v_2^{n,p}(x, \eta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

où

$$L_i = \partial_x^2 + k^2 n_i^2, \quad i = 1, 2.$$

La résolution de ces équations va nous permettre de passer à la détermination des conditions d'impédance. Nous constatons immédiatement que $v_2^{n,n}(x, \eta) = 0$ pour $n \neq 0$.

Notion de conditions aux limites équivalentes

De manière sommaire, nous désignerons par "condition aux limites équivalente" toute condition d'impédance sur Γ ($y = 0$) qui satisfait les critères suivants :

1. **Stabilité** : la condition est dite stable si on peut estimer pour tout épaisseur $h_1 + h_2$, ($h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$) la norme $L^2(\Omega^-)$ de la solution approchée u^- en fonction de la norme $L^2(\Omega^-)$ des données initiales, de manière indépendante de h_1 et h_2 .
2. **Approximation en $(h_1^{j_1}, h_2^{j_2})$** : nous dirons qu'une condition d'impédance est une condition équivalente d'ordre (j_1, j_2) lorsque la solution approchée u_{h_1, h_2}^- approche l'onde réelle u^- à $(h_1^{j_1}, h_2^{j_2})$ près. C'est-à-dire que pour une certaine norme $\|\cdot\|$, on peut établir l'estimation suivante :

$$\|u_{h_1, h_2}^- - u^-\| = \mathcal{O}(h_1^{j_1+1}, h_2^{j_2+1}).$$

3. **Implémentation numérique économique** : c'est en effet tout l'intérêt de ces conditions équivalentes. La mise en oeuvre informatique de la condition d'impédance ne doit pas conduire à des calculs aussi chers en temps ou en mémoire de stockage, que le calcul de la solution exacte.

Principe de la dérivation des conditions équivalentes

D'après notre définition une condition équivalente est dite d'ordre (j_1, j_2) lorsque la solution u^- du problème qui lui est associée vérifie l'estimation suivante pour une certaine norme $\|\cdot\|$:

$$\|u_{h_1, h_2}^- - u^-\| = \mathcal{O}(h_1^{j_1+1}, h_2^{j_2+1}).$$

Nous constatons alors (au moins formellement) qu'un bon candidat pour (v_1, v_2) serait

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= v_1^{0,0} + v_1^{1,0}h_2 + v_1^{1,1}h_1 + \dots + v_1^{j_2,0}h_2^{j_2} + \dots + v_1^{j_1,j_1}h_1^{j_1}, \\ \tilde{v}_2 &= v_2^{0,0} + v_2^{1,0}h_2 + v_2^{1,1}h_1 + \dots + v_2^{j_2,0}h_2^{j_2} + \dots + v_2^{j_1,j_1}h_1^{j_1}.\end{aligned}$$

D'après les équations de (3.3.1), on peut écrire une approximation de l'opérateur d'impédance S sous la forme suivante :

$$S\varphi(x) = \frac{1}{h_2} \partial_\eta \tilde{v}_2(x, 0). \quad (3.3.6)$$

Pour obtenir une condition d'impédance il nous faut donc exprimer le second membre en fonction de $\varphi(x)$.

3.3.3 Calcul des premiers termes

Dans ce paragraphe, on calcule explicitement les 6 premiers termes non nuls du développement asymptotique pour présenter le procédé algorithmique de construction.

Le cas de la polarisation TE

En vertu des équations (3.3.4), on a $v_1^{n,i}(x, \eta) = C_{i,1}(x)\eta + C_{i,2}(x)$ $i \in \{0, 1\}$, nous déduisons de façon immédiate de (3.3.3) pour $i = 0, 1$ que

$$v_1^{n,i}(x, \eta) = v_2^{n,i}(x, -1).$$

Ainsi, en utilisant les équations (3.3.4) et (3.3.3) avec ces dernières équations, nous obtenons pour $i = 2, 3$

$$v_1^{n,i}(x, \eta) = -\frac{1}{2} \left((\eta + 2)^2 - 1 \right) L_1 v_2^{n-2, i-2}(x, -1) + v_2^{n,i}(x, -1).$$

Nous poursuivons le calcul pour $i = 4, 5$

$$\begin{aligned}v_1^{n,i}(x, \eta) &= \frac{1}{24} \left((\eta + 2)^4 - 6(\eta + 2)^2 + 5 \right) L_1^2 v_2^{n-4, i-4}(x, -1) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(1 - (\eta + 2)^2 \right) L_1 v_2^{n-2, i-2}(x, -1) + v_2^{n,i}(x, -1).\end{aligned}$$

Le même calcul effectué pour v_2 donne l'expression suivante de \tilde{v}_2 pour $(j_1, j_2) = (4, 4)$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_2(., \eta) &= \varphi - \left(\frac{1}{2}\eta^2 + \eta \right) L_2 \varphi h_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \eta L_1 \varphi h_1 h_2 + \left(\frac{1}{24}\eta^4 + \frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{3}\eta \right) L_2^2 \varphi h_2^4 + \\ &\quad \left(\frac{1}{6}\eta^2 - \eta \right) L_1 L_2 \varphi h_1 h_2^3 - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 \eta L_1^2 \varphi h_1^2 h_2^2 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \eta L_1^2 \varphi h_1^3 h_2.\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à la variable η cette dernière expression et substituant 0 à η , nous obtenons une approximation de l'opérateur S

$$S = -h_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} L_1 - h_2 L_2 - h_1 h_2^2 L_1 L_2 - h_1^2 h_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 L_1^2 - \frac{1}{3} h_1^3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} L_1^2 - \frac{1}{3} h_2^3 L_2^2. \quad (3.3.7)$$

La condition d'impédance associée est identique à la condition d'ordre 3 obtenue par "Analyse par ondes planes".

Le cas de la polarisation TM

Nous allons calculer dans cette polarisation les premiers termes du développement asymptotique de l'opérateur d'admittance T . La condition aux limites imposée sur Γ ($y = 0$) dans le problème (3.3.2) est $\partial_\eta v_2(x, 0) = \varphi(x)$ au lieu de $v_2(x, 0) = \varphi(x)$, les problèmes auxiliaires vérifient alors

$$\partial_\eta v_2^{n,p}(x, 0) = 0 \text{ si } (n, p) \neq (1, 0) ; \partial_\eta v_2^{1,0}(x, 0) = \varphi(x).$$

Par des calculs similaires à ceux effectués dans la polarisation TE , nous obtenons pour $(j_1, j_2) = (4, 4)$

$$v_2^{2,p}(x, \eta) = v_2^{4,p}(x, \eta) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2(x, \eta) = & (\eta + 1) \varphi(x) h_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \varphi(x) h_1 + \frac{1}{2} (\eta + 1) \left(1 - \frac{1}{3} (\eta + 1)^2 \right) L_2 \varphi(x) h_2^3 \\ & + \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \frac{\mu_1}{\mu_2} L_2 \varphi(x) h_2^2 h_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 L_2 \varphi(x) h_2 h_1^2 + \frac{1}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2} L_1 \varphi(x) h_1^3. \end{aligned}$$

L'opérateur d'admittance T est donné par

$$T\varphi(x) = v_2(x, 0).$$

Alors, en remplaçant η par 0 dans l'expression de \tilde{v}_2 , on aboutit à l'approximation

$$\begin{aligned} T\varphi(x) = & \varphi(x) h_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \varphi(x) h_1 + \frac{1}{3} L_2 \varphi(x) h_2^3 + \frac{\mu_1}{\mu_2} L_2 \varphi(x) h_2^2 h_1 \\ & + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 L_2 \varphi(x) h_2 h_1^2 + \frac{1}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2} L_1 \varphi(x) h_1^3, \end{aligned}$$

qu'elle est la même obtenue par "Analyse par ondes planes".

4

Effets de courbure

Sommaire

4.1	L'opérateur d'impédance pour une frontière circulaire	64
4.1.1	Le problème de diffraction	65
4.1.2	Le cas de la polarisation TE	66
4.1.3	Le cas de la polarisation TM	73
4.2	Extension aux géométries arbitraires	75
4.2.1	Construction heuristique	75
4.2.2	Construction du développement asymptotique	77

4.1 L'opérateur d'impédance pour une frontière circulaire

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la géométrie droite nous a permis de déterminer l'opérateur d'impédance exact à l'aide de son symbole. De la même manière, la géométrie circulaire permet d'explicitier cet opérateur à partir d'une décomposition en séries de Fourier. L'opérateur est alors diagonalisable sur les modes de Fourier. L'avantage de cette approche par rapport à la précédente est de prendre en compte les effets de courbure par l'intermédiaire du rayon R . Une fois l'opérateur d'impédance exact calculé, on peut mettre en place un procédé d'approximation à différents ordres.

4.1.1 □ Le problème de diffraction □

Dans cette section, nous rappelons les équations régissant le phénomène et nous décrivons la surface de l'obstacle. Les frontières, métallique et diélectrique, sont maintenant très régulières. Il s'agit de trois cercles de rayon respectif $(R - h_1 - h_2)$, $(R - h_2)$ et R . Ces notations sont représentées sur la figure 4.1.1.

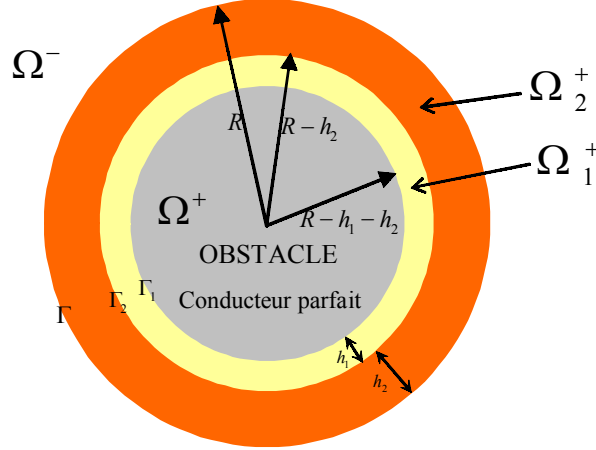


Figure 4.1.1 : Diffraction par un cylindre parfaitement conducteur recouvert par deux couches minces de diélectriques.

Le problème de diffraction (2.1.10) vérifié par u s'écrit en coordonnées polaires

En polarisation TE

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon_1}{r} \partial_r \left(\frac{r}{\varepsilon_1} \partial_r u_1^+ \right) + \frac{\varepsilon_1}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \partial_\theta u_1^+ \right) + k^2 n_1^2 u_1^+ &= 0 & R - h_1 - h_2 < r < R - h_2 \\
 \frac{\varepsilon_2}{r} \partial_r \left(\frac{r}{\varepsilon_2} \partial_r u_2^+ \right) + \frac{\varepsilon_2}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \partial_\theta u_2^+ \right) + k^2 n_2^2 u_2^+ &= 0 & R - h_2 < r < R \\
 \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_2^+) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u_2^+ + k^2 n_2^2 u_2^+ &= 0 & r > R \\
 \partial_r u_1^+ (R - h_1 - h_2, \theta) &= 0 \\
 u_2^+ (R - h_2, \theta) = u_1^+ (R - h_2, \theta) ; \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_r u_2^+ (R - h_2, \theta) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_r u_1^+ (R - h_2, \theta) \\
 u^- (R, \theta) = u_2^+ (R, \theta) ; \partial_r u^- (R, \theta) = \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_r u_2^+ (R, \theta) \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \partial_r ((u^- - u_{inc}) - ik(u^- - u_{inc})) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

En polarisation TM , u_1^+ vérifie même problème, avec la condition $u_1^+ = 0$ sur Γ_1 au lieu de $\partial_y u_1^+ = 0$ et en substituant μ à ε .

Le système (2.1.10) étant invariant par rotation, le théorème de décomposition de Stone⁽¹⁾

⁽¹⁾Stone Marshall Harvey (1903-1989).

[15] nous permet de développer chaque fonction en séries de Fourier et ainsi de réduire l'équation aux dérivées partielles à deux variables à un système d'équations différentielles ordinaires couplées. Nous ramenons ainsi un problème de dimension deux à une suite de problèmes en dimension un [16]. Comme précédemment, nous allons traiter séparément les deux polarisations dans le cas où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1$ et μ_2 sont des constantes.

4.1.2 Le cas de la polarisation TE

Opérateur d'impédance exact

On peut résoudre le problème aux limites dans la couronne $\{(r, \theta) \mid R - h_1 - h_2 < r < R\}$, associé à une fonction φ de θ définie sur Γ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_1^+) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u_1^+ + k^2 n_1^2 u_1^+ = 0 \quad R - h_1 - h_2 < r < R - h_2 \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_2^+) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u_2^+ + k^2 n_2^2 u_2^+ = 0 \quad R - h_2 < r < R \\ \partial_r u_1^+ (R - h_1 - h_2, \theta) = 0 \\ u_2^+ (R - h_2, \theta) = u_1^+ (R - h_2, \theta) ; \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_r u_2^+ (R - h_2, \theta) = \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_r u_1^+ (R - h_2, \theta) \\ u_2^+ (R, \theta) = \varphi(\theta). \end{array} \right. \quad (4.1.2)$$

L'opérateur d'impédance associé à φ , est donné sur la frontière circulaire $\{r = R\}$ par :

$$S\varphi(\theta) = \partial_r u_2^+ (R, \theta). \quad (4.1.3)$$

La condition aux limites du problème dans Ω^- s'exprime à l'aide de cet opérateur

$$\partial_r u^- (R, \theta) = \frac{1}{\varepsilon_2} S u^- (R, \theta). \quad (4.1.4)$$

En coordonnées polaires, toute fonction g peut être développée sous la forme

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m(r) e^{im\theta}$$

avec

$$g_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-im\theta} d\theta.$$

Le point important de cette approche vient du fait que $S\varphi(\theta)$ peut être explicité à l'aide de sa série de Fourier :

$$S\varphi(\theta) = \partial_r u_2^+ (R, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (S\varphi)_m (R) e^{im\theta}. \quad (4.1.5)$$

On peut encore développer en séries de Fourier le champ à l'intérieur des couches minces

$$u_i^+(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (u_i^+)_m(r) e^{im\theta} \quad i = 1, 2. \quad (4.1.6)$$

En insérant ces expressions dans les équations d'Helmholtz du problème (4.1.2) et en annulant les coefficients de $e^{im\theta}$, nous obtenons deux équations différentielles du second ordre

$$(u_1^+)_m'' + \frac{1}{r} (u_1^+)_m' + \left(k^2 n_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) (u_1^+)_m = 0 \quad R - h_1 - h_2 < r < R - h_2 \quad (4.1.7)$$

$$(u_2^+)_m'' + \frac{1}{r} (u_2^+)_m' + \left(k^2 n_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) (u_2^+)_m = 0 \quad R - h_2 < r < R.$$

Les solutions générales de ces équations sont connues et s'expriment comme une combinaison linéaire des fonctions J_m et Y_m qui sont respectivement les fonctions de Bessel⁽¹⁾ et de Neumann d'ordre m définies dans [16]. Les coefficients de Fourier sont donnés par la formule

$$(u_i^+)_m(r) = \gamma_m^i J_m(kn_i r) + \delta_m^i Y_m(kn_i r). \quad (4.1.8)$$

La connaissance des constantes γ_m^i et δ_m^i suffit à déterminer les coefficients $(u_i^+)_m$. Pour calculer ces constantes, il suffit de traduire les conditions aux limites du système (4.1.2) données en $R, R - h_2$ et $R - h_1 - h_2$ à partir de la nouvelle expression (4.1.8) de $(u_i^+)_m$. Cela conduit à un système de quatre équations à quatre inconnues respectivement $\gamma_m^1, \gamma_m^2, \delta_m^1$ et δ_m^2 . Le système donné sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_m^1 J_m'(kn_1(R - h_1 - h_2)) + \delta_m^1 Y_m'(kn_1(R - h_1 - h_2)) = 0 \\ \gamma_m^1 J_m(kn_1(R - h_2)) + \delta_m^1 Y_m(kn_1(R - h_2)) = \gamma_m^2 J_m(kn_2(R - h_2)) + \delta_m^2 Y_m(kn_2(R - h_2)) \\ \frac{n_1}{\varepsilon_1} \{ \gamma_m^1 J_m'(kn_1(R - h_2)) + \delta_m^1 Y_m'(kn_1(R - h_2)) \} = \\ \qquad \qquad \qquad \frac{n_2}{\varepsilon_2} \{ \gamma_m^2 J_m'(kn_2(R - h_2)) + \delta_m^2 Y_m'(kn_2(R - h_2)) \} \\ \gamma_m^2 J_m(kn_2 R) + \delta_m^2 Y_m(kn_2 R) = \varphi_m. \end{array} \right. \quad (4.1.9)$$

Ce système se met sous la forme matricielle suivante

$$M_m(kn_2 R) [\gamma_m^1, \delta_m^1, \gamma_m^2, \delta_m^2]^T = [0, 0, 0, -\varphi_m]^T, \quad (4.1.10)$$

⁽¹⁾Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846).

Il vient ainsi un développement limité de S_m à l'ordre (3, 3)

$$\begin{aligned} S_m(h_1, h_2) = & S_m + h_1 S_m^{(1,0)} + h_2 S_m^{(0,1)} + \frac{1}{2} h_1^2 S_m^{(2,0)} + h_1 h_2 S_m^{(1,1)} + \frac{1}{2} h_2^2 S_m^{(0,2)} \\ & + \frac{1}{6} h_1^3 S_m^{(3,0)} + \frac{1}{2} h_1^2 h_2 S_m^{(2,1)} + \frac{1}{2} h_1 h_2^2 S_m^{(1,2)} + \frac{1}{6} h_2^3 S_m^{(0,3)} + \mathcal{O}(h_1^4, h_2^4). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Pour calculer ces différents termes, il suffit de se rappeler que les fonctions J_m et Y_m sont solutions de l'équation de Bessel d'ordre m (cf. équations (4.1.7)). Commençons par développer le dénominateur.

Développement de Δ_m à l'ordre (3, 3) Introduisons la fonction

$$G_m(s, t) = \det \begin{bmatrix} J_m(s) & Y_m(s) \\ J_m(t) & Y_m(t) \end{bmatrix} = J_m(s) Y_m(t) - J_m(t) Y_m(s). \quad (4.1.15)$$

À l'aide de la fonction G_m , nous pouvons écrire le dénominateur Δ_m sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta_m(h_1, h_2) = & \frac{n_2 k}{\varepsilon_2} \partial_s G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) \partial_s G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R) \\ & - \frac{n_1}{\varepsilon_1} \partial_s \partial_t G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé Maple pour calculer les coefficients $\Delta_m^{(i,j)}$

$$\Delta_m^{(0,0)} = \frac{kn_2}{\varepsilon_2} \partial_s G_m(kn_1 R, kn_1 R) \partial_s G_m(kn_2 R, kn_2 R) \quad (4.1.16)$$

$$\Delta_m^{(1,0)} = \frac{1}{R} \Delta_m^{(0,0)} ; \Delta_m^{(0,1)} = \frac{2}{R} \Delta_m^{(0,0)}$$

$$\Delta_m^{(1,1)} = \left(-k^2 n_1^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(3 + m^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{1}{R^2} \right) \Delta_m^{(0,0)}$$

$$\Delta_m^{(2,0)} = \left(-k^2 n_1^2 + \frac{2 + m^2}{R^2} \right) \Delta_m^{(0,0)} ; \Delta_m^{(0,2)} = \left(-k^2 n_2^2 + \frac{6 + m^2}{R^2} \right) \Delta_m^{(0,0)}$$

$$\Delta_m^{(2,1)} = \left(- \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{k^2 n_1^2}{R} + \left(\left(4 + 3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) m^2 + 8 \right) \frac{1}{R^3} \right) \Delta_m^{(0,0)}$$

$$\Delta_m^{(1,2)} = \left(- \left(n_2^2 + 3n_1^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{k^2}{R} + \left(\left(1 + 7 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) m^2 + 12 \right) \frac{1}{R^3} \right) \Delta_m^{(0,0)}$$

$$\Delta_m^{(3,0)} = 2 \left(- \frac{k^2 n_1^2}{R} + 3 \frac{m^2 + 1}{R^3} \right) \Delta_m^{(0,0)} ; \Delta_m^{(0,3)} = \left(-5 \frac{k^2 n_2^2}{R} + \frac{9m^2 + 24}{R^3} \right) \Delta_m^{(0,0)}.$$

Nous constatons que $\Delta_m(h_1, h_2)$ s'exprime facilement à l'aide du terme $\Delta_m^{(0,0)}$. Il est assez surprenant qu'il en soit de même pour $N_m(h_1, h_2)$.

Remarque 4.1.1 Nous pouvons trouver une expression explicite de $\Delta_m^{(0,0)}$ (l'équation (4.1.16)). En effet, $\Delta_m^{(0,0)}$ est le produit de deux wronskien associé aux deux solutions J_m et Y_m . Ce wronskien satisfait $\partial_s G_m(r, r) = \frac{-2}{\pi r}$, connue sous le nom de formule de Lommel page 64 de [13], il vient donc :

$$\Delta_m^{(0,0)} = \frac{4}{\varepsilon_2 k n_1 \pi^2 R^2}$$

mais nous n'aurons pas à utiliser cette valeur.

Développement de N_m à l'ordre (3, 3) Ainsi, à l'aide de la fonction G_m , nous pouvons écrire N_m sous la forme

$$\begin{aligned} N_m(h_1, h_2) &= \frac{kn_2^2}{\varepsilon_2} \partial_s G_m(kn_1(R-h_1-h_2), kn_1(R-h_2)) \partial_s \partial_t G_m(kn_2(R-h_2), kn_2R) - \\ &\quad \frac{kn_1 n_2}{\varepsilon_1} \partial_s \partial_t G_m(kn_1(R-h_1-h_2), kn_1(R-h_2)) \partial_t G_m(kn_2(R-h_2), kn_2R). \\ N_m^{(0,0)} &= 0 ; N_m^{(1,0)} = \left(-k^2 n_1^2 + \frac{m^2}{R^2}\right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Delta_m^{(0,0)} ; N_m^{(0,1)} = \left(-k^2 n_2^2 + \frac{m^2}{R^2}\right) \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(1,1)} &= \left(-k^2 \frac{n_1^2 \varepsilon_2 + n_2^2}{R} + m^2 \frac{1 + 3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{R^3}\right) \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(2,0)} &= \left(\frac{-k^2 n_1^2}{R} + \frac{3m^2}{R^3}\right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Delta_m^{(0,0)} ; N_m^{(0,2)} = \left(\frac{-3k^2 n_2^2}{R} + \frac{5m^2}{R^3}\right) \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(2,1)} &= \left(k^4 n_1^2 n_2^2 - k^2 \frac{(n_1^2 + n_2^2) m^2 + 2n_1^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2n_2^2}{R^2} + \frac{m^4 + \left(2 + 12 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) m^2}{R^4}\right) \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(1,2)} &= \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k^4 n_1^2 n_2^2 - k^2 \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (n_1^2 + n_2^2) m^2 + 2n_1^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 5n_2^2}{R^2} + \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} m^4 + \left(2 + 12 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) m^2}{R^4}\right) \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(3,0)} &= \left(k^4 n_1^4 - \frac{k^2 (2n_1^2 m^2 + 3n_2^2)}{R^2} + \frac{m^4 + 11m^2}{R^4}\right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Delta_m^{(0,0)} \\ N_m^{(0,3)} &= \left(k^4 n_2^4 - \frac{2k^2 (n_1^2 m^2 + 6n_2^2)}{R^2} + \frac{m^4 + 26m^2}{R^4}\right) \Delta_m^{(0,0)}. \end{aligned}$$

Il est important de noter que les coefficients $N_m^{(i,j)}$ $i, j \leq 3$, sont également des multiples de $\Delta_m^{(0,0)}$. Cette remarque est importante et est à l'origine de simplifications fondamentales

dans l'expression de $S_m(h_1, h_2)$ à l'ordre (3, 3) qui se réduit alors à une fraction rationnelle en m . Ceci induit que si on néglige les termes $\mathcal{O}(h_1^4, h_2^4)$, $S_m(h_1, h_2)$ se réduit au symbole d'un opérateur quasi-local. En effet la définition et la remarque que nous donnerons ci-après permettent d'effectuer la correspondance suivante

$$m^l \longleftrightarrow (-i)^l \partial_\theta^l \quad l \in \mathbb{N}.$$

Définition 4.1.1 (*Le symbole complet d'un opérateur pseudo-différentiel sur un cercle*)

Soit P un opérateur pseudo-différentiel sur un cercle de centre O et de rayon R donné par sa série de Fourier

$$P\phi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (P\phi)_m(R) e^{im\theta},$$

où

$$\phi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \phi_m(R) e^{im\theta}.$$

Le symbole complet de P est défini par

$$\sigma_P(m, \theta) = e^{-im\theta} P(e^{im\theta}) = P_m(R, \theta).$$

L'opérateur P est caractérisé par une série trigonométrique

$$P\phi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} P_m(R, \theta) \phi_m(R) e^{im\theta}.$$

Remarque 4.1.2 Si le symbole complet $\sigma_P(m, \theta) = \frac{Q_1(m)}{Q_2(m)}$, Q_1 et Q_2 deux polynômes en m , l'opérateur pseudo-différentiel P s'écrit

$$P\phi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \frac{Q_1(-i\partial_\theta)}{Q_2(-i\partial_\theta)} \phi(R \cos \theta, R \sin \theta).$$

Nous donnons maintenant le symbole de l'opérateur S à l'ordre (3, 3)

$$\sigma_{S_m}(h_1, h_2) = \frac{h_1 \tilde{N}_m^{(1,0)} + h_2 \tilde{N}_m^{(0,1)} + \frac{1}{2} h_1^2 \tilde{N}_m^{(2,0)} + h_1 h_2 \tilde{N}_m^{(1,1)} + \dots + \frac{1}{6} h_2^3 \tilde{N}_m^{(0,3)}}{1 + h_1 \tilde{\Delta}_m^{(1,0)} + h_2 \tilde{\Delta}_m^{(0,1)} + \frac{1}{2} h_1^2 \tilde{\Delta}_m^{(2,0)} + h_1 h_2 \tilde{\Delta}_m^{(1,1)} + \dots + \frac{1}{6} h_2^3 \tilde{\Delta}_m^{(0,3)}}, \quad (4.1.17)$$

où

$$\tilde{N}_m^{(i,j)} = \frac{N_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(0,0)}}; \quad \tilde{\Delta}_m^{(i,j)} = \frac{\Delta_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(0,0)}} \quad 1 \leq i + j \leq 3.$$

- Nous pouvons noter plusieurs points directement à partir de cette expression du symbole.
- Au numérateur et au dénominateur, les termes en $\frac{1}{R}$ vont faire apparaître la courbure $\frac{1}{R}$.
 - De la même manière, les termes homogènes à $\frac{m}{R}$ sont liés à l'opérateur de dérivation $\frac{1}{R}\partial_\theta$.
 - Au numérateur, les coefficients de h_1^3 et h_2^3 contiennent un terme en $\frac{m^4}{R^4}$. Cela correspond à un opérateur différentiel d'ordre 4.

Approximation de l'opérateur d'impédance À partir de la fraction rationnelle (4.1.17), où les fonctions de Bessel ont disparu du fait de la simplification par $\Delta_m^{(0,0)}$, plusieurs approximations du symbole sont possibles et donc nous pouvons déterminer plusieurs expressions d'un opérateur approché $S(h_1, h_2)$. L'approche la plus naturelle consiste à écrire un développement de Taylor de $S_m(h_1, h_2)$ par rapport à h_1 et h_2 et de remplacer le facteur multiplicatif m par l'opérateur de dérivation $-i\partial_\theta$. Ecrivons directement le développement de Taylor à l'ordre (3, 3) de l'opérateur S

$$\begin{aligned}
 S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}h_1L_1 - h_2L_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{h_1^2}{2R}\left(L_1 - 2\frac{\partial_\theta^2}{R^2}\right) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{h_1h_2}{R}\left(L_1 - 2\frac{\partial_\theta^2}{R^2}\right) + \\
 & \frac{h_2^2}{2R}\left(L_2 - 2\frac{\partial_\theta^2}{R^2}\right) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{h_1^3}{3}\left(L_1^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^4}\right) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}h_1^2h_2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}L_1^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^4}\right) - \\
 & \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}h_1h_2^2\left(L_1L_2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^4}\right) - \frac{h_2^3}{3}\left(L_2^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^4}\right),
 \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

où on a posé

$$L_i = k^2n_i^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^2} \quad i = 1, 2. \tag{4.1.19}$$

Plusieurs remarques s'imposent.

1. Tout d'abord, il est facile de retrouver la condition de Neumann (ordre (0, 0)) : en prenant $h_1 = 0, h_2 = 0$, il vient directement $S = 0$.
2. Si on fait tendre R vers l'infini, et si on utilise la transposition formelle suivante

$$\frac{\partial_\theta^2}{R^2} \longleftrightarrow \partial_x^2$$

on peut retrouver la condition (3.2.29) ou (3.3.7) obtenue dans le cas de la géométrie droite. Pour obtenir les conditions d'ordre inférieur, il suffit de supprimer successivement les termes en h_i^3, h_i^2 ($i = 1, 2$),...

3. Discrétiser cet opérateur d'impédance d'ordre (3, 3) reste très difficile à cause de l'opérateur différentiel d'ordre 4.

4. Si on remplace m par $-i\partial_\theta$ dans l'expression (4.1.17) du symbole $\sigma_{S_m}(h_1, h_2)$, on trouve des approximations, dites quasi-locales.

Auparavant, transposons cette étude au cas de la polarisation TM .

4.1.3 Le cas de la polarisation TM

Symbole de l'opérateur d'impédance exact

À partir de l'équation d'Helmholtz vérifiée dans les couches minces, nous savons que $(u_i^+)_m(r)$ $i = 1, 2$ vérifie

$$(u_i^+)_m(r) = \gamma_m^i J_m(kn_i r) + \delta_m^i Y_m(kn_i r) \quad i = 1, 2. \quad (4.1.20)$$

En considérant le développement en séries de Fourier de l'opérateur d'admittance

$$T\varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) = u_2^+(R, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} T_m(R) \varphi_m(R) e^{im\theta} \quad (4.1.21)$$

et les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^+(R - h_1 - h_2, \theta) = 0, \\ u_2^+(R - h_2, \theta) = u_1^+(R - h_2, \theta), \\ \frac{1}{\mu_2} \partial_r u_2^+(R - h_2, \theta) = \frac{1}{\mu_1} \partial_r u_1^+(R - h_2, \theta), \\ \partial_r u_2^+(R, \theta) = \varphi(\theta), \end{array} \right. \quad (4.1.22)$$

nous pouvons déterminer les quatre constantes $\gamma_m^1, \gamma_m^2, \delta_m^1$ et δ_m^2 et ainsi en déduire l'expression exacte de T_m

$$T_m(h_1, h_2) = \frac{N_m(h_1, h_2)}{\Delta_m(h_1, h_2)} \quad (4.1.23)$$

avec

$$\begin{aligned} N_m(h_1, h_2) &= \frac{n_2}{\mu_2} G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) \partial_s G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R) - \\ &\quad \frac{n_1}{\mu_1} \partial_t G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R), \\ \Delta_m(h_1, h_2) &= \frac{kn_2^2}{\mu_2} G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) \partial_s \partial_t G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R) \\ &\quad - \frac{kn_1 n_2}{\mu_1} \partial_t G_m(kn_1(R - h_1 - h_2), kn_1(R - h_2)) \partial_t G_m(kn_2(R - h_2), kn_2 R). \end{aligned}$$

Le développement asymptotique de $T_m(h_1, h_2)$ est obtenu de la même manière qu'en polarisation TE :

- h_1 et h_2 sont des petits paramètres
- $N_m(h_1, h_2)$ et $\Delta_m(h_1, h_2)$ ont un développement en fonction de (h_1, h_2) qui s'exprime à l'aide de $\Delta_m^{(0,0)}$ (premier terme du développement de $\Delta_m(h_1, h_2)$).

Formellement, cela nous conduit à l'expression de $T_m(h_1, h_2)$ suivante

$$T_m(h_1, h_2) = \frac{h_1 \tilde{N}_m^{(1,0)} + h_2 \tilde{N}_m^{(0,1)} + \frac{1}{2} h_1^2 \tilde{N}_m^{(2,0)} + h_1 h_2 \tilde{N}_m^{(1,1)} + \dots + \frac{1}{6} h_2^3 \tilde{N}_m^{(0,3)}}{1 + h_1 \tilde{\Delta}_m^{(1,0)} + h_2 \tilde{\Delta}_m^{(0,1)} + \frac{1}{2} h_1^2 \tilde{\Delta}_m^{(2,0)} + h_1 h_2 \tilde{\Delta}_m^{(1,1)} + \dots + \frac{1}{6} h_2^3 \tilde{\Delta}_m^{(0,3)}}$$

avec $\tilde{N}_m^{(i,j)} = \frac{N_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(0,0)}} ; \tilde{\Delta}_m^{(i,j)} = \frac{\Delta_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(0,0)}} \quad 1 \leq i+j \leq 3,$

et $\tilde{N}_m^{(1,0)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} ; \tilde{N}_m^{(0,1)} = 1 ; \tilde{N}_m^{(1,1)} = \frac{2\mu_1}{\mu_2 R} ; \tilde{N}_m^{(2,0)} = \frac{3}{R} ; \tilde{N}_m^{(0,2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2 R}$

$$\tilde{N}_m^{(2,1)} = -k^2 n_1^2 + \frac{m^2 + 3\frac{\mu_1}{\mu_2}}{R^2} ; \tilde{N}_m^{(1,2)} = \left(-k^2 n_2^2 + \frac{m^2 + 6}{R^2} \right) \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\tilde{N}_m^{(3,0)} = \left(-k^2 n_1^2 + \frac{m^2 + 2}{R^2} \right) \frac{\mu_1}{\mu_2} ; \tilde{N}_m^{(0,3)} = \left(-k^2 n_2^2 + \frac{m^2 + 11}{R^2} \right),$$

$$\tilde{\Delta}_m^{(1,0)} = 0 ; \tilde{\Delta}_m^{(0,1)} = \frac{1}{R} ; \tilde{\Delta}_m^{(1,1)} = \left(-k^2 n_2^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) \frac{\mu_1}{\mu_2} ; \tilde{\Delta}_m^{(2,0)} = -k^2 n_1^2 + \frac{m^2}{R^2}$$

$$\tilde{\Delta}_m^{(0,2)} = -k^2 n_2^2 + \frac{m^2 + 2}{R^2} ; \tilde{\Delta}_m^{(2,1)} = \frac{-k^2 n_1^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} k^2 n_2^2}{R} + \frac{\left(3 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) m^2}{R^3}$$

$$\tilde{\Delta}_m^{(1,2)} = \left(-\frac{3k^2 n_2^2}{R} + \frac{5m^2}{R^3} \right) \frac{\mu_1}{\mu_2} ; \tilde{\Delta}_m^{(3,0)} = -\frac{k^2 n_1^2}{R} + \frac{3m^2}{R^3} ; \tilde{\Delta}_m^{(0,3)} = -\frac{4k^2 n_2^2}{R} + \frac{6 + 6m^2}{R^3}.$$

Construction des conditions

Faisons un développement limité de $T_m(h_1, h_2)$ pour retrouver les conditions classiques de la polarisation TM

$$T_m(h_1, h_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 + h_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1^2}{2R} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1 h_2}{R} + \frac{h_2^2}{2R} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1^3}{3} \left(k^2 n_1^2 + \frac{1 - m^2}{R^2} \right) +$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} h_1^2 h_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} k^2 n_2^2 + \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} m^2}{R^2} \right) + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 h_2^2 + \frac{h_2^3}{3} \right) \left(k^2 n_2^2 + \frac{1 - m^2}{R^2} \right) + \mathcal{O}(h_1^4, h_2^4).$$

En revenant aux variables physiques,

$$T(h_1, h_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 + h_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1^2}{2R} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1 h_2}{R} + \frac{h_2^2}{2R} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1^3}{3} \left(L_1 + \frac{1}{R^2} \right) \\ + \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1^2 h_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} L_2 + \frac{1}{R^2} \right) + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 h_2^2 + \frac{h_2^3}{3} \right) \left(L_2 + \frac{1}{R^2} \right)$$

et la condition associée à cet opérateur d'ordre (3, 3) s'écrit

$$u^- = \mu_2 T(h_1, h_2) \partial_r u^-. \quad (4.1.24)$$

Pour une couche en prenant par exemple $h_1 = 0$, la condition d'ordre 3 s'écrit

$$u^- = \mu_2 \left(h_2 + \frac{h_2^2}{2R} + \frac{h_2^3}{3} \left(k^2 n_2^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} \right) \right) \partial_r u^-. \quad (4.1.25)$$

Il est facile à partir de cette écriture de retrouver la condition d'ordre 3 donnée par Bendali et Lemrabet [6], et en supprimant successivement les termes h_2^3 , puis h_2^2 ... , on reconnaît les conditions d'Engquist-Nédélec d'ordre 2, d'ordre 1 et d'ordre 0. Pour étendre ces conditions obtenues dans le cas circulaire à des géométries arbitraires, nous allons présenter, dans la section suivante, une approche heuristique développée par Kriegsmann, Taflove et Umashankar pour construire des conditions de radiation d'ordre élevé sur une frontière quelconque.

4.2 Extension aux géométries arbitraires

À partir du cas canonique circulaire, il est facile d'étendre les approximations de l'opérateur d'impédance à un cadre plus général. Cela permet d'une part de pouvoir traiter les problèmes de diffraction par des obstacles de géométries arbitraires et d'autre part de valider les nouvelles conditions en retrouvant les conditions d'Engquist-Nédélec.

4.2.1 Construction heuristique

À partir de conditions de radiation sur un cercle de rayon $R \gg 1$, Kriegsmann, Taflove et Umashankar ont employé les substitutions formelles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_r \longleftrightarrow \partial_n \\ \frac{1}{R} \longleftrightarrow \kappa(s) \\ \frac{\partial_\theta}{R} \longleftrightarrow \partial_s = \nabla_\Gamma, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

pour dériver des conditions de radiation sur une frontière d'un domaine convexe quelconque. On a noté $\kappa(s)$ la courbure de la frontière (orientée dans le sens direct) au point d'abscisse curviligne s . Pour donner une définition plus précise, il faut introduire τ le vecteur tangent unitaire de Γ obtenu par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à partir de n (normale dirigée vers l'extérieur, Fig 2.1.1) dans le sens direct. La variation de la normale est colinéaire au vecteur tangent τ

$$\partial_s n = \kappa \tau.$$

Nous allons transposer ce procédé pour écrire des approximations de l'opérateur d'impédance à partir de celles obtenues en géométrie circulaire.

Cas de la polarisation *TE*

À l'ordre (1, 1) l'opérateur d'impédance sur le cercle est approché par

$$S(h_1, h_2) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 \left(k^2 n_1^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^2} \right) - h_2 \left(k^2 n_2^2 + \frac{\partial_\theta^2}{R^2} \right).$$

En utilisant (4.2.1), on obtient l'approximation

$$S(h_1, h_2) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (k^2 n_1^2 + \partial_s^2) - h_2 (k^2 n_2^2 + \partial_s^2). \quad (4.2.2)$$

La condition associée pour une couche est identique à la condition d'Engquist-Nédélec d'ordre 1

$$\partial_n u^- + \frac{h_2}{\varepsilon_2} (k^2 n_2^2 + \partial_s^2) u^- = 0.$$

Nous avons déjà obtenue une telle condition à partir du développement de Taylor et de l'analyse asymptotique. Rappelons que cette condition est d'ordre (2, 2) dans le cas sans courbure, elle est d'ordre (1, 1) seulement dans le cas avec courbure.

À l'ordre (2, 2) l'opérateur d'impédance approché s'écrit

$$\begin{aligned} S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 (k^2 n_1^2 + \partial_s^2) - h_2 (k^2 n_2^2 + \partial_s^2) + \frac{\varepsilon_2 \kappa h_1^2}{\varepsilon_1 2} (k^2 n_1^2 - \partial_s^2) + \\ & \frac{\varepsilon_2 \kappa h_1 h_2}{\varepsilon_1} (k^2 n_1^2 - \partial_s^2) + \frac{\kappa h_2^2}{2} (k^2 n_2^2 - \partial_s^2). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

On peut cependant écrire cet opérateur de façon intrinsèque de deux manières

– avec un opérateur non symétrique et sans tenir compte de la variation de courbure

$$\begin{aligned} S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(h_1 - \frac{\kappa h_1^2}{2} - \kappa h_1 h_2 \right) k^2 n_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(h_1 + \frac{\kappa h_1^2}{2} + \kappa h_1 h_2 \right) \partial_s^2 \\ & - \left(h_2 - \frac{\kappa h_2^2}{2} \right) k^2 n_2^2 - \left(h_2 + \frac{\kappa h_2^2}{2} \right) \partial_s^2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

– avec un opérateur symétrique et en considérant la variation de courbure

$$\begin{aligned}
 S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(h_1 - \frac{\kappa h_1^2}{2} - \kappa h_1 h_2 \right) k^2 n_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \partial_s \left(h_1 + \frac{\kappa h_1^2}{2} + \kappa h_1 h_2 \right) \partial_s \\
 & - \left(h_2 - \frac{\kappa h_2^2}{2} \right) k^2 n_2^2 - \partial_s \left(h_2 + \frac{\kappa h_2^2}{2} \right) \partial_s.
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Seule la seconde condition est bien la condition d'Engquist-Nédélec d'ordre 2 pour une géométrie quelconque.

À l'ordre (3, 3) nous obtenons une approximation avec un opérateur différentiel d'ordre 4

$$\begin{aligned}
 S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(h_1 - \left(\frac{h_1^2}{2} + h_1 h_2 \right) \kappa \right) k^2 n_1^2 - \left(h_2 - \frac{\kappa h_2^2}{2} \right) k^2 n_2^2 \\
 & - \partial_s \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 + h_2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(h_1 h_2 + \frac{h_1^2}{2} \right) + \frac{h_2^2}{2} \right) \kappa + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{h_1^3}{3} + h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 \right) + \frac{h_2^3}{3} \right) \kappa^2 \right\} \partial_s \\
 & - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1 h_2^2 (k^2 n_1^2 + \partial_s^2) (k^2 n_2^2 + \partial_s^2) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_1^2 h_2 \right) (k^2 n_1^2 + \partial_s^2)^2 - \frac{h_2^3}{3} (k^2 n_2^2 + \partial_s^2)^2.
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

La condition associée pour une couche mince est identique à celle obtenue par Bendali et Lemrabet [6] à partir d'une analyse asymptotique.

Cas de la polarisation *TM*

Comme la polarisation *TM* ne présente pas de difficulté particulière, nous donnons directement l'approximation de l'opérateur d'admittance d'ordre (3, 3)

$$\begin{aligned}
 T(h_1, h_2) = & \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 + h_2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{h_1^2}{2} + h_1 h_2 \right) + \frac{h_2^2}{2} \right) \kappa + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{h_1^3}{3} (k^2 n_1^2 + \partial_s^2 + \kappa^2) \\
 & + \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1^2 h_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} (k^2 n_2^2 + \partial_s^2) + \kappa^2 \right) + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 h_2^2 + \frac{h_2^3}{3} \right) (k^2 n_2^2 + \partial_s^2 + \kappa^2).
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Tous ces opérateurs ont été construits de manière formelle. Dans le paragraphe suivant nous construisons ces opérateurs à partir d'un développement asymptotique.

4.2.2 Construction du développement asymptotique

Dans ce paragraphe, on retrouve les approximations de l'opérateur d'impédance données formellement dans ci-dessus.

Préliminaires

Le repère de Frénet⁽¹⁾ : Pour construire le développement asymptotique de (u_1^+, u_2^+) en les petits paramètres (h_1, h_2) , on va d'abord transformer le domaine $\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \Gamma_2$ en un domaine fixe. Pour cela, on utilise une paramétrisation de Γ en coordonnées locales (s, δ) dans le repère de Frénet [8].

On paramètre Γ par $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, où s est l'abscisse curviligne. On note τ et n les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal (extérieur à Ω_2^+) sur Γ ; ils sont directement orthogonaux :

$$\tau = \frac{d\gamma(s)}{ds} = \begin{bmatrix} n_y \\ -n_x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}.$$

Un point (x, y) dans le domaine $\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \Gamma_2$ est paramétrisé par

$$(x, y) = (x(s), y(s)) + \delta n \quad -h_1 - h_2 \leq \delta \leq 0. \quad (4.2.8)$$

On rappelle les formules de Frénet qui définissent la courbure $\kappa(s)$ au point d'abscisse curviligne s (si Ω^+ est convexe, la courbure est positive) :

$$\frac{d\tau}{ds} = -\kappa(s) n \quad \text{et} \quad \frac{dn}{ds} = \kappa(s) \tau. \quad (4.2.9)$$

Expression du laplacien⁽²⁾ en coordonnées locales : Les formules de Frénet (4.2.9) permettent d'exprimer les dérivées selon s et δ en fonction des dérivées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \delta\kappa(s)) n_y & -(1 + \delta\kappa(s)) n_x \\ n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}.$$

Par inversion de ce système, on obtient

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_y}{1 + \delta\kappa(s)} & n_x \\ \frac{-n_x}{1 + \delta\kappa(s)} & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_\delta \end{pmatrix},$$

d'où l'expression du laplacien dans les variables (s, δ) :

$$\Delta \equiv \frac{1}{1 + \delta\kappa(s)} \partial_s \left(\frac{1}{1 + \delta\kappa(s)} \partial_s \right) + \frac{\kappa(s)}{1 + \delta\kappa(s)} \partial_\delta + \partial_\delta^2. \quad (4.2.10)$$

Remarque 4.2.1 L'expression $\frac{1}{1 + \delta\kappa(s)} \partial_s \left(\frac{1}{1 + \delta\kappa(s)} \partial_s \right)$ n'est autre que Δ_{Γ^δ} , le laplacien sur la courbe de niveau $\Gamma^\delta = \{\gamma(s) + \delta n ; \gamma(s) \in \Gamma\}$.

⁽¹⁾Jean Frédéric Frénet (1816-1900).

⁽²⁾Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827).

Transformation en domaine fixe

À l'aide d'une dilatation dans les couches minces, on peut transformer le domaine $\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \Gamma_2$ en un domaine fixe, les petits paramètres h_1 et h_2 apparaissant alors dans les équations, ce qui est plus simple à traiter.

On introduit la variable dilatée

$$\eta = \begin{cases} \frac{\delta}{h_1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1} & -h_1 - h_2 \leq \delta \leq -h_2 \\ \frac{\delta}{h_2} & -h_2 \leq \delta \leq 0, \end{cases}$$

si bien que (s, η) parcourt le domaine $(0, l_\Gamma) \times (-2, 0)$ (l_Γ est la longueur de la courbe Γ).

Lemme 4.2.1 *Dans les coordonnées (s, η) , le laplacien prend la forme*

$$\Delta = \frac{1}{h_1^2} \left(\partial_\eta^2 - \sum_{0 < n \leq N} \sum_{0 \leq l \leq n} h_1^l h_2^{n-l} A_{l,n-l}^1 + (h_1^{N+1} + h_2^{N+1}) T_1^N \right) \quad \text{pour } -2 < \eta < -1,$$

$$\Delta = \frac{1}{h_2^2} \left(\partial_\eta^2 - \sum_{l=1}^{l=N} h_2^l A_l^2 + h_2^{N+1} T_2^N \right) \quad \text{pour } -1 < \eta < 0,$$

les opérateurs $(A_{l,p}^1)$ et (A_l^2) comportent au plus une dérivée selon η et T_1^N et T_2^N sont des opérateurs uniformément bornés en (h_1, h_2) .

Preuve. La vérification est immédiate à l'aide de la formule (4.2.10). ■

Afin de poursuivre notre étude, il nous faut préciser les termes $A_{l,n-l}^1$ et A_l^2 . Par un développement de Taylor en (h_1, h_2) à l'ordre $(4, 4)$ de l'expression du laplacien dans les coordonnées (s, η) , nous obtenons les premiers termes suivants

$$A_{1,0}^1 = -\kappa(s) \partial_\eta; \quad A_{1,1}^1 = -\kappa^2(s) \partial_\eta; \quad A_{1,2}^1 = -\kappa^3(s) \partial_\eta; \quad A_{0,1}^1 = A_{0,2}^1 = A_{0,3}^1 = 0;$$

$$A_{2,0}^1 = (\eta + 1) \kappa^2(s) \partial_\eta - \partial_s^2; \quad A_{2,1}^1 = 2(\eta + 1) \kappa^3(s) \partial_\eta - \partial_s(\kappa(s) \partial_s) - \kappa(s) \partial_s^2;$$

$$A_{3,0}^1 = -(\eta + 1)^2 \kappa^3(s) \partial_\eta + (\eta + 1)(\partial_s(\kappa(s) \partial_s) + \kappa(s) \partial_s^2).$$

$$A_1^2 = -\kappa(s) \partial_\eta; \quad A_2^2 = \eta \kappa^2(s) \partial_\eta - \partial_s^2; \quad A_3^2 = -\eta^2 \kappa^3(s) \partial_\eta + \eta \partial_s(\kappa(s) \partial_s) + \eta \kappa(s) \partial_s^2.$$

On note v_1 (resp. v_2) la fonction définie sur Ω_1^+ (resp. Ω_2^+) par $v_1(s, \eta) = u_1^+(s, \delta)$ (resp. $v_2(s, \eta) = u_2^+(s, \delta)$). Dans les nouvelles coordonnées (semi-dilatées), si on néglige les termes

$(h_1^{N+1} + h_2^{N+1}) T_1^N$ et $h_2^{N+1} T_2^N$, le problème (3.2.21) devient

$$\begin{aligned}
 \partial_\eta^2 v_1(s, \eta) - \sum_{0 < n \leq N} \sum_{0 \leq l \leq n} h_1^l h_2^{n-l} A_{l, n-l}^1 v_1(s, \eta) + h_1^2 k^2 n_1^2 v_1(s, \eta) &= 0 \quad \text{pour } -2 < \eta < -1 \\
 \partial_\eta^2 v_2(s, \eta) - \sum_{l=1}^{l=N} h_2^l A_l^2 v_2(s, \eta) + h_2^2 k^2 n_2^2 v_2(s, \eta) &= 0 \quad \text{pour } -1 < \eta < 0 \\
 \partial_\eta v_1(s, -2) &= 0 \quad \text{en polarisation } TE^{(1)} \\
 \frac{1}{\varepsilon_2 h_2} \partial_\eta v_2(s, -1) &= \frac{1}{\varepsilon_1 h_1} \partial_\eta v_1(s, -1) \\
 v_2(s, -1) &= v_1(s, -1) \\
 v_2(s, 0) &= \varphi(s) \quad \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

problème posé dans un domaine fixe.

Les problèmes élémentaires

La structure des équations (4.2.11) laisse apparaître des puissances entières de h_1 et h_2 , ce qui conduit naturellement à effectuer le développement suivant :

$$v_1 = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq p \leq n} v_1^{p, n-p} h_1^p h_2^{n-p} \quad \text{et} \quad v_2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq p \leq n} v_2^{p, n-p} h_1^p h_2^{n-p},$$

où les fonctions $v_1^{n,p}$ et $v_2^{n,p}$ ne dépendent pas de h_1 et h_2 .

Cette écriture est purement formelle, on ne cherche pas ici à donner un sens à la convergence éventuelle des séries. En insérant ces expressions dans le problème (4.2.11), et en identifiant les termes de même puissance de (h_1, h_2) , on obtient une suite de problèmes

$$\partial_\eta^2 v_1^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} A_{l,j}^1 v_1^{m-l, n-j}(s, \eta) + \sum_{1 \leq j \leq n} A_{0,j}^1 v_1^{m, n-j}(s, \eta) - k^2 n_1^2 v_1^{m-2, n}(s, \eta)$$

$$\partial_\eta^2 v_2^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_i^2 v_2^{m, n-i}(s, \eta) - k^2 n_2^2 v_2^{m, n-2}(s, \eta)$$

$$\partial_\eta v_1^{m,n}(s, -2) = 0 \quad \text{en polarisation } TE^{(2)}$$

$$v_1^{m,n}(s, -1) = v_2^{m,n}(s, -1) \quad ; \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_\eta v_1^{m, n-1}(s, -1) = \frac{1}{\varepsilon_2} \partial_\eta v_2^{m-1, n}(s, -1)$$

$$v_2^{0,0}(s, 0) = \varphi(s) \quad ; \quad v_2^{m,n}(s, 0) = 0 \quad (m, n) \neq (0, 0).$$

(4.2.12)

⁽¹⁾ En polarisation TM : $v_1(s, -2) = 0$.

⁽²⁾ En polarisation TM : $v_1^{m,n}(s, -2) = 0$.

(On pose par convention $v_1^{-2,n} = v_1^{-1,n} = v_1^{m,-1} = v_2^{m,-2} = v_2^{m,-1} = v_2^{-1,n} = 0$).

Le problème (4.2.12) est unidimensionnel et admet une solution unique.

Calcul des premiers termes

Nous explicitons ici formellement le calcul des 6 premiers termes du développement asymptotique.

Le cas de la polarisation TE Le problème (4.2.12) se réécrit sous forme de deux problèmes couplés à l'aide de la condition aux limites $v_1^{m,n}(s, -1) = v_2^{m,n}(s, -1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\eta^2 v_2^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_i^2 v_2^{m,n-i}(s, \eta) - k^2 n_2^2 v_2^{m,n-2}(s, \eta) \\ \partial_\eta v_2^{m,n}(s, -1) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \partial_\eta v_1^{m+1,n-1}(s, -1) \\ v_2^{0,0}(s, 0) = \varphi(s) ; v_2^{m,n}(s, 0) = 0 \quad (m, n) \neq (0, 0), \end{array} \right. \quad (4.2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\eta^2 v_1^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} A_{l,j}^1 v_1^{m-l,n-j}(s, \eta) \\ \quad + \sum_{1 \leq j \leq n} A_{0,j}^1 v_1^{m,n-j}(s, \eta) - k^2 n_1^2 v_1^{m-2,n}(s, \eta) \\ v_1^{m,n}(s, -1) = v_2^{m,n}(s, -1) \\ \partial_\eta v_1^{m,n}(s, -2) = 0. \end{array} \right. \quad (4.2.14)$$

Une écriture successive des problèmes permet de déterminer les termes $v_1^{m,n}(s, \eta)$ et $v_2^{m,n}(s, \eta)$ du développement asymptotique à l'ordre (N, N) souhaité. Pour $m = n = 0$ les termes $v_1^{0,0}$ et $v_2^{0,0}$ sont donnés en résolvant les problèmes (4.2.13) et (4.2.14)

$$v_1^{0,0}(s, \eta) = v_2^{0,0}(s, \eta) = \varphi(s).$$

Nous poursuivons le calcul jusqu'à l'ordre $(4, 4)$, nous obtenons en dérivant le développement asymptotique de v_2 par rapport à la variable η et substituant 0 à η , une approximation d'ordre $(3, 3)$ de l'opérateur d'impédance S

$$\begin{aligned} S(h_1, h_2) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mathcal{L}_1 h_1 - \mathcal{L}_2 h_2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\kappa k^2 n_1^2 - \partial_s (\kappa \partial_s)) h_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\kappa k^2 n_1^2 - \partial_s (\kappa \partial_s)) h_1 h_2 \\ & + \frac{1}{2} (\kappa k^2 n_2^2 - \partial_s (\kappa \partial_s)) h_2^2 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\mathcal{L}_1^2 + \partial_s (\kappa^2 \partial_s)) h_1^3 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mathcal{L}_1^2 + \partial_s (\kappa^2 \partial_s) \right) h_1^2 h_2 \\ & - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \partial_s (\kappa^2 \partial_s)) h_1 h_2^2 - \frac{1}{3} (\mathcal{L}_2^2 + \partial_s (\kappa^2 \partial_s)) h_2^3, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

où on a posé

$$\mathcal{L}_1 = (\partial_s^2 + k^2 n_1^2) ; \mathcal{L}_2 = (\partial_s^2 + k^2 n_2^2). \quad (4.2.16)$$

L'approximation (4.2.15) de l'opérateur d'impédance S est identique à celle obtenue par substitutions formelles (4.2.6).

Le cas de la polarisation TM Dans cette polarisation nous allons calculer une approximation de l'opérateur d'admittance T . le problème (4.2.12) se réécrit sous forme de deux problèmes couplés à l'aide de la condition aux limites $v_2^{m,n}(s, -1) = v_1^{m,n}(s, -1)$ au lieu de $v_1^{m,n}(s, -1) = v_2^{m,n}(s, -1)$ (le calcul de $v_2^{m,n}$ nécessite la connaissance de $v_1^{m,n}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\eta^2 v_1^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} A_{l,j}^1 v_1^{m-l, n-j}(s, \eta) \\ \quad + \sum_{1 \leq j \leq n} A_{0,j}^1 v_1^{m, n-j}(s, \eta) - k^2 n_1^2 v_1^{m-2, n}(s, \eta) \\ v_1^{m,n}(s, -2) = 0 \\ \partial_\eta v_1^{m,n}(s, -1) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \partial_\eta v_2^{m-1, n+1}(s, -1), \end{array} \right. \quad (4.2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\eta^2 v_2^{m,n}(s, \eta) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_i^2 v_2^{m, n-i}(s, \eta) - k^2 n_2^2 v_2^{m, n-2}(s, \eta) \\ v_2^{m,n}(s, -1) = v_1^{m,n}(s, -1) \\ \partial_\eta v_1^{0,1}(s, 0) = \varphi(s) ; \partial_\eta v_2^{m,n}(s, 0) = 0 \quad (m, n) \neq (0, 1). \end{array} \right. \quad (4.2.18)$$

Nous procédons comme pour le cas de la polarisation TE pour calculer les termes $v_1^{m,n}$ et $v_2^{m,n}$. Dans cette polarisation un développement asymptotique à l'ordre (3, 3) permet d'obtenir une approximation d'ordre (3, 3) de l'opérateur d'admittance T donné par

$$\begin{aligned} T(h_1, h_2) = & \frac{\mu_1}{\mu_2} h_1 + h_2 + \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa h_1^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa h_1 h_2 + \frac{1}{2} \kappa h_2^2 + \frac{1}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2} (\mathcal{L}_1 + \kappa^2) h_1^3 \\ & + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \mathcal{L}_2 + \kappa^2 \right) h_1^2 h_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} (\mathcal{L}_2 + \kappa^2) h_1 h_2^2 + \frac{1}{3} (\mathcal{L}_2 + \kappa^2) h_2^3. \end{aligned}$$

(on rappelle que les opérateur \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont donnés par les formules (4.2.16)).

On retrouve aussi l'approximation d'ordre (3, 3) obtenue par substitutions formelles (4.2.7).

5

Étude de la stabilité

Sommaire

5.1	Le problème aux limites extérieur avec condition d'impédance	83
5.2	Étude de la stabilité de la condition d'impédance d'ordre (2,2)	85
5.2.1	Estimation d'erreur	86
5.3	Résultats numériques	86
5.3.1	Résultats obtenus en utilisant la condition d'impédance	87
5.3.2	Résultats sur le domaine extérieur global	89

Notre objectif ici est d'étudier la condition d'impédance d'ordre (2,2) construite aux chapitres précédents. On s'intéresse à l'étude de leur stabilité. Nous donnons ensuite quelques résultats numériques qui valident l'intérêt de l'approche par condition d'impédance.

5.1 Le problème aux limites extérieur avec condition d'impédance

Pour plus de clarté, nous rappelons la condition d'ordre (2,2)

En polarisation TE

$$\partial_n u^- = \left[-\frac{1}{\varepsilon_1} \mathcal{L}_1 h_1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \mathcal{L}_2 h_2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \mathcal{M}_1 h_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \mathcal{M}_1 h_1 h_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \mathcal{M}_2 h_2^2 \right] u^-,$$

où on a posé

$$\mathcal{L}_i = (\partial_s^2 + k^2 n_i^2) ; \mathcal{M}_i = \kappa k^2 n_i^2 - \partial_s (\kappa \partial_s) \quad i = 1, 2.$$

En polarisation TM

$$u^- = \left[\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \frac{1}{2} \mu_1 \kappa h_1^2 + \mu_1 \kappa h_1 h_2 + \frac{1}{2} \mu_2 \kappa h_2^2 \right] \partial_n u^-. \quad (5.1.1)$$

Pour les deux polarisations nous utiliserons la notation

$$\partial_n u^- = \mathbb{Z}u^-. \quad (5.1.2)$$

Le problème⁽¹⁾ extérieur s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Delta u^- + k^2 u^- &= 0 && \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-), \\ \partial_n u^- &= \mathbb{Z}u^- && \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{1}{2}} (\partial_r (u^- - u_{inc}) - ik(u^- - u_{inc})) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

On reprend toutes les notations et hypothèses des chapitres précédents : les données sont donc l'ouvert extérieur Ω^- de frontière Γ , le nombre d'onde $k > 0$.

Le comportement de u à l'infini est décrit par la condition de radiation et non par son appartenance à un espace de Sobolev⁽²⁾. Le cadre fonctionnel naturel dans lequel doit être cherchée la solution est donc celui des espaces de Fréchet [29]

$$H_{loc}^s(\overline{\Omega^-}) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega^-) ; \varphi u \in H^s(\Omega^-), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega^-})\}.$$

Ces espaces décrivent la régularité jusqu'au bord Γ . Seul le comportement à l'infini est relaxé. L'espace $H_{loc}^s(\overline{\Omega^-})$ ne doit pas être confondu avec l'espace plus usuel $H_{loc}^s(\Omega^-)$ qui décrit seulement la régularité intérieure. On peut donc, supposer que la solution u est localement sommable et que l'équation d'Helmholtz a lieu au sens des distributions (cf. [28]).

Les résultats usuels de régularité des solutions des problèmes elliptiques nous permettent de savoir que u est analytique à l'extérieur de toute boule de rayon suffisamment grand pour contenir l'obstacle. La condition de radiation a ainsi lieu au sens usuel.

Si l'inconnue u est cherchée dans l'espace de Fréchet $H_{loc}^1(\overline{\Omega^-})$, sa trace sur Γ est dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Alors la trace de $\mathbb{Z}u^-$ sur Γ est dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, pour donner un sens à la condition aux limites.

Définissons la fonction $v = u^- - u_{inc}$, où u_{inc} est une solution de l'équation d'Helmholtz

⁽¹⁾Le problème approché.

⁽²⁾Sobolev Sergueï Lvovitch (1908-1989).

dans Ω^- . On obtient donc, dans ce cas, le problème aux limites posé de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in H_{loc}^s(\overline{\Omega^-}) \text{ tel que} \\ \Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-), \\ \partial_n v - \mathbb{Z}v = f \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{1}{2}} (\partial_r v - ikv) = 0. \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

L'étude de l'unicité et l'existence de ce problème est analogue à celle du problème (2.1.10) (cf., ainsi, par exemple, L. Vernhet [28]) et nous ne la refaisons donc pas ici.

5.2 Étude de la stabilité de la condition d'impédance d'ordre (2, 2)

Après avoir construit les conditions d'impédance, il est naturel d'étudier en premier lieu leur stabilité. Cette question est d'une importance capitale pour la mise en œuvre numérique, mais aussi pour la justification théorique de l'ordre d'approximation qu'apportent ces conditions.

Pour écrire des estimations uniformes en h_1 et h_2 , nous allons suivre la même démarche que celle que nous avons développée pour démontrer l'existence du problème (2.1.10). La seule différence est donnée par le second membre f qui est non nul et tel que

$$f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Comme dans le paragraphe 2.4, on se ramène à un domaine borné Ω_Σ en tronquant Ω^- à l'aide d'une frontière artificielle, notée $\Sigma^{(1)}$.

Nous avons la formulation équivalente au problème (5.1.4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{dans } \Omega_\Sigma, \\ \partial_n v - \mathbb{Z}v = f \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n v - \mathcal{N}_k v = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

Théorème 5.2.1 (Stabilité) *La solution v du problème (5.2.1) est bornée lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro, et nous avons la majoration suivante*

$$\|v\|_{1, \Omega_\Sigma} \leq c \|f\|_{-1/2, \Gamma}$$

avec une constante positive c .

⁽¹⁾Voir la figure 2.4.1 page 31.

Démonstration. C'est un résultat classique que l'on peut trouver, par exemple, dans [28]. ■

5.2.1 Estimation d'erreur

Il s'agit de la convergence de la solution approchée vers la solution exacte avec une estimation d'erreur. L'un des avantages des développements asymptotiques est de fournir une estimation de cette erreur. Nous donnons le résultat sous la forme d'un théorème.

Théorème 5.2.2 (Convergence) *La solution \tilde{u} du problème (5.1.3) avec une condition d'impédance d'ordre (2, 2) converge vers la solution du problème exact que nous noterons u et nous avons l'estimation*

$$\|\tilde{u} - u\|_{1,\Omega} \leq c \left(h_1^{\frac{5}{2}} + h_2^{\frac{5}{2}} \right). \quad (5.2.2)$$

Démonstration. On peut effectuer un développement asymptotique pour le problème avec condition d'impédance d'ordre (2, 2). Le développement $v = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq p \leq n} v^{p,n-p} h_1^p h_2^{n-p}$ fournit une relation de récurrence similaire à celle obtenue dans le paragraphe 4.2.2. Nous avons alors par un calcul simple l'estimation (5.2.2). ■

5.3 Résultats numériques

Les calculs présentés dans ce paragraphe ont été effectués à l'aide du logiciel de calcul formel MATLAB version 6.5 installé sur un ordinateur Pentium IV cadencé à 2 GHz équipé du système d'exploitation Windows Xp.

Dans cette section, nous présentons quelques expériences numériques relatives à la condition d'impédance (5.1.1) établie dans les chapitres précédents, aussi bien sur le domaine global. Le but des calculs effectués est de comparer les résultats obtenus en utilisant la condition d'impédance (5.1.1) sur Γ avec ceux que donnent la résolution du problème de transmission (2.1.10) dans le domaine global. Pour faire ces comparaisons, nous nous sommes fixés différentes valeurs de h_1 et de h_2 (les épaisseurs du revêtement).

Nous signalons que, les tests numériques ont été effectués lorsque l'obstacle est recouvert de deux fines couches des matériaux diélectriques isotropes homogènes. Ainsi nous nous sommes fixés pour tous les cas de tests :

- L'obstacle est un disque de rayon $R_0 = 0.5$ m.

- Les matériaux diélectriques qui le recouvre sont caractérisés par les permittivités diélectriques et perméabilités magnétiques relatives :

$$\varepsilon_1 = 1. ; \varepsilon_2 = 1.05 ; \mu_1 = 2.56 ; \mu_2 = 2.50.$$

Les constantes caractéristiques du vide (dans le système U.S.I.) :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F/m ; \mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m.$$

- Le milieu extérieur a les caractéristiques du vide.
- L'onde incidente est plane, de longueur d'onde $\lambda = 2m$ et se propage suivant l'axe Oy dans le sens $y > 0$. Elle s'écrit

$$u_{inc}(X) = e^{iky},$$

avec

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi.$$

- La frontière artificielle est placée à une distance 10λ de l'extérieur des couches.
- La précision est fixée à 10^{-6} .

5.3.1 Résultats obtenus en utilisant la condition d'impédance

Tout d'abord, nous donnons quelques résultats visant à valider numériquement la condition d'impédance (5.1.1) sur la frontière Γ .

Les cas tests utilisés ici sont les suivants :

Cas test n⁰ 1a :

- Les épaisseurs des couches minces : $h_1 = 5.10^{-3}$ m et $h_2 = 5.10^{-3}$ m.
- La triangulation du domaine noté Ω_Σ , borné intérieurement par Γ et extérieurement par Σ , comporte 11488 nœuds et 22464 triangles.

Cas test n⁰ 2a :

- Les épaisseurs des couches minces : $h_1 = 5.10^{-3}$ m et $h_2 = 3.10^{-3}$ m.
- La triangulation du domaine Ω_Σ comporte 15392 nœuds et 29312 triangles.

Cas test n⁰ 3a :

- Les épaisseurs des couches minces : $h_1 = 3.10^{-3}$ m et $h_2 = 2.10^{-3}$ m.
- La triangulation du domaine Ω_Σ comporte 16288 nœuds et 31680 triangles.

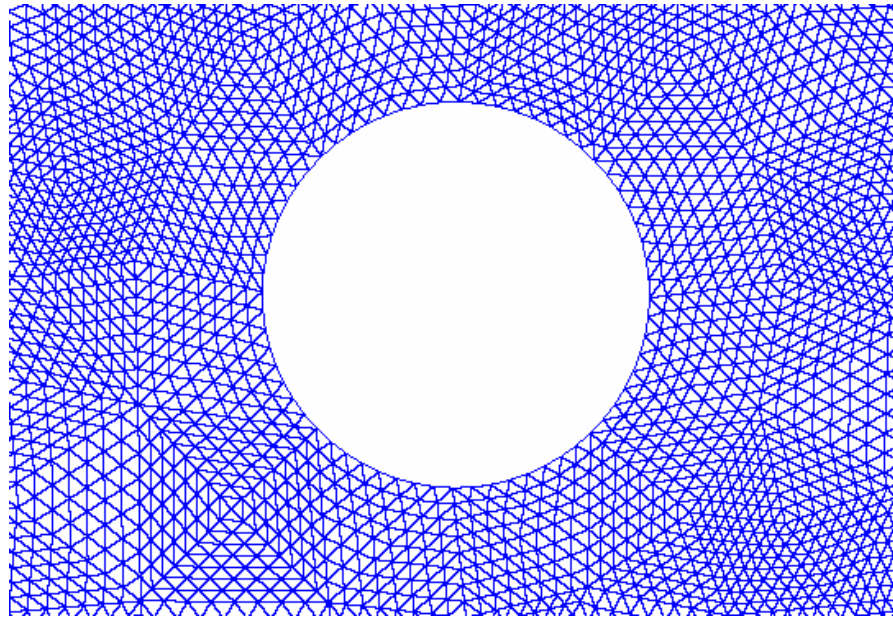


Figure 5.3.1 : Maillage utilisé pour le cas test n^o 2a.

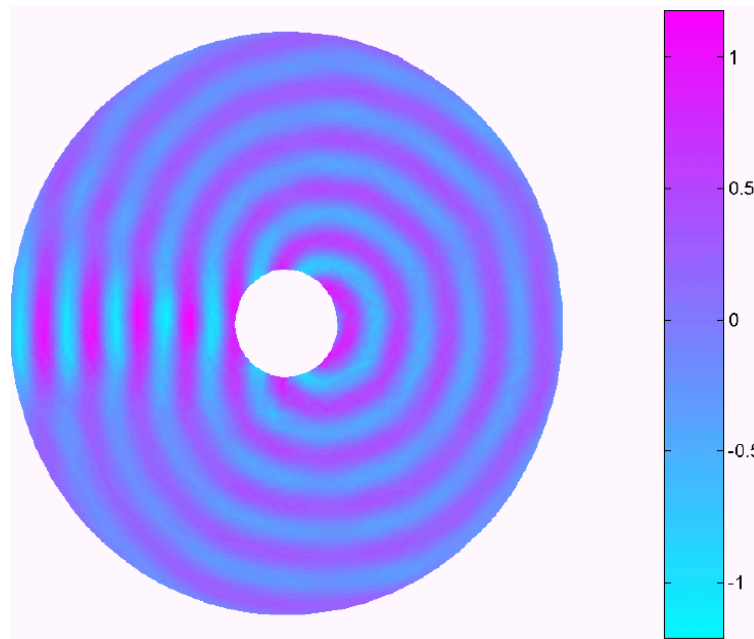


Figure 5.3.2 : Solution avec la condition d'impédance.

Le tableau 1 donne les erreurs en normes H^1 sur le domaine Ω_Σ entre les parties réelles des solutions calculées et analytiques.

La figure 5.3.2 représente la solution obtenue en utilisant la condition d'impédance (5.1.1) sur Γ .

	Erreur relative	Temps de calcul (seconde)
Cas test n ⁰ 1a	1.803 %	13
Cas test n ⁰ 2a	1.312 %	18
Cas test n ⁰ 3a	0.987 %	20

Tableau 1

5.3.2 Résultats sur le domaine extérieur global

Nous présentons ici quelques résultats visant à établir et à comparer l'efficacité, dans le domaine extérieur global, de la condition d'impédance (5.1.1) sur la frontière Γ .

Il s'agit en fait de comparer dans le domaine extérieur à Γ la solution obtenue en résolvant le problème (5.2.1) en utilisant la condition d'impédance (5.1.1) à celle que donne le problème de transmission (2.1.10), résolu dans tout le domaine.

Cas test n⁰ 1b :

Il reprend le cas n⁰ 1a de la section précédente avec :

- La triangulation du domaine noté Ω_1^+ , borné intérieurement par Γ_1 et extérieurement par Γ_2 , comporte 5117 nœuds et 9910 triangles.
- La triangulation du domaine noté Ω_2^+ , borné intérieurement par Γ_2 et extérieurement par Γ , comporte 5117 nœuds et 9910 triangles.

Cas test n⁰ 2b :

Il reprend le cas n⁰ 2a de la section précédente avec :

- La triangulation du domaine Ω_1^+ comporte 5117 nœuds et 9910 triangles.
- La triangulation du domaine Ω_2^+ comporte 4291 nœuds et 7892 triangles.

Cas test n⁰ 3b :

Il reprend le cas n⁰ 3a de la section précédente avec :

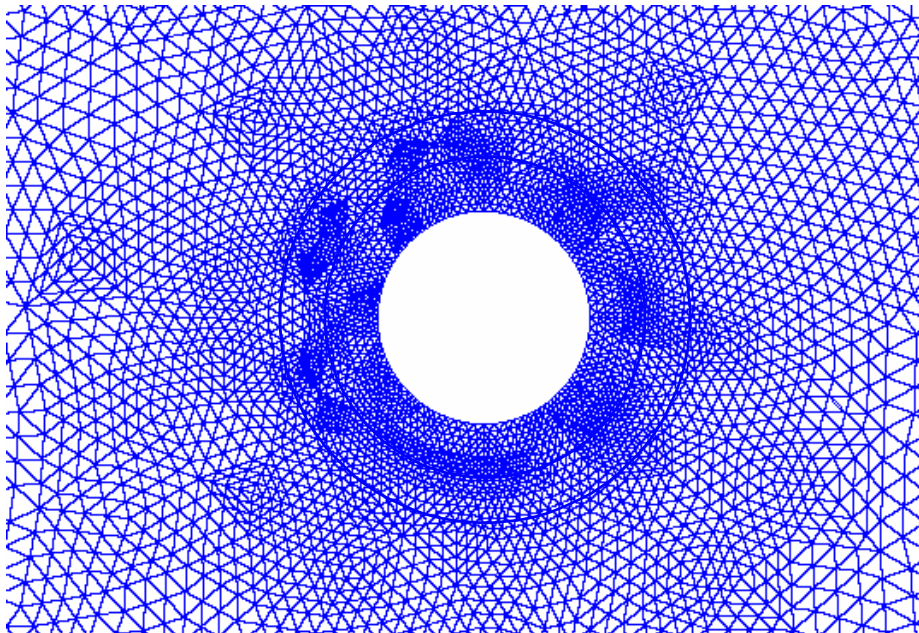
- La triangulation du domaine Ω_1^+ comporte 4291 nœuds et 7892 triangles.
- La triangulation du domaine Ω_2^+ comporte 3228 nœuds et 6140 triangles.

Le tableau 2 donne les erreurs en normes H^1 sur le domaine $\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ \cup \Gamma_2$ entre les parties réelles des solutions calculées et analytiques.

La figure 5.3.4 visualise la solution calculée dans le domaine entier.

	Erreur relative	Temps de calcul (seconde)
Cas test n ⁰ 1b	1.212 %	71
Cas test n ⁰ 2b	1.198 %	67
Cas test n ⁰ 3b	1.122 %	70

Tableau 2

Figure 5.3.3 : Maillage utilisé pour le cas test n⁰ 2b.

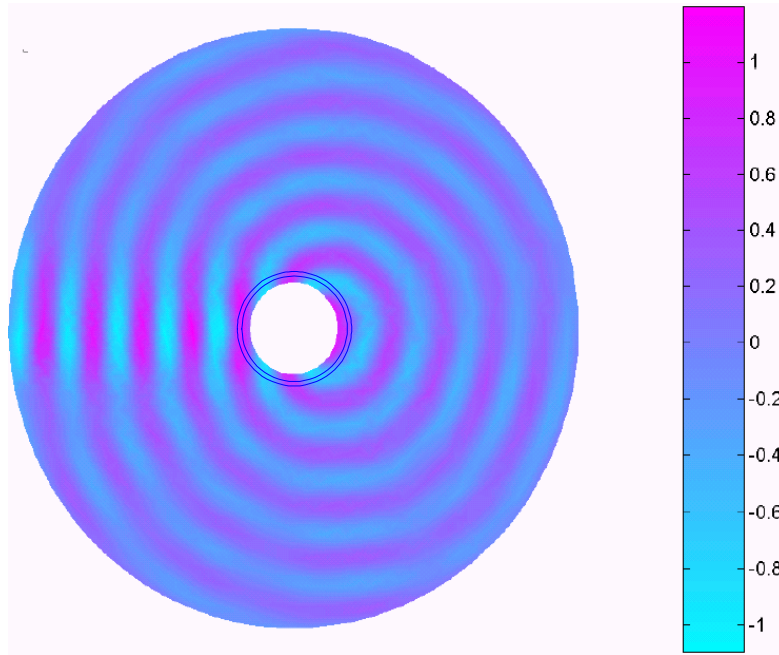


Figure 5.3.4 : Solution calculée dans le domaine global.

Ces résultats mettent en évidence l'efficacité de la condition d'impédance testée. Ils permettent ainsi de valider l'utilisation d'une condition d'impédance afin de réduire le domaine de calcul et surtout le temps nécessaire à la résolution de façon remarquable.

Conclusion : Dans tous les cas, l'utilisation d'une condition d'impédance nous a permis (via un taux d'erreur très faible), de remplacer l'étude d'un problème sur un domaine délicat à mailler, par celle d'un problème similaire sur un domaine simplifié et réduit. Nous avons ainsi diminué de façon significative le temps nécessaire à la résolution de notre problème.

Conclusion générale

Bartoli et Bendali ont construit dans [4] les différentes approximations de l'opérateur d'impédance d'**une couche mince** pour les équations de Maxwell en régime harmonique. Ce mémoire constitue une généralisation de leurs travaux au cas de **deux couches**.

La résolution numérique d'un problème de diffraction d'une onde électromagnétique par des obstacles revêtus de couches minces nécessite l'introduction de conditions d'impédance construites à partir d'une approximation de l'opérateur d'impédance. Dans ce travail nous avons analysé plusieurs façons de constructions de cet opérateur. Pour les deux géométries particulières, le cas plan et le cas circulaire, nous avons pu donner une écriture explicite de l'opérateur d'impédance. De cette écriture nous avons déduit les différentes approximations. La construction de développements asymptotiques de la solution dans les couches minces nous a permis d'étendre le processus de construction au cas des géométries arbitraires. Par la suite, nous avons effectué quelques tests numériques validant l'utilisation d'une condition d'impédance et démontrant l'efficacité de la méthode des conditions d'impédance.

Bibliographie

- [1] **Achdou Y., Pironneau O. and Zebic A.** Effective boundary conditions for thin coating. Université Pierre et Marie Curie Paris France, janvier 1994.
- [2] **Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L.** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions Part II. *Comm. Pure and Appl. Math.* 27 (1964), pp : 35-92.
- [3] **Antoine X.** Conditions de radiation sur le bord. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Avenue de l'université, Pau, 1997.
- [4] **Bartoli N. and Bendali A.** Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. *IMA JAM* (2002) **67**, 479-508.
- [5] **Bendali A.** Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques. Thèse d'Etat, Université Paris VI, janvier 1984.
- [6] **Bendali A. and Lemrabet K.** The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 56(6) : 1664 1693, avril 1996.
- [7] **Bendali A. and Souilah M.** Consistency estimates for a double-layer potential and application to the numerical analysis of the boundary-element approximation of acoustic scattering by a penetrable object. *Mathematics of computation*, 62(205) : 65-91, 1994.
- [8] **Berger M., Gostiaux B.** Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. *Mathématiques*. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, second edition 1992.

-
- [9] **Boubendir Y.** Techniques de décomposition de domaine - Résolution par la méthode des équations intégrales. PhD thesis, INSA-MIP, Toulouse, janvier 2001.
- [10] **Boutrène K. E.** Méthode intégrale pour un problème de Ventcel. Mémoire de Magister, U.S.T.H.B, novembre 2002.
- [11] **Chazarain J., Piriou A.** Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations. North-Holland, Amsterdam, New-York, 1982.
- [12] **Cioni J. P.** Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis. PhD thesis, U.N.S.A, décembre 1995.
- [13] **Colton D. and Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, volume 93. Springer-Verlag, 1992.
- [14] **Dautray R., Lions J. L.** Modèles physiques. Masson editor, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 1. Paris 1987.
- [15] **Dautray R., Lions J. L.** Spectre des opérateurs. Masson editor, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 5. Paris 1987.
- [16] **Dautray R., Lions J.-L.** Transformations, Sobolev, opérateurs. Masson editor, Analyse mathématique et calculs numériques pour les sciences et les techniques, Volume 3. Paris 1987.
- [17] **Engquist B. and Majda A.** Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. of Comp.* 31 (1977), pp. 207-216.
- [18] **Engquist B. and Nédélec J.-C.** Effective boundary conditions for acoustic and electro-magnetic scattering in thin layers. Technical report, Rapport de recherche CMAP, Ecole polytechnique, Palaiseau, France, 1993.
- [19] **Joly P., Kern M.** Étude mathématique du couplage air sous-sol dans la diffusion d'un champ électrique en milieu conducteur tridimensionnel. Rapport de recherche INRIA France, août 1986.
- [20] **Labarthe J. J.** Cours d'électromagnétisme. Université Paris-Sud Orsay. Année 2003-2004.
- [21] **Michael E. T.** Pseudodifferential Operators. Princeton, New Jersey U.S.A 1981.

- [22] **Micolau G.** Étude théorique et numérique de la méthode de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel en diffraction électromagnétique. PhD thesis, U.D.E.S. Aix-Marseille, juin 2001.
- [23] **Nédélec J.-C.** Acoustic and Electromagnetic Equations. Springer-Verling, Berlin, Heidelberg, New-York, Volume 144, February 2000.
- [24] **Renardy M., Rogers R. C.** An Introduction to Differential Equations. Springer-Verling, Berlin, Heidelberg, New-York,1993.
- [25] **Salathé R. P.** OPTIQUE. Cours destiné aux étudiants MICROTECHNICIENS. École Polytechnique, Fédérale de LAUSANNE. Mars 2004
- [26] **Souilah M.** Analyse numérique d'un problème de diffraction en acoustique. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, avril 1988.
- [27] **Telmeçani M.** Modélisation de l'effet de couches minces sur la diffraction des ondes harmoniques. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, mai 1997.
- [28] **Vernhet L.** Approximation par éléments finis de frontière de problèmes de diffraction d'ondes avec condition d'impédance. PhD thesis, Université de Pau, décembre 1997.
- [29] **Wilcox C. H.** Scattering theory for the D'Alembert equation in exterior domains. Lectures Notes in Math, volume 442, Springer-Verling, Berlin, Heidelberg, New-York, 1975.

Index

- Alternative de Fredholm, 32
- Analyse, 2, 24, 25
 - asymptotique, 24, 59, 76, 77
 - par ondes planes, 44, 54–58, 63
 - par transformée de Fourier, 52
- Analytique, 84
 - Fonctions –s, 29
 - Prolongement –, 29, 30
 - Solution –, 46, 89, 90
- Approche, 2, 21, 24, 25, 41, 44, 61, 64, 66, 72
 - de Bendali et Lemrabet, 24
 - par condition d'impédance, 83
 - de construction, 59
 - par décomposition de domaine, 25
 - de Engquist et Nédélec, 24
 - heuristique, 75
 - de Senior et Volakis, 24
- Approximation, 2, 12, 24, 25, 34–37, 40, 41, 44, 54–58, 61, 63, 64, 68, 72, 76, 77, 81, 82, 85, 92
 - de l'opérateur d'admittance, 57, 77, 82
 - de l'opérateur d'impédance, 2, 23, 25, 33–35, 37–40, 42, 43, 54, 56, 59, 62, 63, 72, 75–77, 92
 - quasi-locale, 73
- Axe, 9, 10, 12, 87
 - d'invariance, 12
 - d'invariance par translation, 12
 - de symétrie, 10
 - s principaux, 9, 10
- Bord, 84
 - extérieur, 24
- Champ
 - électrique, 3–5, 8–12, 21, 22, 46
 - électromagnétique, 1, 4, 5, 7, 16, 18
 - diffracté, 24
 - incident, 44
 - magnétique, 4–6, 8, 9, 19, 21, 22, 24, 46
 - total, 20
- Changement
 - d'échelle, 59
 - de fonction inconnue, 30
 - de signe, 46
 - de variable, 59
- Classe \mathcal{C}^∞ , 28, 30
- Coefficient, 12, 24, 29, 32, 48, 49, 67, 69, 70, 72
 - de réflexion, 24, 25, 46–48, 50
 - de transmission, 46
 - s de Fourier, 67
 - s irréguliers, 30
 - s de réflexion, 47, 48
 - s de transmission, 47, 48
- Coercif, 23, 31, 32
- Colinéaire, 12, 76
- Compact, 30–32
 - Opérateur –, 23, 31
- Composante
 - normale, 8
 - tangentielle, 8, 21, 22
- Condition, 1, 6, 9, 11, 18, 20–24, 35–38, 40–44, 55–58, 61, 65, 72, 74–77, 85
 - par analyse ondes planes, 58
 - de Bartoli & Bendali, 57
 - de Bendali-Lemrabet, 58
 - de conducteur parfait, 19, 20, 23, 25, 35, 36, 48
 - de conservation du flux, 11
 - constitutive, 10
 - d'Engquist-Nédélec, 42, 55, 58, 75–77
 - équivalente, 61
 - homogène, 30
 - d'impédance, 1, 21–24, 34, 36–44, 54–58, 61–63, 83, 85–87, 89, 91, 92
 - sur l'interface, 9
 - à la limite, 21, 22, 42, 57, 66
 - aux limites, 1, 2, 19–22, 24, 63, 81, 82, 84
 - de Neumann, 72

- d'ordre ..., 24, 36–38, 58, 63, 75, 83
- de radiation, 2, 22, 30, 84
- de radiation à l'infini, 19, 20, 25, 35
- de radiation de Sommerfeld, 25, 29
- s classiques, 24, 57, 74
- s différentielles, 24
- s à la frontière, 19
- s générales, 57
- s d'impédance, 2, 24, 25, 44, 46, 50, 58, 61, 85, 92
- s d'interface et aux limites, 18
- s à la limite, 25
- s aux limites, 8, 59, 67, 73
- s limites, 25
- s aux limites équivalentes, 61
- s aux limites approchées, 24
- s limites approchées, 2
- s d'ordres supérieurs, 36
- s de raccord, 2, 35–37, 39, 42, 44, 49
- s de radiation, 43, 75, 76
- s supplémentaires, 6
- s de transmission, 7–9, 18, 20, 30, 48
- Conducteur
 - électrique parfait, 8
 - magnétique parfait, 8
 - parfait, 7, 8, 19, 23, 25, 35, 36, 44, 46, 48
- Constant, 11, 44
 - Signe –, 28
- Constante, 7, 17, 29, 32, 66, 67, 73
 - positive, 85
 - s caractéristiques du vide, 87
- Construction, 2, 23, 25, 62, 92
 - des approximations, 33, 34, 59
 - des conditions, 74
 - du développement asymptotique, 59, 77, 92
 - heuristique, 75
 - de l'opérateur d'impédance, 23, 35, 53
- Processus de –, 2, 92
- Continu, 23
 - milieux –s, 5, 7
- Convergence, 80, 86
- Couche, 1, 36, 75, 76, 87, 92
 - mince, 24, 33, 34, 37, 43, 77, 92
 - s minces, 1, 2, 16, 21, 23, 25, 34–36, 42, 44, 47, 48, 54, 57, 60, 67, 68, 73, 79, 87, 92
 - s minces diélectriques, 44
 - s minces superposées, 34
- Effet des –s, 36
 - Effet des –s minces, 22
 - Épaisseur des –s, 1, 21
 - Épaisseur des –s minces, 2
 - Extérieur de la –, 24
 - Fines –s, 24, 86
 - Fines –s de diélectrique, 1, 2, 15, 16
 - Problème de –s minces, 34
- Courbe, 78, 79
 - fermée, 30
- Courbure, 25, 72, 76, 78
 - Effet de –, 64
 - Effets de –, 2, 58, 64
 - Termes de –, 25, 34, 56–58
 - Variation de –, 76, 77
- Couronne, 28, 66
- Curviligne
 - Abscisse –, 37, 76, 78
 - Coordonnées –s, 24
- Décomposition
 - de domaine, 21, 25
 - en série de Fourier, 64
 - de Stone, 65
- Dénominateur, 69, 72
- Dérivation, 5, 37
 - des conditions d'impédance, 25, 34, 61
 - Opérateur de –, 72
- Développement, 25, 35, 36, 54–56, 58, 69, 70, 74, 80, 86
 - asymptotique, 2, 59, 60, 62, 63, 68, 74, 77, 78, 81, 82, 86, 92
 - limité, 25, 68, 69, 74
 - en série de Fourier, 73
 - de Taylor, 24, 25, 35–44, 54, 56, 58, 68, 72, 76, 79
- Densité
 - de charge électrique, 4
 - de charge magnétique, 4
 - de courant électrique, 4
 - de courant magnétique, 4
 - de courant superficielle, 8
- Dilatation, 79
- Dipôle, 13, 14
- Domaine, 1, 8, 9, 16, 19, 21, 25, 35, 78, 79, 87, 89–91
 - borné, 2, 22, 30, 85
 - convexe, 76
 - délicat à mailler, 91
 - extérieur, 2, 8, 16, 21, 23, 89
 - fixe, 78–80

- global, 86
 - non borné, 2
 - de propagation, 12, 17, 39
 - simplifié et réduit, 91
- Elliptiques
- Problèmes –, 28, 31, 84
 - Systèmes –, 25, 32
- Épaisseur, 1, 2, 15, 16, 24, 34, 36, 52, 60, 61, 68
- des couches, 21, 36, 87
 - du revêtement, 86
- Équation, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 18, 20, 21, 27, 37, 39, 45, 50, 55, 56, 59–62, 65, 67, 69, 70, 79, 80
- de Bessel, 69
 - de conservation, 4
 - de continuité, 4, 6
 - aux dérivées partielles, 21, 66
 - de Gauss-électrique, 5
 - d’Helmholtz, 1, 2, 11, 19, 22, 26, 35, 67, 73, 84
 - de Maxwell-Ampère, 4, 5, 18, 20
 - de Maxwell-Faraday, 4, 5, 18, 19
 - des ondes, 5, 13
 - principale, 24
 - s différentielles, 66, 67
 - s de Maxwell, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 18, 45, 92
- Erreur, 86, 89, 90
- relative, 89, 90
- Estimation d’ –, 86
- Taux d’ –, 91
- Espace, 10, 20, 84
- de Fréchet, 20, 84
 - de Sobolev, 84
- Existence, 2, 60, 85
- d’une constante, 32
 - d’une solution, 30, 32
- Expression, 47, 50, 51, 53, 60, 62, 63, 67, 68, 71–74, 78, 80
- exacte, 25, 46, 68, 73
 - explicite, 70
 - du laplacien, 78, 79
 - locale, 4
 - du rotationnel, 18
 - du symbole, 72
 - s des ondes, 47
- Fonction
- de Bessel, 67, 72
 - caractéristique, 28
 - distance, 16
 - d’Euler, 29
 - de Green, 14
 - de Hankel, 14
 - de Neumann, 67
 - suffisamment régulière, 22
 - de troncature, 27, 30
 - s analytiques, 29
- Forme, 9, 12, 13, 19, 60, 79
- $a(., .)$, 32
 - $b(., .)$, 32
 - matricielle, 67
 - variationnelle, 26
- Sous la –, 2, 6, 20–22, 31, 38, 39, 45, 47, 51, 54, 56, 62, 66, 67, 69, 70, 81, 82, 86
- Formulation, 21
- équivalente, 85
 - variationnelle, 24, 26
- Formule, 11, 35, 51, 53, 54, 67, 79, 82
- de Green, 27, 31
 - de Lommel, 70
 - s de Frénet, 78
 - Pseudo – de Green, 27
- Frontière, 8, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 65, 75, 76, 84, 87, 89
- artificielle, 85, 87
 - circulaire, 64, 66
 - métallique, 16
- Géométrie, 25, 34
- circulaire, 25, 58, 64, 76
 - droite, 64, 72
 - plane, 2, 25, 33, 34, 46
 - du problème, 45, 59
 - quelconque, 77
 - s arbitraires, 2, 75, 92
 - s canoniques, 25
 - s cylindriques, 24
 - s particulières, 1, 92
- Hyperbolique, 5
- Impédance du vide, 17
- Inégalités, 21
- Indices, 48
- de réfraction, 9
- Induction
- électrique, 6, 8, 9
 - magnétique, 4, 8
- Injection, 32

-
- Lemme, 26, 27, 31, 32, 79
 - de Rellich, 25, 26
 - Ligne
 - de courant, 14
 - de courant électrique, 14
 - de courant magnétique, 14
 - Linéaire, 23
 - Combinaison –, 13, 67
 - Milieu –, 6, 7, 9, 44
 - Local, 4
 - Coordonnées –es, 78
 - Non –, 1, 22
 - Opérateur –, 53
 - Quasi –, 34, 38, 53, 57, 71, 73
 - Loi, 48
 - de conservation, 4
 - de Snell-Descartes, 48, 50
 - s de comportement, 6, 7
 - Maillage, 1, 21
 - Matériau, 6
 - x anisotropes, 7
 - x bianisotropes, 7
 - x diélectriques, 87
 - x diélectriques homogènes, 24
 - x diélectriques isotropes, 86
 - x isotropes, 7
 - Matrice, 10, 19, 29, 68
 - carrée, 68
 - diagonale, 10, 16
 - du tenseur diélectrique, 9
 - Milieu
 - diélectrique, 9, 16, 18
 - linéaire, 6, 7, 44
 - parfait, 9, 11
 - de propagation, 3, 5, 16, 21, 47
 - x continus, 5, 7
 - Mode
 - de Fourier-Hankel, 44
 - TE , 19
 - s de Fourier, 64
 - Normale, 76
 - Composante –, 8
 - unitaire, 16, 31
 - variable –, 24
 - Norme, 32, 61, 89, 90
 - usuelle, 32
 - Numérateur, 72
 - Numérique, 85
 - Expériences –s, 86
 - Implémentation –, 61
 - Résolution –, 1, 21, 92
 - Résultats –s, 2, 83, 86
 - Tests –s, 86, 92
 - Obstacle, 1, 16, 19, 24, 34, 65, 84, 86, 92
 - métallique, 1, 16
 - parfaitement conducteur, 15
 - s de géométries arbitraires, 75
 - Onde, 13, 16, 45–48, 61
 - Classification des –s, 45
 - Équation des –s, 5, 13
 - Expressions des –s, 47
 - Longueur d’–, 17, 87
 - Nombre d’–, 17, 68, 84
 - diffractée, 16, 19, 30
 - électromagnétique, 1, 92
 - électromagnétique plane, 45
 - incidente, 1, 13, 45, 47, 58, 87
 - incidente harmonique, 16
 - plane, 13, 44, 47
 - plane harmonique, 45
 - réfléchie, 46, 47
 - totale, 18, 47, 48
 - transmise, 47, 48
 - s transverses électriques, 12
 - s transverses magnétiques, 13
 - s acoustiques ou électromagnétiques, 1
 - s électromagnétiques, 17, 44
 - Rayonnement –s électromagnétiques, 13
 - s incidentes, 1
 - s planes, 13, 25, 44, 45, 47, 54–58, 63
 - s transverses électriques, 45
 - s transverses magnétiques, 45
 - Vecteur d’–, 12
 - Opérateur, 1, 21–23, 31, 32, 34, 37–39, 46, 51, 56, 63, 64, 66, 68, 71, 72, 75–77, 79, 82, 92
 - d’admittance, 22, 57, 63, 73, 77, 82
 - approché, 72
 - coercif, 31
 - compact, 23, 31
 - de dérivation, 72
 - différentiel, 24, 38, 41, 53, 58
 - différentiel d’ordre 4, 72, 77
 - Dirichlet-to-Neumann, 22
 - **div**, 5
 - divergence, 11

- d'impédance, 1, 2, 21–23, 25, 33–35, 38, 40–44, 46, 51–55, 59, 62, 64, 66, 68, 72, 75–77, 81, 82, 92
- d'impédance approché, 41, 55, 76
- d'impédance exact, 35, 50, 58, 64, 66, 73
- local, 53
- non symétrique, 76
- d'ordre 4, 56
- d'ordre élevé, 56
- pseudo-différentiel, 22, 41, 50, 51, 71
- quasi-local, 34, 38, 57, 71
- rotationnel, 11
- de Steklov-Poincaré, 21, 23, 25
- symétrique, 77
- uniformément borné, 79
- Ouvert extérieur, 84
- Paramétrisation, 78
- Partie, 46
 - s imaginaires, 21, 29
 - s réelles, 89, 90
- Perméabilité, 16, 45
 - magnétique, 87
 - magnétique du milieu, 6
 - relative, 16
- Permittivité, 16, 34, 45
 - électrique du milieu, 6
 - relative, 16
 - s diélectriques, 87
- Polarisation, 1, 13, 22, 35, 45, 57, 63, 66, 82, 84
 - Notion de –, 12
 - TE , 12, 14, 18, 22, 34, 35, 43, 46, 48–54, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 74, 76, 80–83
 - TM , 13, 14, 21, 22, 35, 41, 46, 48–53, 57, 58, 60, 63, 65, 73, 74, 77, 80, 82, 84
 - transverse électrique, 12
 - transverse magnétique, 12
 - Vecteur de –, 6
- Polynôme, 44, 52, 71
- Principe, 25
 - de la dérivation, 61
 - du prolongement analytique, 29
- Problème, 1, 2, 5, 6, 11, 17, 21, 22, 25–27, 29–32, 34, 35, 45, 52, 53, 58–61, 63, 65–67, 80–82, 85, 89, 91
 - Existence de ce –, 85
 - Géométrie du –, 59
 - Position du –, 15
 - Présentation mathématique du –, 18
 - Présentation du –, 15
 - avec condition d'impédance, 86
 - de couches minces, 34
 - de diffraction, 1, 21, 65, 92
 - de dimension deux, 66
 - de Dirichlet, 23
 - sur un domaine délicat à mailler, 91
 - d'évolution, 6
 - exact, 46
 - extérieur, 22, 23, 38, 40, 84
 - de furtivité radar, 16
 - initial, 21, 24
 - intérieur, 23
 - aux limites, 22, 35, 66, 85
 - aux limites extérieur, 83
 - de Maxwell, 10, 11
 - modèle, 2
 - posé dans un domaine fixe, 80
 - posé en domaine borné, 30
 - de propagation, 12
 - relativement à l'épaisseur, 24
 - scalaire, 12, 19
 - similaire sur un domaine simplifié et réduit, 91
 - de transmission, 2, 21, 22, 86, 89
 - variationnel, 21, 24
 - s auxiliaires, 60, 63
 - s de compatibilité, 1
 - s couplés, 81, 82
 - s de diffraction, 75
 - s élémentaires, 80
 - s elliptiques, 28, 31, 84
 - Solution du –, 60, 85, 86
 - Suite de –s en dimension un, 66
 - Suite de –s, 80
- Prolongement analytique, 29, 30
- Propagation, 12
 - Direction de –, 45
 - Domaine de –, 12, 17, 21, 39
 - Milieu de –, 3, 5, 16, 21, 47
 - Plan de –, 12
 - Problème de –, 12
 - dans un diélectrique anisotrope, 9
 - de l'énergie, 19
 - des ondes, 44
- Résolution, 21, 61, 91
 - numérique, 1, 21, 92
 - du problème de transmission, 86
- Relation, 6, 7, 9, 22, 23, 32, 42–45, 48–50, 60
 - de continuité, 5, 8

- couplée à Helmholtz, 23
- d'impédance, 51
- de Maxwell-Ampère, 19
- de récurrence, 86
- de Snell-Descartes, 48, 49
- Repère
 - de Frénet, 78
 - (O, x, y, z) , 12
- Solution, 1, 12, 13, 21, 22, 24–27, 29–32, 34, 35, 39, 48, 52, 53, 60, 61, 69, 70, 84–86, 89, 92
 - Existence de la –, 30
 - Existence et unicité de –, 2
 - Régularité de la –, 32
 - analytique, 46
 - approchée, 61, 86
 - calculée, 89, 90
 - de l'équation de Helmholtz, 26
 - exacte, 61, 86
 - générique, 13
 - du problème de Dirichlet, 23
 - du problème aux limites, 22
 - propagative, 23
 - unique, 81
 - s générales, 67
 - s particulières, 45
- Stabilité, 61, 83, 85
 - Étude de la –, 83, 85
- Substitutions, 37
 - formelles, 57, 75, 82
- Symbole, 25, 44, 46, 51–54, 57, 58, 64, 68, 71–73
 - approché, 54
 - complet, 50–52, 54, 56, 57, 71
 - exact, 54
- Système, 5, 6, 11, 12, 16, 21, 25, 38, 49, 53, 65, 67, 68, 78
 - Sous –s d'équations, 12
 - d'équations, 18
 - des axes principaux, 10
 - de coordonnées, 10
 - cubique, 10
 - en (E_x, E_y, H_z) , 12
 - en (H_x, H_y, E_z) , 13
 - d'équations, 60, 66
 - d'exploitation, 86
 - de Maxwell, 1
 - de Maxwell harmonique, 33
 - des ondes TM , 13
 - U.S.I., 87
 - vectoriel, 12, 19
 - s cristallins, 10
 - s elliptiques, 25, 32
 - s triclinique, monoclinique et orthorhombique, 10
 - s trigonal, tétragonal et hexagonal, 10
- Tenseur, 7, 9, 10
 - diélectrique, 9, 10
- Terme, 34, 37, 39, 43, 44, 54, 57, 60, 62, 63, 68, 69, 71, 72, 74, 75, 79–82
 - Calcul des premiers –s, 62, 81
 - supplémentaire, 36
 - s de courbure, 25, 34, 56–58, 60
 - s homogènes, 72
- Théorème, 23, 28, 29, 31, 85, 86
 - de Cauchy-Kawaleskaya, 25
 - de décomposition, 65
 - de la divergence, 8
 - de Gauss, 4
 - de la moyenne, 28
 - du prolongement analytique, 30
- Transformée de Fourier, 52
- Transformation
 - en domaine fixe, 79
 - de Fourier, 13, 53
 - orthogonale, 9
- Transposition
 - formelle, 72
 - s naturelles, 58
- Unicité, 2, 25, 27
 - Étude de l' –, 25, 85
- Valeur, 7, 23, 31, 70, 86
 - s propres, 9, 10
- Vecteur, 6, 12
 - Direction du – (E_0, H_0) , 45
 - Rotationnel –, 18, 19
 - de magnétisation, 6
 - d'onde, 12
 - de polarisation, 6
 - position, 13
 - tangent τ , 76
 - tangent unitaire, 76
 - unitaire, 12, 13, 78
 - unitaire normal, 8